Analisi Matematica 2 – parte A

Roberto Monti e Davide Vittone

Appunti del Corso - Versione del 25 settembre 2023

Indice

CAPITOLO 1

Spazi metrici e spazi normati

1. Definizioni ed esempi

Enunciamo la definizione di *spazio metrico*.

DEFINIZIONE 1.1.1. Uno spazio metrico è una coppia (X,d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0,\infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x,y,z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simmetria);
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (disuguaglianza triangolare).

Primi esempi di spazi metrici sono costituiti da:

1) $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x,y) = |x-y|$, $x,y \in \mathbb{R}$, è uno spazio metrico.
2) $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x,y) = |x-y|^{1/2}$, $x,y \in \mathbb{R}$, è uno spazio metrico.
3) $\mathbb{C}$ con la funzione $d(z,w) = |z-w|$, $z,w \in \mathbb{C}$, è uno spazio metrico.
4) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la funzione distanza
$$d(x,y) = |x-y| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{1/2}, \quad x,y \in \mathbb{R}^n,$$
è uno spazio metrico (si veda la successiva Sezione 2).

Ecco altri esempi di spazi metrici.

ESEMPIO 1.1.2 (Spazio metrico discreto). Sia X un insieme e definiamo la funzione $d : X \times X \to [0,\infty)$
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$
È facile verificare che d verifica gli assiomi della funzione distanza.

ESEMPIO 1.1.3 (Distanza centralista). Su $\mathbb{R}^2$ definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ nel seguente modo
$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{se } x,y \in \mathbb{R}^2 \text{ sono collineari con } 0, \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Lasciamo come esercizio il compito di provare che $(\mathbb{R}^2, d)$ è uno spazio metrico.

ESEMPIO 1.1.4. I numeri naturali $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ con la distanza
$$d(m,n) = \Big|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\Big|, \quad m,n \in \mathbb{N},$$
sono uno spazio metrico.

Sia X uno spazio metrico con distanza $d : X \times X \to [0, \infty)$. Fissato un punto $x \in X$ ed un raggio $r \geq 0$, l'insieme

$$B_r(x) = B(x, r) = B_X(x, r) = \big\{ y \in X : d(x, y) < r \big\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x e raggio r.

Osservazione 1.1.5 (Spazio metrico restrizione). Dato un sottoinsieme $Y \subset X$, possiamo restringere la funzione distanza d ad Y: $d : Y \times Y \to [0, \infty)$. Allora anche (Y, d) è uno spazio metrico. La palle nella distanza d di Y sono fatte nel seguente modo:

$$B_Y(y, r) = B_X(y, r) \cap Y,$$

per ogni $y \in Y$ ed $r > 0$.

2. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico

Indichiamo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio Euclideo n-dimensionale, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, dotato della usuale struttura di spazio vettoriale.

Definizione 1.2.1 (Prodotto scalare). Definiamo l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

Tale operazione si dice *prodotto scalare (standard)* di $\mathbb{R}^n$.

Il prodotto scalare è bilineare (ovvero lineare in entrambe le componenti), simmetrico e non degenere. Precisamente, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
3) $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo (x, y) oppure con il simbolo $x \cdot y$.

Definizione 1.2.2 (Norma Euclidea). La norma Euclidea su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è la funzione $| \cdot | : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ così definita

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2 \Big)^{1/2}, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente, $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

La norma Euclidea verifica le proprietà di una norma (si veda la successiva Sezione 3). Precisamente, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si verifica:

1) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ (omogeneità);
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (subadittività).

La verifica delle proprietà 1) e 2) è elementare. La subadittività segue osservando che

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

dove nella disuguaglianza si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, che ora dimostriamo.

Proposizione 1.2.3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y\rangle| \le |x||y|.$$

Dim. Il polinomio reale della variabile $t \in \mathbb{R}$

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2|y|^2$$

non è mai negativo, $P(t) \ge 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il suo discriminante verifica $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \le 0$. La tesi segue estraendo le radici. Non abbiamo usato la forma specifica del prodotto scalare Euclideo ma solo le proprietà 1)-2)-3). □

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3).

La norma Euclidea induce su $\mathbb{R}^n$ la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ si dice spazio metrico Euclideo. Le proprietà 1), 2), e 3) si verificano in modo elementare. In particolare, si ha:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \le |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

L'insieme

$$B_r(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\big\}$$

è la palla Euclidea di raggio $r > 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Spazi metrici indotti da spazi normati

Spazi metrici possono essere generati a partire dagli spazi normati.

Definizione 1.3.1 (Spazio normato). Uno spazio normato (reale) è una coppia $(V, \|\cdot\|)$ dove V è uno spazio vettoriale reale e $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *norma*, che per ogni $x, y \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ verifica le seguenti proprietà:

1) $\|x\| \ge 0$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (omogeneità);
3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (subadittività o disuguaglianza triangolare).

Chiaramente, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^n$ sono spazi normati con le norme naturali. Una norma $\|\cdot\|$ su uno spazio vettoriale V induce canonicamente una distanza d su V definita nel seguente modo:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V.$$

La disuguaglianza triangolare per la distanza d deriva dalla subadittività della norma $\|\cdot\|$. Infatti, per ogni $x, y, z \in V$ si ha:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \le \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

ESEMPIO 1.3.2 (Lo spazio $\ell^2(\mathbb{R})$). Sia $\ell^2(\mathbb{R})$ l'insieme delle successioni reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di quadrato sommabile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Indichiamo con $\mathrm{x} \in \ell^2(\mathbb{R})$ un generico elemento di $\ell^2(\mathbb{R})$. La funzione $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{R})}$: $\ell^2(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ così definita

$$\|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\Big)^{1/2}$$

è una norma. La proprietà di subadittività si prova come in $\mathbb{R}^n$. Definiamo su $\ell^2(\mathbb{R})$ il prodotto scalare

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_{\ell^2(\mathbb{R})} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad \mathrm{x} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \mathrm{y} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

La disuguaglianza $2|a_n b_n| \le a_n^2 + b_n^2$ prova che la serie converge assolutamente. In particolare, avremo $\|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_{\ell^2(\mathbb{R})}^{1/2}$. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_{\ell^2(\mathbb{R})}| \le \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})}\|\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})},$$

si può dimostrare in modo analogo a quanto fatto in $\mathbb{R}^n$; da qui segue che $\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \le \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} + \|\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})}$.

In conclusione, $\ell^2(\mathbb{R})$ con la funzione distanza

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2\Big)^{1/2}$$

è uno spazio metrico.

4. Successioni in uno spazio metrico

Una successione in uno spazio metrico (X, d) è una funzione $x : \mathbb{N} \to X$. Si usa la notazione $x_n = x(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la successione si indica con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DEFINIZIONE 1.4.1. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un punto $x \in X$ nello spazio metrico (X, d) se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \ge \bar{n}$ si abbia $d(x_n, x) \le \varepsilon$. In questo caso si scrive

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{in } (X, d),$$

e si dice che la successione è *convergente* ad x ovvero che x è il limite della successione.

Se il limite di una successione esiste allora è unico. Se infatti $x, y \in X$ sono entrambi limiti di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora risulta

$$0 \le d(x, y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0, \quad n \to \infty,$$

e quindi $d(x, y) = 0$ ovvero $x = y$.

Esempio 1.4.2 (Successioni in $\mathbb{R}^m$). Sia $X = \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, con la distanza Euclidea e consideriamo una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^m$. Ogni punto $x_n \in \mathbb{R}^m$ ha m coordinate, $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$ con $x_n^1, \dots, x_n^m \in \mathbb{R}$. Sia infine $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ un punto fissato. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathbb{R}^m$;

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^i = x^i$ in $\mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

5. Esercizi

Esercizio 1.5.1. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che $|\langle x, y\rangle| = |x||y|$. Provare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $y = \lambda x$. Questo è il caso dell'uguaglianza nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Esercizio 1.5.2. Sia $R_\vartheta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione di un angolo $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Verificare che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\langle R_\vartheta(x), R_\vartheta(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Ovvero: il prodotto scalare e quindi la distanza Euclidea sono invarianti per trasformazioni ortogonali.

Esercizio 1.5.3. Siano $a_1, \dots, a_n > 0$ numeri reali positivi. Verificare che

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\Big) \geq n^2.$$

Esercizio 1.5.4. Sia (X, d) uno spazio metrico e definiamo la funzione $\delta : X \times X \to [0, \infty)$

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Verificare che (X, δ) è uno spazio metrico.

Esercizio 1.5.5. Sia $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \text{ e } 0 \text{ sono collineari,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che d è una metrica su $\mathbb{R}^2$ e descrivere (graficamente) le palle in questa metrica.

Esercizio 1.5.6. Sia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $n \geq 1$, la funzione definita in ciascuno dei seguenti tre casi per $x, y \in \mathbb{R}^n$: A) $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$; B) $d(x, y) = |x - y|^2$; C) $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$. Dire in ciascuno dei tre casi se d è una distanza su $\mathbb{R}^n$ oppure no. Provare ogni affermazione.

Esercizio 1.5.7. Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.

Esercizio 1.5.8. Sia $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le successioni reali limitate:

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ successione in } \mathbb{R} \text{ limitata}\big\}.$$

Indichiamo con $\mathrm{x} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un generico elemento di $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

1) Verificare che $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione scalare per le successioni.
2) Verificare che la funzione $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ così definita
$$\|\mathrm{x}\|_\infty = \sup\big\{|a_n| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$$
definisce una norma.
3) Verificare che la funzione $d_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \times \ell^\infty(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ così definita
$$d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_\infty$$
è una distanza su $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

CAPITOLO 2

Topologia di uno spazio metrico e funzioni continue

1. Topologia di uno spazio metrico

In questa sezione definiamo la topologia $\tau(X)$ di uno spazio metrico (X, d). Gli insiemi di $\tau(X) \subset \mathscr{P}(X)$ sono gli aperti di X.

Definizione 2.1.1 (Insiemi aperti. Interno). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme.

i) Un punto $x \in X$ si dice *punto interno* di A se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$. Quando x è interno ad A si dice che A è un *intorno* di x.
L'*interno di A* è l'insieme dei punti interni di A:
$$\mathrm{int}(A) = \mathring{A} = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset A\big\}.$$
Si ha sempre $\mathrm{int}(A) \subset A$.
ii) Un insieme $A \subset X$ si dice *aperto* se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$, ovvero se $A = \mathrm{int}(A)$.

Proposizione 2.1.2. Le palle aperte sono insiemi aperti.

Dim. Consideriamo una palla aperta $B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$, con $x_0 \in X$ ed $r > 0$ e sia $x \in B_r(x_0)$. Possiamo scegliere un numero reale $s > 0$ tale che $s < r - d(x, x_0)$. Per ogni punto $y \in B_s(x)$ segue dalla disuguaglianza triangolare:
$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) \leq s + d(x, x_0) < r.$$
Abbiamo dunque provato che $B_s(x) \subset B_r(x_0)$. Tutti i punti di $B_r(x_0)$ sono punti interni. □

Definizione 2.1.3 (Insieme chiuso. Chiusura). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme.

i) Un punto $x \in X$ si dice *punto di chiusura di A* se per ogni $r > 0$ risulta $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. La chiusura di A è l'insieme dei punti di chiusura di A
$$\overline{A} = \big\{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0\big\}.$$
Si ha sempre $A \subset \overline{A}$.
ii) L'insieme A si dice chiuso se contiene tutti i sui punti di chiusura, ovvero se $A = \overline{A}$.

Proposizione 2.1.4. Un insieme A è aperto se e solo se il suo complementare $C = X \setminus A$ è chiuso.

DIM. Infatti, si hanno le equivalenze:

$$\begin{aligned}
A \text{ è aperto} \quad &\Leftrightarrow \quad A = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset A\big\} \\
&\Leftrightarrow \quad X \setminus A = \big\{x \in X : \text{non esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset A\big\} \\
&\Leftrightarrow \quad X \setminus A = \big\{x \in X : \text{per ogni } r > 0 \text{ si ha } B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \ \big\} \\
&\Leftrightarrow \quad C = \overline{C}.
\end{aligned}$$

□

L'insieme $\emptyset$ è aperto, in quanto tutti i suoi punti (non ce ne sono) sono interni. Quindi X è chiuso. D'altra parte, X è banalmente aperto e quindi $\emptyset$ è chiuso. Gli insiemi $\emptyset$ ed X sono pertanto contemporaneamente aperti e chiusi.

ESERCIZIO 2.1.5 (Caratterizzazione sequenziale della chiusura). Siano $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Provare che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

A) $x \in \overline{A}$;

B) Esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$.

ESERCIZIO 2.1.6. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme. Provare le seguenti affermazioni:

i) L'interno $\mathrm{int}(A)$ è un insieme aperto, ed è il più grande insieme aperto contenuto in A.

ii) La chiusura $\overline{A}$ è un insieme chiuso ed è il più piccolo insieme chiuso che contiene A.

DEFINIZIONE 2.1.7 (Frontiera). La *frontiera di* $A \subset X$ è l'insieme

$$\partial A = \big\{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0\big\}.$$

Equivalentemente, $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

Si può controllare che $\overline{A} = A \cup \partial A = \mathrm{int}(A) \cup \partial A$ e l'ultima unione è disgiunta. Talvolta si definisce anche l'*esterno di* $A \subset X$ come l'insieme

$$\mathrm{ext}(A) = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset X \setminus A\big\} = \mathrm{int}(X \setminus A).$$

In questo modo, per ogni $A \subset X$ si ha l'unione disgiunta

$$X = \mathrm{int}(A) \cup \partial A \cup \mathrm{ext}(A).$$

In questo senso si dice che la famiglia di insiemi $\{\mathrm{int}(A), \partial A, \mathrm{ext}(A)\}$ forma una partizione di X.

ESEMPIO 2.1.8 (Topologia della retta reale). Sia $X = \mathbb{R}$ munito della distanza standard.

1) Gli intervalli $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a, b \leq \infty$ sono aperti. Ad esempio, nel caso $-\infty < a < b < \infty$ si ha

$$(a, b) = B_r(x_0), \quad x_0 = \frac{a+b}{2}, \ r = \frac{b-a}{2}.$$

Inoltre si ha $\partial A = \{a, b\}$ in quanto

$$B_r(a) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(a) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0,$$

e analogamente nel punto b. Di conseguenza, risulta $\overline{A} = A \cup \partial A = [a, b]$.

2) Dal punto precedente segue che l'intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ è chiuso (in quanto è la chiusura di un insieme). Alternativamente, è facile verificare che l'insieme

$$\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

è aperto.

3) Gli intervalli della forma $A = [a,b)$ con $-\infty < a < b < \infty$ non sono nè aperti nè chiusi. Infatti si ha

$$\mathrm{int}(A) = (a,b) \neq A \text{ e } \overline{A} = [a,b] \neq A.$$

La stessa cosa vale per intervalli della forma $(a,b]$.

4) Intervalli illimitati della forma $(-\infty, a)$ con $a \leq \infty$ sono aperti. Intervalli illimitati della forma $(-\infty, a]$ con $a < \infty$ sono invece chiusi.

Esempio 2.1.9. In $\mathbb{R}^2$ con la distanza Euclidea consideriamo il cerchio aperto $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Allora:

i) $A = \mathring{A}$, infatti A è aperto.
ii) La chiusura di A è il cerchio chiuso $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$.
iii) La frontiera di A è la circonferenza-bordo $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$.

Definizione 2.1.10 (Topologia di uno spazio metrico). Sia (X,d) uno spazio metrico. La famiglia di insiemi $\tau(X) \subset \mathscr{P}(X)$

$$\tau(X) = \{A \subset X : A \text{ è aperto in } X\}$$

si dice *topologia* di X.

Teorema 2.1.11. La topologia di uno spazio metrico X verifica le seguenti proprietà:

(A1) $\emptyset, X \in \tau(X)$;
(A2) Se $A_1, \dots, A_n \in \tau(X)$, $n \in \mathbb{N}$, allora $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \tau(X)$;
(A3) Per ogni famiglia di indici $\mathscr{A}$ risulta

$$A_\alpha \in \tau(X) \text{ per ogni } \alpha \in \mathscr{A} \;\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha \in \tau(X).$$

Dim. Abbiamo già discusso la proprietà (A1). Proviamo (A2). Se $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$ allora esistono $r_1, \dots, r_n > 0$ tali che $B_{r_i}(x) \subset A_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Posto $r = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0$, si ha allora

$$B_r(x) \subset A_1 \cap \ldots \cap A_n.$$

Anche la verifica di (A3) è elementare. Se infatti $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha$ allora esiste $\beta \in \mathscr{A}$ tale che $x \in A_\beta$ e quindi esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(x) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha.$$

□

Esempio 2.1.12. La proprietà (A2) non si estende ad intersezioni *numerabili* di aperti. Sia $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la distanza standard. Gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\} = B_r(0)$$

sono aperti per ogni $r > 0$. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ non è invece aperto, infatti i punti $x \in A$ tali che $|x| = 1$ verificano

$$B_r(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0.$$

Ad esempio, il punto $(1 + r/2)x$ appartiene all'intersezione. In effetti $A = \overline{A}$ è un insieme chiuso.

D'altra parte A è un'intersezione numerabile di aperti:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 + \frac{1}{k}\Big\}.$$

In modo duale, la famiglia dei chiusi di uno spazio metrico verifica le proprietà descritte nel seguente teorema:

Teorema 2.1.13. Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora:

(C1) $\emptyset, X$ sono chiusi;
(C2) Se $C_1, \ldots, C_n$, $n \in \mathbb{N}$, sono insiemi chiusi di X allora $C_1 \cup \ldots \cup C_n$ è un insieme chiuso di X;
(C3) Sia $\mathscr{A}$ una famiglia di indici. Se C_α è un insieme chiuso di X per ogni $\alpha \in \mathscr{A}$ allora $\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} C_\alpha$ è chiuso in X.

La prova del teorema si ottiene passando ai complementari nel teorema sugli aperti. In generale, l'unione numerabile di chiusi non è un insieme chiuso.

Le proprietà (A1), (A2) e (A3) possono essere utilizzate per definire in modo assiomatico uno spazio topologico.

Definizione 2.1.14. Uno spazio topologico è una coppia $(X, \tau(X))$ dove X è un insieme e $\tau(X) \subset \mathscr{P}(X)$ è una famiglia di sottoinsiemi (detti aperti) che verifica le proprietà (A1), (A2) e (A3) del Teorema 2.1.11.

Tutti gli spazi metrici sono dunque spazi topologici. Esistono spazi topologici $(X, \tau(X))$ la cui topologia $\tau(X)$ non è indotta da alcuna metrica su X.

2. Limiti di funzione in spazi metrici

Definizione 2.2.1 (Punto di accumulazione). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un punto $x_0 \in X$ si dice *punto di accumulazione* di un insieme $A \subset X$ se per ogni $r > 0$ si ha

$$A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Definizione 2.2.2 (Limite). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di A, e sia $f : A \to Y$ una funzione. Un punto $y_0 \in Y$ si dice *limite* di f per x che tende a x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ si abbia

$$0 < d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0,$$

dove la notazione per le distanze di riferimento è omessa.

Se il limite esiste allora è unico. Per avere l'unicità occorre definire il limite limitatamente ai punti di accumulazione.

Teorema 2.2.3 (Caratterizzazione sequenziale del limite). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di A, $y_0 \in Y$ ed $f : A \to Y$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$;

B) Per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A \setminus \{x_0\}$ vale l'implicazione:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0 \text{ in } Y.$$

Dim. A)⇒B). Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale:

$$0 < d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Dalla convergenza della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a x_0 segue l'esistenza di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia $d_X(x_n, x_0) < \delta$. Quindi per tali $n \geq \bar{n}$ si ottiene $d_Y(f(x_n), y_0) < \varepsilon$.

B)⇒A). Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ ci sia un punto $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ tale che $d_X(x_n, x_0) < 1/n$ ma $d_Y(f(x_n), y_0) \geq \varepsilon$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad x_0 in (X, d_X) ma la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad $f(x_0)$ in (Y, d_Y). Questo contraddice l'affermazione B). □

Supponiamo ora che lo spazio metrico di arrivo sia $Y = \mathbb{R}$ con la distanza standard.

Teorema 2.2.4 (Operazioni con i limiti). Sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione dell'insieme $A \subset X$ e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che esistano (finiti) i limiti

$$L = \lim_{x\to x_0} f(x) \ \in \mathbb{R},$$
$$M = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \in \mathbb{R}.$$

Allora si ha:

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = L + M$;

2) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = LM$.

Inoltre, se $M \neq 0$ allora si ha anche:

3) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Dim. La dimostrazione segue dalle proprietà delle operazioni rispetto ai limiti di successioni in $\mathbb{R}$ e dal Teorema 2.2.3.

□

3. Funzioni continue fra spazi metrici

Il concetto di limite di funzione è strettamente legato alla nozione di funzione continua.

Definizione 2.3.1 (Funzione continua). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $x_0 \in X$. Una funzione $f : X \to Y$ si dice continua nel punto $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Equivalentemente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$.

La funzione si dice *continua su* X se è continua in tutti i punti di X.

Osservazione 2.3.2. Da un confronto delle definizioni, segue immediatamente la seguente affermazione. Sono equivalenti:

A) f è continua in x_0;
B) Esiste il limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dunque, negli spazi metrici la continuità è equivalente alla continuità sequenziale, nel senso del seguente teorema.

Teorema 2.3.3 (Caratterizzazione sequenziale della continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, sia $f : X \to Y$ una funzione e sia $x_0 \in X$. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) f è continua in x_0;
B) f è sequenzialmente continua in x_0. Ovvero, per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X vale l'implicazione:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \text{ in } Y.$$

Dim. La dimostrazione è identica a quella per la caratterizzazione sequenziale del limite. $\square$

Osservazione 2.3.4. Il punto B) del Teorema 2.3.3 può essere riassunto nel seguente modo:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big),$$

il limite "passa dentro l'argomento" di una funzione continua.

Per le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ a valori reali si possono definire in modo naturale le operazioni di somma, moltiplicazione e reciproco. Queste funzioni ereditano la continuità delle funzioni da cui sono composte.

Teorema 2.3.5 (Operazioni sulle funzioni continue). Sia (X, d_X) uno spazio metrico e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni continue in un punto $x_0 \in X$. Allora:

i) La funzione somma $f + g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;
ii) La funzione prodotto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;
iii) Se $f \neq 0$ su X, allora la funzione reciproca $1/f : X \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

Dim. La dimostrazione segue dal Teorema 2.3.3 sulla caratterizzazione sequenziale della continuità e dalle proprietà delle operazioni elementari rispetto alle successioni numeriche. $\square$

Osservazione 2.3.6. Un'altra facile conseguenza del Teorema 2.3.3 è la continuità della funzione composta: se $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ sono spazi metrici, $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ e $g : Y \to Z$ è continua in $f(x_0) \in Y$, allora la funzione composta $g \circ f : X \to Z$ risulta continua in x_0. Si veda anche il Teorema 2.5.2.

Esercizio 2.3.7. Siano (X, d) uno spazio metrico discreto ed $\mathbb{R}$ munito della distanza standard. Provare che se $f : \mathbb{R} \to X$ è una funzione continua allora deve necessariamente essere costante.

Soluzione. Fissiamo un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Siccome f è continua, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B(x_0, \delta)) \subset B_X(f(x_0), \varepsilon) = \{f(x_0)\}$ se $0 < \varepsilon < 1$. In altri termini, si ha $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (Potremmo dire: f è localmente costante).

Vogliamo provare che $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sia $R \in (0, \infty]$ il seguente estremo superiore:

$$R = \sup\big\{\delta > 0 \,:\, f(x) = f(x_0) \text{ per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big\}.$$

Se $R = \infty$ allora la tesi è provata. Supponiamo per assurdo che $0 < R < \infty$ e si consideri la successione

$$x_n = x_0 + R - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Siccome $x_n < x_0 + R$ si ha $f(x_n) = f(x_0)$, almeno definitivamente. D'altra parte, essendo f continua si ha

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = f(x_0 + R).$$

In modo analogo si prova che $f(x_0 - R) = f(x_0)$. Ripetendo l'argomento iniziale di continuità si deduce che esiste $\bar\delta > 0$ tale che $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - R - \bar\delta, x_0 + R + \bar\delta)$. Questo contraddice la definizione di R. Quindi deve essere $R = \infty$.

4. Trasformazioni lineari e continue

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati reali. Per ogni trasformazione (operatore) lineare $T : X \to Y$ definiamo

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Se $\|T\| < \infty$ diremo che T è una trasformazione *limitata* e chiameremo $\|T\|$ la *norma* di T. Indichiamo con

$$\mathscr{L}(X, Y) = \big\{T : X \to Y \,|\, \text{lineare e limitata}\big\},$$

l'insieme delle trasformazioni lineari e limitate da X a Y. Con le naturali operazioni di somma fra applicazioni e di moltiplicazione per uno scalare, $\mathscr{L}(X, Y)$ è uno spazio vettoriale reale. Osserviamo che dalla definizione di $\|T\|$ segue immediatamente la disuguaglianza

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X, \quad x \in X. \tag{2.4.1}$$

Proviamo che $\|\cdot\|$ è una norma:

i) Se $T = 0$ è l'applicazione nulla, allora $\|T\| = 0$. Se viceversa $\|T\| = 0$ allora dalla (2.4.1) segue che $\|Tx\|_Y = 0$ per ogni $x \in X$, e quindi $T = 0$.

ii) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|(\lambda T)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|\lambda(Tx)\|_Y = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y = |\lambda| \|T\|.$$

iii) Infine verifichiamo la subadditività. Se $T, S \in \mathscr{L}(X, Y)$ allora

$$\begin{aligned}\|T + S\| &= \sup_{\|x\|_X \le 1} \|(S+T)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Sx + Tx\|_Y \\ &\le \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Sx\|_Y + \|Tx\|_Y \le \|S\| + \|T\|.\end{aligned}$$

Proposizione 2.4.1. Sia $T : X \to Y$ lineare. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) T è limitata;
B) T è continua in 0;
C) T è continua da X a Y.

Dim. A)⇒C). Se T è limitata, allora per ogni punto $x_0 \in X$ si ha

$$\|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x - x_0)\|_Y \le \|T\| \|x - x_0\|_X,$$

e quindi T è continua in x_0. In effetti, T è Lipschitziana.

C)⇒B) è banale. Proviamo che B)⇒A). Se T è continua in 0 allora per ogni $\varepsilon > 0$ (ad esempio per $\varepsilon = 1$) esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|x\|_X \le \delta \quad \Rightarrow \quad \|Tx\|_Y \le \varepsilon = 1.$$

Dunque, se $\|x\|_X \le 1$ si ha $\delta \|Tx\|_Y = \|T(\delta x)\|_Y \le 1$, da cui $\|Tx\|_Y \le 1/\delta$. Segue che $\|T\| \le 1/\delta < \infty$. □

Osservazione 2.4.2. Alla luce della proposizione precedente, possiamo equivalentemente definire

$$\mathscr{L}(X, Y) = \big\{T : X \to Y \,|\, \text{lineare e continua}\big\}.$$

Osservazione 2.4.3. Se X è di dimensione finita, allora la linearità implica automaticamente la continuità; si osservi che in questo caso l'immagine di un'applicazione lineare è anch'essa di dimensione finita, perciò non è restrittivo supporre che anche Y sia di dimensione finita. La continuità segue allora dalla linearità osservando che una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è della forma

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

per opportuni $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, ovvero è un polinomio omogeneo di grado 1.

Quando X non è di dimensione finita, allora la linearità non implica la limitatezza (Esercizi 4.4.21 e 4.4.23).

Esempio 2.4.4. Sia $X = C([0, 1])$ munito della sup-norma e sia $Y = \mathbb{R}$. La trasformazione $T : X \to \mathbb{R}$

$$T(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

è lineare, in quanto l'integrale di Riemann è lineare. Inoltre, T è ovviamente anche limitato

$$|T(f)| = \Big| \int_0^1 f(t)dt \Big| \le \int_0^1 |f(t)|\, dt \le \|f\|_\infty,$$

e dunque è continuo, $T \in \mathscr{L}(X, \mathbb{R}) = X^*$, dove con X^* si indica il duale di X.

Gli argomenti di questa sezione e della precedente sono il punto di partenza del corso di *Analisi funzionale.*

5. Caratterizzazione topologica della continuità

Concludiamo questo capitolo con un teorema importante: la caratterizzazione topologica della continuità.

Teorema 2.5.1 (Caratterizzazione topologica della continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) f è continua da X in Y;
2) $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto in X per ogni aperto $A \subset Y$;
3) $f^{-1}(C) \subset X$ è chiuso in X per ogni chiuso $C \subset Y$.

Dim. Nella dimostrazione useremo le seguenti relazioni insiemistiche, per una funzione $f : X \to Y$:

i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ per ogni insieme $A \subset X$;
ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ per ogni insieme $B \subset Y$;
iii) $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ per ogni $B \subset Y$.

Proviamo l'implicazione 1)⇒2). Verifichiamo che ogni punto $x_0 \in f^{-1}(A)$ è un punto interno di $f^{-1}(A)$. Siccome A è aperto e $f(x_0) \in A$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A$. Per la continuità di f esiste $\delta > 0$ tale che $d_X(x, x_0) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. In altre parole, si ha $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$. Ma allora si conclude che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(f(B_X(x_0, \delta)) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(A).$$

Abbiamo usato i).

Proviamo l'implicazione 2)⇒1). Controlliamo che f è continua in un generico punto $x_0 \in X$. Fissato $\varepsilon > 0$, l'insieme $B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ è aperto e quindi l'antimmagine $f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ è aperta. Siccome $x_0 \in f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)),$$

da cui, passando alle immagini, segue che

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Abbiamo usato ii). La catena di inclusioni provata mostra che se $d_X(x, x_0) < \delta$ allora $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, che è la continuità di f in x_0.

Verifichiamo ad esempio 2)⇒3). Sia $C \subset Y$ chiuso. Allora $A = Y \setminus C$ è aperto e quindi $f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ è aperto. Ovvero, $f^{-1}(C)$ è chiuso. □

È facile ora provare che la composizione di funzioni continue è ancora una funzione continua.

Teorema 2.5.2. Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) spazi metrici e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni continue. Allora la composizione $g \circ f : X \to Z$ è continua.

Dim. Usiamo la caratterizzazione 2) di continuità del teorema precedente. Se $A \subset Z$ è un aperto allora $g^{-1}(A) \subset Y$ è un aperto, e dunque $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \subset X$ è un aperto. $\square$

6. Esercizi

6.1. Insiemi aperti, chiusi e chiusura in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.6.1. Calcolare interno, chiusura e frontiera dei sottoinsiemi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ di $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.6.2. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme con questa proprietà: per ogni $n \in \mathbb{Z}$ l'insieme $A \cap (n, n+1)$ è chiuso. Provare che A è chiuso.

Esercizio 2.6.3. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme
$$A = \Big\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z} \Big\}.$$
Calcolare la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}$ rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.6.4. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme
$$A = \Big\{ \frac{i}{2^n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \text{ ed } i = 1, 2, \dots, 2^n - 1 \Big\}$$
dove $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Calcolare la chiusura $\bar{A}$.

Esercizio 2.6.5. Calcolare tutti i punti di accumulazione dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$
$$A = \big\{ \sqrt{n} - \sqrt{m} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{N} \big\}.$$

Esercizio 2.6.6. Si consideri l'insieme
$$A = \Big\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m} + \sqrt{n} + 1} \in \mathbb{R} \ : \ 1 \le m \le n, \ m, n \in \mathbb{N} \Big\}.$$
Provare che $[1/2, 1] \subset \bar{A}$.

Esercizio 2.6.7. Si consideri l'insieme
$$A = \Big\{ \frac{i}{3^n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, \, i \in \mathbb{N} \text{ tale che } 3^n \le i \le 4^n \Big\}.$$
Calcolare la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}$ nella distanza standard.

Esercizio 2.6.8. Provare che un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$ è l'unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti.

Esercizio 2.6.9. Costruire un insieme $E \subset \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{Card}(E \cap A) = \mathrm{Card}(E' \cap A) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ per ogni insieme aperto non vuoto $A \subset \mathbb{R}$. Sopra $E' = \mathbb{R} \setminus E$ è il complementare.

Esercizio 2.6.10. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme
$$A = \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + x^2 - y^2 < 1 \big\}.$$

i) Provare che A è limitato;

ii) Dire se A è aperto e/o chiuso;
iii) Calcolare $\mathring{A}$, $\overline{A}$ e ∂A.

Esercizio 2.6.11. In $\mathbb{R}^2$ con la distanza Euclidea consideriamo il cerchio aperto $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Allora:

i) $A = \mathring{A}$, infatti A è aperto.
ii) La chiusura di A è il cerchio chiuso $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$.
iii) La frontiera di A è la circonferenza-bordo $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$.

Esercizio 2.6.12. Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi tale che $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Provare che il seguente insieme è chiuso nella topologia standard di $\mathbb{C}$:

$$A = \{z_n \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Esercizio 2.6.13. Siano $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi chiusi. Provare che esistono due insiemi aperti e disgiunti $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ tali che $C_1 \subset A_1$ e $C_1 \subset A_2$.

6.2. Topologia di uno spazio metrico.

Esercizio 2.6.14. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subset X$ un suo sottoinsieme. Provare le seguenti affermazioni:

i) $\mathring{A}$ è il più grande insieme aperto contenuto in A;
ii) $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene A.

Esercizio 2.6.15. Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Provare che $x \in \overline{A}$ se e solo se esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$.

Esercizio 2.6.16. Siano (X, d) uno spazio metrico ed $A \subset X$. Provare le seguenti affermazioni:

i) Se A è aperto allora $\mathrm{int}(\partial A) = \emptyset$;
ii) $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$ e $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
iii) $\overline{A} = \mathrm{int}(A) \cup \partial A$.

Esercizio 2.6.17. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $A, B \subset X$. Provare che:
i) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
ii) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, con inclusione che può essere stretta.

Esercizio 2.6.18. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato, $x \in A$ ed $r \subset \mathbb{R}^n$ una semiretta uscente da x. Provare che $r \cap \partial A \neq \emptyset$.

Esercizio 2.6.19. Sia (X, d) uno spazio metrico. Per $x_0 \in X$ ed $r > 0$ definiamo

$$\begin{aligned} B_r(x_0) &= \{x \in X : d(x, x_0) < r\}, \\ K_r(x_0) &= \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}, \\ S_r(x_0) &= \{x \in X : d(x, x_0) = r\}. \end{aligned}$$

Provare che $\partial B_r(x_0) \subset S_r(x_0)$ e che $\overline{B_r(x_0)} \subset K_r(x_0)$. Mostrare tramite esempi che le inclusioni possono essere strette.

6.3. Funzioni continue.

ESERCIZIO 2.6.20. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza standard. Provare che una *qualsiasi* funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è continua.

ESERCIZIO 2.6.21. Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^\alpha$ è continua su $\mathbb{R}$. Provare questa affermazione quando $\alpha = 1/2$ usando la definizione $\varepsilon - \delta$.

ESERCIZIO 2.6.22. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza sdtandard e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni: i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow A$ aperto; ii) A aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto; iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow A$ chiuso; ii) A chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso.

ESERCIZIO 2.6.23. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $|f(x) - f(y)| \geq L|x - y|$ per qualche costante $L > 0$. Provare che f è iniettiva e suriettiva su $\mathbb{R}$ e che la sua inversa è una funzione continua.

ESERCIZIO 2.6.24. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}\{-x\}$ (prodotto delle due parti frazionarie) è continua e disegnarne il grafico.

ESERCIZIO 2.6.25. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con la seguente proprietà. Per ogni successione limitata di numeri reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si ha

$$f\big(\limsup_{n\to\infty} a_n\big) = \limsup_{n\to\infty} f(a_n).$$

Provare che f è continua e monotona crescente.

ESERCIZIO 2.6.26. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ oppure } x = 0, \\ \dfrac{1}{q} & \text{se } x = \dfrac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0, \text{ coprimi e } x \neq 0. \end{cases}$$

Calcolare l'insieme dei punti in cui f è continua (nella distanza standard).

ESERCIZIO 2.6.27. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

A) f è continua.

B) Il suo grafico $\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza standard del piano.

ESERCIZIO 2.6.28. Su $\mathbb{R}$ sia fissata la distanza standard. Provare le seguenti affermazioni.

1) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.
2) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$, è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.
3) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2.6.29. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e si considerino i seguenti insiemi in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\} \quad \text{e} \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}.$$

Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

1) Se f è continua allora A è aperto.

2) Se A è aperto allora f è continua.
3) Se f è continua allora C è chiuso.
4) Se C è chiuso allora f è continua.

Esercizio 2.6.30. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Provare che l'equazione $f(x) = x$ ammette almeno una soluzione $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.6.31. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $f : X \to Y$ una funzione continua ed $A \subset X$. Provare che $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Dare condizioni sufficienti su A tali che si abbia $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

CAPITOLO 3

Spazi metrici completi, compatti e connessi

1. Spazi metrici completi e teorema di completamento

In questa sezione proveremo che ogni spazio metrico ammette un'estensione che lo rende completo.

Definizione 3.1.1. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio metrico (X,d) si dice di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ per ogni } n, m \geq \bar{n}.$$

Uno spazio metrico (X,d) si dice completo se ogni successione di Cauchy in X è convergente.

Sappiamo che $\mathbb{R}$ è completo con la metrica standard. Da questo fatto segue che $\mathbb{R}^k$ è completo rispetto alla distanza Euclidea, per ogni $k \geq 1$.

Esempio 3.1.2. Lo spazio k-dimensionale $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, con la distanza standard è completo. Infatti, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^k$, allora indicando con x_n^i la coordinata i-esima di x_n, $i = 1, \ldots, k$, la successione $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori reali è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e dunque converge $x_n^i \to x^i \in \mathbb{R}$. Posto $x = (x^1, \ldots, x^k) \in \mathbb{R}^k$, da questo segue che $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^k$:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{k} (x_n^i - x^i)^2 \Big)^{1/2} = 0.$$

Anche gli spazi metrici discreti (ovvero un insieme con la distanza discreta) sono completi, in quanto le successioni di Cauchy sono definitivamente costanti.

Vogliamo introdurre ora la definizione di *completamento* di uno spazio metrico. Ci occorre la nozione di isometria.

Definizione 3.1.3 (Isometria). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice isometria se $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ per ogni $x, x' \in X$. Due spazi metrici X e Y si dicono isometrici se esiste un'isometria $f : X \to Y$ suriettiva.

Osserviamo che un'isometria $f : X \to Y$ è iniettiva e continua. Inoltre, la funzione inversa $f^{-1} : f(X) \to X$ è ancora un'isometria, con la distanza su $f(X)$ ereditata da Y.

Definizione 3.1.4 (Completamento). Sia (X, d_X) uno spazio metrico. Uno spazio metrico (Y, d_Y) si dice *completamento di* (X, d_X) se:

i) Y è completo.
ii) Esiste un'isometria $f : X \to Y$ tale che $\overline{f(X)} = Y$ (con chiusura in Y), ovvero se $f(X)$ è un insieme denso in Y.

Esempio 3.1.5. Siano $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ muniti della distanza standard. L'identità $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ è un'isometria. Inoltre $\overline{f(\mathbb{Q})} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, in quanto i razionali sono densi nei reali. Dunque $\mathbb{R}$ è un (il) completamento di $\mathbb{Q}$.

Esempio 3.1.6. Consideriamo su $\mathbb{R}$ la funzione distanza $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

La funzione d è una distanza. Infatti: i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$, essendo la funzione arcotangente iniettiva. ii) $d(x, y) = d(y, x)$; iii) Vale la disuguaglianza triangolare. Questo segue dalla subadittività del valore assoluto.

Dunque, $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico. Lasciamo al lettore l'esercizio di verificare che la topologia di questo spazio metrico coincide con la topologia standard di $\mathbb{R}$.

Proviamo che $(\mathbb{R}, d)$ non è uno spazio metrico completo. Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = n$. Questa successione è di Cauchy. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che si ha

$$d(a_n, a_m) = |\arctan(n) - \arctan(m)| \leq |\arctan(n) - \pi/2| + |\pi/2 - \arctan(m)| \leq \varepsilon,$$

per $n, m \geq \bar{n}$. Tuttavia, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad alcune elemento di $\mathbb{R}$. Se infatti esistesse $a \in \mathbb{R}$ tale che $d(a_n, a) \to 0$ per $n \to \infty$ allora si avrebbe l'assurdo seguente:

$$0 = \lim_{n\to\infty} |\arctan(n) - \arctan(a)| = |\pi/2 - \arctan(a)| \neq 0.$$

Discorso analogo vale per la successione $b_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

Costruiamo un completamento di $(\mathbb{R}, d)$. Sia $Y = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ e definiamo

$$d_Y(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|, \quad x, y \in Y,$$

con la convenzione che $\arctan(\infty) = \pi/2$ e $\arctan(-\infty) = -\pi/2$. Chiaramente (Y, d_Y) è uno spazio metrico. Proviamo che è completo. Se $(a_n)_{n\in}$ è una successione di Cauchy in Y, allora la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = \arctan(a_n)$ è una successione di Cauchy in $K = [-\pi/2, \pi/2]$ con la distanza standard, che quindi converge ad un elemento $b \in K$, essendo K chiuso. Siccome $\arctan : Y \to K$ è iniettiva e suriettiva, esiste $a \in Y$ tale che $\arctan(a) = b$. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge allora ad $a \in Y$ nella distanza d_Y.

La funzione $f : \mathbb{R} \to Y$, $f(x) = x$ è un isometria e inoltre $\overline{f(\mathbb{R})} = Y$. Questo conclude la dimostrazione che (Y, d_Y) è un (il) completamento di $(\mathbb{R}, d)$. Si osservi che (Y, d_K) è isometrico a K con la distanza standard.

L'esempio precedente mostra che la completezza non è una proprietà topologica, ma metrica.

Teorema 3.1.7. Ogni spazio metrico ha un completamento. Inoltre, due diversi completamenti sono fra loro isometrici.

Dim. Sia (X, d_X) lo spazio metrico che si vuole completare. Alcuni dettagli della dimostrazione saranno omessi. Lo schema generale è il seguente:

(1) Costruzione dell'insieme Y.
(2) Definizione di d_Y e prova che si tratta di una distanza.
(3) Definizione dell'isometria $f : X \to Y$ e prova che $\overline{f(X)} = Y$ (densità).
(4) Verifica che (Y, d_Y) è uno spazio metrico completo.

(5) Prova dell'unicità del completamento.

(1) Sia $\mathscr{A} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di Cauchy in $X\}$. Introduciamo su $\mathscr{A}$ la relazione

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ se e solo se } \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n) = 0.$$

Tale relazione è un'equivalenza su $\mathscr{A}$ (verifica facile). Definiamo il quoziente

$$Y = \mathscr{A}_{/\sim} = \big\{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}\big\}.$$

Nel seguito indichiamo con $\bar{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ le classi di equivalenza.

(2) Definiamo la funzione $d_Y : Y \times Y \to [0, \infty)$

$$d_Y(\bar{x}, \bar{x}') = \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n).$$

Affermiamo che:

i) Il limite esiste.
ii) La definizione non dipende dal rappresentante della classe di equivalenza (prova omessa).
iii) d_Y verifica le proprietà della distanza (verifica facile).

Proviamo i). In questo punto cruciale si usa la completezza di $\mathbb{R}$. È sufficiente verificare che la successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = d_X(x_n, x'_n)$ sia di Cauchy. Infatti:

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &\le |d_X(x_n, x'_n) - d_X(x_m, x'_n)| + |d_X(x_m, x'_n) - d_X(x_m, x'_m)| \\ &\le d_X(x_n, x_m) + d_X(x'_n, x'_m) \le \varepsilon\end{aligned}$$

per $m, n \ge \bar{n}$. Abbiamo usato la disuguaglianza triangolare varie volte.

(3) Definiamo la funzione $f : X \to Y$ ponendo $f(x) =$ "successione costante identicamente uguale ad x". Proviamo che $\overline{f(X)} = Y$. Siano $\bar{y} \in Y$ ed $\varepsilon > 0$. Siccome la successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy:

$$d_X(y_m, y_n) < \varepsilon \text{ per } m, n \ge \bar{n},$$

e dunque

$$d_Y(f(y_{\bar{n}}), \bar{y}) = \lim_{n\to\infty} d_X(y_{\bar{n}}, y_n) \le \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Questo prova che $B_Y(\bar{y}, 2\varepsilon) \cap f(X) \ne \emptyset$ per ogni $\varepsilon > 0$.

(4) Proviamo ora che (Y, d_Y) è completo. Sia $(\bar{y}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in Y:

$$\lim_{n\to\infty} d_X(y^k_n, y^h_n) = d_Y(\bar{y}^k, \bar{y}^h) < \varepsilon \text{ per } h, k \ge \bar{k},$$

e dunque, definitivamente in n si ha

$$d_X(y^k_n, y^h_n) < \varepsilon \text{ per } h, k \ge \bar{k}.$$

Questa è l'informazione che abbiamo.

Dal punto (3) segue che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $y_k \in X$ tale che $d_Y(f(y_k), \bar{y}^k) < 1/k$, ovvero definitivamente in n si ha

$$d_X(y_k, y^k_n) < 1/k.$$

Formiamo la successione $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e proviamo che è di Cauchy in X:

$$d_X(y_k, y_h) \le d_X(y_k, y_n^k) + d_X(y_n^k, y_n^h) + d_X(y_n^h, y_h) < \frac{1}{k} + \varepsilon + \frac{1}{h} < 3\varepsilon \text{ per } h, k \ge \bar{k} \text{ (opportuno).}$$

Sopra abbiamo fatto una scelta opportuna di n. Dunque $\bar{y} = [(y_k)_{k\in\mathbb{N}}] \in Y$. Ora proviamo che

$$\bar{y}^k \xrightarrow[k\to\infty]{(Y,d_Y)} \bar{y}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora, definitivamente in n si ha

$$d_X(y_n^k, y_n) \le d_X(y_n^k, y_k) + d_X(y_k, y_n) < \frac{1}{k} + \varepsilon < 2\varepsilon \text{ per } k \ge \bar{k}.$$

Questo prova che $d_Y(\bar{y}^k, \bar{y}) \le 2\varepsilon$ per $k \ge \bar{k}$.

(5) Rimane da provare l'unicità. Siano $f : X \to Y$ e $g : X \to Z$ isometrie tali che $\overline{f(X)} = Y$ e $\overline{g(X)} = Z$, con chiusura nelle topologie di Y e Z, rispettivamente. La funzione $h : g(X) \to f(X)$, $h = f \circ g^{-1}$ è un'isometria da $(g(X), d_Z)$ a $(f(X), d_Y)$ in quanto f e g sono isometrie. Estendiamo h ad una funzione da Z in Y nel seguente modo. Dato $z \in Z$, per la densità esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X tale che $g(x_n) \to z$ in Z per $n \to \infty$. La successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in Y, in quanto si ottiene dalla successione di Cauchy $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mediante h, e dunque converge ad un elemento $y \in Y$. Poniamo allora $h(z) = y$. Con un argomento analogo si prova che h è suriettiva su Y. La funzione h così definita è un isometria su tutto Z:

$$d_Y(h(z), h(z')) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} d_Y(f(x_n), f(x'_m)) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} d_Z(g(x_n), g(x'_m)) = d_Z(z, z').$$

Abbiamo usato la continuità della funzione distanza e il fatto che h è un'isometria su $g(X)$. □

2. Spazi di Banach. Esempi

Gli spazi di Banach sono spazi normati che sono completi come spazi metrici.

Definizione 3.2.1 (Spazio di Banach). Uno spazio normato si chiama *spazio di Banach* se è completo come spazio metrico.

Gli spazi normati finito dimensionali sono sempre di Banach. Sia $(V, \|\cdot\|_V)$ uno spazio normato reale di dimensione finita $n \ge 1$. Fissiamo una base $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n$ di V. La trasformazione $\varphi : \mathbb{R}^n \to V$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \mathrm{v}_i, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

è un isomorfismo vettoriale. Definiamo su $\mathbb{R}^n$ la norma

$$\|x\| = \|\varphi(x)\|_V, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Verificare che $\|\cdot\|$ sia una norma su $\mathbb{R}^n$ è un facile esercizio. Gli spazi normati $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ sono isomorfi come spazi vettoriali e isometrici, con isometria φ, come spazi metrici. Nel seguito, non è dunque restrittivo limitare la discussione ad $\mathbb{R}^n$.

PROPOSIZIONE 3.2.2. Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Ovvero, esistono due costanti $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1. \tag{3.2.2}$$

DIM. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che

$$\|x\|_1 = |x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Affermiamo che la funzione $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $f(x) = \|x\|_2$, è continua rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}^n$. Infatti, dalla subadditività della norma segue segue

$$|f(x+h) - f(x)| = \big|\|x+h\|_2 - \|x\|_2\big| \leq \|h\|_2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

D'altra parte, indicando con $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\|h\|_2 = \Big\|\sum_{i=1}^n h_i \mathrm{e}_i\Big\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |h_i|\|\mathrm{e}_i\|_2 \leq M\sum_{i=1}^n |h_i|,$$

con $M = \max\{\|\mathrm{e}_1\|_2, \ldots, \|\mathrm{e}_n\|_2\}$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|h| < \delta$ implica $\|h\|_2 < \varepsilon$, e quindi anche $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$. In effetti abbiamo provato che f è uniformemente continua.

La sfera unitaria $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ è un insieme compatto, e quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione $f : K \to [0,\infty)$ ammette massimo e minimo: esistono $y, z \in K$ tali che

$$0 < C_1 = \|y\|_2 \leq \|x\|_2 \leq \|z\|_2 = C_2 < \infty, \quad x \in K.$$

La disuguaglianza generale (3.2.2) segue per omogeneità. □

Dal fatto che $\mathbb{R}^n$ è completo per la distanza standard segue che tutti gli spazi normati finito-dimensionali sono completi.

2.1. Funzioni continue su un compatto. Siano X un insieme ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. La "sup-norma" verifica le seguenti proprietà elementari:

1) Si ha $\|f\|_\infty < \infty$ se e solo se f è limitata su X.
2) Vale la subadditività:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in X}|f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x)| + |g(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X}|f(x)| + \sup_{x\in X}|g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

3) Sia K uno spazio metrico compatto e sia $f \in C(K)$ una funzione continua. Per il Teorema di Weierstrass, la funzione $x \mapsto |f(x)|$ assume massimo su K. Dunque, nella definizione di sup-norma il sup può essere sostituito con un max:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)| = \max_{x\in K}|f(x)|.$$

È immediato controllare che lo spazio vettoriale $C(K)$ è normato da $\|\cdot\|_\infty$.

TEOREMA 3.2.3. Sia (K, d) uno spazio metrico compatto. Lo spazio $X = C(K)$ con la norma della convergenza uniforme:

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

è uno spazio di Banach.

DIM. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in X. Per ogni $x \in K$ fissato, la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi è convergente. Esiste un numero $f(x) \in \mathbb{R}$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$ e risulta così definita una funzione $f : K \to \mathbb{R}$. Proviamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0. \tag{3.2.3}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in K$ vale

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Facendo tendere $m \to \infty$ e usando la convergenza $f_m(x) \to f(x)$ per $m \to \infty$ si ottiene, per ogni $x \in K$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Questo prova l'affermazione (3.2.3).

Per il Teorema 5.2.3, $f : K \to \mathbb{R}$ è continua, ovvero $f \in X$. □

OSSERVAZIONE 3.2.4. Si noti che, nel Teorema 3.2.3, l'ipotesi di compattezza su K serve unicamente a garantire che ogni $f \in C(K)$ verifichi $\|f\|_\infty < \infty$. Si può in effetti dimostrare che, se E è un qualunque spazio metrico, allora lo spazio

$$C_b(E) := \{f \in C(E) : f \text{ è limitata}\}$$

dotato della norma $\|f\|_\infty$ è uno spazio di Banach.

2.2. Lo spazio $C^1([0,1])$. Lo spazio vettoriale

$$C^1([0,1]) = \big\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ è derivabile con continuità su } [0,1]\big\}.$$

munito della norma

$$\|f\|_{C^1([0,1])} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

è uno spazio di Banach. Si veda l'Esercizio 4.4.2. In effetti, anche

$$\|f\|_* = |f(0)| + \|f'\|_\infty,$$

è una norma su $C^1([0,1])$ che lo rende completo. Tale norma è equivalente alla precedente.

2.3. Funzioni Lipschitziane. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Per ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definiamo

$$\mathrm{Lip}(f) = \inf\Big\{L > 0 : \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L, \quad x, y \in A, \, x \neq y\Big\},$$

e diciamo che f è Lipschitziana su A se $\mathrm{Lip}(f) < \infty$. Posto $L = \mathrm{Lip}(f)$ avremo allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in A.$$

Dunque, le funzioni Lipschitziane sono uniformemente continue. L'insieme $\mathrm{Lip}(A)$ delle funzioni Lipschitziane su A a valori in $\mathbb{R}^m$ è un sottospazio vattoriale di $C(A)$.

2.4. Spazi $\ell^p(\mathbb{R})$. Sia $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le successioni a valori reali $\mathrm{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con $x_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. L'insieme $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ è in modo naturale uno spazio vettoriale, che è di dimensione infinita. Per $1 \leq p < \infty$ definiamo

$$\|\mathrm{x}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \quad \mathrm{x} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Se la serie diverge, il significato è $\|\mathrm{x}\|_p = \infty$. Quando $p = \infty$ definiamo

$$\|\mathrm{x}\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}.$$

Chiaramente, $\|\mathrm{x}\|_\infty < \infty$ se e solo se la successione è limitata.

Possiamo allora definire i seguenti sottoinsiemi di $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$\ell^p(\mathbb{R}) = \big\{\mathrm{x} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) : \|\mathrm{x}\|_p < \infty\big\}.$$

$\ell^p(\mathbb{R})$ è uno spazio di Banach per ogni $1 \leq p \leq \infty$. Qui ci limitiamo a verificare che si tratta di spazi normati.

Siano $1 \leq p, q \leq \infty$ tali che $1/p + 1/q = 1$ (esponenti coniugati di Hölder). Se $\mathrm{x} \in \ell^p(\mathbb{R})$ e $\mathrm{y} \in \ell^q(\mathbb{R})$ allora vale la seguente generalizzazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \leq \|\mathrm{x}\|_p \|\mathrm{y}\|_q, \tag{3.2.4}$$

con la serie a sinistra che converge assolutamente. La disuguaglianza vale anche nel caso $p = 1$ e $q = \infty$. Per provare la disuguaglianza (3.2.4) si usa l'Esercizio 4.4.1.

Ora proviamo che la norma $\|\cdot\|_p$ su $\ell^p(\mathbb{R})$ verifica la proprietà di sub-adittività. Infatti, per $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \ell^p(\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{p-1}(|x_i| + |y_i|) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i| \qquad \text{usiamo (3.2.4)} \\
&\leq \|\mathrm{x}\|_p \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \|\mathrm{y}\|_q \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} \\
&= (\|\mathrm{x}\|_p + \|\mathrm{y}\|_q)\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\Big)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Riordinando la disuguaglianza ottenuta si trova $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_p \leq \|\mathrm{x}\|_p + \|\mathrm{y}\|_p$.

I casi $p = 2$ e $p = \infty$ hanno un'importanza speciale. Nel caso $p = 2$ si ha $q = 2$, e su $\ell^2(\mathbb{R})$ si può introdurre il prodotto scalare

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, \quad \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \ell^2(\mathbb{R}).$$

Allora si ha $\|\mathrm{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_2}$ e vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_2| \leq \|\mathrm{x}\|_2 \|\mathrm{y}\|_2.$$

Lo spazio $\ell^2(\mathbb{R})$ è uno spazio di Hilbert (secondo la seguente definizione) di dimensione infinita.

DEFINIZIONE 3.2.5. Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diciamo che V è uno *spazio di Hilbert* se V, dotato della norma associata al prodotto scalare, risulta uno spazio di Banach (ovvero completo).

Mentre $\ell^p(\mathbb{R})$ è separabile per ogni $1 \leq p < \infty$, lo spazio $\ell^\infty(\mathbb{R})$ non è separabile. Si tratta di uno spazio di Banach enorme che contiene tutti gli spazi metrici separabili.

3. Compattezza sequenziale e compattezza sono equivalenti

Sia (X, d) uno spazio metrico.

DEFINIZIONE 3.3.1 (Insiemi sequenzialmente compatti). Un sottoinsieme $K \subset X$ si dice *sequenzialmente compatto* se ogni successione di punti $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K ha una sottosuccessione che converge ad un elemento di K.

Gli insiemi sequenzialmente compatti sono chiusi e limitati. Ricordiamo che un insieme $K \subset X$ si dice *limitato* se esistono $x_0 \in X$ ed $r > 0$ tali che $K \subset B_r(x_0)$ (equivalentemente: per ogni $x_0 \in X$ esiste $r > 0$ tale che $K \subset B_r(x_0)$).

PROPOSIZIONE 3.3.2. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme sequenzialmente compatto. Allora K è chiuso e limitato.

DIM. Proviamo che $K = \overline{K}$. Per ogni $x \in \overline{K}$ esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K che converge ad x. Questa successione ha una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ che converge ad un elemento di K. Ma questo elemento deve essere x, che quindi appartiene a K.

Supponiamo per assurdo che K non sia limitato. Allora esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $K \cap (X \setminus B_r(x_0)) \neq \emptyset$ per ogni $r > 0$. In particolare, con la scelta $r = n \in \mathbb{N}$ esistono punti $x_n \in K$ tali che $d(x_n, x_0) \geq n$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è in K. Quindi esiste una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente ad un elemento $x \in K$. Ma allora

$$d(x, x_0) \geq d(x_0, x_{n_j}) - d(x_{n_j}, x) \geq n_j - d(x_{n_j}, x) \to \infty$$

per $j \to \infty$. Questo è assurdo perchè $d(x, x_0) < \infty$. □

ESEMPIO 3.3.3. Sia $X = \mathbb{R}$ con la distanza standard e sia $K \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Se K è limitato, allora dal Teorema di Bolzano-Weierstrass segue che ogni successione in K ha una sottosuccessione convergente. Se K è anche chiuso, allora il limite di questa successione è un elemento di K.

Dunque, un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato è sequenzialmente compatto. Il viceversa vale per la proposizione precedente.

TEOREMA 3.3.4 (Heine-Borel). Sia $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, munito della distanza standard e sia $K \subset \mathbb{R}^m$ un insieme. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) K è sequenzialmente compatto;
B) K è chiuso e limitato.

DIM. Proviamo l'affermazione B)⇒A). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti in K. Scriviamo le coordinate $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$. La successione reale $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e dunque ha una sottosuccesione $(x_{n_j}^1)_{j\in\mathbb{N}}$ convergente ad un numero $x^1 \in \mathbb{R}$. La successione $(x_{n_j}^2)_{j\in\mathbb{N}}$ è limitata e quindi ha una sottosuccessione convergente ad un numero $x^2 \in \mathbb{R}$. Si ripete tale procedimento di sottoselezione m volte. Dopo m sottoselezioni successive si trova una selezione crescente di indici $j \mapsto k_j$ tale che ciascuna successione di coordinate $(x^i_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero $x^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. Ma allora $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$. Siccome K è chiuso, deve essere $x \in K$. $\square$

Esempio 3.3.5. Sia $\ell^2(\mathbb{R})$ con la distanza data dalla norma naturale introdotta nell'Esempio 1.3.2. Consideriamo l'insieme

$$K = \big\{ \mathrm{x} \in \ell^2(\mathbb{R}) : \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \leq 1 \big\}.$$

L'insieme K è chiaramente limitato. Inoltre è chiuso, in quanto è l'anti-immagine del chiuso $(-\infty, 1] \subset \mathbb{R}$ rispetto alla funzione continua $f : \ell^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})}$.

Mostriamo che K non è sequenzialmente compatto. Indichiamo con $\mathrm{e}_n \in \ell^2(\mathbb{R})$ la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $a_k = 1$ se $k = n$ e $a_k = 0$ se $k \neq n$. La successione $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è in K ma non può avere alcuna sottosuccessione convergente, in quanto per $m \neq n$ si ha

$$\|\mathrm{e}_n - \mathrm{e}_m\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2}.$$

Una sottosuccessione convergente dovrebbe essere di Cauchy, e questo non è possibile.

La definizione di insieme compatto è puramente topologica (basta poter parlare di insiemi aperti).

Definizione 3.3.6 (Ricoprimento e sottoricoprimento). Una famiglia di insiemi $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$, con $A_\alpha \subset X$, si dice un *ricoprimento* di un insieme $K \subset X$ se

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} A_\alpha.$$

Il ricoprimento si dice *aperto* se A_α è un insieme aperto per ogni $\alpha \in \mathscr{A}$.

Sia ora $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$. La famiglia di insiemi $\{A_\beta\}_{\beta\in\mathscr{B}}$ si dice un *sottoricoprimento* del ricoprimento $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ se risulta ancora

$$K \subset \bigcup_{\beta\in\mathscr{B}} A_\beta.$$

Il sottoricoprimento si dice *finito* se $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) < \infty$.

Definizione 3.3.7 (Insieme compatto). Un sottoinsieme $K \subset X$ si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto di K possiede un sottoricoprimento finito.

Esempio 3.3.8. Sia $X = \mathbb{R}$ con la distanza standard. L'intervallo aperto $A = (0, 1)$ non è compatto. Infatti la famiglia di insiemi $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n = (1/n, 1)$ forma un ricoprimento di A in quanto

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/n, 1).$$

Da tale ricoprimento, tuttavia, non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento *finito*. Chiaramente, l'insieme A non è sequenzialmente compatto, in quanto non è chiuso.

Sia ora $B = [0, \infty)$. Questo intervallo è chiuso, ma non è compatto. Infatti, la famiglia di insiemi $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n = (-1, n)$ forma un ricoprimento di B in quanto

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (-1, n).$$

Da tale ricoprimento, tuttavia, non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento *finito*. Chiaramente, l'insieme B non è sequenzialmente compatto, in quanto non è limitato.

Negli spazi metrici, le nozioni di compattezza e di compattezza sequenziale coincidono.

Teorema 3.3.9. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) K è sequenzialmente compatto.
B) K è compatto.

Una versione più dettagliata di questo teorema sarà data nel Teorema 3.4.2.

Definizione 3.3.10 (Spazio separabile). Uno spazio metrico (X, d) si dice *separabile* se esiste un sottoinsieme $X_0 \subset X$ tale che $\overline{X_0} = X$ e X_0 è (al più) numerabile.

Proposizione 3.3.11. Gli spazi metrici compatti sono separabili.

Dim. Diamo lo schema della dimostrazione. Fissato $r > 0$, la famiglia di palle (aperte) $\{B_r(x) : x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X che dunque ha un sottoricoprimento finito.

Dunque, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme finito di punti $x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k \in X$, $n_k \in \mathbb{N}$, tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_k} B_{1/k}(x_i^k).$$

L'insieme di tutti i centri

$$X_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \{x_i^k\}$$

è al più numerabile ed è denso in X. □

4. Caratterizzazione degli spazi metrici compatti

Per il Teorema di Heine-Borel, un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Una simile caratterizzazione smette di valere negli spazi di "dimensione infinita". Negli spazi metrici completi, tuttavia, la caratterizzazione continua valere pur di sostituire la "limitatezza" con la "totale limitatezza".

Definizione 3.4.1 (Totale limitatezza). Uno spazio metrico (X, d) si dice *totalmente limitato* se per ogni $r > 0$ esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i)$.

Teorema 3.4.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) X è compatto.
ii) Ogni insieme $A \subset X$ con $\mathrm{Card}(A) = \infty$ ha un punto di accumulazione.
iii) X è sequenzialmente compatto.
iv) X è completo e totalmente limitato.

Prima di iniziare con la dimostrazione ricordiamo il seguente fatto:

PROPOSIZIONE 3.4.3. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e siano $K_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, insiemi chiusi non vuoti tali che $K_{n+1} \subset K_n$ e $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Allora esiste $x \in X$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

DIM. Selezioniamo punti $x_n \in K_n \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$, a nostro piacere. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di di Cauchy, infatti se $m \geq n$ allora $x_n, x_m \in K_n$ e dunque

$$d(x_m, x_n) \leq \mathrm{diam}(K_n) < \varepsilon$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Per la completezza di X, esiste $x \in X$ tale che $x_n \to x$ per $n \to \infty$. Siccome $x_m \in K_n$ per ogni $m \geq n$, dalla caratterizzazione sequenziale della chiusura di K_n segue che $x \in K_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Se, poi, y è un altro punto nell'interesezione, allora $x, y \in K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque $d(x, y) \leq \mathrm{diam}(K_n)$. Deve dunque esssere $d(x, y) = 0$, ovvero $x = y$. $\square$

DIM.[Dimostrazione del Teorema 3.4.2.] i)$\Rightarrow$ii). Sia X compatto e sia $A \subset X$ un sottoinsieme con cardinalità $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Supponiamo per assurdo che A non abbia punti di accumulazione. Allora per ogni $x \in X$ esiste $r_x > 0$ tale che

$$B_{r_x}(x) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset.$$

Dal momento che $X = \bigcup_{x\in X} B_{r_x}(x)$ è un ricoprimento aperto, dalla compattezza di X segue che esistono finiti punti $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_{x_i}}(x_i)$. Da ciò segue che

$$A = A \cap X = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_{r_{x_i}}(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\},$$

ed A è un insieme finito. Questo è assurdo.

ii)$\Rightarrow$iii). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X. Se la cardinalità dell'insieme $A = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ è finita allora la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione costante. Se la cardinalità di A non è finita, allora esiste $x \in X$ punto di accumulazione di A. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_k} \in B_{1/k}(x)$. Inoltre, la scelta di n_k può essere fatta in modo tale da avere una selezione crescente di indici $k \mapsto n_k$. La sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad x.

iii) $\Rightarrow$ iv). Proviamo che X è completo. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy. Per ipotesi esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge ad un punto $x \in X$. Ma allora, fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\bar{n}, \bar{k} \in \mathbb{N}$ tali che

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) \leq 2\varepsilon$$

non appena $k \geq \bar{k}$ e $n, n_k \geq \bar{n}$. Questo prova che $x_n \to x$ in X per $n \to \infty$.

Proviamo che X è totalmente limitato. Supponiamo per assurdo che esista $r > 0$ tale che non ci sia un ricoprimento finito di X con palle di raggio r.

Prendiamo $x_1 \in X$, $x_2 \in X \setminus B_r(x_1)$ e per induzione

$$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i).$$

La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $d(x_n, x_m) \geq r$ per ogni $n \neq m$, e dunque non può avere sottosuccessioni convergenti.

iv) $\Rightarrow$ i). Questa è la parte più significativa della dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che X non sia compatto. Allora c'è un ricoprimento aperto di X, sia esso $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$, che non ha alcun sottoricoprimento finito.

Per la totale limitatezza, esistono palle $B_1^1, \ldots, B_{n_1}^1$ di raggio 1 tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n_1} B_i^1$. Senza perdere di generalità possiamo supporre qui e nel seguito che le palle siano chiuse. In particolare, esiste una palla $B_{i_1}^1$, $1 \leq i_1 \leq n_1$, che non è ricoperta da un numero finito di aperti A_α. L'insieme $B_{i_1}^1$ è totalmente limitato, e quindi esistono palle $B_1^2, \ldots, B_{n_2}^2$ relative a $B_{i_1}^1$ di raggio $1/2$ tali che $B_{i_1}^1 \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B_i^2$. Esiste un insieme $B_{i_2}^2$ che non può essere ricoperto da un numero finito di insiemi aperti A_α.

Ora procediamo per induzione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una palla chiusa $B_{i_k}^k$ relativa a $B_{i_{k-1}}^{k-1}$, con raggio $1/k$ che non può essere ricoperta con un numero finito di insiemi aperti A_α.

Poichè X è completo, la successione decrescente di insiemi chiusi $(B_{i_k}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ha intersezione non vuota. Dunque esiste un unico $x \in \bigcap_{k=1}^\infty B_{i_k}^k$. D'altra parte, $x \in A_\alpha$ per qualche $\alpha \in \mathscr{A}$ ed esiste dunque $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A_\alpha$. Se ora $k \in \mathbb{N}$ è tale che $1/k < r/2$ allora $B_{i_k}^k \subset B_r(x) \subset A_\alpha$. Questa è una contraddizione, perchè $B_{i_k}^k$ non può essere ricoperto da un numero finito di insiemi A_α. □

5. Continuità e compattezza

Proviamo che le immagini continue di insiemi compatti sono insiemi compatti.

Teorema 3.5.1. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione continua. Se X è compatto allora $f(X) \subset Y$ è compatto in Y.

Dim. Sia $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. Precisamente, gli insiemi $A_\alpha \subset Y$ sono aperti e

$$f(X) \subset \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} A_\alpha.$$

Passando alle anti-immagini si ha

$$X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} f^{-1}(A_\alpha).$$

L'inclusione centrale è in effetti un'uguaglianza di insiemi. Gli insiemi $f^{-1}(A_\alpha) \subset X$ sono aperti, in quanto f è continua. Siccome X è compatto esiste $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ con $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) < \infty$ tale che

$$X = \bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} f^{-1}(A_\beta).$$

Passando ora alle immagini si ottiene

$$f(X) = f\Big(\bigcup_{\beta\in\mathscr{B}} f^{-1}(A_\beta)\Big) = \bigcup_{\beta\in\mathscr{B}} f(f^{-1}(A_\beta)) \subset \bigcup_{\beta\in\mathscr{B}} A_\beta.$$

Dunque, ogni ricoprimento aperto di $f(X)$ ha un sottoricoprimento finito. Questo termina la dimostrazione.

Alternativamente, si può provare che $f(X) \subset Y$ è sequenzialmente compatto. Sia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $f(X)$. Esistono punti $x_n \in X$ tali che $f(x_n) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ che converge ad un punto $x_0 \in X$. Siccome f è continua si ha

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(x_0).$$

In altri termini, $y_{n_j} \to f(x_0) \in f(X)$ per $j \to \infty$. □

Osservazione 3.5.2. Un insieme $K \subset \mathbb{R}$ compatto (e non vuoto) ammette massimo e minimo. La prova è contenuta nella dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 3.5.3 (Weierstrass). Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono $x_0, x_1 \in X$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x\in X} f(x) = \min\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X\},$$
$$f(x_1) = \max_{x\in X} f(x) = \max\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X\}.$$

Dim.Per il teorema precedente, l'insieme $f(X) \subset \mathbb{R}$ è compatto. Per il Teorema di Heine-Borel l'insieme $f(X)$ è pertanto chiuso e limitato. Essendo limitato, esistono finiti

$$-\infty < \inf_{x\in X} f(x) \le \sup_{x\in X} f(x) < \infty.$$

Essendo chiuso, l'insieme $f(X) \subset \mathbb{R}$ ha minimo e massimo, ovvero esistono $x_0, x_1 \in X$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x\in X} f(x), \quad f(x_1) = \max_{x\in X} f(x).$$

□

Definizione 3.5.4 (Uniforme continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $A \subset X$. Una funzione $f : A \to Y$ si dice *uniformemente continua su A* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, x_0 \in A$ vale l'implicazione

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Osservazione 3.5.5 (Continuità e continuità uniforme). Confrontiamo la definizione di "continuità uniforme su A":

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, x_0 \in A: \quad d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

con la definizione di "continuità in ogni punto $x_0 \in A$":

$$\forall x_0 \in A\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in A: \quad d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

In quest'ultima definizione, $\delta = \delta(x_0) > 0$ dipende dal punto $x_0 \in A$. Nella continuità uniforme su A, invece, δ non dipende da x_0.

Teorema 3.5.6 (Heine-Cantor). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : X \to Y$ continua. Se X è compatto allora f è uniformemente continua su X.

Dim. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo il $\delta > 0$ che garantisca l'uniforme continuità. Siccome f è continua su X, per ogni $\bar{x} \in X$ esiste $\delta(\bar{x}) > 0$ tale che $d_X(x, \bar{x}) < \delta(\bar{x})$ implica $d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon/2$. Chiaramente si ha

$$X = \bigcup_{\bar{x} \in X} B_{\delta(\bar{x})/2}(\bar{x}),$$

e quindi per la compattezza esistono finiti punti $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che, posto $r_i = \delta(x_i)/2$, si ha

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i).$$

Scegliamo $\delta = \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$. Siano ora $x, x_0 \in X$ tali che $d_X(x, x_0) < \delta$. Per la proprietà di ricoprimento, esiste $i = 1, \ldots, n$ tale che $x_0 \in B_{r_i}(x_i)$. D'altra parte, si ha anche

$$d_X(x, x_i) \le d_X(x, x_0) + d_X(x_0, x_i) < \delta + r_i \le 2r_i = \delta(x_i).$$

In altri termini, $x, x_0 \in B_{\delta(x_i)}(x_i)$ e quindi

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \le d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Questo termina la dimostrazione.

Una dimostrazione alternativa si può ottenere lavorando con la compattezza sequenziale. Per assurdo si suppone che esistano $\varepsilon > 0$ e successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{ma} \quad d_Y(f(x_n), f(y_n)) \ge \varepsilon > 0.$$

Si estraggono sottosuccessioni $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ che convergono in X a punti $x_0, y_0 \in X$, rispettivamente. Dalla disuguaglianza a sinistra si deduce che deve essere $x_0 = y_0$. Dalla continuità si trova

$$\lim_{j\to\infty} d_Y(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) = d_Y(f(x_0), f(x_0)) = 0,$$

e questo è in contraddizione con la disuguaglianza a destra. $\square$

6. Insiemi connessi

In questa sezione introduciamo la nozione di spazio metrico connesso e di insieme connesso in uno spazio metrico. Poi esaminiamo il legame fra connessione e continuità.

DEFINIZIONE 3.6.1 (Spazio connesso). Uno spazio metrico (X, d) si dice connesso se: $X = A_1 \cup A_2$ con A_1, A_2 insiemi aperti tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ implica che $A_1 = \emptyset$ oppure $A_2 = \emptyset$.

Se X non è connesso allora esistono due insiemi aperti disgiunti e non-vuoti A_1 e A_2 tali che $X = A_1 \cup A_2$. Quindi $A_1 = X \setminus A_2$ e $A_2 = X \setminus A_1$ sono contemporaneamente aperti e chiusi. Se X è connesso $\emptyset$ e X sono gli unici insiemi ad essere sia aperti che chiusi (questa è una definizione equivalente di spazio metrico connesso).

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$ un suo sottoinsieme. Allora (Y, d) è ancora uno spazio metrico che avrà la sua topologia $\tau(Y)$, che si dice *topologia indotta* da X su Y o *topologia relativa*.

ESERCIZIO 3.6.2. Sia $Y \subset X$ con la topologia relativa. Provare che un insieme $A \subset Y$ è aperto in Y se e solo se esiste un insieme $B \subset X$ aperto in X tale che $A = Y \cap B$.

ESEMPIO 3.6.3. Sia $X = \mathbb{R}$ e $Y = [0, 1]$. L'insieme $[0, 1/2) \subset [0, 1]$ è relativamente aperto in $[0, 1]$ in quanto $[0, 1/2) = [0, 1] \cap (-\infty, 1/2)$.

DEFINIZIONE 3.6.4. Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $Y \subset X$ si dice *connesso* se è connesso rispetto alla topologia indotta. Precisamente, Y è connesso se: $Y = (Y \cap A_1) \cup (Y \cap A_2)$ con A_1, A_2 aperti di X e unione disgiunta implica che $Y \cap A_1 = \emptyset$ oppure $Y \cap A_2 = \emptyset$.

Ricordiamo che un insieme $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se $x, y \in I$ e $x < z < y$ implicano che anche $z \in I$.

TEOREMA 3.6.5. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza standard e sia $I \subset \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

A) I è connesso.
B) I è un intervallo.

DIM. A)⇒B). Se per assurdo I non è un intervallo allora esistono punti $x < z < y$ tali che $x, y \in I$ ma $z \notin I$. Allora si ha

$$I = \big(I \cap (-\infty, z)\big) \cup \big(I \cap (z, \infty)\big)$$

con unione disgiunta e $I \cap (-\infty, z) \neq \emptyset$, $I \cap (z, \infty) \neq \emptyset$ aperti relativi non vuoti.

B)⇒A). Proveremo, ad esempio, che l'intervallo $I = [0, 1]$ è connesso. Sia

$$I = \big(I \cap A_1\big) \cup \big(I \cap A_2\big)$$

con unione disgiunta e $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ aperti di $\mathbb{R}$. Siccome $0 \in I = [0, 1]$ avremo ad esempio $0 \in A_1$. Nostro obiettivo è di provare che $I \cap A_2 = \emptyset$.

Definiamo il numero

$$\bar{x} = \sup \big\{x \in [0, 1] : [0, x) \subset I \cap A_1\big\} \in \mathbb{R},$$

che esiste finito per l'Assioma di Completezza.

Deve essere $\bar{x} \leq 1$ ed inoltre $\bar{x} > 0$, perchè, essendo A_1 aperto esiste $\delta > 0$ tale che $[0, \delta) \subset A_1$. Proviamo che $\bar{x} \notin A_2$. Se fosse $\bar{x} \in A_2$ allora, essendo A_2 aperto, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $0 \leq \bar{x} - \varepsilon \in I \cap A_2$. Dalla definizione di $\bar{x}$ si ha anche $\bar{x} - \varepsilon \in A_1$ e quindi $I \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Questo non è possibile perchè l'unione è disgiunta. Quindi deve essere $\bar{x} \in I \cap A_1$.

Se, poi, fosse $\bar{x} < 1$ allora esisterebbe $\delta > 0$ tale che $[\bar{x}, \bar{x} + \delta) \subset A_1$. Questo contraddice la definizione di $\bar{x}$. Quindi $\bar{x} = 1$ e dunque $I \subset A_1$. Da questo si deduce che $I \cap A_2 = \emptyset$. Altrimenti si avrebbe $(I \cap A_1) \cap (I \cap A_2) \neq \emptyset$. $\square$

Esempio 3.6.6. Riportiamo senza prove alcuni fatti elementari:

1) $\mathbb{R}^n$ è connesso per ogni $n \geq 1$.
2) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è connesso per $n \geq 2$ ma non è connesso per $n = 1$.
3) $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ non è connesso, $n \geq 1$.
4) $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ non è connesso, $n \geq 1$.

Il punto 1) seguirà dal fatto che $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

Ora mostriamo che l'immagine continua di connessi è connessa.

Teorema 3.6.7. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ continua. Se X è connesso allora $f(X) \subset Y$ è connesso.

Dim. Siano $A_1, A_2 \subset Y$ insiemi aperti tali che

$$f(X) = (f(X) \cap A_1) \cup (f(X) \cap A_2)$$

con unione disgiunta. Allora

$$\begin{aligned} X = f^{-1}(f(X)) &= f^{-1}((f(X) \cap A_1) \cup (f(X) \cap A_2)) \\ &= f^{-1}(f(X) \cap A_1) \cup f^{-1}(f(X) \cap A_2)) \\ &= (X \cap f^{-1}(A_1)) \cup (X \cap f^{-1}(A_2)) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2). \end{aligned}$$

L'ultima unione è disgiunta e gli insiemi $f^{-1}(A_1)$, $f^{-1}(A_2)$ sono aperti perchè f è continua. Siccome X è connesso deve essere $f^{-1}(A_1) = \emptyset$ oppure $f^{-1}(A_2) = \emptyset$. Dunque, si ha $f(X) \cap A_1 = \emptyset$ oppure $f(X) \cap A_2 = \emptyset$. $\square$

Definizione 3.6.8 (Spazio connesso per archi). Uno spazio metrico (X, d) si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste una curva continua $\gamma : [0, 1] \to X$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Teorema 3.6.9. Se uno spazio metrico (X, d) è connesso per archi allora è connesso.

Dim. Supponiamo per assurdo che X non sia connesso. Allora esistono due aperti A_1, A_2 disgiunti e non vuoti tali che $X = A_1 \cup A_2$. Siano $x \in A_1$ e $y \in A_2$, e sia $\gamma : [0, 1] \to X$ una curva continua tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Ma allora

$$[0, 1] = ([0, 1] \cap \gamma^{-1}(A_1)) \cup ([0, 1] \cap \gamma^{-1}(A_2))$$

con unione disgiunta e $\gamma^{-1}(A_1))$ e $\gamma^{-1}(A_2)$ aperti non vuoti relativi a $[0, 1]$. Questo è assurdo perchè $[0, 1]$ è connesso. $\square$

Esercizio 3.6.10. Si consideri il seguente sottoinsieme del piano:

$$A = \big\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\big\} \cup \big\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\big\}$$

con la topologia indotta dal piano. Provare che A è connesso ma non è connesso per archi.

Teorema 3.6.11 (Valori intermedi). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $y \in (\inf_A f, \sup_A f)$ esiste un punto $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Dim. Infatti l'insieme $f(A) \subset \mathbb{R}$ è connesso e quindi è un intervallo e quindi $y \in (\inf_A f, \sup_A f)$ implica che $y \in f(A)$. $\square$

Teorema 3.6.12 (degli zeri). Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, una funzione continua tale che $f(a) < 0$ ed $f(b) > 0$. Allora esiste $x \in (a,b)$ tale che $f(x) = 0$.

Dim. Segue dal Teorema dei valori intermedi osservando che $\inf_A f \leq f(a) < 0 < f(b) \leq \sup_A f$. $\square$

Esercizio 3.6.13. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva. Provare che $f([0,1]) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo compatto e che la funzione inversa $f^{-1} : f([0,1]) \to [0,1]$ è continua.

Teorema 3.6.14. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso (non vuoto). Allora A è connesso per archi.

Dim. Dimostreremo un'affermazione più precisa: A è connesso per curve poligonali. Sia $x_0 \in A$ un punto scelto a nostro piacere. Definiamo il seguente insieme

$$A_1 = \big\{x \in A : x \text{ si connette a } x_0 \text{ con una curva poligonale contenuta in } A\big\}.$$

Proviamo che A_1 è aperto. Infatti, se $x \in A_1 \subset A$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$, in quanto A è aperto. Ogni punto di $y \in B_\varepsilon(x)$ si collega al centro x con un segmento contenuto in A. Dunque y si collega a x_0 con una curva poligonale contenuta in A, ovvero $B_\varepsilon(x) \subset A_1$.

Sia $A_2 = A \setminus A_1$. Proviamo che anche A_2 è aperto. Se $x \in A_2 \subset A$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$. Affermiamo che $B_\varepsilon(x) \subset A_2$. Se così non fosse troveremmo $y \in B_\varepsilon(x) \cap A_1$. Il punto x_0 si collega a y con una curva poligonale in A ed y si collega ad x con un segmento contenuto in A. Quindi $x \in A_1$, che non è possibile. Questo argomento prova che A_2 è aperto. Allora abbiamo

$$A = A_1 \cup A_2$$

con A_1 e A_2 aperti ed unione disgiunta. Siccome A è connesso, uno degli aperti deve essere vuoto. Siccome $A_1 \neq \emptyset$ allora $A_2 = \emptyset$. Questo termina la dimostrazione. $\square$

7. Esercizi

7.1. Spazi metrici completi.

Esercizio 3.7.1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia δ la distanza su X definita da

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

1) Provare che (X, d) e (X, δ) hanno la stessa topologia (ovvero: un insieme $A \subset X$ è aperto relativamente a d se e solo se lo è relativamente a δ).
2) Provare che (X, d) è completo se e solo se (X, δ) è completo.

Esercizio 3.7.2. Definiamo le funzioni $|\cdot|_1, |\cdot|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$|x|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|, \quad |x|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Provare che $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_1)$ e $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty)$ sono spazi normati e che come spazi metrici sono completi.

Esercizio 3.7.3. Sia $V = C([0, 1])$. 1) Provare che la funzione $\|\cdot\|_2 : V \times V \to [0, \infty)$ così definita

$$\|f\|_2 = \Big(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}$$

è una norma su V. Provare preliminarmente che per ogni $f, g \in V$ vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\Big|\int_0^1 f(x)g(x)dx\Big| \le \|f\|_2 \|g\|_2$$

2) Dire se il corrispondente spazio metrico è completo.

Esercizio 3.7.4. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi chiusi non vuoti tali che:

i) $K_{n+1} \subset K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(K_n) = 0$.

Provare che esiste $x \in X$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

Ricordiamo che il diametro di un insieme $A \subset X$ è $\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y)$.

7.2. Completamento.

Esercizio 3.7.5. Definiamo la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.
ii) Provare che lo spazio metrico non è completo.
iii) Determinare il completamento di $(\mathbb{R}, d)$.

Esercizio 3.7.6. Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = \arctan(|x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico. Stabilire se tale spazio metrico è completo.

Esercizio 3.7.7. Dopo aver determinato l'immagine della funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \Big(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\Big), \quad x \in \mathbb{R},$$

considerare lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ con la distanza

$$d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che d è una metrica su $\mathbb{R}$.
ii) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ non è completo.
iii) Calcolare il completamento di questo spazio metrico.

Esercizio 3.7.8. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.
ii) Provare che se $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso, allora lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ è completo.
iii) Provare che se $(\mathbb{R}, d)$ è completo, allora $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso.

Esercizio 3.7.9. Sia $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, consideriamo la funzione $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 1/x$, e definiamo la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = \big|\varphi(x) - \varphi(y)\big|, \quad x, y \in X.$$

i) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.
ii) Provare che lo spazio metrico non è completo.
iii) Calcolare il completamento di (X, d).

Esercizio 3.7.10. Siano $X = (-1, \infty)$ e $d : X \times X \to [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = \Big|\log\Big(\frac{1+x}{1+y}\Big)\Big|, \quad x, y \in X.$$

1) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.
2) Esibire un'isometria suriettiva $\varphi : \mathbb{R} \to (X, d)$, $d(\varphi(t), \varphi(s)) = |t - s|$, con $s, t \in \mathbb{R}$.
3) Provare che (X, d) è uno spazio metrico completo.

7.3. Insiemi compatti in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 3.7.11. Siano $m, k, n \in \mathbb{N}$ con $m + k = n$. Su $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^k$ ed $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ fissiamo la distanza standard. Provare che se $H \subset \mathbb{R}^m$ ed $K \subset \mathbb{R}^k$ sono compatti, allora $H \times K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto.

Esercizio 3.7.12. Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha x^2 - 1}{(x+1)(x+\alpha)}, \quad x \geq 0,$$

e consideriamo l'insieme

$$K_\alpha = \big\{x \geq 0 : -2 < f_\alpha(x) \leq 1\big\} \subset \mathbb{R}.$$

Per ciascun $\alpha > 0$ stabilire se:

i) K_α è aperto;
ii) K_α è chiuso;
iii) K_α è compatto.

Esercizio 3.7.13. Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi tale che esista il limite $\lim_{n\to\infty} z_n = z_\infty \in \mathbb{C}$. Provare che il seguente insieme è compatto nella topologia standard di $\mathbb{C}$:

$$K = \big\{z_n \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \{z_\infty\}.$$

Provare l'affermazione sia con la definizione di compattezza per ricoprimenti sia con la definizione di compattezza sequenziale.

Esercizio 3.7.14. i) Provare che la circonferenza $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ è connessa e compatta.

ii) Sia $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che esiste un punto $z \in \mathbb{S}^1$ tale che $f(z) = f(-z)$.

Esercizio 3.7.15. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono sequenzialmente compatti

$$K = \big\{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 \le f(x) \le 2\big\} \quad \text{e} \quad H = \big\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) \le 1/2\big\}.$$

Esercizio 3.7.16. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi $H, K \subset \mathbb{R}^2$ sono compatti:

$$K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 \le 1\big\},$$

$$H = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x^3 + xy + y^3 \le 1\big\}.$$

Esercizio 3.7.17. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che esistano (anche infiniti) e siano uguali i limiti

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Provare che f ha minimo oppure massimo assoluto.

Esercizio 3.7.18. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il seguente insieme

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 < 0\big\}.$$

1) Dire se A è compatto e/o connesso.
2) Dire se $\overline{A}$ è compatto e/o connesso.

Esercizio 3.7.19. Stabilire se l'insieme $K \subset \mathbb{R}^3$ con la distanza Euclidea è compatto

$$K = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \le 1,\ x + y^2 + z^2 \le 1\big\}.$$

Stabilire se K è chiuso e se è compatto.

7.4. Insiemi compatti in spazi metrici.

Esercizio 3.7.20. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che:

(1) Se X è compatto allora anche K è compatto.
(2) Se X è completo allora anche K è completo con la distanza ereditata da X.

Esercizio 3.7.21. Sia (X, d) uno spazio metrico. Provare che:

i) Se $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ è una famiglia di compatti di X allora $K = \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} K_\alpha$ è compatto.
ii) Se $K_1, \dots, K_n$, $n \in \mathbb{N}$, sono compatti di X allora $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$ è compatto.

Esercizio 3.7.22. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione biiettiva continua. Provare che se X è compatto allora la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ è continua.

Esercizio 3.7.23. Sia $K \subset \ell^2(\mathbb{R})$ l'insieme

$$K = \Big\{ \mathrm{x} \in \ell^2(\mathbb{R}) : |x_n| \leq \frac{1}{n} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \Big\},$$

dove $\mathrm{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Provare che K è compatto.

Esercizio 3.7.24. Sia X un insieme non vuoto e sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

1) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.
2) Descrivere le palle in X.
3) Descrivere gli insiemi aperti.
4) Caratterizzare gli insiemi compatti in X
5) Caratterizzare gli insiemi connessi in X.
6) Provare che (X, d) è completo.

CAPITOLO 4

Teoremi di punto fisso, Ascoli-Arzelà e Stone-Weierstrass

1. Teoremi di punto fisso

Sia X un insieme e sia $T : X \to X$ una funzione da X in se stesso. Siamo interessati all'esistenza di soluzioni $x \in X$ dell'equazione $T(x) = x$. Un simile elemento $x \in X$ si dice *punto fisso* di T.

1.1. Teorema delle contrazioni.

Definizione 4.1.1 (Contrazione). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'applicazione $T : X \to X$ è una *contrazione* se esiste un numero $0 < \lambda < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Le contrazioni sono Lipschitziane e dunque uniformemente continue.

Teorema 4.1.2 (Banach). Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ una contrazione. Allora esiste un unico punto $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Sia $x_0 \in X$ un qualsiasi punto e si definisca la successione $x_n = T^n(x_0) = T \circ \ldots \circ T(x_0)$, n-volte. Proviamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, per la disuguaglianza triangolare si ha per ogni $n, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{h=1}^{k} d(x_{n+h}, x_{n+h-1}) = \sum_{h=1}^{k} d(T^{n+h}(x_0), T^{n+h-1}(x_0)) \\ &\leq d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{k} \lambda^{n+h-1} \leq \lambda^n d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{\infty} \lambda^{h-1}. \end{aligned}$$

La serie converge e $\lambda^n \to 0$ per $n \to \infty$, dal momento che $\lambda < 1$. Poichè X è completo, esiste un punto $x \in X$ tale che $x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0)$.

Proviamo che $x = T(x)$. La funzione $T : X \to X$ è continua e quindi abbiamo

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} T(T^{n-1}(x_0)) = T(\lim_{n\to\infty} T^{n-1}(x_0)) = T(x).$$

Proviamo infine che il punto fisso è unico. Sia $\bar{x} \in X$ tale che $\bar{x} = T(\bar{x})$. Allora abbiamo

$$d(x, \bar{x}) = d(T(x), T(\bar{x})) \leq \lambda d(x, \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad d(x, \bar{x}) = 0,$$

perchè $\lambda < 1$, e quindi $x = \bar{x}$. □

La dimostrazione del Teorema di Banach è costruttiva e può essere implementata in un calcolatore.

Teorema 4.1.3. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ un'applicazione tale che per qualche $n \in \mathbb{N}$ l'iterazione T^n è una contrazione. Allora esiste un unico $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Per il Teorema di Banach esiste un unico $x \in X$ tale che $T^n(x) = x$. Allora, per qualche $0 \leq \lambda < 1$, si ha

$$d(x, T(x)) = d(T^n(x), T(T^n(x))) = d(T^n(x), T^n(T(x))) \leq \lambda d(x, T(x)),$$

e quindi $d(x, T(x)) = 0$, che è equivalente a $T(x) = x$.

Supponiamo che esista un secondo punto fisso $y \in X$, con $y = T(y)$. Allora si ha anche $y = T^n(y)$ e pertanto $x = y$, dall'unicità del punto fisso di T^n. □

1.2. Teoremi di Brouwer e di Schauder.

Teorema 4.1.4 (Brouwer). *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, una palla chiusa e sia $T : K \to K$ continua. Allora esiste $x \in K$ tale che $T(x) = x$.*

In questi casi, il punto fisso tipicamente non è unico. Per $n = 1$ il teorema precedente ha una dimostrazione elementare. Per $n = 2$, la dimostrazione migliore è si basa sulla nozione di omotopia. Per $n \geq 3$, esistono dimostrazioni basate sull'omologia. Per una dimostrazione analitica, si veda Evans, *Partial Differential Equations*, p.441. Il Teorema di Brouwer si estende alla dimensione infinita.

Teorema 4.1.5 (Schauder). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $K \subset X$ un insieme non-vuoto, chiuso e convesso. Sia $T : K \to K$ un'applicazione tale che:*

i) *T è continua;*

ii) *$\overline{T(K)} \subset K$ è compatto.*

Allora esiste $x \in K$ tale che $T(x) = x$.

Per una dimostrazione, si veda Evans, *Partial Differential Equations*, p.502.

2. Teorema di Ascoli-Arzelà

Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $C(X)$ lo spazio delle funzioni continue a valori reali con la norma

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{x \in X} |f(x)|. \tag{4.2.5}$$

Sappiamo che $C(X)$ è uno spazio di Banach. In questa sezione caratterizziamo gli insiemi compatti di $C(X)$.

Definizione 4.2.1. Un insieme $K \subset C(X)$ si dice *equilimitato* se esiste una costante $M \geq 0$ tale che

$$\sup_{f \in K} \|f\| \leq M.$$

L'insieme K si dice *equicontinuo* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, y) \leq \delta \quad \Rightarrow \sup_{f \in K} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Teorema 4.2.2 (Ascoli-Arzelà). *Siano (X, d) uno spazio metrico compatto e $K \subset C(X)$. Sono equivalenti:*

A) *K è compatto;*

B) *K è chiuso, equicontinuo ed equilimitato.*

DIM. A)⇒B) Se K è compatto allora è sicuramente chiuso. Inoltre per la caratterizzazione degli spazi metrici compatti, K è totalmente limitato, e dunque è a maggior ragione equilimitato. Rimane da provare che K è equicontinuo.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dalla totale limitatezza di K segue che esistono $f_1, \dots, f_n \in K$ tali che $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon)$, con palle nella distanza di $C(X)$. Poichè ogni f_i è continua su X che è compatto, allora è anche uniformemente continua. È dunque possibile trovare $\delta > 0$ tale che per ogni $i = 1, \dots, n$ si abbia

$$d(x, y) \leq \delta \ \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon.$$

Data $f \in K$ risulterà $f \in B(f_i, \varepsilon)$ per un qualche $i \in \{1, \dots, n\}$. Dunque, se $d(x, y) \leq \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon.$$

Questo prova la equicontinuità di K.

B)⇒A) Data una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K, vogliamo estrarre una sottosuccessione convergente in K.

Poichè X è compatto, allora è separabile (Esercizio 4.4.26), e dunque esiste $X_0 = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ tale che $\overline{X}_0 = X$. Poichè $\sup_{f\in K} |f(x_1)| \leq M$ si possono trovare $\alpha_1 \in \mathbb{N}$ ed una sottosuccessione $(f_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $f_n^1(x_1) \to \alpha_1 \in \mathbb{R}$. Analogamente $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n^1(x_2)| \leq M$ e dunque si può estrarre da f_n^1 una sottosuccessione f_n^2 tale che $f_n^2(x_2) \to \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Per induzione su k, si può estrerre da $(f_n^{k-1})_{n\in\mathbb{N}}$ una sottosuccessione $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $f_n^k(x_k) \to \alpha_k \in \mathbb{R}$. In effetti, per ogni $i = 1, \dots, k$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n^k(x_i) = \alpha_i.$$

Con il procedimento di selezione diagonale si definisce la successione $\bar{f}_n = f_n^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dunque, $\bar{f}_n$ è definitivamente una sottosuccessione di ogni f_n^k, e pertanto per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \bar{f}_n(x_i) = \alpha_i.$$

Estendiamo la convergenza da X_0 su tutto X utilizzando la continuità uniforme. Mostreremo che la successione $(\bar{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $C(X)$ e dunque converge uniformemente ad una funzione (continua) $f \in K$ (infatti K è chiuso).

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la equicontinuità esiste $\delta > 0$ tale che $|\bar{f}_n(x) - \bar{f}_n(y)| \leq \varepsilon$ per $d(x, y) \leq \delta$ uniformemente in $n \in \mathbb{N}$. Dal momento che $X = \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, \delta)$, per compattezza è possibile trovare un numero finito di centri $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^k B(\bar{x}_i, \delta).$$

Per $\bar{x}_i$ fissato, le successioni numeriche $\bar{f}_n(\bar{x}_i)$ convergono, e dunque sono di Cauchy. Poichè ve ne sono un numero finito è possibile trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|\bar{f}_n(\bar{x}_i) - \bar{f}_m(\bar{x}_i)| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } n, m \geq \bar{n} \text{ e per ogni } i = 1, \dots, k.$$

Sia ora $x \in X$ arbitrario. Esiste $\bar{x}_i$ tale che $x \in B(\bar{x}_i, \delta)$, e dunque

$$|\bar{f}_n(x) - \bar{f}_m(x)| \leq |\bar{f}_n(x) - \bar{f}_n(\bar{x}_i)| + |\bar{f}_n(\bar{x}_i) - \bar{f}_m(\bar{x}_i)| + |\bar{f}_m(\bar{x}_i) - \bar{f}_m(x)| \leq 3\varepsilon,$$

pur di prendere $m, n \geq \bar{n}$. Poichè la scelta di $\bar{n}$ non dipende da x questo prova che

$$\|\bar{f}_n - \bar{f}_m\| \leq 3\varepsilon \quad \text{per ogni } n, m \geq \bar{n}.$$

Con questo la dimostrazione del Teorema di Ascoli-Arzelà è terminata. □

Corollario 4.2.3. Siano (X, d) uno spazio metrico compatto ed $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $C(X)$ equicontinue ed equilimitate. Allora esistono $f \in C(X)$ ed una sottosuccessione $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $f_{k_j} \to f$ uniformemente in X.

Dim. E' facile verificare che, se $A \subset C(X)$ è una famiglia di funzioni equicontinue ed equilimitate, allora la sua chiusura (nello spazio $C(X)$) $\overline{A}$ è ancora equicontinua ed equilimitata. E' allora sufficiente applicare il teorema di Ascoli-Arzelà (unitamente alla caratterizzazione degli spazi metrici compatti) alla chiusura di $A := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$. □

3. Teoremi di approssimazione di Stone-Weierstrass

In questa sezione studiamo il problema di approssimare le funzioni continue su un compatto con funzioni speciali. Nel caso di un intervallo vorremmo approssimare una funzione continua con polinomi oppure con funzioni trigonometriche.

Il prossimo teorema, che riportiamo per il suo interesse storico, è un caso speciale del Teorema di Stone-Weierstrass.

Teorema 4.3.1 (Weierstrass I). L'insieme delle funzioni polinomiali sull'intervallo $[0, 1]$ è denso rispetto alla convergenza uniforme nello spazio $C([0, 1])$ delle funzioni continue.

Dim. Sia $f \in C([0, 1])$. È sufficiente provare che esiste una successione di polinomi che converge uniformemente ad f su $[\eta, 1 - \eta]$ per $\eta \in (0, 1/2)$. Per riscalamento e traslazione, infatti, ci si riconduce a questo caso.

Per $n \in \mathbb{N}$ sia $\varphi_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = \alpha(n)(1 - x^2)^n$, dove la costante $\alpha(n)$ è fissata dalla condizione

$$\alpha(n) \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx = 1.$$

Per il punto (iii) dell'Esercizio 4.4.40 risulta

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} \vartheta \, d\vartheta \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2(2n + 1)}}. \tag{4.3.6}$$

Per $x \in [0, 1]$ definiamo

$$f_n(x) = \int_0^1 f(\xi)\varphi_n(x - \xi) \, d\xi.$$

La funzione $f_n(x)$ è un polinomio di grado $2n$ nella variabile x.

Fissato $\varepsilon > 0$, mostriamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\sup_{x\in[\eta,1-\eta]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \tag{4.3.7}$$

La funzione f è limitata, $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [0,1]$, ed è uniformemente continua. Dunque esiste $\delta \in (0,\eta)$ tale che $|f(x) - f(\xi)| \leq \varepsilon$ per ogni $|x - \xi| \leq \delta$. Sia $x \in [\eta, 1-\eta]$ e consideriamo

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| \leq & \left| \int_0^1 f(\xi)\varphi_n(x-\xi)\,d\xi - \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(\xi)\varphi_n(x-\xi)\,d\xi \right| \\
& + \left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(\xi)\varphi_n(x-\xi)\,d\xi - \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x)\varphi_n(x-\xi)\,d\xi \right| \\
& + \left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x)\varphi_n(x-\xi)\,d\xi - \int_0^1 f(x)\varphi_n(x-\xi)\,d\xi \right|,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| \leq & \int_{[0,x-\delta]\cup[x+\delta,1]} |f(\xi)|\varphi_n(x-\xi)\,d\xi + \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(\xi) - f(x)|\varphi_n(x-\xi)\,d\xi \\
& + |f(x)| \int_{[0,x-\delta]\cup[x+\delta,1]} \varphi_n(x-\xi)\,d\xi \\
\leq & \, 3M \int_{[0,x-\delta]\cup[x+\delta,1]} \varphi_n(x-\xi)\,d\xi + \varepsilon \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi_n(x-\xi)\,d\xi \\
\leq & \, 6M\varphi_n(\delta) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Infatti, essendo $x > \delta$

$$\int_\delta^x \varphi_n(\xi)\,d\xi \leq \varphi_n(\delta), \qquad \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(\xi)\,d\xi \leq 2.$$

Da (4.3.6) segue che

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\delta) = \lim_{n\to\infty} \alpha(n)(1-\delta^2)^n = 0.$$

La (4.3.7) è provata. □

Osservazione 4.3.2. Naturalmente il Teorema 4.3.1 vale su qualunque intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.

Una dimostrazione alternativa del Teorema 4.3.1 è abbozzata nell'Esercizio 4.4.42.

Definizione 4.3.3. Le funzioni 2π–periodiche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del tipo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad x \in \mathbb{R},$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, sono dette polinomi trigonometrici.

Teorema 4.3.4 (Weierstrass II). *L'insieme dei polinomi trigonometrici è denso rispetto alla convergenza uniforme nell'insieme delle funzioni continue 2π–periodiche.*

Dim. Diamo solo un cenno della dimostrazione. Sia $\varphi_n(x) = \alpha(n)\cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)$, con $\alpha(n)$ definito dall'identità

$$\alpha(n) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right) dx = 1.$$

Le funzioni

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\varphi_n(\xi - x)d\xi$$

sono polinomi trigonometrici che approssimano f uniformemente. La dimostrazione è analoga alla precedente. $\square$

Ora passiamo al caso generale di funzioni continue su uno spazio metrico.

TEOREMA 4.3.5 (Stone-Weierstrass I). Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $V \subset C(X)$ un sottospazio vettoriale delle funzioni continue su K tale che:

(i) se $u \in V$ allora $|u| \in V$;
(ii) per ogni coppia $\xi, \eta \in X$ esistono $u, v \in V$ tali che

$$\det \begin{pmatrix} u(\xi) & v(\xi) \\ u(\eta) & v(\eta) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Allora $\overline{V} = C(X)$ nella topologia della convergenza uniforme.

DIM. Se $u, v \in V$, allora da (i) segue che le funzioni

$$\min\{u, v\} = \frac{(u+v) - |u-v|}{2}, \quad \max\{u, v\} = \frac{(u+v) + |u-v|}{2}$$

sono in V.

Siano $f \in C(X)$ ed $\varepsilon > 0$. Mostriamo che esiste $u \in V$ tale che

$$f(x) - \varepsilon \leq u(x) \leq f(x) + \varepsilon \tag{4.3.8}$$

per ogni $x \in X$.

Fissati $\xi, \eta \in X$, esiste una funzione $u_{\xi\eta} \in V$ tale che $u_{\xi\eta}(\xi) = f(\xi)$ e $u_{\xi\eta}(\eta) = f(\eta)$. Infatti, esistono $u, v \in V$ che verificano (ii), e dunque il sistema lineare

$$\begin{cases} u(\xi)\alpha + v(\xi)\beta = f(\xi) \\ u(\eta)\alpha + v(\eta)\beta = f(\eta) \end{cases}$$

ha una soluzione (α, β). La funzione $u_{\xi\eta} = \alpha u + \beta v \in V$ soddisfa le richieste.

Sia ora $\eta \in X$ fissato e per ogni ξ consideriamo la funzione $u_{\xi\eta}$. Poichè $u_{\xi\eta}(\xi) = f(\xi)$, esiste un intorno aperto $\mathscr{U}_\xi$ di ξ tale che $u_{\xi\eta}(x) \geq f(x) - \varepsilon$ per ogni $x \in \mathscr{U}_\xi$. La famiglia $\{\mathscr{U}_\xi : \xi \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X, e dunque è possibile scegliere $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$ tali che $\cup_{i=1}^k \mathscr{U}_{\xi_i} = X$. Sia

$$u_\eta = \max\{u_{\xi_1\eta}, \dots, u_{\xi_k\eta}\}.$$

Se $x \in X$ allora $x \in \mathscr{U}_{\xi_i}$ per qualche $i = 1, \dots, k$ e dunque

$$u_\eta(x) \geq u_{\xi_i\eta}(x) \geq f(x) - \varepsilon.$$

Per ogni $\eta \in X$ risulta $u_\eta(\eta) = f(\eta)$, e dunque esiste un intorno aperto $\mathscr{U}_\eta$ di η tale che $u_\eta(x) \leq f(x) + \varepsilon$ per ogni $x \in \mathscr{U}_\eta$. La famiglia $\{\mathscr{U}_\eta : \eta \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X, e dunque esistono $\eta_1, \dots, \eta_h \in X$ tali che $\cup_{j=1}^h \mathscr{U}_{\eta_j} = X$. Poniamo

$$u = \min\{u_{\eta_1}, \dots, u_{\eta_h}\}.$$

Se $x \in X$ allora $x \in \mathscr{U}_{\eta_j}$ per qualche $j = 1, \dots, h$ e dunque

$$u(x) \leq u_{\eta_j}(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Questo prova il teorema perchè $u \in V$ e la (4.3.8) è verificata.

□

Un'algebra di funzioni $\mathscr{A} \subset C(X)$ è un sottospazio vettoriale chiuso per moltiplicazione.

TEOREMA 4.3.6 (Stone-Weierstrass II). Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $\mathscr{A} \subset C(X)$ un'algebra di funzioni tale che:

(i) $1 \in \mathscr{A}$;

(ii) per ogni coppia $\xi, \eta \in X$ esiste $u \in \mathscr{A}$ tale che $u(\xi) \neq u(\eta)$.

Allora $\overline{\mathscr{A}} = C(X)$ nella topologia della convergenza uniforme.

DIM. Verifichiamo le ipotesi del Teorema 4.3.5 per $V = \overline{\mathscr{A}}$. V è uno spazio vettoriale. Fissati $\xi, \eta \in X$, la proprietà di separazione si verifica scegliendo $v = 1$ e u come nell'ipotesi (ii). Segue che

$$\det \begin{pmatrix} u(\xi) & 1 \\ u(\eta) & 1 \end{pmatrix} = u(\xi) - u(\eta) \neq 0.$$

Sia $u \in V$ e proviamo che $|u| \in V$. Ricordiamo che la serie di Taylor

$$(1+t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} t^n$$

converge uniformemente per $t \in [-1, 1]$ (si veda la Sezione 9 del Capitolo 5). Dunque si ha

$$|s| = (s^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + (s^2 - 1))^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (s^2 - 1)^n,$$

con convergenza uniforme per $s \in [-1, 1]$.

A meno di una rinormalizzazione si può supporre $\sup_{x \in X} |u(x)| \leq 1/2$ e considerare una successione $u_k \in \mathscr{A}$, $k \in \mathbb{N}$, convergente uniformemente a u che verifica $|u_k(x)| \leq 1$ per ogni $x \in X$ e $k \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$|u| = |\lim_{k\to\infty} u_k| = \lim_{k\to\infty} |u_k| = \lim_{k\to\infty} \lim_{h\to\infty} \sum_{n=0}^{h} \binom{1/2}{n} (u_k^2 - 1)^n.$$

I due limiti sono entrambi uniformi, e poichè

$$\sum_{n=0}^{h} \binom{1/2}{n} (u_k^2 - 1)^n \in \mathscr{A}$$

questo prova che $|u| \in V = \overline{\mathscr{A}}$. □

Le funzioni polinomiali formano un algebra con unità con la proprietà di separazione. Dunque, si ottiene il corollario:

COROLLARIO 4.3.7 (Weierstrass I). L'insieme delle funzioni polinomiali su $[0, 1]$ è denso in $C([0, 1])$ rispetto alla convergenza uniforme.

I polinomi trigonometrici sono pure un'algebra con unità e con la proprietà di separazione. E dunque:

COROLLARIO 4.3.8 (Weierstrass II). Una funzione $f \in C([0, 2\pi])$ tale che $f(0) = f(2\pi)$ è il limite uniforme di una successione di polinomi trigonometrici.

4. Esercizi

4.1. Spazi normati.

Esercizio 4.4.1. Siano $1 < p, q < \infty$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Provare la disuguaglianza

$$t \le \frac{1}{p} t^p + \frac{1}{q}, \quad t \ge 0,$$

e dedurre che

$$st \le \frac{t^p}{p} + \frac{s^q}{q}, \quad s, t \ge 0. \tag{4.4.9}$$

Usare questa disuguaglianza per provare la disuguaglianza (3.2.4).

Metodo alternativo: la concavità del logaritmo implica che per ogni $a, b > 0$

$$\frac{1}{p} \log a + \frac{1}{q} \log b \le \log \Big(\frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b \Big),$$

da cui segue la (4.4.9). Si osservi che, poiché il logaritmo è strettamente concavo, si ha uguaglianza nella (4.4.9) se e solo se $t^p = s^q$.

Esercizio 4.4.2. Provare che $C^1([0,1])$ con la norma

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

è uno spazio di Banach. Provare che $C^1([0,1])$ con la norma

$$\|f\|_{C^1,*} = |f(0)| + \|f'\|_\infty,$$

pure è uno spazio di Banach. Provare che le due norme sono equivalenti.

Esercizio 4.4.3. $\star$ Lo spazio $C([0,1])$ con la distanza data dalla norma integrale

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

non è uno spazio metrico completo.

Esercizio 4.4.4. $\star$ Provare che $\ell^\infty(\mathbb{R})$ non è separabile.

Esercizio 4.4.5. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si dimostri che f è Lipschitziana se e solo se $\|f'\|_\infty < \infty$.

Esercizio 4.4.6. Sia $V := C([a,b])$ dotato del prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Si dimostri che V non è completo, pertanto non è uno spazio di Hilbert.

4.2. Contrazioni e punti fissi.

ESERCIZIO 4.4.7. $\star$ Determinare tutti i numeri $\alpha \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 + \alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia una contrazione rispetto alla distanza Euclidea.

ESERCIZIO 4.4.8. Dimostrare che l'equazione $x - \frac{1}{2} - \frac{1}{1001}\sin(1000x) = 0$ ammette una e una sola soluzione in $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4.4.9. Sia $X = C([0,1])$ con la sup-norma. Provare che per $\alpha > 0$, la funzione $T : X \to X$

$$T(f)(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x} \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t} f(t)\, dt$$

è una contrazione.

ESERCIZIO 4.4.10. Sia $X = C([0,1])$ dotato della sup-norma. Dimostrare che la funzione $T : X \to X$

$$T(f)(x) = \int_0^x t f(t)\, dt + \frac{x^2}{2}$$

è una contrazione.

ESERCIZIO 4.4.11. $\star$ Sia $g \in C([0,1])$ una funzione continua fissata.

i) Provare che esiste un'unica soluzione $y \in C([0,1])$ dell'equazione funzionale

$$y(x) = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}} dt + g(x), \quad x \in [0,1].$$

ii) Calcolare la soluzione nel caso $g(x) = x$.

ESERCIZIO 4.4.12. $\star$ Sia $h \in C([0,1])$ una funzione assegnata. Verificare che l'equazione funzionale

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2}\sin(x) \int_0^x f(t) dx, \quad x \in [0,1],$$

ha una soluzione unica $f \in C([0,1])$.

ESERCIZIO 4.4.13. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione

$$\sin x + \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \alpha f(x), \quad x \in [0,1].$$

i) Provare che per $|\alpha| > 1$ l'equazione ha un'unica soluzione $f \in C^1([0,1])$.
ii) Provare che per $|\alpha| \leq 1$ l'equazione non ha soluzione.

ESERCIZIO 4.4.14. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo la funzione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T(x) = \lambda x + b, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Calcolare una formula per l'iterazione $T^k(x_0) = T \circ \ldots \circ T(x_0)$ k volte, dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto fissato;
2) Stabilire per quali valori di λ la trasformazione T è una contrazione rispetto alla distanza Euclidea e per tali valori calcolare il limite di $T^k(x_0)$ per $k \to \infty$.

Esercizio 4.4.15. $\star$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con costante di Lipschitz $L = \mathrm{Lip}(f) < 1$. Provare che la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \big(x + f(y), y + f(x)\big), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

è iniettiva e suriettiva.

Esercizio 4.4.16. $\star$ Si considerino il quadrato $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$ e la funzione $f : Q \to \mathbb{R}^2$ così definita

$$f(x, y) = \Big(\frac{1}{6}(1 - y - y^2), \frac{1}{6}(x^2 - x - 1)\Big).$$

1) Provare che $f(Q) \subset Q$.
2) Usando il teorema delle contrazioni, provare che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 6x = 1 - y - y^2 \\ 6y = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

ha una soluzione unica $(x, y) \in Q$.

Esercizio 4.4.17. $\star$ Per $n \geq 1$ siano $B = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\big\}$ e $x_0 \in B$ tale che $|x_0| \leq \frac{1}{12}$. Sia poi $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la funzione

$$T(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x + x_0.$$

1) Provare che T trasforma B in se, ovvero che $T(B) \subset B$.
2) Provare che l'equazione $T(x) = x$ ha una soluzione unica $x \in B$.

Esercizio 4.4.18. Provare il Teorema 4.1.4 nel caso $n = 1$. Se $f : [0, 1] \to [0, 1]$ è continua allora esiste $x \in [0, 1]$ tale che $f(x) = x$.

Esercizio 4.4.19. $\star$ Sia X uno spazio metrico compatto e sia $T : X \to X$ un'applicazione tale che $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$ tali che $x \neq y$. Provare che T ha un unico punto fisso in X.

4.3. Trasformazioni lineari.

Esercizio 4.4.20. Sia $X = C([0, 1])$ munito della sup-norma e sia $T : X \to \mathbb{R}$ l'applicazione

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\big(1/n\big).$$

i) Provare che $T \in \mathscr{L}(X, \mathbb{R})$;
ii) Calcolare $\|T\|$;
iii) Stabilire se esiste una funzione $f \in X$ con $\|f\|_\infty \leq 1$ tale che $T(f) = \|T\|$.

Esercizio 4.4.21. Si consideri il sottospazio c_{00} di ℓ^∞ definito da

$$c_{00} := \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty : \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } x_i = 0\ \forall\, i \geq \bar{n}\}.$$

Si dimostri che l'applicazione $T : c_{00} \to c_{00}$ definita da $(T(x))_i := i x_i$ è lineare ma non continua.

Esercizio 4.4.22. Si determini la chiusura in ℓ^∞ del sottospazio c_{00} introdotto nell'Esercizio 4.4.21.

Esercizio 4.4.23. Sia $X = \{f \in C^1([-\pi,\pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\}$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$. Sia $T : X \to \mathbb{R}$ la trasformazione

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Provare che la serie che definisce $T(f)$ converge,che T è lineare ma non limitata.

Esercizio 4.4.24. Siano X e Y spazi normati. Provare che se Y è completo, allora anche $\mathscr{L}(X,Y)$ è completo, con la norma operatoriale.

Esercizio 4.4.25. $\star$ Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma, e sia $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo l'applicazione $T : X \to X$

$$T(f)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)\,dt, \quad f \in X.$$

i) Provare che $s \mapsto T(f)(s)$ è continua su $[0,1]$.
ii) Provare che $T \in \mathscr{L}(X,X)$.
iii) Dare condizioni su k affinchè T sia una contrazione.

4.4. Compattezza e teorema di Ascoli-Arzelà.

Esercizio 4.4.26. Sia (X,d) uno spazio metrico totalmente limitato; si dimostri che X è separabile.

Suggerimento: per ogni $k \geq 1$ intero esistono $x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{n_k}^k \in X$ tali che $X \subset \cup_{i=1}^{n_k} B(x_i, 1/k)$. Dimostrare che $E := \{x_i^k : k \in \mathbb{N}, k \geq 1, i = 1,2,\ldots,n_k\}$ è denso e al più numerabile.

Esercizio 4.4.27. Siano A, B costanti positive fissate e $x_0 \in [0,1]$; sia poi $V = \{f \in C([0,1]) : |f(x_0)| \leq A \text{ e } \mathrm{Lip}(f) \leq B\}$. Provare che V è un sottoinsieme compatto di $C([0,1])$.

Esercizio 4.4.28. Siano $a, b, x_0, M \in \mathbb{R}$ fissati con $a < x_0 < b$ e $M > 0$; si consideri poi una famiglia $K \subset C([a,b])$ di funzioni equicontinue e tali che $|f(x_0)| \leq M$ per ogni $f \in K$. Si dimostri che K è equilimitata.

Esercizio 4.4.29. Sia (X,d) uno spazio metrico; una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *semicontinua inferiormente* se

$$\forall\, x_0 \in X \qquad f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x).$$

Si dimostri che, se X è compatto ed $f : X \to \mathbb{R}$ è semicontinua inferiormente, allora f ammette minimo in X.

Esercizio 4.4.30. Ricordiamo che la *lunghezza* $L(\gamma)$ di una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è definita da

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_M = b \right\}.$$

Dimostrare che L è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza puntuale: se $\gamma_n \to \gamma$ puntualmente in $[a,b]$, allora $L(\gamma) \leq \liminf_{n\to\infty} L(\gamma_n)$.

ESERCIZIO 4.4.31. Siano $C \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e $x, y \in C$ tali che esiste una curva $\bar{\gamma} : [0,1] \to C$ continua tale che $\bar{\gamma}(0) = x$, $\bar{\gamma}(1) = y$ e $L(\bar{\gamma}) < +\infty$. Si dimostri che la lunghezza L ammette minimo all'interno della classe di curve Γ definita da

$$\Gamma := \{\gamma : [0,1] \to C : \gamma \text{ è continua in } [0,1],\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\}.$$

Suggerimento: si utilizzi il fatto che ogni curva continua di lunghezza finita si può riparametrizzare a velocità costante, ovvero in modo che $L(\gamma_{|[s,t]}) = |s-t|L(\gamma)$ per ogni $0 \leq s < t \leq 1$.

ESERCIZIO 4.4.32. Sia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e integrabile secondo Riemann su $[0,1]$. Si dimostri che il funzionale $E : Lip([0,1]) \to \mathbb{R}$ definito da

$$E(f) := \mathrm{Lip}(f) + \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx, \qquad f \in Lip([0,1])$$

ammette minimo.

ESERCIZIO 4.4.33. $\star$ Sia V l'insieme di tutte le funzioni $f \in C([0,2\pi])$ fatte nel seguente modo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx), \quad x \in [0, 2\pi],$$

dove i coefficienti verificano $|a_n| \leq 1/n^3$. Provare che V è un sottoinsieme compatto di $C([0,2\pi])$.

ESERCIZIO 4.4.34. Stabilire se il seguente sottoinsieme di $\ell^2(\mathbb{R})$ è compatto:

$$K = \{x \in \ell^2(\mathbb{R}) : |x_i| \leq 1/i,\ i \geq 1\}.$$

ESERCIZIO 4.4.35. Stabilire se il seguente sottoinsieme di $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è compatto:

$$K = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : |x_i| \leq 1/\log(1+i),\ i \geq 1\}.$$

4.5. Altri esercizi.

ESERCIZIO 4.4.36. $\star$ Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme non-vuoto e definiamo la funzione distanza

$$f(x) = \mathrm{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Provare che f è 1-Lipschitziana.

ESERCIZIO 4.4.37. $\star$ Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e sia $x \in \mathbb{R}^n$. Un punto $\bar{x} \in A$ si dice proiezione metrica di $x \in \mathbb{R}^n$ su A se $|x - \bar{x}| = \mathrm{dist}(x, A)$. Provare che ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ ha almeno una proiezione metrica. Provare che se A è convesso allora la proiezione metrica è unica.

ESERCIZIO 4.4.38. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e consideriamo il sottografico $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\big\}$. È vero che ogni $p \in \partial A$ è proiezione metrica di almeno un punto $q \in \mathbb{R}^2 \setminus A$?

Rispondere alla stessa domanda con $f \in C^2(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 4.4.39. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ sia $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ una matrice $n \times n$ simmetrica tale che $x \mapsto A(x)$ sia continua, ovvero $x \mapsto a_{ij}(x)$ è continua per ogni

$i, j = 1, \dots, n$. Siano $\lambda_1(x) \le \dots \le \lambda_n(x) \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A(x)$. Per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\lambda_1(x)|v|^2 \le \langle A(x)v, v\rangle \le \lambda_n(x)|v|^2.$$

Supponiamo che $\lambda_1 \ge 0$. Per ogni curva $\gamma \in C^1([0,1];\mathbb{R}^n)$, o più in generale C^1 a tratti su $[0,1]$, definiamo la lunghezza

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \langle A(\gamma(t))\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle^{1/2} dt.$$

Quando $A(x)$ è la matrice identità si ottiene la lunghezza Euclidea di γ.

Dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiamo

$$d(x,y) = \inf\big\{\ell(\gamma) : \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n\ C^1 \text{ a tratti con } \gamma(0) = x \text{ e } \gamma(1) = y\big\}.$$

1) Supponiamo che esista $m > 0$ tale che $\lambda_1(x) \ge m$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.
2) Supponiamo in aggiunta che esista $M > 0$ tale che $\lambda_n(x) \le M$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico completo.

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ è un esempio di "varietà Riemanniana".

4.6. Teorema di Stone-Weierstrass.

Esercizio 4.4.40. Per $n \in \mathbb{N}$ si consideri l'integrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\vartheta\, d\vartheta.$$

Provare che:

(i) $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ per ogni $n \ge 2$;
(ii) $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ per ogni $n \ge 1$;
(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\pi/2}$.

Esercizio 4.4.41. $\star$ Sia V il sottospazio vettoriale di $C([0,1];\mathbb{R})$ generato (span) dalle funzioni $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}$ al variare di $\alpha \ge 1$. Provare che $\overline{V} = C([0,1];\mathbb{R})$ con chiusura nella la topologia della convergenza uniforme.

Esercizio 4.4.42. In questo esercizio forniremo una dimostrazione alternativa del Teorema 4.3.1.

(i) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua; si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e affine a tratti tale che $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Suggerimento: sfruttare il fatto che f è uniformemente continua.
(ii) Osservare che ogni funzione continua e affine a tratti in $[0,1]$ si può scrivere come combinazione lineare di funzioni del tipo $h(x) = (x - x_0)^+$, dove $t^+ = t$ se $t \ge 0$ e $t^+ = 0$ se $t < 0$.
(iii) Si dimostri che la funzione $|x|$ si può approssimare uniformemente in $[-M, M]$ con polinomi. Suggerimento: osservare che $|x| = \sqrt{1 - (1 - x^2)}$ ed utilizzare la Sezione 9 del Capitolo 5.
(iv) Dedurre il Teorema 4.3.1 dai punti precedenti, osservando che $t^+ = \frac{t}{2} + \frac{|t|}{2}$.

CAPITOLO 5

Convergenza uniforme

1. Convergenza uniforme di successioni di funzioni

Siano X un insieme ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. Tipicamente, X sarà un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ oppure di $\mathbb{C}$. La funzione f può anche prendere valori in $\mathbb{C}$. Definiamo la "sup-norma" di f su X nel seguente modo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Definizione 5.1.1 (Convergenza uniforme). Siano $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Diciamo che la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f *uniformemente su* X se

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Questo significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n$ e per ogni $x \in X$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Il valore $\bar{n}$ è uniforme per tutti gli $x \in X$.

La convergenza uniforme implica quella puntuale ma non viceversa.

Esempio 5.1.2. Sia $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f_n(x) = x^n$. Per $x \in [0, 1]$ si ha il limite puntuale

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

D'altra parte la convergenza non è uniforme su $[0, 1]$ in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1.$$

Questo estremo superiore può essere equivalentemente calcolato su $[0, 1)$. Si ha invece convergenza uniforme su ogni intervallo del tipo $[0, \delta]$ con $0 \leq \delta < 1$.

Esempio 5.1.3. Sia $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la funzione

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } 0 \leq x < 1/n, \\ 2 - nx & \text{se } 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0 & \text{se } x \geq 2/n. \end{cases}$$

Per $x \in [0, 1]$ si ha il limite puntuale $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, tuttavia la convergenza non è uniforme in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1.$$

Si ha invece convergenza uniforme su ogni intervallo del tipo $[\delta, 1]$ con $0 \leq \delta < 1$.

TEOREMA 5.1.4 (Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme). Siano $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Allora $f_n \to f$ uniformemente in X se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{n} \in\ N$ tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n},\ \forall x \in X.$$

DIM. Se $f_n \to f$ uniformemente allora esiste un opportuno $\bar{n}$ tale che, per ogni $n, m \geq \bar{n}$, vale

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty < 2\varepsilon.$$

Questo dimostra la prima implicazione.

Vediamo l'implicazione inversa. Notiamo anzitutto che per ogni $x \in X$ la successione $(f_n(x))_n$ è di Cauchy, dunque converge ad un valore reale che chiamiamo $f(x)$. Riprendendo l'ipotesi e mandando al limite $m \to +\infty$ troviamo che

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n},\ \forall x \in X,$$

da cui $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Questo conclude la dimostrazione. □

2. Convergenza uniforme e continuità

In questa sezione vedremo che il limite uniforme di funzioni continue è ancora una funzione continua.

TEOREMA 5.2.1 (Scambio dei limiti). Siano (X, d) uno spazio metrico ed $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Supponiamo che:

(i) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$;

(ii) Ogni funzione f_n è continua nel punto $x_0 \in X$.

Allora esistono e sono uguali i seguenti limiti

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x). \tag{5.2.10}$$

In particolare, f è continua in x_0.

DIM. Dobbiamo provare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha per ogni $x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$

Scegliamo un $n \geq \bar{n}$. Per la continuità di f_n in x_0 esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Dunque, per $d(x, x_0) < \delta$ avremo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Questo prova la continuità di f nel punto x_0 e con ciò la formula sullo scambio dei limiti (5.2.10). □

Osservazione 5.2.2. Più in generale: se x_0 è un punto di accumulazione per X, $f_n \to f$ uniformemente su X, esiste per ogni $n \in \mathbb{N}$ il limite $L_n := \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ e $L_n \to L$ per $n \to \infty$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L. \tag{5.2.11}$$

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 5.2.1; si tratta anche in questo caso di uno "scambio di limiti", dato che la (5.2.11) è equivalente alla

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

E' utile osservare che quanto appena affermato si può applicare in particolare al caso $X \subset \mathbb{R}$ e $x_0 = \pm\infty$.

Indichiamo con $C(X) = C(X;\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni continue su X a valori reali.

Corollario 5.2.3. Siano (X, d) uno spazio metrico ed $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni. Supponiamo che $f_n \in C(X)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Allora, anche $f \in C(X)$.

Il prossimo teorema dà condizioni sufficienti per avere la convergenza uniforme.

Teorema 5.2.4 (Dini). Sia X uno spazio metrico compatto, e siano $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ funzioni continue, $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in X$.

Allora, la convergenza in ii) è uniforme su X.

Dim. Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale che $\|f_n - f\|_\infty > \varepsilon$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$. Dunque esiste una selezione crescente di indici $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ed esistono punti $x_{n_k} \in X$ tali che

$$f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Siccome X è compatto, si può assumere senza perdere di generalità che esista $x_0 \in X$ tale che $x_{n_k} \to x_0 \in X$ per $k \to \infty$. Altrimenti, si estrae un'ulteriore sottosuccessione e ci si riconduce a questo caso.

Sia ora $m \in \mathbb{N}$ e sia $n_k \ge m$. Per la monotonia i) avremo $f_m(x_{n_k}) \le f_{n_k}(x_{n_k})$, e dunque

$$f(x_{n_k}) - f_m(x_{n_k}) \ge f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon, \quad \text{se } m \le n_k.$$

Facendo tendere $k \to \infty$ e usando $x_{n_k} \to x_0$ insieme alla continuità di f ed f_m, si ottiene la disuguaglianza

$$f(x_0) - f_m(x_0) \ge \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Questo contraddice la ii) nel punto $x = x_0$.

□

Osservazione 5.2.5. Chiaramente il Teorema 5.2.4 continua a valere anche se l'ipotesi i) viene rimpiazzata dalla

i') $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 5.2.6. Si considerino $X = \mathbb{R}$ e la successione

$$f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Essa converge puntualmente a $f(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; per il Teorema 5.2.4 (e per l'osservazione 5.2.5), la convergenza è anche uniforme su ogni compatto $K \subset \mathbb{R}$.

Si può in verità dimostrare che la convergenza è uniforme su $\mathbb{R}$; un facile studio della monotonia della differenza $f_n - f$ (che lasciamo al lettore a mo' di esercizio) assicura infatti che

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(0) - f(0)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

3. Convergenza uniforme e differenziabilità

Nel seguente teorema proveremo che se una successione di funzioni derivabili converge in un punto e le derivate convergono uniformemente, allora la successione converge uniformemente. E' utile osservare che, al contrario, la convergenza uniforme di funzioni derivabili (invece che delle loro derivate) non garantisce la derivabilità del limite: si veda l'Esempio 5.2.6.

Teorema 5.3.1. Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni derivabili. Supponiamo che:

i) esista $x_0 \in [0,1]$ tale che la successione $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converga;
ii) la successione di funzioni $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converga uniformemente su $[0,1]$ ad una funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Allora la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0,1]$ ad una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, f è derivabile ed $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [0,1]$.

Dim. Proviamo innanzi tutto che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Sarà sufficiente verificare che la successione è uniformemente di Cauchy. Dati $n, m \in \mathbb{N}$, per il Teorema di Lagrange per ogni $x \in [0,1]$ esiste $\xi \in [x_0, x]$ tale che

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + \big(f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\big)(x - x_0).$$

Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \|f_n' - f_m'\|_\infty.$$

In conclusione, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $[0,1]$ ad una funzione $f \in C([0,1])$.

Sia ora $\bar{x} \in [0,1]$ un punto generico, e definiamo le funzioni $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} & \text{se } x \neq \bar{x} \\ f_n'(\bar{x}) & \text{se } x = \bar{x}. \end{cases}$$

Per la derivabilità di ciascuna f_n, le funzioni g_n sono continue.

Proviamo che la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy. Per $x \neq \bar{x}$ abbiamo

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x}) - (f_m(x) - f_m(\bar{x}))}{x - \bar{x}} = \frac{h(x) - h(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

dove abbiamo posto $h = f_n - f_m$, che è continua su $[0,1]$ e derivabile per $x \neq \bar{x}$. Per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in [x, \bar{x}]$ tale che $h(x) - h(\bar{x}) = h'(\xi)(x - \bar{x})$, e dunque

$$g_n(x) - g_m(x) = h'(\xi) = f_n'(\xi) - f_m'(\xi).$$

Si deduce che $\|g_n - g_m\|_\infty \leq \|f_n' - f_m'\|_\infty$ e dunque $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente di Cauchy dal momento che lo è $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$. La conclusione è che la successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

Proviamo che f è derivabile e che $f' = g$. Per il Teorema sullo scambio dei limiti si ha

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}}\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

e dunque

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n'(\bar{x}) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} \\ &= \lim_{x\to\bar{x}}\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

Riassumiamo il Teorema 5.3.1 nel seguente corollario.

Corollario 5.3.2 (Scambio di derivata e limite). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni derivabili su $[0,1]$. Supponiamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga puntualmente e che $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converga uniformemente. Allora, per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx} f_n(x).$$

Osservazione 5.3.3. Il Teorema 5.3.1 continua a valere quando $[0,1]$ è sostituito con un qualsiasi altro intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Su intervalli illimitati il Teorema 5.3.1 continua a valere a patto di sostituire l'affermazione "$f_n \to f$ uniformemente nell'intervallo" con l'affermazione "$f_n \to f$ puntualmente nell'intervallo e uniformemente in ogni sottointervallo limitato".

In effetti, le funzioni $f_n(x) := x/n$ sono tali che $(f_n(0))_n$ è convergente e $f_n' = 1/n$ converge uniformemente a 0 in $\mathbb{R}$; tuttavia, $f_n \to 0$ puntualmente ma non uniformemente in $\mathbb{R}$. Si ha invece $f_n \to 0$ uniformemente su ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$.

4. Convergenza uniforme e integrale di Riemann

Vedremo che con la convergenza uniforme è possibile portare il limite sotto segno di integrale. Il Teorema 5.4.1, tuttavia, è di uso limitato. Teoremi di passaggio al limite sotto segno di integrale molto più efficienti sono il Teorema della convergenza dominata e il Teorema della convergenza monotona (o di Beppo Levi). Questi teoremi richiedono la teoria dell'integrale di Lebesgue e verranno visti nella parte B del corso e ripresi nel corso di Analisi Reale.

Teorema 5.4.1 (Scambio di limite e integrale). Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni Riemann-integrabili e sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $f_n \to f$ uniformemente su $[0,1]$ per $n \to \infty$, allora f è Riemann-integrabile e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx. \tag{5.4.12}$$

Dim. Proviamo preliminarmente che la funzione f è limitata. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per la convergenza uniforme esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

e dunque per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq \varepsilon + \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|.$$

Questo prova la limitatezza di f.

Proviamo ora che f è Riemann-integrabile. Sia $\varepsilon > 0$ fissato, e mostriamo che esiste una scomposizione $\sigma = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1\}$ dell'intervallo $[0,1]$, per $m \in \mathbb{N}$ opportuno, tale che

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq \varepsilon,$$

dove

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^m |I_i| \sup_{x\in I_i} f(x) \quad \text{e} \quad s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^m |I_i| \inf_{x\in I_i} f(x),$$

sono le somme superiori e inferiori di f relativamente a σ, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e $|I_i| = x_i - x_{i-1}$.

Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Si ha allora

$$S(f,\sigma) \leq \sum_{i=1}^m |I_i| \sup_{x\in I_i}(f(x) - f_n(x)) + \sum_{i=1}^m |I_i| \sup_{x\in I_i} f_n(x) \leq \varepsilon + S(f_n,\sigma),$$

e analogamente

$$s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^m |I_i| \inf_{x\in I_i}(f(x) - f_n(x)) + \sum_{i=1}^m |I_i| \inf_{x\in I_i} f_n(x) \geq -\varepsilon + s(f_n,\sigma).$$

Sottraendo membro a membro le due disuguaglianze si ottiene

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq 2\varepsilon + S(f_n,\sigma) - s(f_n,\sigma).$$

Tale maggiorazione vale per una qualsiasi scomposizione σ e per ogni $n \geq \bar{n}$. Fissato un tale n, dal momento che f_n è Riemann-integrabile, possiamo scegliere la scomposizione σ in modo tale che $S(f_n,\sigma) - s(f_n,\sigma) \leq \varepsilon$, e quindi

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq 3\varepsilon.$$

Questo prova l'integrabilità di f.

Per provare la (5.4.12) è sufficiente osservare che fissato $\varepsilon > 0$ per $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\Big| \int_0^1 f_n(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \Big| = \Big| \int_0^1 (f_n(x) - f(x))dx \Big| \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \leq \varepsilon.$$

$\square$

Osservazione 5.4.2. Il Teorema 5.4.1 vale naturalmente per integrali definiti su un qualsiasi intervallo limitato; non vale invece per integrali su intervalli illimitati. Ad esempio, le funzioni

$$f_n(x) := \begin{cases} 1/n & \text{se } x \in [0, n] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

convergono uniformemente su $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 0$, e tuttavia

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 1 \not\to \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

5. Serie di funzioni. Criterio di Weierstrass

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali definita su A. Introduciamo la successione delle somme parziali $s_n = f_1 + \ldots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ovviamente, $s_n : A \to \mathbb{R}$ sono ancora funzioni.

Definizione 5.5.1 (Convergenza puntuale e uniforme di serie di funzioni). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su un insieme A. Diciamo che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in A,$$

converge puntualmente su A se per ogni $x \in A$ converge la successione $\big(s_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme parziali.

Diciamo che la serie di funzioni *converge uniformemente su A* se converge uniformemente su A la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Per il Corollario 5.2.3, se tutte le funzioni f_n sono continue su A e se la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in A,$$

converge uniformemente su A, allora la funzione f è continua su A.

Se, inoltre, le funzioni f_n sono derivabili su A e la serie delle derivate converge uniformemente su A allora per il Teorema 5.3.1 possiamo scambiare il segno di somma e derivata

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x), \quad x \in A.$$

Se infine $A = [0, 1]$, le funzioni f_n sono Riemann-integrabili e la serie converge uniformemente, allora dal Teorema 5.4.1 segue che possiamo scambiare le operazioni di somma e integrazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx,$$

dove la funzione somma è Riemann-integrabile.

Per tutti questi motivi, è importante riuscire a capire se una serie converge uniformemente. Lo strumento più efficiente per farlo è il Criterio di Weierstrass.

Teorema 5.5.2 (Criterio di Weierstrass). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali definite su un insieme A. Se esiste una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\sup_{x\in A} |f_n(x)| \leq a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,$$

allora la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su A.

Dim. Osserviamo in primo luogo che la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente e quindi semplicemente in ogni punto $x \in A$. Stimiamo la differenza

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \Big| = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

stima che vale per ogni $x \in A$, e dunque

$$\sup_{x\in A} \Big| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Siccome la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, il suo resto è infinitesimo, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0,$$

e quindi per confronto si ha anche

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \Big| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \Big| = 0.$$

Questa è la convergenza uniforme della serie. □

Talvolta si dice che una serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge totalmente su* A se converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x)| < \infty.$$

Il teorema precedente dice allora che la convergenza totale su A implica la convergenza uniforme su A. Il viceversa non vale. Il lettore è invitato a trovare un controesempio semplice.

Tutti i discorsi fatti valgono anche per le serie complesse.

Esempio 5.5.3. Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ il disco complesso unitario e consideriamo la serie di funzioni su A

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = s(z).$$

Sappiamo che la serie converge puntualmente su A. Vediamo se c'è convergenza uniforme su A. Le somme parziali sono

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

e la differenza con la somma limite è

$$|s_n(z) - s(z)| = \Big|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z}\Big| = \Big|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z}\Big| = \Big|\frac{z^{n+1}}{1 - z}\Big|,$$

e quindi

$$\sup_{z\in A}\Big|\frac{z^{n+1}}{1 - z}\Big| = \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dunque non c'è convergenza uniforme su A. Tuttavia, c'è convergenza uniforme su ogni insieme della forma $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \delta\}$ con $0 \le \delta < 1$. Infatti si ha

$$\sup_{z\in A_\delta} \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} \le \frac{\delta^{n+1}}{1 - \delta} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{n+1}}{1 - \delta} < \infty.$$

L'affermazione segue dal Criterio di Weierstrass.

6. Criterio di Abel–Dirichlet per la convergenza uniforme

Talvolta il Criterio di Weierstrass non funziona bene, ad esempio per le serie di funzioni a segno alterno. In questi casi si può cercare di studiare la convergenza uniforme con il Criterio di Abel–Dirichlet.

Lemma 5.6.1 (Somma per parti). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse, supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga e poniamo $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Per $1 \le M \le N$ vale la formula di somma per parti

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = A_M b_M - A_{N+1} b_N - \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_{n-1} - b_n).$$

Dim. La verifica è elementare:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} (A_n - A_{n+1}) b_n \\
&= \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M}^{N} A_{n+1} b_n = \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M+1}^{N+1} A_n b_{n-1} \\
&= A_M b_M - A_{N+1} b_N + \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_n - b_{n-1}).
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 5.6.2 (Criterio di Abel–Dirichlet). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa tale che converga la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{C}$ che verifica:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{x\in A}|f_n(x)| \le C < \infty \quad \text{e} \quad \sup_{x\in A}\sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)| < \infty.$$

Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ converge uniformemente su A.

Dim. Poniamo $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ cosicchè $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$. Dati $n, p \in \mathbb{N}$, usando la formula di somma per parti si trova

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x) = A_n f_n(x) - A_{n+p+1} f_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k(f_k(x) - f_{k-1}(x)).$$

Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \ge \bar{n}$ si ha $|A_n| \le \varepsilon$ e quindi per $p \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sup_{x\in A}\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k f_k(x)\Big| \le \varepsilon\Big(2C + \sup_{x\in A}\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x) - f_{k-1}(x)|\Big).$$

Poichè la successione delle somme parziali della serie in esame è uniformemente di Cauchy su A, la serie converge uniformemente su A. $\square$

7. Serie di potenze. Criteri di Abel

Riprendiamo il discorso sulle serie di potenze studiandone la convergenza uniforme. Ricordiamo che, date una successione di numeri complessi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$, una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

si dice *serie di potenze complessa* centrata nel punto z_0. Basta considerare il caso $z_0 = 0$. Le serie di potenze complesse definiscono le funzioni olomorfe, che verranno studiate nel corso di Metodi al terzo anno.

Teorema 5.7.1 (Criterio di Cauchy–Hadamard). Data la serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, sia $R \in [0,\infty]$ il numero reale (eventualmente ∞) definito dalla relazione

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Allora:

i) La serie di potenze converge assolutamente in ogni punto $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

ii) La serie di potenze converge uniformemente su ogni insieme $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \delta\}$ con $\delta < R$.
iii) La serie non converge nei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| > R$.

Il numero R si dice *raggio di convergenza* della serie di potenze.

DIM. Studiamo la convergenza assoluta della serie con il Criterio della radice. Sia

$$L(z) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z|^n} = \frac{|z|}{R}.$$

Se $|z| < R$ allora $L(z) < 1$ e la serie converge assolutamente nel punto z. Se $|z| > R$ allora $L(z) > 1$ e la serie non converge assolutamente. Il termine generale non è infinitesimo, e dunque in effetti la serie non converge nemmeno semplicemente.

Sia ora $0 \le \delta < R$. Allora si ha:

$$\sup_{z\in A_\delta} |a_n z^n| = |a_n|\delta^n, \quad \text{e inoltre} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\delta^n < \infty.$$

Che l'ultima serie converga, si vede di nuovo col Crierio della radice, usando il fatto che $\delta < R$.

La serie di potenze converge dunque totalmente su A_δ e per il Criterio di Weierstrass converge anche uniformemente su A_δ.

□

COROLLARIO 5.7.2. Siano a_n ed R come nel Teorema 5.7.1; allora, per ogni $x \in (-R, R)$ valgono le uguaglianze

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

DIM. E' sufficiente osservare che le tre serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

hanno lo stesso raggio di convergenza. Il Teorema 5.7.1 ii) consente di applicare i teoremi 5.3.1 e 5.4.1, dai quali le due uguaglianze discendono facilmente. □

Sulla frontiera del cerchio di convergenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ la serie di potenze può sia convergere che non convergere. I criteri di Abel permettono di studiare la convergenza uniforme fino al bordo del disco di convergenza.

TEOREMA 5.7.3 (Criterio di Abel I). Se la serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge nel punto $z_0 \in \mathbb{C}$, allora converge uniformemente sul segmento $[0, z_0] = \{tz_0 \in \mathbb{C} : 0 \le t \le 1\}$.

Dim. Per $x \in [0,1]$ consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n f_n(x), \qquad f_n(x) = x^n.$$

La successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ è uniformemente limitata su $[0,1]$ e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

La convergenza uniforme segue dal Teorema 5.6.2. □

Il citerio precedente si può migliorare nel seguente modo. Fissati $\vartheta \in [0,\pi/2)$ e $r_0 > 0$ definiamo il cono troncato con vertice nel punto 1

$$C(\vartheta, 1, r_0) = \{z = 1 + r\mathrm{e}^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \varphi \in [\pi - \vartheta, \pi + \vartheta],\ 0 \le r \le r_0\}.$$

Teorema 5.7.4 (Criterio di Abel II). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga. Per ogni $\vartheta \in [0,\pi/2)$ esiste $r_0 > 0$ tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente su $C(\vartheta, 1, r_0)$.

Dim. Fissiamo $r_0 > 0$ sufficientemente piccolo in modo tale che $C(\vartheta, 1, r_0) \cap \{|z| = 1\} = \{1\}$. Mostriamo che la successione di funzioni $f_n(z) = z^n$ verifica le condizioni del Teorema 5.6.2. In primo luogo $|f_n(z)| \le 1$ su $C(\vartheta, 1, r_0) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$. Inoltre, per $z = 1 + r\mathrm{e}^{i\varphi} \in C(\vartheta, 1, r_0)$ si ha

$$|z^{n+1} - z^n| = |z|^n |z-1| = r|1 + r\mathrm{e}^{i\varphi}|^n,$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^{n+1} - z^n| = r\frac{1}{1 - |1 + r\mathrm{e}^{i\varphi}|} = r\frac{1 + |1 + r\mathrm{e}^{i\varphi}|}{1 - |1 + r\mathrm{e}^{i\varphi}|^2} = \frac{1 + |1 + r\mathrm{e}^{i\varphi}|}{-r - 2\cos\varphi}.$$

Se $\varphi \in [\pi - \vartheta, \pi + \vartheta]$ allora $-2\cos\varphi \ge 2\cos\vartheta > 0$, e scegliendo $r_0 < 2\cos\vartheta$ si trova

$$\sup_{z \in C(\vartheta,1,r_0)} \sum_{n=0}^{\infty} |z^{n+1} - z^n| < \infty.$$

□

8. Funzioni analitiche

DEFINIZIONE 5.8.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $x_0 \in I$ un punto fissato. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *analitica in* x_0 se esistono $r_0 > 0$ ed una successione $(a_n)_n$ tali che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad \forall\, x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0).$$

Il più grande r_0 (eventualmente $+\infty$) per cui vale la precedente uguaglianza si chiama *raggio di analiticità* di f in x_0.

La funzione f si dice poi *analitica in* I se è analitica in ogni $x_0 \in I$.

OSSERVAZIONE 5.8.2. Il Corollario 5.7.2 implica che, se f è analitica in x_0, allora necessariamente $f \in C^\infty(x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ e $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. In altre parole, le funzioni analitiche in x_0 sono le funzioni lisce che coincidono con il proprio sviluppo di Taylor in un intorno di x_0.

Si osservi che esistono funzioni di classe C^∞ che non sono analitiche: si consideri il caso della funzione $f(x) = e^{-1/x^2}$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$, di classe C^∞ su $\mathbb{R}$. Si verifica che, in $x_0 = 0$, f e tutte le sue derivate sono nulle: pertanto f non può essere analitica in 0 perché altrimenti coinciderebbe con il proprio sviluppo (nullo, mentre f non lo è).

TEOREMA 5.8.3. Se f è analitica in x_0 con raggio di analiticità r_0, allora f è anche analitica in ogni $\bar{x} \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ con raggio di analiticità (in $\bar{x}$) non inferiore a $r_0 - |\bar{x} - x_0|$.

Per una dimostrazione si veda la Proposition 1.2.3 del libro *A Primer of Real Analytic Functions* (seconda edizione) di Krantz-Parks.

Il seguente risultato fornisce una condizione sufficiente per l'analiticità.

PROPOSIZIONE 5.8.4. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ e $f \in C^\infty(x_0 - r, x_0 + r)$; supponiamo esistano $C > 0$ e $\Lambda > 0$ tali che

$$|f^{(k)}(x)| \leq C\Lambda^k k! \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Allora f è analitica in x_0 con raggio maggiore o uguale a $m := \min\{r, \frac{1}{\Lambda}\}$.

DIM. Sia $x \in (x_0 - m, x_0 + m)$; per la formula di Taylor con resto di Lagrange esiste ξ tra x e x_0 tale che

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{C\Lambda^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \;\leq\; (\Lambda m)^{n+1}. \end{aligned}$$

Poiché $\Lambda m < 1$, la precedente quantità è infinitesima per $n \to +\infty$, pertanto la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ converge a $f(x)$. □

Esempio 5.8.5. Dimostriamo che $f(x) = e^x$ è analitica in 0 con raggio di analiticità $+\infty$, da cui segue la nota uguaglianza

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sia $r > 0$ fissato; poiché $\lim_{k\to\infty} \frac{e^r r^k}{k!} = 0$ esiste $C = C(r) > 0$ tale che $\frac{e^r r^k}{k!} \leq C$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Pertanto, per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$\left| \frac{d}{dx} e^x \right| = |e^x| \leq e^r \leq C \left(\frac{1}{r} \right)^k k! \qquad \forall x \in (-r, r)$$

e la Proposizione 5.8.4 garantisce che e^x è analitica in 0 con raggio $\geq r$. L'arbitrarietà di r permette di concludere.

Esercizio 5.8.6. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Concludiamo la sezione con un enunciato che, in qualche modo, spiega come la condizione sufficiente per l'analiticità della Proposizione 5.8.4 sia anche necessaria. Per una dimostrazione si rimanda alla Proposition 1.2.12 del libro *A Primer of Real Analytic Functions* (seconda edizione) di Krantz-Parks.

Teorema 5.8.7. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto ed $f \in C^\infty(I)$. Allora f è analitica in I se e solo se per ogni $x_0 \in I$ esistono un intervallo aperto J e costanti $C > 0$ e $\Lambda > 0$ tali che $x_0 \in J \subset I$ e

$$|f^{(k)}(x)| \leq C \Lambda^k k! \quad \forall\, x \in J.$$

9. La serie binomiale

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato; lo sviluppo di Mac-Laurin della funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ (definita per $x \geq -1$) è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad \text{dove } \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

ed è da intendersi $\binom{\alpha}{0} = 1$. Si osservi che, per $\alpha \in \mathbb{N}$, il coefficiente binomiale è quello classico e, inoltre, la serie diventa una somma finita (il classico binomio di Newton).

Per il criterio del rapporto, la serie ha raggio di convergenza pari a 1, dato che

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = 1.$$

Ne segue che la somma $s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ è ben definita e derivabile in $(-1, 1)$ con derivata

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1}.$$

Semplici manipolazioni algebriche restituiscono l'uguaglianza $(1+x)s'(x) = \alpha s(x)$, valida per $x \in (-1,1)$; da ciò si deduce che

$$\big(s(x)(1+x)^{-\alpha}\big)' = (1+x)^{-\alpha-1}\big((1+x)s'(x) - \alpha s(x)\big) = 0,$$

ovvero $s(x) = c(1+x)^\alpha$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. Poiché $s(0) = 0$ si deve avere $c = 1$, pertanto abbiamo l'uguaglianza desiderata

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \text{per ogni } x \in (-1,1).$$

Studiamo ora il caso particolare $\alpha = 1/2$ e dimostriamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\binom{1/2}{n}\right|$ è convergente: questo dimostrerà che

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n \qquad \text{per ogni } x \in [-1,1]$$

con convergenza totale nell'intervallo $[-1,1]$. Osserviamo che

$$\left| \frac{\binom{1/2}{n+1}}{\binom{1/2}{n}} \right| = \frac{2n-1}{2n+2} = 1 - \frac{3}{2n+2} \sim 1 - \frac{3}{2n}.$$

Sia $\beta \in (1, 3/2)$ e si scelga $\bar{n}$ intero tale che

$$\log\left(1 - \frac{3}{2n+2}\right) + \beta \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \le 0 \qquad \forall\, n \ge \bar{n}; \tag{5.9.13}$$

si osservi che il membro di sinistra nella precedente disuguaglianza è asintotico a $(\beta - \frac{3}{2})/n$, ciò che garantisce l'esistenza di $\bar{n}$. Dimostriamo che, ponendo $C := \bar{n}^\beta \left|\binom{1/2}{\bar{n}}\right|$, si ha

$$\left|\binom{1/2}{n}\right| \le \frac{C}{n^\beta} \qquad \forall\, n \ge \bar{n}. \tag{5.9.14}$$

Poiché $\beta > 1$, la (5.9.14) implica chiaramente la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\binom{1/2}{n}\right|$, come desiderato.

Dimostriamo (5.9.14) per induzione: il caso $n = \bar{n}$ segue dalla definizione di C. Se poi la (5.9.14) vale per un certo $n \ge \bar{n}$, allora

$$\left|\binom{1/2}{n+1}\right| = \frac{2n-1}{2n+2} \left|\binom{1/2}{n}\right| \le \frac{2n-1}{2n+2} \frac{C}{n^\beta} = \left(1 - \frac{3}{2n+2}\right) \frac{C}{n^\beta} \le \frac{C}{(n+1)^\beta},$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla

$$\left(1 - \frac{3}{2n+2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta \le 1$$

la quale è equivalente alla (5.9.13).

10. Esercizi

10.1. Successioni di funzioni.

Esercizio 5.10.1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme su opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ delle seguenti successioni di funzioni:

$$\frac{x}{n^2}e^{-x^2/n^2}, \qquad \frac{x}{n}e^{-x^2/n^2}, \qquad nxe^{-x^2n^2}, \qquad xe^{-x^2n^2}.$$

Esercizio 5.10.2. $\star$ Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{n^2 \sin\big(x/n^2\big)}{1 + n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calcolare il limite puntuale della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Provare che si ha $|f_n(x)| \le \frac{|x|}{1+x^2n^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3) Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 5.10.3. $\star$ Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = 2^n x\big(1 - \sqrt[n]{|x|}\big)^n, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 5.10.4. $\star$ Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definite:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log\big(x^{2n} + n^{2x}\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5.10.5. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = (1 - \sqrt[n]{x^2})^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

e discutere la convergenza uniforme delle successione.

Esercizio 5.10.6. $\star$ Sappiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza puntuale

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \mathrm{e}^x.$$

Discutere la convergenza uniforme in tale limite.

Esercizio 5.10.7. Studiare la convergenza puntuale e uniforme su opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$f_n(x) = \frac{1 + x^n}{n + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5.10.8. $\star$ Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log(1 + \mathrm{e}^{nx}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 5.10.9. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 5.10.10. $\star$ Si consideri la successione di funzioni $f_n = g_n h_n$, $n \in \mathbb{N}$, dove

$$g_n(x) = \operatorname{arctg}(nx) \quad \text{e} \quad h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calcolare il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Studiare la convergenza uniforme delle successioni $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Provare che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.10.11. Si dimostri che la convergenza puntuale in $[0, 1]$ non è metrizzabile. Precisamente: sia $\mathscr{F} := f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ lo spazio delle funzioni reali definite in $[0, 1]$; si dimostri che non esiste una distanza d su $\mathscr{F}$ tale che, per ogni successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$, valga

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0 \Longleftrightarrow \forall\, x \in [0, 1]\ f_n(x) \to f(x).$$

Suggerimento: si supponga che una tale distanza d esista e si dimostri che, per ogni $k \geq 1$, l'insieme $E_k := \{x \in [0, 1] : d(\chi_x, 0) > \frac{1}{k}\}$ è finito, dove χ_x è definita da $\chi_x(t) = 0$ se $t \neq x$ e $\chi_x(x) = 1$.

10.2. Serie di funzioni e di potenze.

Esercizio 5.10.12. Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^3 e^{-nx^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5.10.13. $\star$ Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + n^2 x)\mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2}, \quad x \geq 0.$$

Esercizio 5.10.14. $\star$ Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{nx^2 - n^2 x}.$$

Esercizio 5.10.15. $\star$ Studiare la convergenza uniforme delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{nx}, \quad x > 0; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n/2}}{x^n + n^4}, \quad x \geq 0; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + n|x|)}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5.10.16. $\star$ Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza uniforme delle seguenti serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2 + \mathrm{e}^{-n}}{1 + n^2 x^2}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{1 + x^{2n}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5.10.17. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1 + n^3 x^{4n}}, \qquad x \geq 0.$$

Si discuta, in particolare, la convergenza uniforme su $[0, 1]$ e su $[1, +\infty[$.

Esercizio 5.10.18. $\star$ Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{x}{(1 + |x|)^n}.$$

Esercizio 5.10.19. Al variare di $x > 0$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \log x) \log^n x,$$

e calcolarne la somma.

Esercizio 5.10.20. Si consideri la serie di funzioni

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-x/n}}{n}, \qquad x \geq 0.$$

Si dimostri che la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ ed uniformemente in ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$, ma che non converge uniformemente in $\mathbb{R}$. Cosa si può dire della derivabilità di $s(x)$?

Esercizio 5.10.21. Si consideri la serie di funzioni

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-x/n}}{1 + nx}, \qquad x \geq 0.$$

Si dimostri che la serie converge totalmente in $[0, +\infty[$. Si studi poi la serie derivata, dimostrando in particolare che questa converge puntualmente in $(0, +\infty)$ e totalmente in $[\delta, +\infty]$ per ogni $\delta > 0$. Si dimostri infine che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{s(x) - s(0)}{x} = +\infty.$$

Esercizio 5.10.22. Si dimostri le seguente versione del *criterio di Gauss* per la convergenza di una serie numerica. Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali positivi tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+r}}\right) \qquad \text{per } n \to +\infty$$

per opportuni $p \in \mathbb{R}$ ed $r > 0$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Esercizio 5.10.23. Sia $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R),$$

dove $0 < R \leq \infty$ è il raggio di convergenza della serie di potenze. Provare che $f \in C^\infty(-R, R)$. Verificare inoltre che

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 5.10.24. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} + \cos x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Provare che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.10.25. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{(x^2 - 1)^n}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente per $x \in [-1, 1]$.

ii) Verificare che

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

per ogni $x \in [-1, 1]$.

Esercizio 5.10.26. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie di potenze complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n.$$

Discutere la convergenza uniforme fino alla frontiera del disco di convergenza.

Esercizio 5.10.27. Per ogni $x \in (-1, 1)$ calcolare la somma esatta delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Esercizio 5.10.28. Calcolare (per x appartenenti ad opportuni intervalli) la somma esatta delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + 2n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-2)^n) x^{2n}.$$

Esercizio 5.10.29. Studiare la convergenza uniforme della serie di Taylor di $f(x) = \log(1+x)$, $x > -1$. Provare quindi che

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Esercizio 5.10.30. $\star$ Sia $p \geq 0$ un parametro fissato. Per $x \geq 0$ si consideri la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^{p+1} \mathrm{e}^{-nx}, \quad x \geq 0.$$

i) Discutere la convergenza puntuale.
ii) Studiare la convergenza totale e uniforme.
iii) Provare che

$$f(x) \geq \int_1^{\infty} (t-1)^p x^{p+1} \mathrm{e}^{-tx}\, dt, \quad x \geq 0.$$

iv) Provare che f non è continua in $x = 0$.

Esercizio 5.10.31. $\star$ Sia $K \subset \mathbb{R}$ un insieme chiuso. Costruire una funzione $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tale che $K = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$.

10.3. Altri esercizi sulla convergenza uniforme.

Esercizio 5.10.32. $\star$ Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni periodiche, ciascuna di periodo $T_n > 0$, tali che:

1) ogni f_n sia continua;
2) $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n < \infty$;
3) $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$, per $n \to \infty$.

Provare che f è periodica.

Esercizio 5.10.33. a) La tesi nell'Esercizio 5.10.32 rimane valida anche solo con la convergenza puntuale invece che uniforme in 3). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

b) La tesi nell'Esercizio 5.10.32 rimane valida anche senza l'ipotesi 2). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

c) La tesi nell'Esercizio 5.10.32 rimane valida anche senza l'ipotesi 1). Provare questa affermazione o dare un controesempio.

Esercizio 5.10.34. Costruire funzioni $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che:
1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
2) per ogni $-\infty \leq a < b \leq \infty$ la convergenza al punto 1) non sia uniforme su (a, b).

Esercizio 5.10.35. Mostrare tramite esempi che ciascuna delle tre ipotesi: a) X compatto; b) f continua; e c) f_n continua per ogni $n \in \mathbb{N}$ è necessaria per la validità del Teorema 5.2.4.

Esercizio 5.10.36. Sia X uno spazio metrico compatto, e siano $f, f_n \in C(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Diciamo che la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente (o in modo continuo) ad f su X se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di X convergente ad $x \in X$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$. Dimostrare che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente ad f su X se e solo se converge uniformemente ad f su X.

10.4. Convergenza uniforme e integrale di Riemann.

ESERCIZIO 5.10.37. $\star$ Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+n\sin(x^2/n)}dx.$$

ESERCIZIO 5.10.38. Costruire una funzione $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tale che:

i) f sia Riemann-integrabile;

ii) detto $A=\big\{x\in[0,1]:\ f \text{ non è continua in } x\big\}$ l'insieme dei punti di discontinuità di f, si abbia $\bar{A}=[0,1]$.

ESERCIZIO 5.10.39. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x)=\Big(\frac{1}{n}+\sin^2 x\Big)^n,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Calcolare quindi il limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f_n(x)\,dx.$$

ESERCIZIO 5.10.40. $\star$ i) Provare che

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-t^2)^n dt=0.$$

ii) Si consideri la successione di funzioni $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$,

$$f_n(x)=\frac{\displaystyle\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt},\quad x\in[-1,1].$$

Calcolare il limite puntuale

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x),\quad x\in[-1,1],$$

e discutere la convergenza uniforme.

ESERCIZIO 5.10.41. Si consideri la successione di funzioni $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$,

$$f_n(x)=\int_1^n \frac{n}{ny^2+x^2}dy,\quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Calcolare il limite puntuale

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

ii) Studiare la convergenza uniforme nel limite precedente.

CAPITOLO 6

Calcolo differenziale in più variabili

1. Limiti in più variabili

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di A. Ricordiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in A$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$. Se poi $x_0 \in A$ ed $L = f(x_0)$ diremo che f è continua in x_0.

L'Esercizio 6.13.2 mostra che esistono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

1) La funzione $x \mapsto f(x, y)$ è continua in $x \in \mathbb{R}$, per ogni $y \in \mathbb{R}$ fissato;
2) La funzione $y \mapsto f(x, y)$ è continua in $y \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato;
3) La funzione $(x, y) \mapsto f(x, y)$ non è continua, ad esempio nel punto $(0, 0)$.

La seguente osservazione sui limiti "in coordinate polari" risulta spesso utile negli esercizi. Supponiamo che $0 \in \mathbb{R}^2$ sia punto di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$; allora

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \left(\sup_{\vartheta \in [0,2\pi]} |f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) - L| \right) = 0.$$

Nel caso $L = \pm\infty$ esiste un' analoga caratterizzazione del limite in coordinate polari, che omettiamo.

2. Derivate parziali e derivate direzionali in $\mathbb{R}^n$

Fissiamo su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, la base canonica $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$, dove, per ogni $i = 1, \ldots, n$, si ha

$$\mathrm{e}_i = \big(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\big) \in \mathbb{R}^n,$$

con 1 nella posizione i-esima.

Definizione 6.2.1 (Derivata parziale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ha derivata parziale i-esima, $i = 1, \ldots, n$, nel punto $x \in A$ se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\mathrm{e}_i) - f(x)}{t}.$$

Diremo che f è *derivabile in* x se esistono tutte le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Osserviamo che, essendo A aperto ed $x \in A$, si ha $x + te_i \in A$ per ogni t sufficientemente piccolo e quindi il limite che definisce la derivata parziale è ben definito.

Esempio 6.2.2. Le derivate parziali si calcolano con le regole del calcolo differenziale di una variabile. Sia ad esempio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2} \sin y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora le derivate parziali esistono in ogni punto e sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\mathrm{e}^{x^2} \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^{x^2} \cos y.$$

Esempio 6.2.3. La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, non è derivabile in $x = 0$. Per $x \neq 0$, f è invece derivabile e inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

Osservazione 6.2.4. Nella letteratura si incontrano le seguenti notazioni alternative per indicare le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f = \partial_{x_i} f = D_i f = f_{x_i}.$$

Osservazione 6.2.5 (Significato geometrico delle derivate parziali). Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le due curve $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma_1(t) = \big(x + t, y, f(x+t,y)\big), \quad \gamma_2(t) = \big(x, y+t, f(x,y+t)\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

sono derivabili in $t = 0$ e i vettori in $\mathbb{R}^3$

$$\gamma_1'(0) = (1, 0, f_x(x,y)\big), \quad \gamma_2'(0) = (0, 1, f_y(x,y)\big)$$

sono linearmente indipendenti e generatono dunque un piano 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$. Questo è il *candidato* piano tangente al grafico di

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\}$$

nel punto $(0, f(0)) \in \mathrm{gr}(f)$.

Definizione 6.2.6 (Gradiente). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x \in A$. Il vettore

$$Df(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^n$$

si dice *gradiente di f in x*.

Osservazione 6.2.7 (Significato geometrico del gradiente). Supponiamo che sia $\nabla f(x) \neq 0$. Il vettore $\nabla f(x)$ contiene due informazioni:

i) Il versore orientato $\nabla f(x)/|\nabla f(x)|$ indica la direzione orientata di massima crescita della funzione f.
ii) La lunghezza $|\nabla f(x)|$ misura la velocità di crescita.

Lasciamo, per ora, tali affermazioni alla loro vaghezza.

DEFINIZIONE 6.2.8 (Derivata direzionale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ha derivata direzionale nella direzione $v \in \mathbb{R}^n$ nel punto $x \in A$ se esiste finito il limite

$$f_v(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

ESEMPIO 6.2.9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & x = y = 0. \end{cases}$$

Calcoliamo le derivate direzionali di f in $0 \in \mathbb{R}^2$ in una generica direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ con $v \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2}.$$

Quando $v_1 = 0$ oppure $v_2 = 0$ il limite è certamente 0. Dunque, si trova in particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0.$$

Inoltre, quando $v_2 \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2}.$$

Osserviamo che il limite ottenuto non è un'espressione lineare in v.

La funzione f, dunque, ha derivata direzionale in 0 in ogni direzione. Tuttavia, f non è continua in 0, dal momento che per ogni $m \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{t \to 0} f(t, mt^2) = \frac{m}{1 + m^2}$$

e il valore del limite dipende dall'apertura della parabola.

Nel grafico di f

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{ (x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \big\}$$

c'è uno "strappo" nel punto $0 \in \mathrm{gr}(f)$. Questo impedisce l'esistenza di un "piano tangente" al grafico, comunque si intenda la nozione di "piano tangente".

In conclusione, la nozione di funzione derivabile è naturale ed utile. Tuttavia è insoddisfacente per almeno due motivi: per $n \geq 2$ la derivabilità (anche in tutte le direzioni) non implica la continuità; sempre per $n \geq 2$ la derivabilità non implica l'esistenza di un piano tangente al grafico della funzione.

3. Funzioni a valori vettoriali

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e consideriamo una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Avremo $f = (f_1, \ldots, f_m)$ dove $f_j : A \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, sono le funzioni coordinate di f. D'ora in avanti, ci atterremo alla convenzione di rappresentare f come un vettore colonna

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}. \tag{6.3.15}$$

Diciamo che f è derivabile in un punto $x \in A$ se ciascuna coordinata $f_1, \dots, f_m$ è derivabile in x. In questo caso, scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definizione 6.3.1 (Matrice Jacobiana). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione derivabile nel punto $x \in A$. La matrice

$$J_f(x) = Jf(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$$

si dice *matrice Jacobiana di f in x*. La matrice $Jf(x)$ ha m righe and n colonne.

Il significato geometrico della matrice Jacobiana è più recondito. Ritorneremo su questo punto più avanti.

4. Funzioni differenziabili

In questa sezione introduciamo la definizione di funzione *differenziabile*. Facciamo prima alcuni richiami di algebra lineare.

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare, $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Fissiamo le basi

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^n, \\ &\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_m \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Siano $T_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, i numeri reali definiti tramite la seguente relazione

$$T\mathrm{e}_j = \sum_{i=1}^m T_{ij}\mathrm{e}_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esiste una corrispondenza biunivoca fra la trasformazione lineare T e la matrice $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Scriviamo il punto $x \in \mathbb{R}^n$ come vettore colonna

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Avremo allora, con la notazione di prodotto righe-colonne,

$$T(x) = Tx = \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & \dots & T_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^n T_{1j} x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^n T_{mj} x_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

La corrispondenza fra T e la matrice $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ dipende dalla scelta delle basi canoniche su $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$.

Definizione 6.4.1 (Differenziale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un insieme aperto. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, si dice *differenziabile* (o Fréchet-differenziabile) in un punto $x_0 \in A$ se esiste una trasformazione lineare $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0. \tag{6.4.16}$$

Chiameremo la trasformazione lineare $df(x_0) = T$ il *differenziale di f in x_0*.

Osservazione 6.4.2. Lasciamo al lettore il compito di verificare le seguenti affermazioni.

1. Unicità del differenziale. Se il differenziale esiste allora esso è unico. Precisamente, se $T, \widehat{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sono trasformazioni lineari che verificano (6.4.16) (per lo stesso punto x_0), allora $T = \widehat{T}$. Infatti, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$Tv = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

e l'unicità di T segue dall'unicità del limite.

2. Caso $n = 1$. Quando $n = 1$ (e indipendentemente da $m \geq 1$), le nozioni di derivabilità e differenziabilità coincidono e inoltre

$$df(x_0) = f'(x_0) \quad \text{come vettori di } \mathbb{R}^m.$$

La verifica di queste affermazioni è lasciata come esercizio.

3. Differenziale di una trasformazione lineare. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare, allora $df(x_0) = f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Questo segue in modo elementare dal fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f(x - x_0) = 0.$$

4. Caso vettoriale. Una funzione f a valori in $\mathbb{R}^m$ è differenziabile se e solo se le sue m coordinate sono differenziabili.

La Definizione 6.4.1 ha una generalizzazione naturale nell'ambito degli spazi normati.

Definizione 6.4.3. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati, e sia $A \subset X$ un aperto. Una funzione $f : A \to Y$ si dice *Fréchet-differenziabile* in un punto $x_0 \in A$ se esiste una trasformazione lineare e continua $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} = 0. \tag{6.4.17}$$

La trasformazione lineare $df(x_0) = T$ si chiama il *differenziale di f in x_0*.

Il differenziale è per definizione una trasformazione lineare e *continua*.

TEOREMA 6.4.4 (Caratterizzazione della differenziabilità). Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto e $x_0 \in A$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) La funzione f è differenziabile in x_0.

B) Esistono una trasformazione lineare $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ed una funzione $E_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$ tali che $f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + E_{x_0}(x)$ per $x \in A$ e

$$E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|), \quad x \to x_0.$$

DIM. A)⇒B). Scegliamo $T = df(x_0)$ e definiamo $E_{x_0}(x) = f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)$. La funzione E_{x_0} verifica la proprietà richiesta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0,$$

in quanto f è differenziabile.

B)⇒A) Proviamo che $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, R^m)$ data in B) è il differenziale di f:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

□

TEOREMA 6.4.5. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nel punto $x_0 \in A$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto. Allora:

i) f è continua in x_0.

ii) f ha in x_0 derivata direzionale in ogni direzione $v \in \mathbb{R}^n$ e inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v). \tag{6.4.18}$$

In particolare, la differenziabilità implica la derivabilità.

DIM. i) Usiamo la caratterizzazione B) della differenziabilità nel teorema precedente, la continuità di T e le proprietà di E_{x_0}:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x_0) + T(x - x_0) + E_{x_0}(x)\big) = f(x_0).$$

ii) Usiamo di nuovo la caratterizzazione B):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{df(x_0)(tv) + E_{x_0}(x_0 + tv)}{t} \\ &= df(x_0)(v) + \lim_{t\to 0} \frac{E_{x_0}(x_0 + tv)}{t} = df(x_0)(v).\end{aligned}$$

□

Osservazione 6.4.6 (Significato geometrico del gradiente). Quando $m = 1$ si ha $df(x_0)(v) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle$ e quindi si ottiene la seguente formula di rappresentazione per la derivata direzionale

$$f_v(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle.$$

Se $|v| = 1$ allora $|f_v(x_0)| = |\langle \nabla f(x_0), v\rangle| \leq |\nabla f(x_0)|$. Deduciamo che

$$\max_{|v|=1} f_v(x_0) = |\nabla f(x_0)|$$

e il massimo è raggiunto con la scelta $v = \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$.

Osservazione 6.4.7 (Test della differenziabilità). Quando $m = 1$, la formula (6.4.16) che definisce la differenziabilità si può riscrivere nel seguente modo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle}{|x - x_0|} = 0. \tag{6.4.19}$$

Dunque, per controllare la differenziabilità di f in x_0 si controlla prima l'esistenza delle derivate parziali in x_0, e poi si verifica che il limite in (6.4.19) sia zero.

Osservazione 6.4.8 (Identificazione di $df(x_0)$ e $Jf(x_0)$). Sia ora f a valori in $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$ e sia $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ la matrice associata al differenziale $T = df(x_0)$. Allora avremo

$$T_{ij} = \langle T\mathrm{e}_j, \mathrm{e}_i\rangle = \langle df(x_0)(\mathrm{e}_j), \mathrm{e}_i\rangle = \langle f_{x_j}(x_0), \mathrm{e}_i\rangle = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0).$$

Dunque, possiamo identificare $df(x_0)$ con la matrice Jacobiana $Jf(x_0)$

$$df(x_0) = Jf(x_0).$$

Questa identificazione dipende dalla scelta delle basi canoniche.

Definizione 6.4.9 (Piano tangente ad un grafico). Sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $x_0 \in A$. Sappiamo allora che si ha lo sviluppo

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle + E_{x_0}(x),$$

dove $E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Consideriamo la parte lineare dello sviluppo

$$\varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

La funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è affine, verifica $\varphi(x_0) = f(x_0)$ e $|f(x) - \varphi(x)| = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Il suo grafico

$$\mathrm{gr}(\varphi) = \big\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\big\}$$

è un piano affine n-dimensionale che si dice *piano tangente (affine) al grafico di f* nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{gr}(f)$.

Esempio 6.4.10. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$ e consideriamo la superficie n-dimensionale

$$M = \mathrm{gr}(f) = \big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\big\}.$$

M è la falda superiore di un iperboloide di rotazione n-dimensionale. Calcoliamo il piano tangente ad M nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{gr}(f)$. Il gradiente di f in x_0 è

$$\nabla f(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1+|x_0|^2}}.$$

Il piano tangente (affine) è il grafico della funzione

$$\varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle = \sqrt{1+|x_0|^2} + \frac{\langle x_0, x - x_0 \rangle}{\sqrt{1+|x_0|^2}} = \frac{1 + \langle x_0, x \rangle}{\sqrt{1+|x_0|^2}},$$

e precisamente

$$\mathrm{gr}(\varphi) = \Big\{ (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = \frac{1 + \langle x_0, x \rangle}{\sqrt{1+|x_0|^2}} \Big\}.$$

5. Differenziale della funzione composta

In questa sezione proviamo la formula per il differenziale della funzione composta. Nel caso di somma e prodotto di funzioni si hanno i seguenti fatti.

1. Differenziale della somma. Se $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sono differenziabili in un punto $x_0 \in A$ allora anche la funzione somma $f + g$ è differenziabile in x_0 e inoltre

$$d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0).$$

La verifica è elementare.

2. Differenziale del prodotto. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, funzioni differenziabili in un punto $x_0 \in A$. Allora anche la funzione prodotto $f \cdot g$ è differenziabile in x_0 e inoltre

$$d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) dg(x_0) + g(x_0) df(x_0).$$

La verifica è elementare e si ottiene moltiplicando gli sviluppi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + F_{x_0}(x) \\ g(x) &= g(x_0) + dg(x_0)(x - x_0) + G_{x_0}(x), \end{aligned}$$

con $F_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ e $G_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$.

Teorema 6.5.1 (Differenziale della funzione composta). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nel punto $x_0 \in A$. Sia poi $B \subset \mathbb{R}^m$ un insieme aperto tale che $f(A) \subset B$ e sia $g : B \to \mathbb{R}^k$ una funzione differenziabile nel punto $f(x_0) \in B$. Allora la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile nel punto x_0 e inoltre

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0). \tag{6.5.20}$$

Equivalentemente, le matrici Jacobiane verificano

$$\underbrace{J_{g \circ f}(x_0)}_{k \times n} = \underbrace{J_g(f(x_0))}_{k \times m} \underbrace{J_f(x_0)}_{m \times n}, \tag{6.5.21}$$

con la notazione di prodotto fra matrici righe$\times$colonne.

Dim. Per il Teorema 6.4.4, avremo

$$f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + F_{x_0}(x), \quad x \in A,$$

con $T = df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ed $F_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$ tale che $F_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Inoltre, posto $y_0 = f(x_0)$, avremo

$$g(y) = g(y_0) + S(y - y_0) + G_{y_0}(y), \quad y \in B,$$

con $S = dg(y_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ ed $G_{y_0} : B \to \mathbb{R}^k$ tale che $G_{y_0}(y) = o(|y - y_0|)$ per $y \to y_0$.

Componendo f con g si trova

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + S(f(x) - f(x_0)) + G_{f(x_0)}(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + S(T(x - x_0) + F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + S(T(x - x_0)) + S(F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)). \end{aligned}$$

Abbiamo usato la linearità di S.

Chiaramente si ha $S \circ T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$. Consideriamo la funzione $H_{x_0} : A \to \mathbb{R}^k$

$$H_{x_0}(x) = S(F_{x_0}(x)) + G_{f(x_0)}(f(x)).$$

Da un lato avremo, per $x \to x_0$,

$$S(F_{x_0}(x)) = o(|x - x_0|),$$

e dall'altro, siccome $x \to x_0$ implica $f(x) \to f(x_0)$ (la differenziabilità implica la continuità), per $f(x) \neq f(x_0)$ avremo

$$\frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|x - x_0|} = \frac{|T(x - x_0) + E_{x_0}(x)|}{|x - x_0|} \frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|f(x) - f(x_0)|} = o(|x - x_0|), \quad x \to x_0.$$

Quando $f(x) = f(x_0)$, è semplicemente $G_{f(x_0)}(f(x)) = 0$.

In conclusione, $H_{x_0}(x) = o(|x - x_0|)$ per $x \to x_0$. Per il Teorema 6.4.4, $g \circ f$ è differenziabile in x_0 con differenziale $d(g \circ f)(x_0) = S \circ T = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.

□

Esempio 6.5.2 (Derivata di una funzione lungo una curva). Sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ una curva derivabile (equivalentemente, differenziabile) in tutti i punti. Coerentemente con la convenzione fissata in (6.3.15), pensiamo γ come un vettore colonna

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Sia poi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile (in tutti i punti lungo la curva). Allora avremo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = J_{f\circ\gamma}(t) = J_f(\gamma(t)) J_\gamma(t) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \Big) \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \vdots \\ \dot\gamma_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \dot\gamma_i(t). \end{aligned}$$

Con una notazione più compatta possiamo anche scrivere

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle, \quad t \in [0,1]. \tag{6.5.22}$$

ESEMPIO 6.5.3. Esplicitiamo la formula (6.5.21) del Teorema 6.5.1. Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ due funzioni differenziabili. La composizione $G = g \circ f$ ha k componenti $G = (G_1, \dots, G_k)$, da pensare come vettore colonna. La formula (6.5.21), ovvero $JG(x) = Jg(f(x))\, Jf(x)$, si legge nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial G_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

dove le derivate parziali di g vanno calcolate nel punto $f(x)$, quelle di f e G nel punto x. Alla riga $i \in \{1, \dots, k\}$ e colonna $j \in \{1, \dots, n\}$ della matrice $JG(x)$ si trova l'entrata

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(x)) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(x).$$

6. Teoremi del valor medio

In questa sezione estendiamo il Teorema di Lagrange al caso multidimensionale.

TEOREMA 6.6.1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{ tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1] \big\} \subset A$. Allora esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y \rangle. \tag{6.6.23}$$

DIM. Sia $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ una parametrizzazione del segmento, e definiamo la funzione composta $\varphi = f \circ \gamma$, ovvero

$$\varphi(t) = f(tx + (1-t)y) = f(\gamma(t)), \quad t \in [0,1].$$

Per il Teorema 6.5.1, φ è differenziabile su $[0,1]$, e quindi per il Teorema di Lagrange esiste un punto $t^* \in [0,1]$ tale che $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$. Per la formula (6.5.22),

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle, \quad t \in [0,1].$$

e dunque, posto $z = \gamma(t^*)$, si ottiene la tesi. $\square$

Nel caso di funzioni a valori vettoriali la formulazione del Teorema del valor medio deve essere precisata.

TEOREMA 6.6.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{ tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1] \big\} \subset A$. Allora per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$\langle f(x) - f(y), v \rangle = \langle df(z)(x-y), v \rangle. \tag{6.6.24}$$

Dim. Sia $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ una parametrizzazione del segmento, e definiamo la funzione composta $\varphi = \langle f \circ \gamma, v\rangle$ ovvero

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(tx + (1-t)y), v_i\rangle, \quad t \in [0,1].$$

Per la linearità del prodotto scalare possiamo portare la derivata in t dentro il prodotto scalare, e dunque, per il Teorema 6.5.1,

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt} f_i(\gamma(t))v_i = \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla f_i(\gamma(t)), x-y\rangle v_i = \langle df(\gamma(t))(x-y), v\rangle.$$

Abbiamo omesso i conti che provano l'ultima identità.

Per il Teorema 6.5.1, φ è differenziabile su $[0,1]$, e quindi per il Teorema di Lagrange esiste un punto $t^* \in [0,1]$ tale che $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$. Dunque, posto $z = \gamma(t^*)$, si ottiene la tesi. □

Corollario 6.6.3. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, e siano $x, y \in A$ punti tali che $[x,y] := \big\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\big\} \subset A$. Allora esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq \|df(z)\||x-y|, \tag{6.6.25}$$

dove $\|df(z)\|$ è la norma di $df(z) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ esiste $z \in [x,y]$ che rende vera l'identità (6.6.24). Scegliamo $v = f(x) - f(y)$ e, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la (2.4.1), otteniamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)|^2 &= \langle df(z)(x-y), f(x) - f(y)\rangle \\ &\leq |df(z)(x-y)||f(x) - f(y)| \\ &\leq \|df(z)\||x-y||f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

Se $|f(x) - f(y)| = 0$ la tesi è banalmente verificata. Possiamo dunque dividere per $|f(x) - f(y)| \neq 0$ e ottenere la tesi. □

Corollario 6.6.4. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile in A. Allora f è Lipschitziana in A se e solo se $\sup_{x\in A} \|df(x)\| < \infty$; si ha inoltre l'uguaglianza

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x\in A} \|df(x)\|$$

Dim. Supponiamo che f sia Lipschitziana; dato $x \in A$ esiste $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|v\| = 1$ e

$$\|df(x)\| = \|df(x)(v)\| = \left\|\frac{\partial f}{\partial v}(x)\right\| = \lim_{t\to 0} \frac{\|f(x+tv) - f(x)\|}{|t|} \leq \mathrm{Lip}(f),$$

da cui $\sup_{x\in A} \|df(x)\| \leq \mathrm{Lip}(f)$.

Viceversa, se $\sup_{x\in A} \|df(x)\| < \infty$, allora il Corollario 6.6.4 implica immediatamente che $\mathrm{Lip}(f) \leq \sup_{x\in A} \|df(x)\|$. □

7. Funzioni di classe C^1

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, una funzione con coordinate $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Definizione 6.7.1. Definiamo $C^1(A;\mathbb{R}^m)$ come l'insieme di tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}^m$ tali che esistano e siano continue in A tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \in C(A), \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m.$$

Scriveremo anche $C^1(A) = C^1(A;\mathbb{R})$.

Il seguente risultato viene talvolta chiamato *Teorema del differenziale totale.*

Teorema 6.7.2. Se $f \in C^1(A;\mathbb{R}^m)$ allora f è differenziabile in ogni punto $x_0 \in A$.

Dim. È sufficiente provare il teorema nel caso $m = 1$. Fissato $x_0 \in A$ consideriamo la trasformazione lineare $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$

$$Th = \langle \nabla f(x_0), h\rangle = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

Dobbiamo provare che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Th}{|h|} = 0. \tag{6.7.26}$$

Partiamo dalla seguente espansione telescopica:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) &= f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^n h_i \mathrm{e}_i\Big) - f(x_0) \\ &= \sum_{j=1}^n f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^j h_i \mathrm{e}_i\Big) - f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i\Big). \end{aligned}$$

Dal Teorema del valor medio segue che per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste $h_j^* \in \mathbb{R}$ tale che $|h_j^*| \leq |h_j| \leq |h|$ e si ha

$$f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^j h_i \mathrm{e}_i\Big) - f\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i\Big) = h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big).$$

Deduciamo che

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Th}{|h|} = \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{|h|}\Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Big],$$

dove le quantità $h_j/|h|$ rimangono limitate, mentre per la continuità delle derivate parziali si ha per ogni $j = 1, \dots, n$:

$$\lim_{h\to 0}\Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \mathrm{e}_i + h_j^* \mathrm{e}_j\Big) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Big] = 0,$$

e la tesi (6.7.26) segue. □

Osservazione 6.7.3. Riassumiamo la situazione:

$$f \in C^1(A) \quad \Rightarrow \quad f \text{ differenziabile in } A \quad \Rightarrow \quad f \text{ derivabile e continua in } A.$$

Tuttavia, f può essere differenziabile in ogni punto di A senza che sia $f \in C^1(A)$. Questo fatto è già vero in dimensione $n = 1$.

8. Teoremi di McShane e di Rademacher

In questa sezione accenniamo ad alcuni teoremi più avanzati sulle funzioni Lipschitziane.

Teorema 6.8.1 (Teorema di estensione di McShane). Siano (X, d) uno spazio metrico e $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana su un sottinsieme non vuoto $A \subset X$. Allora esiste $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}^m$ Lipschitziana e tale che $\tilde{f}_{|A} = f$.

Dim. Ragionando componente per componente non è restrittivo supporre che $m = 1$. Scriviamo $L := \mathrm{Lip}(f)$ e definiamo

$$\tilde{f}(x) := \sup_{y \in A}\{f(y) - Ld(x,y)\}.$$

Verifichiamo che $\tilde{f}$ è ben definita, ovvero che per ogni $x \in X$ il sup nella definizione di $\tilde{f}(x)$ è finito. Sia $x_0 \in A$ fissato, allora per ogni $y \in A$

$$f(y) - Ld(x,y) \leq f(x_0) + Ld(x_0,y) - Ld(x,y) \leq f(x_0) + Ld(x,x_0),$$

dove abbiamo usato la Lipschitzianità di f su A e la disuguaglianza triangolare. Questo dimostra che $\tilde{f}(x) \leq f(x_0) + Ld(x,x_0)$.

Dimostriamo ora che $\tilde{f} = f$ su A. Per ogni $x \in A$ vale certamente $\tilde{f}(x) \geq f(x)$ (basta prendere $y = x$ nella definizione di $\tilde{f}(x)$); la disuguaglianza opposta segue osservando che, per ogni $y \in A$, si ha per Lipschitzianità

$$f(y) - Ld(x,y) \leq f(x)$$

da cui, passando al sup su $y \in A$, $\tilde{f}(x) \leq f(x)$.

Dimostriamo che $\tilde{f}$ è Lipschitziana su X: dati $x, y, \in X$ e $\varepsilon > 0$, si fissi $\bar{y} \in A$ tale che

$$\tilde{f}(x) < f(\bar{y}) - Ld(x,\bar{y}) + \varepsilon.$$

Usando la disuguaglianza $\tilde{f}(y) \geq f(\bar{y}) - Ld(y,\bar{y})$ si ottiene

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) < -Ld(x,\bar{y}) + Ld(y,\bar{y}) + \varepsilon \leq Ld(x,y) + \varepsilon$$

e dunque $\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) \leq Ld(x,y)$ per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. Un ragionamento simmetrico restituisce la disuguaglianza $\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) \leq Ld(x,y)$, da cui segue la Lipschitzianità $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq Ld(x,y)$. □

Osservazione 6.8.2. In modo analogo è possibile dimostrare che, nel caso, $m = 1$ anche la funzione $\bar{f}(x) := \inf_{y \in A}\{f(y) + Ld(x,y)\}$ estende f in maniera Lipschitziana. Si può dimostrare che $\tilde{f}$ e $\bar{f}$ sono, rispettivamente, la più piccola e più grande tra le possibili estensioni Lipschitziane di f a tutto X con costante di Lipschitz al più L.

Osserviamo inoltre che, nel caso $m = 1$, la costruzione utilizzata nel Teorema 6.8.1 fornisce un'estensione $\tilde{f}$ tale che $\mathrm{Lip}(\tilde{f}) = \mathrm{Lip}(f)$. Pertanto, nel caso $m \geq 2$ si può trovare un'estensione $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}^m$ tale che $\mathrm{Lip}(\tilde{f}) \leq \sqrt{m}\,\mathrm{Lip}(f)$; nel caso $X = \mathbb{R}^n$ si può tuttavia fare di meglio.

TEOREMA 6.8.3 (Teorema di estensione di Kirszbraun). Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana su un sottinsieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}^n$. Allora esiste $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che $\tilde{f}_{|A} = f$ e $\mathrm{Lip}(\tilde{f}) = \mathrm{Lip}(f)$.

Per una dimostrazione del teorema di Kirszbraun si può consultare il libro *Geometric Measure Theory* di H. Federer, pag. 201.

Enunciamo ora la nozione di insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^n$.

Un plurirettangolo di $\mathbb{R}^n$ è un insieme della forma

$$Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n,$$

con $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. La *misura* (o volume) del plurirettangolo Q è il numero reale

$$|Q| = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

DEFINIZIONE 6.8.4 (Insieme di misura nulla). Diremo che un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ha *misura nulla* in $\mathbb{R}^n$ e scriveremo $|A| = 0$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione Q_k, $k \in \mathbb{N}$, di plurirettangoli di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leq \varepsilon.$$

La definizione può essere equivalentemente data usando ricoprimenti di soli cubi oppure di palle.

ESEMPIO 6.8.5. Mostriamo che $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ ha misura nulla. Essendo l'insieme numerabile, si ha

$$\mathbb{Q}^n = \{q_k \in \mathbb{Q}^n : k \in \mathbb{N}\}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia Q_k il cubo con facce parallele agli iperpiani coordinati, centrato in q_k e di lato $\varepsilon/2^{k/n}$. Chiaramente

$$\mathbb{Q}^n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Osserviamo, tuttavia, che esistono insiemi di misura nulla con la cardinalità del continuo.

TEOREMA 6.8.6 (Lebesgue). Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora esiste un insieme $A \subset [0,1]$ di misura nulla in $\mathbb{R}$, $|A| = 0$, tale che f è derivabile in tutti i punti di $[0,1] \setminus A$.

La dimostrazione del Teorema di Lebesgue è impegnativa ed è il punto di partenza di vari risultati di Analisi Reale e Teoria della Misura. Si veda ad esempio Kolmogorov-Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Mir 1980, p.319. Per le funzioni Lipschitziane (e più in generale per le funzioni a variazione limitata) vale il teorema di Jordan.

TEOREMA 6.8.7. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana (più in generale: una funzione a variazione limitata). Allora esistono due funzioni $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ monotone tali che $f = \varphi - \psi$.

Siccome l'unione di due insiemi di misura nulla ha ancora misura nulla, dal Teorema di Lebesgue segue che le funzioni Lipschitziane sono derivabili al di fuori di un insieme di misura nulla. L'estensione di questo teorema al caso di funzioni di più variabili è nota come Teorema di Rademacher.

TEOREMA 6.8.8 (Rademacher). Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$, una funzione Lipschitziana. Allora esiste un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ di misura nulla, $|A| = 0$, tale che f è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^n \setminus A$.

La dimostrazione si basa sul risultato unidimensionale $n = 1$. Si veda Evans-Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, p.81 (ed anche p.235, per una dimostrazione basata sulla teoria degli Spazi di Sobolev).

ESEMPIO 6.8.9. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso. La funzione distanza $f(x) = \mathrm{dist}(x, K)$ è 1-Lipschitziana. Dunque, è differenziabile al di fuori di un insieme di misura nulla.

9. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, ovvero con tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Possiamo allora definire, se esistono, le derivate parziali di ordine 2

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = D_j D_i f = f_{x_i x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Nel caso di indici uguali, scriveremo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

In generale, l'ordine in cui sono calcolate le derivate parziali è rilevante.

ESEMPIO 6.9.1. Calcoliamo le derivate parziali seconde miste in 0 della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se $x^2 + y^2 \neq 0$, la derivata parziale di f in x è

$$f_x(x,y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2},$$

mentre $f_x(0,0) = 0$. Di conseguenza,

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = -1.$$

D'altra parte, per un evidente argomento di simmetria, si ha

$$f_{yx}(0,0) = 1.$$

Dunque, entrambe le derivate parziali miste in 0 esistono, ma sono diverse:

$$f_{xy}(0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0).$$

Se le derivate parziali seconde miste sono continue, tuttavia, allora coincidono. Precisamente, si ha il seguente teorema:

Teorema 6.9.2 (Schwarz). Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione con le derivate parziali seconde miste definite in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^2$ e continue nel punto 0. Allora si ha

$$f_{xy}(0) = f_{yx}(0).$$

Dim. Definiamo la funzione

$$\Delta(h,k) = f(h,k) - f(h,0) - f(0,k) + f(0,0) = F(h,k) - F(0,k), \quad h,k \in \mathbb{R},$$

dove $F(h,k) = f(h,k) - f(h,0)$. Per il Teorema di Lagrange (o del valor medio) esiste $h^* \in (0,h)$ tale che

$$F(h,k) - F(0,k) = F_x(h^*,k)h = \big(f_x(h^*,k) - f_x(h^*,0)\big)h.$$

Di nuovo per il Teorema del valor medio, esiste $\widehat{k} \in (0,k)$ tale che $f_x(h^*,k) - f_x(h^*,0) = f_{xy}(h^*,\widehat{k})k$. Scegliendo $k = h$, facendo il limite $h \to 0$ e usando la continuità della funzione $(x,y) \to f_{xy}(x,y)$ in $0 \in \mathbb{R}^2$, si trova

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h,h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} f_{xy}(h^*,\widehat{h}) = f_{xy}(0).$$

In modo analogo, partendo da

$$\Delta(h,k) = f(h,k) - f(0,k) - f(h,0) + f(0,0) = G(h,k) - G(h,0),$$

dove $G(h,k) = f(h,k) - f(0,k)$, si trova per un opportuno $k^* \in (0,k)$ e per un opportuno $\widehat{h} \in (0,h)$

$$\Delta(h,k) = G_y(h,k^*)k = k\big(f_y(h,k^*) - f_y(0,k^*)\big) = khf_{yx}(\widehat{h},k^*),$$

e dunque

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h,h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} f_{yx}(\widehat{h},h^*) = f_{yx}(0).$$

La tesi segue dall'unicità del limite. □

Definizione 6.9.3. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Definiamo $C^2(A)$ come l'insieme di tutte le funzioni $f \in C^1(A)$ tali che esistono e sono continue in A tutte le derivate parziali del secondo ordine

$$D_iD_jf = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C(A), \quad i,j = 1,\dots,n.$$

La *matrice Hessiana* di una funzione $f \in C^2(A)$ è la matrice $n \times n$

$$D^2f(x) = Hf(x) = \big(D_iD_jf(x)\big)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Se $f \in C^2(A)$ allora per il Teorema di Schwarz le derivate miste coincidono

$$D_i D_j f = D_j D_i f, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Di conseguenza, la matrice Hessiana è simmetrica.

DEFINIZIONE 6.9.4. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, definiamo $C^k(A)$ come l'insieme di tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ tali che esistano e siano continue in A tutte le derivate parziali di ordine k

$$D_{i_1} \cdots D_{i_k} f = \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \in C(A), \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}.$$

Definiamo quindi l'insieme delle funzioni con derivate parziali continue di ogni ordine

$$C^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(A).$$

OSSERVAZIONE 6.9.5. Dal Teorema di Schwarz discende il seguente fatto. Se $f \in C^k(A)$, $k \geq 1$, allora

$$D_{i_1} \dots D_{i_k} f = D_{\sigma(i_1)} \dots D_{\sigma(i_k)} f$$

per ogni permutazione $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ che fissa $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. In altri termini, è possibile scambiare a piacere l'ordine di derivazione.

10. Formula di Taylor in più variabili. Richiami sulle forme quadratiche

Nello studio dei punti critici avremo bisogno della formula di Taylor in più variabili. Qui proveremo la formula al secondo ordine ed enuncieremo la formula generale senza dimostrazione.

LEMMA 6.10.1 (Formula di Taylor del secondo ordine). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $x_0 \in A$ ed $f \in C^2(A)$. Allora per ogni $x \in A$ tale che $[x_0, x] \subset A$ esiste un punto $z \in [x_0, x]$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(z)(x - x_0), x - x_0 \rangle.$$

DIM. Sia $v = x - x_0$ e definiamo la funzione

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv), \quad t \in [0, 1].$$

Chiaramente, $\varphi(0) = f(x_0)$, $\varphi(1) = f(x)$ e inoltre $\varphi \in C^2([0, 1])$. Per la formula dello sviluppo di Taylor nel caso 1-dimensionale per ogni $t \in [0, 1]$ esiste $\tau \in [0, t]$ tale che

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2} t^2 \varphi'(\tau), \tag{6.10.27}$$

Calcoliamo le derivate di φ. Per la formula della derivata della funzione composta

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_0 + tv), v \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0 + tv) v_i,$$

e inoltre

$$\varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0 + tv) v_i v_j = \langle Hf(x_0 + tv)v, v \rangle.$$

Scegliamo $t = 1$ nella formula (6.10.27) e sia $\tau \in [0, 1]$ il valore che renda vera la (6.10.27). Con la scelta $z = x_0 + \tau v$ otteniamo la tesi. $\square$

Osservazione 6.10.2. Nelle ipotesi del Lemma precedente si ha, con $v = x - x_0$

$$\begin{aligned}\langle Hf(z)(x-x_0), x-x_0\rangle &= \langle Hf(x_0)v, v\rangle + \langle [Hf(z) - Hf(x_0)]v, v\rangle \\ &= \langle Hf(x_0)v, v\rangle + o(|v|^2), \quad v = x - x_0 \to 0,\end{aligned}$$

essendo $z \in [x_0, x]$ ed usando la continuità delle derivate parziali seconde.

Per enunciare la formula di Taylor nel caso generale occorrono alcune notazioni. Dato un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, ovvero $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $\alpha_i = 0, 1, 2 \dots$, definiamo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!.$$

Per $x \in \mathbb{R}^n$ si pone poi $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ e

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Teorema 6.10.3 (Formula di Taylor). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $x_0 \in A$ ed $f \in C^{k+1}(A)$, $k \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $x \in A$ tale che $[x_0, x] \subset A$ esiste un punto $z \in [x_0, x]$ tale che

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(z)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

Concludiamo questa sezione con alcuni richiami sulle forme quadratiche.

Definizione 6.10.4 (Forme quadratiche (semi)definite). Sia B una matrice reale $n \times n$ simmetrica, $B = B^t$.

i) Diremo che B è semidefinita positiva se $\langle Bv, v\rangle \ge 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Scriveremo in questo caso $B \ge 0$.
ii) Diremo che B è definita positiva se $\langle Bv, v\rangle > 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Scriveremo in questo caso $B > 0$.

Diremo che B è semidefinita negativa se $-B \ge 0$, che è definita negativa se $-B > 0$.

Lemma 6.10.5. Sia B una matrice reale $n \times n$ simmetrica. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) $B > 0$, ovvero B è definita positiva;
2) Esiste una costante $m > 0$ tale che $\langle Bv, v\rangle \ge m|v|^2$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

Dim. L'implicazione 2)$\Rightarrow$1) è chiara. Proviamo l'implicazione opposta. L'insieme $K = \{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1\}$ è compatto e la funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(v) = \langle Bv, v\rangle$ è continua. Per il Teorema di Weierstrass esiste $v_0 \in K$ tale che

$$m = \min_{v \in K} g(v) = \langle Bv_0, v_0\rangle > 0.$$

Ora, se $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$, avremo

$$\langle B\frac{v}{|v|}, \frac{v}{|v|}\rangle \ge m,$$

da cui segue la tesi per un generico v. $\square$

Osservazione 6.10.6. Siano $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ gli autovalori della matrice simmetrica B. Dal corso di Geometria 2 sappiamo che $B \geq 0$ se e solo se $\lambda_1 \geq 0$ e che $B > 0$ se e solo se $\lambda_1 > 0$. In effetti, risulta

$$\lambda_1 = m = \min_{|v|=1} \langle Bv, v\rangle.$$

11. Punti critici. Punti di massimo e minimo locale

In questa sezione presentiamo condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinchè una funzione abbia punti di estremo locale.

Definizione 6.11.1 (Punto di estremo locale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme.

i) Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di *massimo locale* di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ se esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in B_r(x_0) \cap A$ si ha

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Se $f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ diremo che x_0 è un punto di *massimo locale stretto*.

ii) Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di *minimo locale* di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ se esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in B_r(x_0) \cap A$

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Se $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ diremo che x_0 è un punto di *minimo locale stretto*.

I punti critici di una funzione sono i punti dove il gradiente si annulla.

Definizione 6.11.2 (Punto critico). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme *aperto*. Un punto $x_0 \in A$ si dice *punto critico* di una funzione $f \in C^1(A)$ se $\nabla f(x_0) = 0$.

Prossimo obiettivo è di provare che i punti di estremo locale sono punti critici dove la matrice Hessiana è definita positiva oppure negativa.

Teorema 6.11.3 (Condizioni necessarie di estremalità locale). Sia $x_0 \in A$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, un punto di minimo locale di una funzione $f \in C^2(A)$. Allora:

i) $\nabla f(x_0) = 0$ (condizione necessaria del primo ordine).

ii) $Hf(x_0) \geq 0$ (condizione necessaria del secondo ordine).

Dim. i) Esiste $r > 0$ tale $B_r(x_0) \subset A$ ed $f(x) \geq f(x_0)$ per $x \in B_r(x_0)$. Per $t \in \mathbb{R}$ con $|t| < r$ avremo $x_0 + te_i \in B_r(x_0)$; inoltre,

$$\frac{f(x_0 + \mathrm{t}e_i) - f(x_0)}{t} \geq 0 \quad \text{per } t > 0,$$

e

$$\frac{f(x_0 + \mathrm{t}e_i) - f(x_0)}{t} \leq 0 \quad \text{per } t < 0.$$

Passando al limite per $t \to 0$ si ottengono le disuguaglianze

$$f_{x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + \mathrm{t}e_i) - f(x_0)}{t} \geq 0,$$

$$f_{x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0 + \mathrm{t}e_i) - f(x_0)}{t} \leq 0,$$

da cui si deduce che $f_{x_i}(x_0) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

ii) Dalla formula di Taylor del secondo ordine con resto di Peano e dal fatto che $\nabla f(x_0) = 0$, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo si ha la disuguaglianza

$$0 \leq f(x_0 + tv) - f(x_0) = \frac{t^2}{2}\langle Hf(x_0)v, v\rangle + o(t^2).$$

Dividendo per $t^2 > 0$ e facendo poi il limite per $t \to 0$ si deduce che

$$\langle Hf(x_0)v, v\rangle \geq 0.$$

□

Teorema 6.11.4 (Condizioni sufficienti per la minimalità locale). Siano $x_0 \in A$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, ed $f \in C^2(A)$. Supponiamo che:

i) $\nabla f(x_0) = 0$;
ii) $Hf(x_0) > 0$.

Allora x_0 è un punto di minimo locale stretto di f.

Dim. Sia $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset A$, da fissare in modo definitivo in seguito. La funzione f ha lo sviluppo di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2), \quad x \to x_0.$$

Abbiamo usato il fatto che $\nabla f(x_0) = 0$. Sia $m > 0$ la costante data dal Lemma 6.10.5. Allora

$$\frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2) \geq |x - x_0|^2\Big(\frac{m}{2} + o(1)\Big),$$

dove $o(1)$ è una funzione in x infinitesima per $x \to x_0$. Dunque esiste $r > 0$ tale che per $x \in B_r(x_0)$

$$\frac{m}{2} + o(1) \geq \frac{m}{4}.$$

Di conseguenza, se $0 < |x - x_0| < r$ si ha

$$f(x) - f(x_0) \geq |x - x_0|^2\Big(\frac{m}{2} + o(1)\Big) \geq \frac{m}{4}|x - x_0|^2 > 0.$$

Questo prova che x_0 è un punto di minimo locale stretto. □

12. Funzioni convesse

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ si ha

$$[x, y] = \big\{tx + (1 - t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0, 1]\big\} \subset A.$$

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se per ogni $x, y \in A$ e $t \in [0, 1]$ si ha

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

La funzione si dice *strettamente convessa* se per ogni $x, y \in A$ con $x \neq y$, e per ogni $t \in (0, 1)$ si ha la disuguaglianza stretta

$$f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y).$$

La nozione di insieme convesso si formula in modo naturale negli spazi vettoriali. La nozione di funzione convessa si formula in modo naturale per funzioni a valori reali definite in un insieme convesso di uno spazio vettoriale.

Omettiamo la dimostrazione della seguente proposizione.

Proposizione 6.12.1. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è convessa;
B) l'epigrafico di f

$$\operatorname{epi}(f) = \big\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A,\, x_{n+1} > f(x)\big\}$$

è un insieme convesso in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Anche la dimostrazione del seguente fatto è omessa.

Proposizione 6.12.2. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso ed $f \in C(A)$ una funzione continua. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è convessa;
B) Per ogni coppia di punti $x, y \in A$ si ha

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

La dimostrazione della parte non banale B)⇒A) si basa sull'approssimazione di un generico $t \in [0,1]$ con successioni "diadiche" e su un'applicazione iterata della convessità del punto medio.

Richiamiamo, infine, il seguente teorema sulle funzioni convesse in dimensione $n = 1$.

Proposizione 6.12.3. Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}$, con $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallo, una funzione convessa. Allora:

i) Per ogni $y \in I$, la funzione

$$x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}, \quad x \in I \setminus \{y\}, \tag{6.12.28}$$

è crescente.

ii) Per ogni $a < \alpha < \beta < b$, φ è Lipschitziana su $[\alpha, \beta]$.

Vogliamo estendere questo teorema a dimensione generica $n \geq 1$. Per ogni $r > 0$ definiamo il cubo chiuso centrato in $0 \in \mathbb{R}^n$ di semilato $r > 0$

$$Q_r = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq r,\, i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Teorema 6.12.4. Siano $0 < r < R$ e sia $f : Q_R \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, $Q_R \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Allora esiste una costante $L \geq 0$ tale che per ogni $x, y \in Q_r$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Dim. Diamo la dimostrazione nel caso $n = 2$. Dalla Proposizione 6.12.3, parte ii), segue che $f \in C(\partial Q_r)$ e quindi esiste finito il minimo

$$m = \min_{x \in \partial Q_r} f(x) \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, detti q_i, $i = 1, 2, 3, 4$, i quattro vertici del quadrato Q_R (i "punti estremali" di Q_R), dalla convessità di f segue che per ogni $x \in Q_R$ si ha $f(x) \le \max\{f(q_i) : i = 1, 2, 3, 4\}$. Dunque esiste finito anche il seguente massimo

$$M = \max_{x \in \partial Q_R} f(x) = \max\{f(q_i) : i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Dati $x, y \in Q_r$ con $x \neq y$, consideriamo la semiretta $L_{xy} = \big\{y + t(x - y) \in \mathbb{R}^n : t \ge 0\big\}$. Siano $\bar{x} \in \partial Q_R$ e $\bar{y} \in \partial Q_r$ punti tali che

$$L_{xy} \cap \partial Q_R = \{\bar{x}\}, \quad L_{xy} \cap \partial Q_r = \{\bar{y}\}.$$

Il punto $\bar{x}$ è definito in modo unico. Il punto $\bar{y}$ è definito in modo unico se x, y non sono su uno stesso lato di ∂Q_r. Usando due volte la monotonia (6.12.28), deduciamo che

$$\frac{f(x) - f(y)}{|x - y|} \le \frac{f(\bar{x}) - f(y)}{|\bar{x} - y|} \le \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{y})}{|\bar{x} - \bar{y}|} \le \frac{M - m}{R - r} = L.$$

Scambiando il ruolo di x ed y, otteniamo la tesi

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \le L, \quad x, y \in Q_r,\, x \neq y.$$

□

Corollario 6.12.5. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora esiste un insieme $E \subset A$ di misura nulla, $|E| = 0$, tale che f è differenziabile in ogni punto di $A \setminus E$.

Questo corollario segue dal Teorema di Rademacher e dal fatto che un aperto di $\mathbb{R}^n$ è un unione numerabile di cubi chiusi. Omettiamo i dettagli.

Caratterizziamo ora le funzioni convesse di classe $C^1(A)$ e di classe $C^2(A)$. Premettiamo la seguente osservazione. Se A è convesso e $x, y \in A$, allora l'insieme

$$I_{xy} = \{t \in \mathbb{R} : y + t(x - y) \in A\}$$

è un intervallo. Inoltre, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se sono convesse le funzioni $\varphi_{xy} : I_{xy} \to \mathbb{R}$, $\varphi_{xy}(t) = f(y + t(x - y))\}$, per ogni $x, y \in A$.

Teorema 6.12.6. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f \in C^1(A)$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è convessa;
B) Per ogni $x, y \in A$ si ha $f(x) \ge f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle$;
C) Per ogni $x, y \in A$ si ha $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \ge 0$.

L'affermazione C) si può riassumere dicendo che l'applicazione $x \mapsto \nabla f(x)$è monotona (crescente).

Dim. A)⇒B). Siano $x, y \in A$. Dalla convessità di f deduciamo che per ogni $t \in (0, 1]$ si ha

$$\frac{f(y + t(x - y)) - f(y)}{t} \leq f(x) - f(y).$$

Passando al limite per $t \to 0^+$ e usando la regola per la derivata della funzione composta si ottiene la tesi.

B)⇒C) Basta sommare membro a membro le disuguaglianze

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$
$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

e poi semplificare.

C)⇒A) Consideriamo la funzione

$$\varphi_{xy}(t) = f(y + t(x - y)), \quad t \in I_{xy}.$$

Se proviamo che $t \mapsto \varphi'_{xy}(t)$ è crescente, segue che φ_{xy} è convessa. E dunque, f sarà convessa. Siano $s < t$, $z_t = y + t(x - y)$ e $z_s = y + s(y - x)$. Avremo allora

$$\varphi'_{xy}(t) - \varphi'_{xy}(s) = \langle \nabla f(z_t) - \nabla f(z_s), x - y \rangle \geq 0$$

in quando $y - x$ è un multiplo positivo di $z_t - z_s = (t - s)(x - y)$. □

Teorema 6.12.7. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f \in C^2(A)$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è convessa;
B) $Hf(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$.

Dim. A)⇒B) Fissati $x \in A$ e $v \in \mathbb{R}^n$, la funzione $t \mapsto \varphi(t) = f(x+tv)$ è convessa, e quindi $\varphi''(t) \geq 0$. In particolare, in $t = 0$ si trova

$$0 \leq \varphi''(0) = \langle Hf(x)v, v \rangle,$$

e quindi $Hf(x) \geq 0$.

B)⇒A). Dalla formula per lo sviluppo di Taylor di f, sappiamo che per ogni $x, y \in A$ esiste $z \in [x, y]$ tale che

$$f(x) = f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(z)(x - y), x - y \rangle \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle.$$

Questo termina la prova del Teorema. □

Osservazione 6.12.8. La convessità è importante nello studio dei problemi di minimo.

1) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso ed $f \in C^1(A)$ una funzione convessa. Se $x_0 \in A$ è un punto critico di f, allora è un punto di minimo globale (assoluto).

2) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione *strettamente* convessa. Se f ha un punto di minimo allora questo è unico.

Concludiamo lo studio delle funzioni convesse enunciando il Teorema di Alexandrov. Per una prova si veda Evans-Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, p.242.

Teorema 6.12.9 (Alexandrov). Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora esistono funzioni $f_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$, ed un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ di misura nulla, $|E| = 0$, tali che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus E$ si ha, per $x \to x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|^2),$$

dove $Hf(x_0) = (f_{ij}(x_0))_{i,j=1,\ldots,n}$ è la matrice Hessiana generalizzata di f. Inoltre, la matrice $Hf(x_0)$ è simmetrica.

13. Esercizi

13.1. Limiti e continuità in più variabili.

ESERCIZIO 6.13.1. $\star$ Determinare tutti i parametri reali $\alpha, \beta > 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sotto definita sia continua nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza Euclidea:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.13.2. $\star$ Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sotto definita è continua nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza Euclidea:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.13.3. $\star$ Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che

$$L = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x|y|^\alpha}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)} = 0.$$

ESERCIZIO 6.13.4. Calcolare i limiti

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_1}} \frac{x}{|x|+y^2}, \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}} \frac{x}{|x|+y^2}$$

dove $D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < x\}$ e $D_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < -x\}$.

ESERCIZIO 6.13.5. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+|y|^\alpha}.$$

ESERCIZIO 6.13.6. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ di accumulazione per A; si definiscano

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) := \lim_{r\to 0^+} \left(\sup_{A\cap B(x_0,r)\setminus\{x_0\}} f \right)$$
$$\liminf_{x\to x_0} f(x) := \lim_{r\to 0^+} \left(\inf_{A\cap B(x_0,r)\setminus\{x_0\}} f \right).$$

Dimostrare che tali quantità coincidono, rispettivamente, con

$$\max_{x\to x_0}\lim := \max\{L \in [-\infty,+\infty] : \exists (x_i)_i \subset A\setminus\{x_0\} \text{ t.c. } x_i \to x_0 \text{ e } L = \lim_{i\to+\infty} f(x_i)\}$$
$$\min_{x\to x_0}\lim := \min\{L \in [-\infty,+\infty] : \exists (x_i)_i \subset A\setminus\{x_0\} \text{ t.c. } x_i \to x_0 \text{ e } L = \lim_{i\to+\infty} f(x_i)\}.$$

ESERCIZIO 6.13.7. Calcolare

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \qquad \text{e} \qquad \liminf_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

al variare di $f(x,y)$ tra le funzioni

$$\frac{x}{|x|+y^2}, \qquad \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}, \qquad \frac{x^2y^2}{x^4+|y|^5}, \qquad \frac{xy^2}{x+y}.$$

Esercizio 6.13.8. Calcolare il limite

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)$$

al variare di $f(x,y)$ tra le funzioni

$$\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{xy}{|x|+y^2}, \qquad \frac{\log(1+x^{2022}+y^{2022})}{x^2+y^2}.$$

13.2. Differenziabilità e funzioni di classe C^1.

Esercizio 6.13.9. $\star$ Calcolare tutti gli $m,n\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ tali che la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ così definita

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^my^n}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases} \tag{6.13.29}$$

1) abbia tutte le derivate direzionali in $0\in\mathbb{R}^2$;
2) sia differenziabile in $0\in\mathbb{R}^2$.

Esercizio 6.13.10. $\star$ Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^6}{x^6+y^8} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.
2) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 6.13.11. $\star$ Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^4+y^6} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.
2) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 6.13.12. Dimostrare che è possibile estendere a tutto $\mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x,y):=\frac{\sin x-\sin y}{x-y}, \qquad x\neq y$$

in modo che essa risulti continua. Stabilire poi se tale estensione risulta differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 6.13.13. Dimostrare che è possibile estendere a tutto $\mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x,y):=\frac{x^2\sin x+y^2\sin y}{x+y}, \qquad x+y\neq 0$$

in modo che essa risulti continua. Stabilire poi se tale estensione risulta differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO 6.13.14. ⋆ Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(0) = g(0) = 0$ e, per $x^2 + y^2 \neq 0$,

$$f(x,y) = x \sin\Big(\frac{|y|^\alpha}{x^4 + y^2}\Big), \qquad g(x,y) = \frac{x|y|^\beta}{x^2 + y^4},$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri.

1) Calcolare tutti gli α tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.
2) Calcolare tutti i β tali che g sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.
3) Calcolare tutti i $\gamma > 0$ tali che

$$(L) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\Big(\frac{|y|^\gamma}{x^2 + y^4}\Big) = 0.$$

ESERCIZIO 6.13.15. ⋆ Dato $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|^\alpha}{\log(1 + x^2 + y^2)} & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & x = y = 0. \end{cases}$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $(0,0)$.
ii) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO 6.13.16. ⋆ In dipendenza da $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x^2 + y^2)^\alpha \sin\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Studiare la continuità e la differenziabilità di f al variare di α.
2) Stabilire se esistono α tali che f sia differenziabile su $\mathbb{R}^2$ ma non di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

ESERCIZIO 6.13.17. Costruire una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, tale che:

i) la derivata direzionale $f_v(0)$ esista finita per ogni $v \in \mathbb{R}^n$;
ii) la trasformazione $v \mapsto f_v(0)$ sia lineare;
iii) f non sia differenziabile in 0.

ESERCIZIO 6.13.18. Costruire una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, tale che:

i) per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$ esista la derivata direzionale $f_v(0)$ e si abbia
$$f(tv) = f(0) + tf_v(0) + E_v(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
con $|E_v(t)| \leq E(t)$ per una funzione $E(t) = o(t)$ per $t \to 0$;
ii) f non sia differenziabile in 0.

ESERCIZIO 6.13.19. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice (positivamente) omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \neq 0$ e $t > 0$.

Provare che se $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ è omogenea di grado α allora le sue derivate parziali sono omogenee di grado $\alpha - 1$. Verificare inoltre la formula di Eulero, per $x \neq 0$,

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x).$$

Esercizio 6.13.20. $\star$ Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e sia $f \in C(\bar{A}) \cap C^1(A)$ una funzione con derivate parziali f_x ed f_y uniformemente continue su A. Provare che esistono finite anche le seguenti derivate parziali al bordo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,0) - f(x,0)}{t} \quad \text{e}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y^+}(x,0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t}.$$

Esercizio 6.13.21. $\star$

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0, \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$

Provare che f è continua in $\mathbb{R}^2$ ma non è derivabile nel punto $(1,0)$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0, \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$

Provare che f è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ ma non è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 6.13.22. $\star$ Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \int_0^1 \frac{1 - e^{xyt}}{t + t^2} dt, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Provare che f è ben definita in ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
ii) Provare che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e calcolare $\nabla f(0,0)$.

Esercizio 6.13.23. $\star$ Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il dominio di definizione della funzione

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + x^{2n} + y^{2n}).$$

i) Determinare D.
ii) Provare che $f \in C(D)$.
ii) Provare che $f \in C^1(D)$.

Esercizio 6.13.24. Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma, e consideriamo l'applicazione $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)^2 dt.$$

Provare che F è differenziabile in ogni punto $\varphi \in X$ e calcolare il differenziale $dF(\varphi) \in \mathscr{L}(X; \mathbb{R})$.

13.3. Derivate di ordine superiore.

ESERCIZIO 6.13.25. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Stabilire se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$;
ii) Stabilire se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

ESERCIZIO 6.13.26. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(-\log(x^2+y^2))^{1/2}, & 0 < x^2+y^2 < 1, \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Provare che $f \in C^1(A)$;
ii) Provare che esistono $f_{xx}, f_{yy} \in C(A)$;
iii) Stabilire se $f \in C^2(A)$.

ESERCIZIO 6.13.27. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione $u(x) = |x|$. Provare che per $x \neq 0$ si ha $\det D^2 u(x) = 0$.

ESERCIZIO 6.13.28. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}}$$

se $xy \neq 0$ ed $f(x,y) = 0$ se $xy = 0$.

i) Provare che f non è continua nel punto $(0,0)$;
ii) Provare che per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ esistono le seguenti derivate parziali

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x,y)$$

in ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

ESERCIZIO 6.13.29. Trovare lo sviluppo di Taylor di ordine 9 di $f(x,y) := \sin(xy)$ nel punto $(0,0)$.

ESERCIZIO 6.13.30. Trovare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 della funzione $f(x,y) := \sin(e^{xy} - \cos(x+y))$ nel punto $(0,0)$.

ESERCIZIO 6.13.31. Sia $\Delta : C^2(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ l'operatore differenziale del secondo ordine (operatore di Laplace)

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Verificare che, per ogni $n \geq 3$, la funzione $u(x) = |x|^{2-n}$, $x \neq 0$, verifica $\Delta u(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. La funzione u si dice *soluzione fondamentale* dell'equazione di Laplace.

13.4. Massimi/minimi.

Esercizio 6.13.32. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x, y) = x^4 + y^2 - 2xy.$$
Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 6.13.33. $\star$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x, y) = \mathrm{e}^{3x} - 3y\mathrm{e}^{x} + y^3.$$
Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 6.13.34. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^4 + y^4}.$$
Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 6.13.35. Trovare la più piccola costante $c \in \mathbb{R}$ per cui valga
$$e^{x^2+y^2} \geq c(x + y) \qquad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 6.13.36. $\star$ Al variare del parametro $\lambda \geq 0$ si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = x^2 + \lambda xy + \frac{1}{2}y^4.$$
Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 6.13.37. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy.$$
Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Esercizio 6.13.38. $\star$ Siano $\beta > 0$ un parametro, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco chiuso ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - \beta xy.$$
i) Calcolare tutti i punti critici di f interni a K.
ii) Calcolare tutti i punti di minimo assoluto di f in K.

Esercizio 6.13.39. Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ ed $f : K \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = \sin(2x)\cos(y).$$
i) Provare che f assume massimo e minimo su K;
ii) Calcolare i punti critici di f in K e classificarli;
iii) Tracciare un grafico qualitativo di f;
iv) Determinare l'insieme immagine $f(K)$.

Esercizio 6.13.40. Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato e consideriamo l'insieme
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{1}{\alpha^2 + y^2}\right\}.$$
Provare che la funzione $f(x, y) = 2xy$ assume massimo su A e calcolarlo.

Esercizio 6.13.41. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il più grande insieme su cui la funzione

$$f(x, y) = |x^2 - 2x| - \log(y^2 + x) + \log x$$

è ben definita.

i) Calcolare i punti di estremo di f in A e classificarli;
ii) Stabilire se f ha punti di sella in A.

Esercizio 6.13.42. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xy}{2n + n^2x^4 + y^4}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dimostrare che essa converge puntualmente ma non totalmente in $\mathbb{R}^2$ e che si ha convergenza totale sui limitati di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 6.13.43. (Teorema di Rolle) Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto con interno non vuoto, $\text{int}(K) \neq \emptyset$, e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione con queste proprietà: 1) f è continua su K; 2) f è differenziabile in $\text{int}(K)$; f è costante su ∂K. Dimostrare che esiste almeno un punto $x \in \text{int}(K)$ tale che $\nabla f(x) = 0$.

13.5. Convessità.

Esercizio 6.13.44. $\star$ In dipendenza dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^{x+y} + x^2 + \alpha xy + y^2.$$

i) Determinare tutti i valori di α tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.
ii) Per ciascun $\alpha \in [-2, 2]$ discutere esistenza e unicità di punti di minimo di f.

Esercizio 6.13.45. $\star$ Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^{x+y} + x^4 + y^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Provare che f ha un unico punto critico e che si tratta di un punto di minimo assoluto.

Esercizio 6.13.46. Provare che se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso, allora anche la chiusura $\bar{A}$ e l'interno $\text{int}(A)$ sono convessi.

Esercizio 6.13.47. Siano $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathscr{A}$, funzioni convesse. Supponiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si abbia

$$f(x) = \sup_{\alpha \in \mathscr{A}} f_\alpha(x) < \infty.$$

Provare che la funzione f è convessa.

Esercizio 6.13.48. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $Hf(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che f è strettamente convessa. Mostrare anche che l'implicazione opposta non è vera.

Esercizio 6.13.49 (Disuguaglianza dei determinanti di Minkowski). Siano A, B due matrici $n \times n$ semidefinite positive. Provare che

$$\det(A + B)^{1/n} \geq \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}.$$

1) Discutere prima il caso $A = I$ matrice identità e $B = \Delta$ matrice diagonale. Usare il fatto che la funzione $t \mapsto \log(1 + e^t)$ è (strettamente) convessa.
2) Discutere il caso $A > 0$ tramite una diagonalizzazione di $A^{-1}B$.

Esercizio 6.13.50. Sia $f \in C(\mathbb{R}^n)$ una funzione superlineare:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{|x|} = \infty.$$

Definiamo la funzione $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (la *trasformata di Legendre* di f)

$$f^*(\xi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle \xi, x\rangle - f(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

1) Provare che il sup è un max.
2) Verificare che f^* è convessa.
3) Calcolare f^* nel caso $f(x) = \frac{1}{2}|x|^2$.

Esercizio 6.13.51. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione convessa e consideriamo l'applicazione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \nabla f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che F è iniettiva sull'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : Hf(x) > 0\}.$$

Esercizio 6.13.52. $\star$ Sia $X = \{\varphi \in C^1([0, 1]) : \varphi(0) = \alpha, \varphi(1) = \beta\}$ dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono due costanti fissate. Consideriamo il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(\varphi) = \int_0^1 \sqrt{1 + \varphi'(t)^2}dt.$$

1) Ammettendo che F assume il valore minimo, provare che F ha un *unico* punto di minimo.
2) Determinare il punto di minimo φ.

13.6. Esercizi vari.

Esercizio 6.13.53. $\star$ Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso non vuoto e definiamo la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x) = \mathrm{dist}(x; K) = \inf_{y\in K} |x - y|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Provare che l'inf è un min e che $\mathrm{Lip}(d) = 1$ (se $K \neq \mathbb{R}^n$).
2) Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ un punto di differenziabilità di d. Provare che x ha proiezione metrica unica su K.
3) Provare che d^2 verifica la disuguaglianza di semiconcavità

$$d(x + h)^2 + d(x - h)^2 - 2d(x)^2 \leq 2|h|^2, \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 6.13.54. $\star$ Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $f(0) = 0$ e $\nabla f(0) = 0$. Provare che esiste $r > 0$ tale che, detto $p_r = (0, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$, si abbia

$$B_r(p_r) \subset \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > f(x)\} = \mathrm{epi}(f),$$

ed inoltre $\partial B_r(p_r) \cap \mathrm{gr}(f) = \{0\}$.

ESERCIZIO 6.13.55. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)\cos(ny)}{n2^n}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Stabilire se esiste una costante $\delta > 0$ tale che per $|x| < \delta$ ed $|y| < \delta$ si abbia $f(x,y) \geq x$.

ESERCIZIO 6.13.56. Sia $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che il suo grafico $A = \big\{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in [0,1]\big\} \subset \mathbb{R}^3$ ha misura nulla nello spazio.

ESERCIZIO 6.13.57. Siano (X,d) uno spazio metrico, $A \subset X$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua su A. Provare che per ogni $x_0 \in \bar{A}$ esiste finito il seguente limite

$$\bar{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

In altri termini, f si estende in modo continuo su $\bar{A}$.

CAPITOLO 7

Equazioni differenziali ordinarie

1. Introduzione

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, un insieme aperto e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Un'equazione della forma

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{7.1.30}$$

si dice *equazione differenziale ordinaria di ordine n*. Qui, x è una variabile reale, y è una funzione incognita a valori reali e $y', \dots, y^{(n)}$ sono le sue derivate.

Una funzione $\varphi \in C^n(I)$ si dice *soluzione dell'equazione differenziale* (7.1.30) se:

i) $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo;
ii) $(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in I$;
iii) $F(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$ per ogni $x \in I$.

Le questioni più importanti sulle equazioni differenziali ordinarie sono:

1) L'esistenza di soluzioni.
2) L'unicità delle soluzioni, una volta fissate opportune condizioni iniziali o dati al bordo.
3) La regolarità delle soluzioni, ad esempio la dipendenza dai dati iniziali o dalla F, la stabilità per tempi grandi, etc.
4) Il calcolo esplicito delle soluzioni.

L'esistenza di soluzioni si prova con teoremi di punto fisso, con tecniche di approssimazione e compattezza, con metodi variazionali, con teoremi della funzione implicita, con strumenti di Analisi Funzionale.

Il problema dell'unicità è tipicamente più difficile. Solo in situazioni speciali è possibile calcolare le soluzioni in modo esplicito.

Osservazione 7.1.1 (Equazioni in forma normale). Nel caso che

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

per qualche funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, l'equazione (7.1.30) diventa

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{7.1.31}$$

Un'equazione della forma (7.1.31) si dice in *forma normale*.

Osservazione 7.1.2. [Equazioni di ordine n e sistemi di n equazioni] Trasformiamo l'equazione (7.1.31) in un *sistema* di equazioni. Se introduciamo le nuove funzioni incognite

$$z_i = y^{(i-1)}, \quad i = 1, \dots, n$$

allora avremo $z_i' = y^{(i)} = z_{i+1}$ per $i = 1, \ldots, n-1$, mentre $z_n' = y^{(n)} = f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Quindi l'equazione differenziale di ordine n (7.1.31) è equivalente al *sistema di equazioni differenziali di ordine* 1

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n). \end{cases} \tag{7.1.32}$$

La discussione dei sistemi di ordine 1 è più generale della discussione delle equazioni di ordine n.

2. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo (ad esempio aperto) e siano $a, b \in C(I)$ due funzioni continue. Un'equazione differenziale della forma

$$y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I, \tag{7.2.33}$$

si dice equazione lineare del primo ordine. Fissati $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, possiamo prescrivere il valore della soluzione nel punto x_0:

$$y(x_0) = y_0. \tag{7.2.34}$$

Il problema di risolvere l'equazione differenziale (7.2.33) con la *condizione iniziale* (7.2.34) si chiama *Problema di Cauchy*. L'incognita del problema è una funzione $y \in C^1(I)$.

Dedurremo la formula risolutiva dell'equazione differenziale, e più in generale del Problema di Cauchy, con un argomento euristico. Consideriamo preliminarmente il caso $b = 0$:

$$y' + a(x)y = 0, \quad x \in I. \tag{7.2.35}$$

In questo caso, l'equazione differenziale si dice *omogenea*. Supponendo $y \neq 0$, ad esempio $y > 0$, l'equazione differenziale (7.2.35) si può riscrivere nella forma $y'/y = -a(x)$. Una primitiva della funzione y'/y è $\log y$. Dunque, indicando con A una primitiva di a, ovvero $A'(x) = a(x)$ per ogni $x \in I$, abbiamo

$$-A = \log y + d,$$

per qualche costante $d \in \mathbb{R}$. Segue che $y = \exp(-d - A)$ e ponendo $c = \mathrm{e}^{-d}$ troviamo la soluzione

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I. \tag{7.2.36}$$

Questa funzione risolve l'equazione omogenea per ogni $c \in \mathbb{R}$ (in altri termini la limitazione $y > 0$ può essere lasciata cadere).

Ora cerchiamo una soluzione della forma (7.2.36) per l'equazione non omogenea (7.2.33), dove ora $c \in C^1(I)$ è una funzione incognita che deve essere determinata. Questo metodo si chiama “variazione della costante”. Inserendo $y' = c'\mathrm{e}^{-A} - ac\mathrm{e}^{-A}$ nell'equazione (7.2.33) otteniamo

$$c'\mathrm{e}^{-A} = b, \quad \text{ovvero} \quad c' = b\mathrm{e}^{A}.$$

Integrando tale equazione su un intervallo $(x_0, x) \subset I$ otteniamo

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt,$$

e dunque troviamo

$$y(x) = \Big(c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I, \tag{7.2.37}$$

dove $c(x_0) \in \mathbb{R}$ è un numero reale. Per ogni scelta di tale numero, la funzione (7.2.38) verifica l'equazione differenziale (7.2.33).

Il numero $c(x_0)$ si può determinare imponendo che l'integrale generale y verifichi la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Si ottiene $c(x_0) = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)}$. Dunque otteniamo la *formula di rappresentazione* per la soluzione del Problema di Cauchy:

$$y(x) = \Big(y_0\mathrm{e}^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I, \tag{7.2.38}$$

Nel prossimo teorema proviamo che il metedo seguito rileva in effetti l'*unica* soluzione del problema di Cauchy.

Teorema 7.2.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$, $a, b \in C(I)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Allora la funzione (7.2.38) risolve in modo unico il Problema di Cauchy (7.2.33)+(7.2.34).

Dim. Che la funzione (7.2.38) risolva il problema è un conto che ripercorre a ritroso l'argomento euristico. Proviamo che questa soluzione è l'unica.

Sia $z \in C^1(I)$ una soluzione dell'equazione differenziale (7.2.33) e consideriamo la funzione ausiliaria

$$w(x) = \mathrm{e}^{A(x)}z(x) - \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt,$$

dove A è una primitiva di a. Dal momento che sull'intervallo I risulta

$$w' = (az + z')\mathrm{e}^{A} - b\mathrm{e}^{A} = 0,$$

per il Teorema di Lagrange la funzione w è costante su I, ovvero esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $w(x) = k \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in I$. Dunque, si ha

$$z(x) = \Big(k + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}.$$

D'altra parte, se z verifica anche la condizione iniziale $z(x_0) = y_0$ deve essere $k = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)}$ e quindi z coincide con la funzione in (7.2.38). $\square$

3. Equazioni differenziali a variabili separabili

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti e siano $f \in C(I)$ e $g \in C(J)$ due funzioni continue. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = f(x)g(y), \quad x \in I, \tag{7.3.39}$$

per qualche intervallo $I_1 \subset I$. Una simile equazione si dice *a variabili separabili.* Eventualmente, fissati un punto $x_0 \in I$ e un valore $y_0 \in J$ possiamo prescrivere la condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0. \tag{7.3.40}$$

Il problema (7.3.39)+(7.3.40) si chiama *Problema di Cauchy.*

Osserviamo preliminarmente che se $g(y_0) = 0$ allora la funzione costante $y(x) = y_0$, $x \in I$, è certamente una soluzione dell'equazione differenziale (7.3.39) che verifica la condizione iniziale.

Siccome vogliamo dividere per g, supponiamo che $g(y_0) \neq 0$. Allora risulta $g \neq 0$ in un intervallo aperto $J_1 \subset J$ che contiene y_0. Possiamo allora dividere e separare le variabili. L'equazione differenziale si riscrive nel seguente modo:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \tag{7.3.41}$$

dove x varia in un intorno $I_1 \subset I$ del punto x_0 tale che $y(x) \in J_1$ per ogni $x \in I_1$.

Sia $G \in C^1(J_1)$ una primitiva di $1/g(y)$ (nella variabile y), definita nell'intervallo J_1 dove risulta $g \neq 0$. La funzione G è strettamente monotona, perchè $G'(y) \neq 0$, e pertanto G è invertibile.

Sia poi $F \in C^1(I)$ una primitiva di f. Integrando l'equazione differenziale (7.3.41) si ottiene

$$G(y(x)) = F(x) + C, \quad x \in I_1. \tag{7.3.42}$$

Qui, $C \in \mathbb{R}$ è una costante che può essere determinata tramite la condizione iniziale, e precisamente $C = G(y_0) - F(x_0)$.

La soluzione del Problema di Cauchy è dunque

$$y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)), \quad x \in I_1, \tag{7.3.43}$$

dove $G^{-1} : G(J_1) \to J_1$ è la funzione inversa di G. L'intervallo $I_1 \subset I$ è in generale più piccolo di I.

Il precedente argomento rileva due tipi di soluzione dell'equazione differenziale (7.3.39): le soluzioni costanti e le soluzioni per cui $g(y) \neq 0$. Potrebbero, tuttavia, esserci altre soluzioni. Se $g \neq 0$ su J, l'argomento prova che la soluzione è necessariamente della forma (7.3.43).

Teorema 7.3.1. Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti, $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, e siano $f \in C(I)$, $g \in C(J)$ tali che $g \neq 0$ su J. Allora il Problema di Cauchy (7.3.39)+(7.3.40) ha una soluzione unica $y \in C^1(I_1)$ data dalla formula (7.3.43), per qualche intervallo aperto $I_1 \subset I$ contenente x_0.

La dimostrazione del teorema è contenuta nell'argomento precedente.

Esempio 7.3.2 (Esempio di Peano). Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}, & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{7.3.44}$$

Osserviamo che la funzione $f(y) = 2\sqrt{|y|}$ non è Lipschitziana in un intorno di $y = 0$.

La funzione identicamente nulla $y = 0$ è una soluzione. Questa, tuttavia, non è l'unica soluzione. Una seconda soluzione può essere trovata separando le variabili: $2 = y'/\sqrt{|y|}$. Integrando tale equazione sull'intervallo fra 0 e $x \in \mathbb{R}$ troviamo

$$2x = \int_0^x \frac{y'(t)}{\sqrt{|y(t)|}}dt = \int_0^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{|z|}}dz = \begin{cases} 2\sqrt{y(x)}, & \text{se } y(x) > 0 \\ -2\sqrt{-y(x)}, & \text{se } y(x) < 0. \end{cases}$$

Nel cambiamento di variabili $z = y(t)$ abbiamo usato la condizione iniziale $y(0) = 0$. In questo modo, troviamo la soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

D'altra parte, per ogni coppia di numeri reali $\alpha \leq 0 \leq \beta$, la funzione

$$y_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2 & \text{if } x \geq \beta, \\ 0 & \text{if } \alpha < x < \beta, \\ -(x-\alpha)^2 & \text{if } x \leq \alpha \end{cases}$$

è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e risolve il Problema di Cauchy (7.3.44).

Lasciamo poi al lettore il compito di osservare come sia possibile definire soluzioni anche nel caso limite $\alpha = -\infty$ e/o $\beta = +\infty$.

Dunque c'è un "continuo" di soluzioni noto come il "pennello di Peano".

Fra tutte queste soluzioni se ne possono selezionare due speciali: quella massima, che è $y_+(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $y_+(x) = x^2$ per $x \geq 0$, e quella minima, che è $y_-(x) = -x^2$ per $x \leq 0$ e $y_-(x) = 0$ per $x \geq 0$; osserviamo che, con le notazioni precedenti, si ha $y_+ = y_{-\infty,0}$ e $y_- = y_{0,+\infty}$. Per ogni punto del piano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $y_-(x_0) \leq y_0 \leq y_+(x_0)$ esiste una soluzione y del Problema di Cauchy (7.3.44) tale che $y(x_0) = y_0$. Il "pennello di Peano" ricopre tutta la regione del piano compresa fra la soluzione massima e quella minima.

4. Altre classi di equazioni

Esempio 7.4.1 (Equazioni di tipo omogeneo). Un'equazione differenziale con la seguente struttura

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

si dice di tipo omogeneo. Qui, $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione (continua) su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Con il cambiamento di variabile funzionale $y = xz$, dove z è la nuova funzione incognita, si ottiene $y' = z + xz'$ e l'equazione differenziale si trasforma nella equazione a variabili separabili

$$xz' + z = f(z).$$

Esempio 7.4.2 (Equazione di Bernoulli). Un'equazione differenziale con la struttura

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, \quad x \in I, \tag{7.4.45}$$

dove α è un parametro reale tale che $\alpha \neq 0, 1$ si dice di Bernoulli. Ponendo

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z',$$

l'equazione si trasforma nella seguente equazione lineare

$$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x).$$

Esempio 7.4.3 (Equazione di Clairaut). Un'equazione differenziale con la struttura

$$y = xy' + g(y'), \quad x \in I \tag{7.4.46}$$

si dice di Clairaut. Derivandola si ottiene l'equazione

$$y''(x + g'(y')) = 0.$$

Esempio 7.4.4 (Dinamica delle popolazioni). Supponiamo che una certa popolazione $p > 0$ evolva secondo la legge

$$\dot{p}(t) = \gamma p(t)\Big\{1 - \Big(\frac{p(t)}{K}\Big)^{\vartheta}\Big\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7.4.47}$$

dove $\dot{p}(t) = \frac{dp(t)}{dt}$ e $t \in \mathbb{R}$ è la variabile temporale. Qui, $\gamma, \vartheta, K > 0$ sono parametri fissati.

L'equazione (7.4.47) è un tipico esempio di equazione di popolazione. L'equazione è di Bernoulli e può essere integrata esplicitamente.

5. Problema di Cauchy: Esistenza e unicità locale nell'ipotesi Lipschitz

In $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, introduciamo le coordinate $x \in \mathbb{R}$ and $y \in \mathbb{R}^n$. Sia poi $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione continua. Dato un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ consideriamo il *Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{7.5.48}$$

Abbiamo un *sistema* di n equazioni differenziali del primo ordine con la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.

Una funzione $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ si dice soluzione del problema se:

i) $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo (aperto) tale che $x_0 \in I$;
ii) $(x, y(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in I$;
iii) $y'(x) = f(x, y(x))$ per ogni $x \in I$ (l'equazione differenziale è verificata);
iv) $y(x_0) = y_0$ (il dato iniziale viene assunto).

Integrando l'equazione differenziale $y' = f(x,y)$ sull'intervallo con estremi x_0 e x otteniamo l'equazione integrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt = Ty(x), \tag{7.5.49}$$

dove $y \mapsto Ty$ è un'applicazione definita in un opportuno spazio funzionale. Una soluzione del Problema di Cauchy è dunque un punto fisso dell'applicazione T. D'altra parte, se una funzione continua y risolve l'equazione di punto fisso (7.5.49) allora y è di classe C^1 per il Teorema fondamentale del calcolo integrale e risolve il Problema di Cauchy (7.5.48).

Fissiamo lo spazio funzionale. Per $\delta > 0$, si consideri lo spazio vettoriale reale

$$V = C([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^n). \tag{7.5.50}$$

Sappiamo che V munito della sup-norma

$$\|y\| = \max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} |y(x)|, \quad y \in V, \tag{7.5.51}$$

è uno spazio di Banach. Per ogni $\varepsilon > 0$, il sottoinsieme X di V

$$X = \big\{y \in V : y(x_0) = y_0,\ \|y - y_0\| \le \varepsilon\big\} \tag{7.5.52}$$

è chiuso in quanto entrambe le condizioni $y(x_0) = y_0$ e $\|y - y_0\| \le \varepsilon$ sono conservate dalla convergenza uniforme (in effetti basta quella puntuale). Di conseguenza, lo spazio metrico (X, d) è completo rispetto alla distanza $d(y, z) = \|y - z\|$.

Vedremo che per un'opportuna scelta di δ ed ε l'applicazione $T : X \to X$

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \tag{7.5.53}$$

è ben definita, ovvero risulta effettivamente $Ty \in X$ per ogni $y \in X$.

Definizione 7.5.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ è localmente di Lipschitz in y se per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \tag{7.5.54}$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in K$.

Teorema 7.5.2 (Esistenza e unicità locale). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto, $(x_0, y_0) \in \Omega$, e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione localmente di Lipschitz in y. Allora esiste $\delta > 0$ tale che il Problema di Cauchy (7.5.48) ha una soluzione unica $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ nell'intervallo $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Inoltre, la scelta di δ è uniforme per (x_0, y_0) in un compatto di Ω.

Dim. Siano $\delta > 0$ ed $\varepsilon > 0$ tali che $K = [x_0-\delta, x_0+\delta]\times\{y \in \mathbb{R}^n : |y-y_0| \le \varepsilon\} \subset \Omega$. Sia $H \subset \Omega$ un insieme compatto tale che $K \subset \mathrm{int}(H)$. Dal momento che f è continua su H, il numero

$$M = \sup_{(x,y)\in H} |f(x, y)| < \infty$$

è finito. Sia X l'insieme introdotto in (7.5.52) e sia T l'applicazione (7.5.53). Per ogni $y \in X$ abbiamo, per ogni $x \in I$,

$$|Ty(x) - y_0| \le \Big| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))| dt \Big| \le M|x - x_0| \le \delta M.$$

In effetti, risulta $(t, y(t)) \in K \subset H$ per ogni $t \in I$. Scegliendo eventualmente una costante $\delta > 0$ più piccola (questa scelta non modifica M), possiamo supporre che $\delta M \le \varepsilon$. Con una tale scelta, si ha $Ty \in X$ per ogni $y \in X$. Quindi $T : X \to X$ è ben definita. La scelta di $\delta > 0$ è indipendente da x_0 e y_0, fintanto che $K \subset \mathrm{int}(H)$.

Dimostriamo che l'applicazione $T : X \to X$ ha un unico punto fisso. È sufficiente mostrare che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che l'applicazione iterata T^k è una contrazione. Siano

$y, \bar{y} \in X$ e $x \in I$. Abbiamo (ad esempio con $x \geq x_0$)

$$\begin{aligned}|Ty(x) - T\bar{y}(x)| &= \Big| \int_{x_0}^{x} \big(f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t)\big) dt \Big| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t)| dt \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} |y(t) - \bar{y}(t)| dt \leq L|x - x_0| \cdot \|y - \bar{y}\|.\end{aligned}$$

Qui, L è la costante di Lipschitz per f relativa al compatto H. Analogamente, si ha

$$\begin{aligned}|T^2 y(x) - T^2 \bar{y}(x)| &= \Big| \int_{x_0}^{x} (f(t, Ty(t)) - f(t, T\bar{y}(t)) dt \Big| \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} |Ty(t) - T\bar{y}(t)| dt \\ &\leq L^2 \|y - \bar{y}\| \int_{x_0}^{x} (t - x_0) dt \leq L^2 \frac{(x - x_0)^2}{2} \|y - \bar{y}\|.\end{aligned}$$

Per induzione, troviamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $x \in I$

$$|T^k y(x) - T^k \bar{y}(x)| \leq \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!} \|y - \bar{y}\|,$$

e questo implica

$$\|T^k y - T^k \bar{y}\| \leq \frac{(L\delta)^k}{k!} \|y - \bar{y}\|.$$

Dal momento che

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(L\delta)^k}{k!} = 0,$$

allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{(L\delta)^k}{k!} < 1.$$

Per un tale k, l'applicazione T^k è una contrazione. Per il Teorema 4.1.3, T ha un unico punto fisso $y \in X$. Inoltre, risulta $y \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^n)$ e y risolve il Problema di Cauchy (7.5.48).

Resta da dimostrare che, se $\tilde{y} \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^n)$ è una qualunque soluzione del Problema di Cauchy (7.5.48), allora $\tilde{y} \in X$: in tal modo sarà dimostrato che $\tilde{y} = y$. Dobbiamo dunque dimostrare che

$$\forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \qquad |\tilde{y}(x) - y_0| \leq \varepsilon.$$

Supponiamo per assurdo che esista $x_1 \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ tale che $|\tilde{y}(x_1) - y_0| > \varepsilon$. Senza perdere di generalità possiamo supporre che $(t, \tilde{y}(t)) \in H$ per ogni t compreso tra x_0 ed x_1: in tal modo

$$|\tilde{y}(x_1) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x_1} f(t, \tilde{y}(t)) dt \right| \leq M|x_1 - x_0| \leq M\delta \leq \varepsilon,$$

contraddizione. □

L'Osservazione 7.1.2 porta immediatamente al seguente enunciato.

Corollario 7.5.3. Siano $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto e $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in A$; supponiamo che $f : A \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua tale che per ogni compatto $K \subset A$ esista $L \geq 0$ tale che

$$|f(x,p) - f(y,q)| \leq L|p-q| \qquad \forall\ (x,p),(x,q) \in K.$$

Allora esiste $\delta > 0$ tale il problema

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y \in C^n([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$.

Osservazione 7.5.4. Sia $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che esistano continue le derivate parziali

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \in C(\Omega), \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

Allora la funzione f è localmente di Lipschitz in y. Supponiamo ad esempio che sia $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ e consideriamo un compatto $K = [a,b] \times \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq r\}$ per qualche $-\infty < a < b < \infty$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$. Se $(x,y_1),(x,y_2) \in K$ allora per il Teorema del valor medio esiste $t^* \in [0,1]$ tale che

$$\begin{aligned} f_i(x,y_1) - f_i(x,y_2) &= \langle \nabla_y f_i(x, y_1 + t^*(y_2 - y_1)), y_2 - y_1 \rangle \\ &\leq |\nabla_y f_i(x, y_1 + t^*(y_2 - y_1))||y_2 - y_1| \leq M|y_2 - y_1|, \end{aligned}$$

dove ∇_y indica il gradiente nelle sole variabili y e

$$M = \max_{(x,y)\in K} |\nabla_y f_i(x,y)| < \infty,$$

e l'affermazione segue.

6. Soluzioni massimali e criterio di prolungamento

Sia $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^n)$ una funzione che verifica la condizione di Lipschitz (7.5.54) e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Proposizione 7.6.1. Nelle ipotesi del Teorema 7.5.2, siano I_1 e I_2 due intervalli aperti contenenti x_0 e supponiamo che $y_1 \in C^1(I_1;\mathbb{R}^n)$ e $y_2 \in C^1(I_2;\mathbb{R}^n)$ siano soluzioni del Problema di Cauchy (7.5.48). Allora abbiamo $y_1 = y_2$ su $I_1 \cap I_2$.

Dim. L'insieme $A = \{x \in I_1 \cap I_2 : y_1(x) = y_2(x)\}$ è relativamente chiuso in $I_1 \cap I_2$ in quanto y_1 e y_2 sono continue. Mostriamo che A è anche aperto in $I_1 \cap I_2$. Dal momento che $I_1 \cap I_2$ è connesso, seguirà che $A = I_1 \cap I_2$.

Siano dunque $\bar{x}_0 \in A$ e $\bar{y}_0 = y_1(\bar{x}_0) = y_2(\bar{x}_0)$. Per il Teorema 7.5.2 esiste un $\delta > 0$ tale che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\bar{x}_0) = \bar{y}_0 \end{cases} \tag{7.6.55}$$

ha una soluzione unica $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ con $I = [\bar{x}_0 - \delta, \bar{x}_0 + \delta]$. Per $\delta > 0$ piccolo, si ha $I \subset I_1 \cap I_2$. Segue allora che $y = y_1 = y_2$ in I, e perciò $I \subset A$. □

Sia $\mathscr{A}$ l'insieme di tutte le coppie (J, y_J) dove $J \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto che contiene x_0 e $y_J \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ è una soluzione del Problema di Cauchy (7.5.48). Per il Teorema 7.5.2, abbiamo $\mathscr{A} \neq \emptyset$.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ l'intervallo $I = \bigcup J$, dove l'unione è fatta su tutti gli intervalli J tali che $(J, y_J) \in \mathscr{A}$. Sia $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ la funzione definita da

$$y(x) = y_J(x) \quad \text{se} \quad x \in J. \tag{7.6.56}$$

La funzione y è ben definita in quanto per la Proposizione 7.6.1 si ha $y_J = y_{J'}$ su $J \cap J'$. Inoltre, y è una soluzione del Problema di Cauchy (7.5.48).

Definizione 7.6.2 (Soluzione massimale). La funzione y definita in (7.6.56) si chiama *soluzione massimale* del Problema di Cauchy (7.5.48).

Teorema 7.6.3 (Criterio di prolungamento). Siano $I = (a_0, b_0) \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto con $-\infty \leq a_0 < b_0 \leq +\infty$, $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$, e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione che verifica la proprietà di Lipschitz locale in y. Se $y \in C^1((a, b); \mathbb{R}^n)$ è la soluzione massimale del Problema di Cauchy (7.5.48), per qualche intervallo $(a, b) \subset (a_0, b_0)$, allora deve valere almeno una delle seguenti due affermazioni (o entrambe):

i) $b = b_0$; oppure:
ii) $\lim_{x \uparrow b} |y(x)| = \infty$.

C'è un'affermazione analoga relativa al punto a.

Dim. Per assurdo, supponiamo che $b < b_0$ e che esista una successione $x_k \in (a, b)$, $k \in \mathbb{N}$, tale che

$$\lim_{k \to \infty} x_k = b \quad \text{e} \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} |y(x_k)| \leq M_0,$$

per qualche costante finita $M_0 < \infty$. Ponendo $\bar{y}_k = y(x_k) \in \mathbb{R}^n$ ed eventualmente estraendo una sottosuccessione possiamo supporre che

$$\lim_{k \to \infty} \bar{y}_k = \bar{y}_0$$

per qualche $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Studiamo il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) \\ z(x_k) = \bar{y}_k. \end{cases} \tag{7.6.57}$$

Fissiamo un compatto $H \subset \Omega$ tale che $(b, \bar{y}_0) \in \mathrm{int}(H)$ e poniamo

$$M = \max_{(x,y) \in H} |f(x, y)| < \infty.$$

Per un opportuno $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, l'insieme compatto

$$K = [x_k, 2b - x_k] \times \{y \in \mathbb{R}^n : |y - \bar{y}_k| \leq \varepsilon\}$$

è contenuto in H. Consideriamo lo spazio funzionale

$$X = \big\{z \in C([x_k, 2b - x_k]; \mathbb{R}^n) : z(x_k) = \bar{y}_k,\ \|z - \bar{y}_k\| \leq \varepsilon\big\}.$$

Se $k \in \mathbb{N}$ è sufficientemente grande, abbiamo anche $2(b - x_k)M \leq \varepsilon$. Quindi, l'operatore integrale

$$Tz(x) = \bar{y}_k + \int_{x_k}^{x} f(t, z(t))dt$$

trasforma X in se stesso, ovvero $T : X \to X$. Come nella dimostrazione del Teorema 7.5.2, un'opportuna iterazione di T è una contrazione su X e pertanto per il Teorema 4.1.3 esiste un'unica soluzione $z \in C^1([x_k, 2b - x_k]; \mathbb{R}^n)$ del Problema di Cauchy (7.6.57).

D'altra parte, la funzione y risolve il medesimo Problema di Cauchy sull'intervallo $[x_k, b)$ e per l'unicità deve essere $y = z$ su $[x_k, b)$. Questo prova che y può essere prolungata come soluzione del Problema di Cauchy (7.5.48) oltre b. Questo contraddice la massimalità di y. □

7. Lemma di Gronwall e soluzioni globali

In questa sezione proviamo un teorema di esistenza globale delle soluzioni di equazioni differenziali nel caso che la funzione f verifichi una condizione di crescita al più lineare, si veda (7.7.60). A tale scopo occorre la seguente proposizione, nota come Lemma di Gronwall.

Lemma 7.7.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$ e $\varphi \in C(I)$ una funzione continua non negativa, $\varphi \geq 0$. Se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha, \beta \geq 0$, tali che

$$\varphi(x) \leq \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt, \quad \text{per ogni } x \in I \text{ con } x \geq x_0, \tag{7.7.58}$$

allora

$$\varphi(x) \leq \alpha e^{\beta(x-x_0)} \quad \text{per ogni } x \in I \text{ con } x \geq x_0. \tag{7.7.59}$$

Dim. Sia $\Phi : I \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\Phi(x) = \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt, \quad x \in I.$$

Risulta $\Phi \in C^1(I)$ ed inoltre $\Phi'(x) = \beta\varphi(x)$ per ogni $x \in I$, per il Teorema fondamentale del calcolo. Dalla (7.7.58) segue che $\Phi'(x) \leq \beta\Phi(x)$ per $x \in I$, dal momento che $\beta \geq 0$. La funzione $\Psi(x) = e^{-\beta(x-x_0)}\Phi(x)$ verifica allora

$$\Psi'(x) = -\beta e^{-\beta(x-x_0)}\Phi(x) + e^{-\beta(x-x_0)}\Phi'(x) = e^{-\beta(x-x_0)}\big(-\beta\Phi(x) + \Phi'(x)\big) \leq 0$$

e $\Psi(x_0) = \Phi(x_0) = \alpha$. Segue che $\Psi(x) \leq \alpha$ per $x \geq x_0$, ovvero

$$\Phi(x) \leq \alpha e^{\beta(x-x_0)}$$

per ogni $x \in I$ con $x \geq x_0$. Questo implica (7.7.59), dal momento che $\varphi(x) \leq \Phi(x)$, per la (7.7.58). □

Teorema 7.7.2 (Soluzioni globali). Siano $I = (a_0, b_0)$ con $-\infty \leq a_0 < b_0 \leq \infty$, $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$, e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione continua con la proprietà di Lipschitz locale in y (7.5.54). Supponiamo che per ogni compatto $K \subset I$ esista una costante $C \geq 0$ tale che

$$|f(x, y)| \leq C(1 + |y|), \quad \text{per ogni } x \in K \text{ e } y \in \mathbb{R}^n. \tag{7.7.60}$$

Allora il Problema di Cauchy (7.5.48), con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$, ha un'unica soluzione globale definita su tutto I.

Dim. Sia $y \in C^1(J;\mathbb{R}^n)$ la soluzione massimale del Problema di Cauchy (7.5.48), con $J = (a,b) \subset I$. Supponiamo per assurdo che $b < b_0$. Allora, per il Teorema 7.6.3 si ha

$$\lim_{x\uparrow b} |y(x)| = \infty. \tag{7.7.61}$$

Siano $K = [x_0, b]$ e $C > 0$ tali che valga la (7.7.60). Dall'identità

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad x \in J,$$

otteniamo per $x \in J$ con $x \geq x_0$

$$|y(x)| \leq |y_0| + C\int_{x_0}^{x} (1 + |y(t)|)dt \leq |y_0| + C(b - x_0) + C\int_{x_0}^{x} |y(t)|\,dt.$$

Dal Lemma di Gronwall segue che

$$|y(x)| \leq \big\{|y_0| + C(b - x_0)\big\}\mathrm{e}^{C(x-x_0)}, \quad x \in (x_0, b),$$

e perciò la (7.7.61) non può valere. □

Esempio 7.7.3 (Sistemi lineari). Sia $A(x)$ una matrice reale $n \times n$ che dipende da $x \in I$ in modo continuo, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. Il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$, ha una soluzione unica $y \in C^1(I)$. Infatti, la funzione $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(x,y) = A(x)y$$

è continua e per ogni compatto $K \subset I$ verifica per $x \in K$ ed $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |A(x)y_1 - A(x)y_2| \leq \|A(x)\||y_1 - y_2| \leq \max_{x\in K} \|A(x)\||y_1 - y_2|.$$

Le ipotesi del Teorema 7.5.2 di esistenza e di unicità locale sono dunque verificate. Inoltre si ha $|f(x,y)| = |A(x)y| \leq \max_{x\in K} \|A(x)\||y|$ per ogni $x \in K$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Dunque, anche l'ipotesi (7.7.60) del Teorema 7.7.2 è soddisfatta. Questo assicura l'esistenza globale.

Esempio 7.7.4. Sia $\alpha > 0$ e consideriamo il Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = |y|^{1+\alpha} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

La funzione $f(y) = |y|^{1+\alpha}$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e quindi le ipotesi del Teorema di esistenza e unicità locale della soluzione sono verificate. Sia $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Si ha $y(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Se, infatti, esistesse $\bar{x} \in I$ tale che $y(\bar{x}) = 0$, allora y sarebbe soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = |z|^{1+\alpha} \\ z(\bar{x}) = 0, \end{cases}$$

che però avrebbe come unica soluzione la funzione identicamente nulla $z = 0$. Questa sarebbe una contraddizione.

Siccome la soluzione y del problema iniziale è stettamente crescente, segue che $0 < y(x) < 1$ per ogni $x \in I$ con $x < 0$. Dal Criterio di prolungamento deduciamo che $a = -\infty$.

In effetti, la soluzione y si calcola esplicitamente separando le variabili

$$x = \int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)^{1+\alpha}} dt = \int_1^{y(x)} \frac{dz}{z^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}\Big(1 - \frac{1}{y^\alpha}\Big),$$

da cui si ottiene la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{1-\alpha x}}, \quad \text{definita per } x < b = \frac{1}{\alpha}.$$

A causa dell'andamento superlineare di $f(y) = |y|^{1+\alpha}$ la soluzione del Problema di Cauchy esplode in tempo finito. Si noti che $b \to \infty$ quando $\alpha \to 0$.

8. Teorema di esistenza di Peano

L'ipotesi su $f(x, y)$ di Lipschitzianità locale nella y (Definizione 7.5.1) garantisce esistenza e unicità locali delle soluzioni di $y' = f(x, y)$, come nel Teorema 7.5.2. Quando la funzione $f(x, y)$ è continua non si può avere unicità (Esempio 7.3.2); tuttavia, un classico risultato dovuto a G. Peano garantisce quanto meno l'esistenza delle soluzioni.

Teorema 7.8.1 (Teorema di esistenza di Peano). Siano $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto, (x_0, y_0) un punto di Ω e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua in Ω. Allora esistono $\delta > 0$ ed $y \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \Omega)$ tali che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{7.8.62}$$

Dim. Per semplificare la notazione, e senza perdere di generalità, possiamo supporre che $x_0 = 0$. Ci limiteremo a costruire $\delta > 0$ ed una $y \in C^1([0, \delta]; \Omega)$ che risolva il problema (7.8.62) solo per $x \in [0, \delta]$; a questo punto saremo in grado di risolvere anche il problema

$$\begin{cases} z'(x) = -f(-x, z(x)) & \forall\, x \in [0, \delta_1] \\ z(0) = y_0. \end{cases}$$

per un qualche $\delta_1 > 0$ e sarà sufficiente osservare che, estendendo y a $[-\delta_1, 0]$ tramite $y(x) := z(-x)$, essa risolve (7.8.62) per $x \in [-\delta_1, 0]$. Il lettore scrupoloso noterà poi che in $x = 0$ si ha un raccordo "di tipo C^1", dal momento che le derivate destra e sinistra di y in $x = 0$ coincidono e valgono $f(0, y_0)$.

Fissiamo $r > 0$ ed $\varepsilon > 0$ in modo che

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x \in [0, r] \text{ e } \|y - y_0\| \le \varepsilon\} \subset \Omega$$

e poniamo

$$M := \max_H |f|, \qquad \delta := \min\left\{r, \frac{\varepsilon}{M}\right\}.$$

Costruiamo una successione y_j di "soluzioni approssimate" di (7.8.62). Fissato un intero $j \ge 1$ dividiamo l'intervallo $[0, \delta]$ in j sottointervalli di lunghezza δ/j introducendo i punti $x_i^j := i\frac{\delta}{j}$, $i = 0, 1, \ldots, j$; definiamo $y_j : [0, \delta] \to \mathbb{R}^n$ richiedendo che

- $y_j(0) = y_0$;
- y_j è continua in $[0, \delta]$ e affine a tratti;
- (per induzione su $i = 0, 1, \ldots, j-1$) $y_j'(x) = f(x_i^j, y_j(x_i^j))$ per $x \in (x_i^j, x_{i+1}^j)$.

Intuitivamente: la derivata di y_j in ogni sottointervallo è pari al valore di f nel punto corrispondente all'estremo iniziale del sottointervallo stesso.

Dimostriamo che

$$|y_j(x) - y_0| \leq M|x| \qquad \forall\, x \in [0, \delta]. \tag{7.8.63}$$

Ragionando per induzione su $i = 0, \ldots, j-1$, dimostriamo la disuguaglianza (7.8.63) per ogni $x \in [x_i^j, x_{i+1}^j]$. Se $i = 0$ abbiamo

$$|y_j(x) - y_0| = |f(x_0, y_0)|x \leq Mx \qquad \forall\, x \in [0, x_1^j],$$

mentre per $i \geq 1$ ed $x \in [x_i^j, x_{i+1}^j]$

$$\begin{aligned}|y_j(x) - y_0| &\leq |y_j(x) - y_j(x_i^j)| + |y_j(x_i^j) - y_0| \\ &\leq |f(x_i^j, y_j(x_i^j))|(x - x_i^j) + Mx_i^j \\ &\leq M(x - x_i^j + x_i^j) \ = \ Mx,\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato l'ipotesi induttiva ed il fatto che, poiché $|y_j(x_i^j)) - y_0| \leq Mx_i^j \leq M\delta \leq \varepsilon$, si ha[1] $(x_i^j, y_j(x_i^j)) \in H$ e dunque $|f(x_i^j, y_j(x_i^j))| \leq M$.

Ricordando nuovamente che $M\delta \leq \varepsilon$, la (7.8.63) implica che $(x, y_j(x)) \in H$ per ogni $x \in [0, \delta]$; in particolare, $(y_j)_j$ è una successioni equilimitata ed equicontinua[2] in $C^0([0, \delta]; \overline{B(y_0, \varepsilon)})$. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà, a meno di passare ad una sottosuccessione (che non re-indicizziamo) esiste $y \in C^0([0, \delta]; \overline{B(y_0, \varepsilon)})$ tale che $y_j \to y$ uniformemente in $[0, \delta]$. Verifichiamo che y è soluzione del problema (7.8.62); per far ciò è sufficiente dimostrare che

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t))dt \qquad \forall\, x \in [0, \delta], \tag{7.8.64}$$

cosa che garantisce peraltro la regolarità C^1 di y. Osserviamo preliminarmente che, essendo f continua sul compatto H, essa è uniformemente continua in H e in particolare

$$f(t, y_j(t)) \to f(t, y(t)) \qquad \text{uniformemente in } [0, \delta]. \tag{7.8.65}$$

---

[1] Questo fatto, in effetti, è necessario anche per la buona positura della definizione di y_j.

[2] Le y_j sono anzi uniformemente Lipschitz: essendo continue ed affini a tratti, la costante di Lipschitz di y_j è uguale (esercizio!) al valore massimo di $|y_j'|$ nei punti dove la derivata è definita; in particolare vale $\mathrm{Lip}(y_j) \leq M$ per ogni j.

Verifichiamo la (7.8.64). Per $x \in [0, \delta]$ fissato definiamo $N = N(x, j)$ come l'unico intero tale che $x \in [x_N^j, x_{N+1}^j[$; allora

$$
\begin{aligned}
& y_0 + \int_0^x f(t, y(t))dt \\
(7.8.65) \quad &= y_0 + \lim_{j\to\infty} \int_0^x f(t, y_j(t))dt \\
&= y_0 + \lim_{j\to\infty} \Big[\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} \Big(\int_{x_i^j}^{x_{i+1}^j} \big(f(t, y_j(t)) - f(x_i^j, y_j(x_i^j))\big)dt}_{R_j^1} + (y_j(x_{i+1}^j) - y_j(x_i^j))\Big) \\
&\qquad + \underbrace{\int_{x_N^j}^x \big(f(t, y_j(t)) - f(x_N^j, y_j(x_N^j))\big)dt}_{R_j^2} + (y_j(x) - y_j(x_N^j))\Big] \\
&= y_0 + \lim_{j\to\infty} \Big[\sum_{i=0}^{N-1} \big(y_j(x_{i+1}^j) - y_j(x_i^j)\big) + (y_j(x) - y_j(x_N^j)) + R_j \Big] \\
&= y_0 + \lim_{j\to\infty} \big[y_j(x) - y_j(0) + R_j\big] \\
&= y(x) + \lim_{j\to\infty} R_j,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo posto $R_j := R_j^1 + R_j^2$. E' pertanto sufficiente dimostrare che $R_j \to 0$ per $j \to +\infty$; questo segue osservando che, se $t \in [x_i^j, x_{i+1}^j]$, allora

$$\|(t, y_j(t)) - (x_i^j, y_j(x_i^j))\| \le |t - x_i^j| + \|y_j(t) - y_j(x_i^j)\| \le (1 + M)|t - x_i^j| \le (1 + M)\tfrac{\delta}{j}$$

e l'uniforme continuità di f su H garantisce che $R_j \to 0$ per $j \to \infty$. Questo conclude la dimostrazione. □

9. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a, b, f \in C(I)$ funzioni continue. In questa sezione studiamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad x \in I.$$

L'incognita è una funzione $y \in C^2(I)$. L'equazione differenziale si dice lineare perchè l'operatore differenziale $\mathscr{L} : C^2(I) \to C(I)$

$$\mathscr{L}(y) = y'' + a(x)y' + b(x)y$$

è un operatore lineare.

La dimostrazione del seguente teorema di esistenza e unicità della soluzione per il Problema di Cauchy segue direttamente dai Teoremi 7.5.2 e 7.7.2. Si veda anche l'Esempio 7.7.3.

TEOREMA 7.9.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$, e siano $a, b, f \in C(I)$ funzioni continue. Allora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases} \tag{7.9.66}$$

ha un'unica soluzione $y \in C^2(I)$.

Studiamo ora il caso omogeneo $f = 0$. Consideriamo l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$S = \big\{ y \in C^2(I) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \text{ su } I \big\}.$$

Dal teorema precedente segue il seguente fatto.

PROPOSIZIONE 7.9.2. L'insieme S delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale reale di dimensione 2.

DIM. S è uno spazio vettoriale, perchè per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in S$, ovvero $\mathscr{L}(y_1) = \mathscr{L}(y_2) = 0$, risulta

$$\mathscr{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathscr{L}(y_1) + \beta \mathscr{L}(y_2) = 0,$$

e quindi $\alpha y_1 + \beta y_2 \in S$.

Proviamo che S ha dimensione esattamente 2. Fissato un punto $x_0 \in I$, definiamo la trasformazione $T : S \to \mathbb{R}^2$ definita nel seguente modo

$$T(y) = \big(y(x_0), y'(x_0)\big).$$

La trasformazione T è lineare. Proviamo che T è iniettiva e suriettiva. Ne segue che S ed $\mathbb{R}^2$ sono linearmente isomorfi e dunque $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Prova dell'iniettività: se $T(y) = T(z)$ con $y, z \in S$ allora y e z risolvono lo stesso Problema di Cauchy (7.9.66) (con $f = 0$). Siccome per il Teorema 7.9.1 la soluzione del problema è unica, deve essere $y = z$.

Prova della suriettività: dato $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, dal Teorema 7.9.1 segue l'esistenza di $y \in S$ tale che $T(y) = (y_0, y_0')$. $\square$

Dunque, lo spazio vettoriale S ha una base vettoriale composta da due soluzioni. Consideriamo due soluzioni $y_1, y_2 \in S$ (non necessariamente linearmente indipendenti). Formiamo la *matrice Wronskiana*

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix},$$

e il *determinante Wronskiano*

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Chiaramente risulta $w \in C^1(I)$ e inoltre

$$\begin{aligned} w' &= y_1'y_2' - y_2'y_1' + y_1y_2'' - y_2y_1'' \\ &= y_1(-a(x)y_2' - b(x)y_2) - y_2(-a(x)y_1' - b(x)y_1) \\ &= -a(x)w. \end{aligned}$$

Integrando l'equazione differenziale scopriamo che il determinante Wronskiano ha la forma

$$w(x) = w(x_0) \exp\Big(- \int_{x_0}^{x} a(t)dt \Big), \quad x \in I.$$

In particolare, se $w(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in I$ allora $w = 0$ in tutti i punti.

PROPOSIZIONE 7.9.3. Siano $y_1, y_2 \in S$ soluzioni dell'equazione omogenea e sia $w = \det W_{y_1,y_2}$ il corrispondente determinante Wronskiano. Allora:

(A) y_1, y_2 sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $x_0 \in I$ tale che $w(x_0) = 0$ (equivalentemente se e solo se $w = 0$ su I);

(B) y_1, y_2 sono linearmente indipendenti se e solo se esiste $x_1 \in I$ tale che $w(x_1) \neq 0$ (equivalentemente se e solo so $w \neq 0$ su I).

DIM. Proviamo (A). Se y_1, y_2 sono linearmente dipendenti allora esistono $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tali che $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ su I. Derivando vale anche $\alpha y_1' + \beta y_2' = 0$ su I, e dunque

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Segue che $w = 0$ su tutto I.

Supponiamo ora che $w(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in I$. Allora, esistono $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tali che

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La funzione $z = \alpha y_1 + \beta y_2$ è in S e verifica $z(x_0) = 0$ e $z'(x_0) = 0$. Dall'unicità della soluzione per il Problema di Cauchy segue che $z = 0$ e quindi y_1, y_2 sono linermente dipendenti.

L'affermazione (B) segue da (A) per negazione.

$\square$

9.1. Metodo della variazione delle costanti. In questa sezione illustriamo il metodo per calcolare una soluzione dell'equazione non omogenea

$$y'' + a(x)y + b(x)y = f(x), \quad x \in I, \tag{7.9.67}$$

una volta si sappia risolvere l'equazione omogenea corrispondente. Sia y_1, y_2 una base di soluzioni per l'equazione omogenea $y''+a(x)y+b(x)y = 0$. Cerchiamo una soluzione del tipo

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{7.9.68}$$

dove $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni da determinare. Derivando la relazione si ottiene

$$y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'.$$

Imponendo la condizione

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \tag{7.9.69}$$

l'espressione precedente si riduce alla seguente

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

Derivando nuovamente si ottiene

$$y'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza, dopo qualche calcolo, si arriva alla seguente equazione

$$c_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + c_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = f.$$

Usando il fatto che y_1, y_2 risolvono l'equazione omogenea si ottiene la seconda condizione

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f. \tag{7.9.70}$$

Mettendo a sistema le condizioni (7.9.69) e (7.9.70) si arriva al sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Nel sistema è apparsa la matrice Wronskiana di y_1, y_2. Per la Proposizione 7.9.3, questa matrice è invertibile in ogni punto $x \in I$. Questo permette di risolvere il sistema in c_1' e c_2':

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Le due equazioni del sistema possono essere integrate. Questo procedimento determina c_1 e c_2 a meno di due costanti addittive che appaiono nel processo di integrazione. Una volta sostituite c_1 e c_2 nella (7.9.68), le due costanti possono essere determinate con delle eventuali condizioni iniziali.

9.2. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Consideriamo un'equazione differenziale del tipo

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{7.9.71}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ sono costanti. Si cercano soluzioni della forma $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, dove $\lambda \in \mathbb{C}$ è un parametro complesso. Sostituendo le derivate $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$ e $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$ nell'equazione differenziale si ottiene l'equazione

$$\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

Siccome $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$, tale equazione è verificata se e solo se λ verifica l'*equazione caratteristica*:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Sia $\Delta = a^2 - 4b$ il discriminante dell'equazione. Si possono presentare tre casi.

1) $\Delta > 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni reali distinte

$$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

In questo caso, la soluzione generale y di (7.9.71) è una combinazione lineare delle soluzioni $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$, che sono linearmente indipendenti:

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) $\Delta < 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha - i\beta$$

dove si è posto $\alpha = -a/2$ e $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$. Le funzioni

$$z_1(x) = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{i\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
$$z_2(x) = \mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{-i\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

sono soluzioni a valori complessi dell'equazione differenziale. Dunque, le funzioni

$$y_1(x) = \frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$y_2(x) = \frac{z_1(x) - z_2(x)}{2i} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

sono soluzioni a valori reali dell'equazione differenziale. Le funzioni y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti e dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale è della forma

$$y(x) = (c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3) $\Delta = 0$. L'equazione caratteristica ha la soluzione reale $\lambda = -a/2$ con molteplicità 2. In questo caso, il metodo produce una sola soluzione $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Un conto diretto mostra che la funzione $y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}$ è pure una soluzione che è linearmente indipendente dalla precedente. In effetti, si ha:

$$\begin{aligned} y_2'' + ay_2' + by_2 &= 2\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda^2 x\mathrm{e}^{\lambda x} + a\big(\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda x\mathrm{e}^{\lambda x}\big) + bx\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2 + a\lambda + b)x\mathrm{e}^{\lambda x} + (2\lambda + a)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che che λ risolve l'equazione caratteristica e che $\lambda = -a/2$.

La soluzione generale dell'equazione (7.9.71) è dunque

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

9.3. Equazioni del secondo ordine di Eulero. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo $I \subset \mathbb{R}^+$ e siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ numeri reali tali che $a \neq 0$. L'equazione differenziale

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f(x), \quad x \in I, \tag{7.9.72}$$

è un'equazione del secondo ordine di Eulero. Consideriamo il caso $f = 0$, ovvero il caso omogeneo,

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{7.9.73}$$

L'equazione è singolare in $x = 0$ in quanto il coefficiente di y'' si annulla. Cerchiamo soluzioni sulla semiretta $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. Dal momento che l'equazione differenziale è lineare, le soluzioni formano uno spazio vettoriale di dimensione 2. Cerchiamo due soluzioni linearmente indipendenti della forma

$$y(x) = x^\lambda = \mathrm{e}^{\lambda\log(x)} = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)\log x} = x^\alpha(\cos(\beta\log x) + i\sin(\beta\log x)),$$

dove $\lambda = \alpha + i\beta$ è un parametro complesso. Inserendo y, $y' = \lambda x^{\lambda-1}$, e $y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$ nella (7.9.73) si trova $x^\lambda(a\lambda(\lambda-1)+b\lambda+c)=0$. Dal momento che $x^\lambda \neq 0$, λ risolve l'equazione caratteristica

$$a\lambda^2 + (b-a)\lambda + c = 0. \tag{7.9.74}$$

A seconda del segno di $\Delta = (b-a)^2 - 4ac$ si distinguono tre casi.

Caso 1: $\Delta > 0$. In questo caso l'equazione caratteristica ha due soluzioni semplici $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e la soluzione generale dell'equazione omogenea (7.9.73) è

$$y(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2},$$

dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti reali.

Caso 2: $\Delta = 0$. In questo caso, l'equazione caratteristica ha una soluzione reale doppia $\lambda \in \mathbb{R}$ e troviamo la soluzione $y_1(x) = x^\lambda$. Una verifica diretta mostra che la funzione $y_2(x) = x^\lambda \log x$ è una soluzione che è linearmente indipendente dalla prima. La soluzione generale dell'equazione omogenea (7.9.73) è dunque

$$y(x) = x^\lambda(C_1 + C_2 \log x),$$

dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti reali.

Caso 3: $\Delta < 0$. In questo caso l'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse fra loro coniugate

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{and} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Otteniamo le soluzioni a valori complessi

$$\begin{aligned} z_1(x) &= x^{\alpha+i\beta} = x^\alpha\big(\cos(\beta\log x) + i\sin(\beta\log x)\big),\\ z_2(x) &= x^{\alpha-i\beta} = x^\alpha\big(\cos(\beta\log x) - i\sin(\beta\log x)\big), \end{aligned}$$

e quindi le soluzioni reali

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{2}(z_1(x)+z_2(x)) = x^\alpha\cos(\beta\log x),\\ y_2(x) &= \frac{1}{2i}(z_1(x)-z_2(x)) = x^\alpha\sin(\beta\log x). \end{aligned}$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea è dunque

$$y(x) = x^\alpha\big(C_1\cos(\beta\log x) + C_2\sin(\beta\log x)\big),$$

dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti reali.

10. Regolarità della soluzione rispetto ai dati iniziali

10.1. Continuità della soluzione rispetto ai dati. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto ed $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^n)$ una funzione che è localmente di Lipschitz in y. Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ e per $(\xi,\eta) \in \Omega$ consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y(x)) \\ y(\xi) = \eta. \end{cases} \tag{7.10.75}$$

Esistono dei numeri $\delta > 0$ ed $r > 0$ tali che per ogni $(\xi, \eta) \in B_r(x_0, y_0) \subset \Omega$ il Problema di Cauchy ha una soluzione unica $y_{\xi\eta} \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ dove $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ è un intervallo fissato. Possiamo anche supporre che esista $h > 0$ tale che

$$|y_{\xi\eta}(x) - y_0| \leq h$$

per ogni $(\xi, \eta) \in B_r(x_0, y_0)$ e per ogni $x \in I$, e tale che si abbia

$$K = I \times \bar{B}_h(y_0) \subset \Omega.$$

L'insieme K è compatto e il grafico di una qualsiasi soluzione è contenuto in K.

Definiamo la costante

$$M = \max_{(x,y) \in K} |f(x, y)| < \infty,$$

e sia $L > 0$ una costante di Lipschitz per f relativa a K

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \text{per ogni } (x, y_1), (x, y_2) \in K.$$

Teorema 7.10.1 (Kamke). Con le ipotesi e notazioni precedenti, sia $y_{\xi\eta} \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ la soluzione del Problema di Cauchy (7.10.75) e sia $y_{x_0 y_0} \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ la soluzione con dato iniziale $y(x_0) = y_0$. Allora si ha la convergenza uniforme

$$\lim_{\xi \to x_0, \eta \to y_0} \max_{x \in I} |y_{\xi\eta}(x) - y_{x_0 y_0}(x)| = 0. \tag{7.10.76}$$

Dim. Formiamo la differenza fra le soluzioni

$$\begin{aligned} y_{\xi\eta}(x) - y_{x_0 y_0}(x) &= \eta - y_0 + \int_\xi^x f(t, y_{\xi\eta}(t))dt - \int_{x_0}^x f(t, y_{x_0 y_0}(t))dt \\ &= \eta - y_0 + \int_\xi^{x_0} f(t, y_{\xi\eta}(t))dt + \int_{x_0}^x \{f(t, y_{\xi\eta}(t)) - f(t, y_{x_0 y_0}(t))\}dt. \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza triangolare si ha (ad esempio con $\xi \leq x_0 \leq x$)

$$\begin{aligned} |y_{\xi\eta}(x) - y_{x_0 y_0}(x)| &\leq |\eta - y_0| + \int_\xi^{x_0} |f(t, y_{\xi\eta}(t))|dt + \int_{x_0}^x |f(t, y_{\xi\eta}(t)) - f(t, y_{x_0 y_0}(t))|dt \\ &\leq |\eta - y_0| + M|\xi - x_0| + L \int_{x_0}^x |y_{\xi\eta}(t) - y_{x_0 y_0}(t)|dt. \end{aligned}$$

Ora il Lemma di Gronwall implica che

$$|y_{\xi\eta}(x) - y_{x_0 y_0}(x)| \leq (|\eta - y_0| + M|\xi - x_0|)\mathrm{e}^{L|x - x_0|},$$

per ogni $x \in I$, e la convergenza uniforme segue. □

Vogliamo definire il "flusso" indotto dall'equazione differenziale. Siano $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e $B = B_r(x_0, y_0)$, come sopra. Definiamo la funzione $\Phi : I \times B \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\Phi(x, \xi, \eta) = y_{\xi\eta}(x). \tag{7.10.77}$$

Proviamo che Φ è continua su $I \times B$, ad esempio che è continua nel punto $(x_0, \xi_0, \eta_0) \in I \times B$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e stimiamo la differenza

$$|\Phi(x,\xi,\eta) - \Phi(x_0,\xi_0,\eta_0)| \leq |\Phi(x,\xi,\eta) - \Phi(x,\xi_0,\eta_0)| + |\Phi(x,\xi_0,\eta_0) - \Phi(x_0,\xi_0,\eta_0)|.$$

Per il Teorema di Kamke esiste $\delta_1 > 0$ indipendente da $x \in I$ tale che

$$|\Phi(x,\xi,\eta) - \Phi(x,\xi_0,\eta_0)| \leq \varepsilon/2$$

per ogni ξ, η tali che $|\xi - \xi_0| \leq \delta_1$ e $|\eta - \eta_0| \leq \delta_1$. Inoltre esiste $\delta_2 > 0$ tale che

$$|\Phi(x,\xi_0,\eta_0) - \Phi(x_0,\xi_0,\eta_0)| \leq \varepsilon/2$$

per ogni $x \in I$ tale che $|x - x_0| \leq \delta_2$. Infatti la funzione $x \mapsto \Phi(x, \xi_0, \eta_0)$ è continua. Questo prova la continuità di Φ.

10.2. Dipendenza C^1 della soluzione dai dati. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto e sia $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ una funzione tale che esistano continue le derivate parziali

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y_i} \in C(\Omega; \mathbb{R}^n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7.10.78}$$

In particolare, f è localmente di Lipschitz in y. Sia $\Phi : I \times B \to \Omega$ il "flusso" definito in (7.10.77). Vogliamo provare che sotto l'ipotesi (7.10.78) Φ è di classe C^1.

Prima di enunciare il risultato, calcoliamo in modo formale le derivate di $y_{\xi\eta}$. Innanzitutto si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} y_{\xi\eta}(x) = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} y_{\xi\eta}(x) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(x, y_{\xi\eta}(x)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_{\xi\eta}(x)) \frac{\partial}{\partial \xi} y_{\xi\eta}(x).$$

In questo conto stiamo supponendo che sia lecito scambiare le derivate $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial \xi}$. Con $\partial f/\partial y$ abbiamo indicato la matrice Jacobiana di f relativa alle variabili y.

Calcoliamo ora $\partial y_{\xi\eta}/\partial \xi(x)$ nel punto $x = \xi$. Dal fatto che $y_{\xi\eta}(\xi) = \eta$ per ogni $\xi \in I$, segue che la derivata della funzione $\xi \mapsto y_{\xi\eta}(\xi)$ si annulla identicamente. Dunque, per la regola della derivata della funzione composta, si ottiene

$$0 = \frac{\partial y_{\xi\eta}}{\partial \xi}(\xi) + \left.\frac{\partial y_{\xi\eta}(x)}{\partial x}\right|_{x=\xi} = \frac{\partial y_{\xi\eta}}{\partial \xi}(\xi) + f(\xi, y_{\xi\eta}(\xi)).$$

In definitiva, la funzione $\psi_{\xi\eta} : I \to \mathbb{R}^n$

$$\psi_{\xi\eta}(x) = \frac{\partial y_{\xi\eta}(x)}{\partial \xi}, \quad x \in I,$$

è la soluzione del Problema di Cauchy lineare

$$\begin{cases} \psi'(x) = F_{\xi\eta}(x)\psi(x) \\ \psi(\xi) = -f(\xi, y_{\xi\eta}(\xi)), \end{cases} \tag{7.10.79}$$

dove $F_{\xi\eta} \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$ è la funzione a valori matrici $n \times n$

$$F_{\xi\eta}(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_{\xi\eta}(x)). \tag{7.10.80}$$

Il Problema (7.10.79) ha una soluzione unica definita su I.

Calcoliamo le derivate di $y_{\xi\eta}$ rispetto alle variabili η. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta_i} y_{\xi\eta}(x) = \frac{\partial}{\partial \eta_i}\frac{\partial}{\partial x} y_{\xi\eta}(x) = \frac{\partial}{\partial \eta_i} f(x, y_{\xi\eta}(x)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_{\xi\eta}(x)) \frac{\partial}{\partial \eta_i} y_{\xi\eta}(x).$$

Inoltre, dall'identità $y_{\xi\eta}(\xi) = \eta$ valida per $\xi \in I$ si ottiene

$$\frac{\partial y_{\xi\eta}}{\partial \eta_i}(\xi) = \mathrm{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0).$$

In definitiva, la funzione $\varphi_{\xi\eta,i} : I \to \mathbb{R}^n$

$$\varphi_{\xi\eta,i}(x) = \frac{\partial y_{\xi\eta}}{\partial \eta_i}(x)$$

è la soluzione del Problema di Cauchy lineare

$$\begin{cases} \varphi_i'(x) = F_{\xi\eta}(x)\varphi_i(x), & x \in I, \\ \varphi_i(\xi) = e_i. \end{cases} \tag{7.10.81}$$

Teorema 7.10.2. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto, $(x_0, y_0) \in \Omega$ ed $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ sia una funzione che verifica (7.10.78). Per $\delta > 0$ siano $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq \delta\}$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che la funzione $\Phi : I \times I \times B \to \mathbb{R}^n$

$$\Phi(x, \xi, \eta) = y_{\xi\eta}(x),$$

dove $y_{\xi\eta} \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ è la soluzione del Problema (7.10.75), è di classe $C^1(I \times I \times B; \mathbb{R}^n)$. Inoltre,

$$\frac{\partial \Phi(x, \xi, \eta)}{\partial \xi} = \psi_{\xi\eta}(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi(x, \xi, \eta)}{\partial \eta_i} = \varphi_{\xi\eta,i}(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

dove $\psi_{\xi\eta}$ e $\varphi_{\xi\eta,i}$ sono le soluzioni dei Problemi di Cauchy (7.10.79) e (7.10.81).

Dim. Per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, la funzione Φ è ben definita ed è continua per il Teorema 7.10.1 e l'osservazione che lo segue.

Proviamo che Φ è differenziabile con continuità in η. È sufficiente considerare il caso $n = 1$, ovvero η è unodimensionale. Per $x, \xi \in I$, $\eta \in B$ e $h \in \mathbb{R}$ con $0 < |h| \leq h_0$ sufficientemente piccolo

$$\begin{aligned} \frac{y_{\xi,\eta+h}(x) - y_{\xi\eta}(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\eta + h + \int_\xi^x f(t, y_{\xi,\eta+h}(t))\, dt - \eta - \int_\xi^x f(t, y_{\xi\eta}(t))\, dt\right] \\ &= 1 + \int_\xi^x \frac{f(t, y_{\xi,\eta+h}(t)) - f(t, y_{\xi\eta}(t))}{h}\, dt \\ &= 1 + \int_\xi^x \frac{y_{\xi,\eta+h}(t) - y_{\xi\eta}(t)}{h} \frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t))\, dt. \end{aligned} \tag{7.10.82}$$

Nell'ultima riga abbiamo usato il Teorema del valor medio che fornisce un $\bar{y}_h(t) \in (y_{\xi,\eta+h}(t), y_{\xi\eta}(t))$ tale che

$$f(t, y_{\xi,\eta+h}(t)) - f(t, y_{\xi\eta}(t)) = \big(y_{\xi,\eta+h}(t) - y_{\xi\eta}(t)\big)\frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t)).$$

Sia $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R})$ la soluzione del Problema di Cauchy (7.10.81). Lasciamo cadere l'indice i, in quanto $n = 1$. Lasciamo anche cadere la dipendenza da ξ ed η nelle notazioni. La condizione iniziale è $\varphi(\xi) = 1$. Dunque φ risolve l'equazione integrale

$$\varphi(x) = 1 + \int_\xi^x \varphi(t)\frac{\partial f}{\partial y}(t, y_{\xi\eta}(t))\, dt. \tag{7.10.83}$$

Sottraendo (7.10.83) da (7.10.82) otteniamo

$$
\begin{aligned}
R(x,h) :&= \frac{y_{\xi,\eta+h}(x) - y_{\xi\eta}(x)}{h} - \varphi(x) \\
&= \int_\xi^x \left(\frac{y_{\xi,\eta+h}(t) - y_{\xi\eta}(t)}{h} \frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t)) - \varphi(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_{\xi\eta}(t)) \right) dt,
\end{aligned} \tag{7.10.84}
$$

dove abbiamo tolto gli indici ξ ed η.

Affermiamo che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{h} > 0$ tale che $|R(x,h)| \le C\varepsilon$ per ogni $0 < |h| \le \bar{h}$ e per tutti gli $x \in I$. La costante C non dipende da x, ξ, η. Questo proverà che

$$
\lim_{h \to 0} \frac{y_{\xi,\eta+h}(x) - y_{\xi\eta}(x)}{h} = \varphi(x), \tag{7.10.85}
$$

con convergenza uniforme in x, ξ, η. In particolare, la convergenza uniforme implica che

$$
\frac{\partial \Phi(x,\xi,\eta)}{\partial \eta} \quad \text{esiste continua.}
$$

Infatti, aggiungendo e togliendo $\varphi(t)\frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t))$ nell'integrale sulla destra in (7.10.84), otteniamo

$$
R(x,h) = \int_\xi^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t)) R(t,h)\, dt + \int_\xi^x \varphi(t) \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t)) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_{\xi\eta}(t)) \right) dt.
$$

Esiste una costante $M > 0$, che è uniforme in un intorno di (ξ, η), tale che

$$
\sup_{t \in I} |\varphi(t)| \le M \quad \text{e} \quad \sup_{|h| \le h_0, t \in I} \Big| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t)) \Big| \le M.
$$

Inoltre, essendo $\partial f / \partial y$ continua in Ω, è uniformemente continua sui compatti di Ω. Quindi esiste $\sigma > 0$ dipendente da ε tale che

$$
\Big| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}_h(t)) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_{\xi\eta}(t)) \Big| \le \varepsilon
$$

non appena $|y_{\xi,\eta+h}(t) - y_{\xi\eta}(t)| \le \sigma$. Per il Teorema 7.10.1, tale stima vale per tutte le $t \in I$ non appena $|h| \le \bar{h}$ per qualche $\bar{h} > 0$ dipendente da σ.

In definitiva, per ogni $|h| \le \bar{h}$ e $x \in I$ si ha

$$
|R(x,h)| \le 2\varepsilon\delta M + M \Big| \int_\xi^x |R(t,h)|\, dt \Big|,
$$

e per il Lemma di Gronwall segue che $|R(x,h)| \le 2\varepsilon\delta M \mathrm{e}^{M|x-\xi|}$. Questo termina la dimostrazione di (7.10.85).

Ora proviamo che

$$
\lim_{h \to 0} \frac{y_{\xi+h,\eta}(x) - y_{\xi\eta}(x)}{h} = \psi(x), \tag{7.10.86}
$$

dove ψ è la soluzione del Problema di Cauchy (7.10.79). Si ha

(7.10.87)

$$\begin{aligned}\frac{y_{\xi+h,\eta}(x)-y_{\xi\eta}(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\eta+\int_{\xi+h}^{x} f(t,y_{\xi+h,\eta}(t))\,dt-\eta-\int_{\xi}^{x} f(t,y_{\xi\eta}(t))\,dt\right]\\ &= \int_{\xi}^{x}\frac{f(t,y_{\xi+h,\eta}(t))-f(t,y_{\xi\eta}(t))}{h}\,dt-\frac{1}{h}\int_{\xi}^{\xi+h} f(t,y_{\xi+h,\eta}(t))\,dt\\ &= \int_{\xi}^{x}\frac{y_{\xi+h,\eta}(t)-y_{\xi\eta}(t)}{h}\frac{\partial f}{\partial y}(t,\bar y_h(t))\,dt-\frac{1}{h}\int_{\xi}^{\xi+h} f(t,y_{\xi+h,\eta}(t))\,dt,\end{aligned}$$

per qualche (nuova) $\bar y_h(t)\in(y_{\xi+h,\eta}(t),y_{\xi\eta}(t))$. Sia $\psi\in C^1(I;\mathbb{R})$ la soluzione del Problema di Cauchy (7.10.79). Allora ψ risolve l'equazione integrale

$$\psi(x)=-f(\xi,y_{\xi\eta}(\xi))+\int_{\xi}^{x}\psi(t)\frac{\partial f}{\partial y}(t,y_{\xi\eta}(t))\,dt. \tag{7.10.88}$$

Sottraendo (7.10.88) da (7.10.87) otteniamo

$$\begin{aligned}S(x,h) :&= \frac{y_{\xi+h,\eta}(x)-y_{\xi\eta}(x)}{h}-\psi(x)\\ &= \int_{\xi}^{x}\left(\frac{y_{\xi+h,\eta}(t)-y_{\xi\eta}(t)}{h}\frac{\partial f}{\partial y}(t,\bar y_h(t))-\psi(t)\frac{\partial f}{\partial y}(t,y_{\xi\eta}(t))\right)dt+\\ &\quad-\frac{1}{h}\int_{\xi}^{\xi+h}\big\{f(t,y_{\xi+h,\eta}(t))-f(\xi,y_{\xi\eta}(\xi))\big\}\,dt\\ &= \int_{\xi}^{x} S(t,h)\frac{\partial f}{\partial y}(t,\bar y_h(t))-\psi(t)\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(t,y_{\xi\eta}(t))-\frac{\partial f}{\partial y}(t,\bar y_h(t))\Big)\,dt+\\ &\quad-\frac{1}{h}\int_{\xi}^{\xi+h}\big\{f(t,y_{\xi+h,\eta}(t))-f(\xi,y_{\xi\eta}(\xi))\big\}\,dt.\end{aligned}$$

Usando la continuità uniforme di f e $\frac{\partial f}{\partial y}$, come sopra deduciamo che per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\bar h>0$ tale che per ogni $|h|\le\bar h$ e $x\in I$ si abbia

$$|S(x,h)|\le 2\varepsilon\delta(M+1)+M\Big|\int_{\xi}^{x}|S(t,h)|\,dt\Big|,$$

dove ora M è un "bound" per ψ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. L'affermazione segue. □

10.3. Flusso di un campo vettoriale. In questa sezione cambiamo notazione. Indichiamo con $t\in\mathbb{R}$ la "variabile temporale" e con $x\in\mathbb{R}^n$ la "variabile spaziale". Con $\dot\gamma$ indichiamo la derivata in t di una curva $\gamma: I\to\mathbb{R}^n$, $I\subset\mathbb{R}$ intervallo.

Un *campo vettoriale* su $\mathbb{R}^n$ è una funzione $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Se $F\in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ allora F è localmente di Lipschitz. Dunque, per il Teorema di esistenza e unicità locale, per ogni $x\in\mathbb{R}^n$ il Problema di Cauchy

$$\begin{cases}\dot\gamma=F(\gamma)\\ \gamma(0)=x.\end{cases} \tag{7.10.89}$$

ha un'unica soluzione locale $\gamma_x \in C^1(I_x)$ per qualche intervallo $I_x \subset \mathbb{R}$ contenente $t = 0$. Se $I_x = \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, ovvero se ogni soluzione γ_x è definita per tutti i tempi $t \in \mathbb{R}$, il campo F si dice *completo*.

DEFINIZIONE 7.10.3 (Flusso). Sia $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ un campo completo. La funzione $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\Phi(t, x) = \gamma_x(t),$$

dove $\gamma_x \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ è la soluzione del Problema di Cauchy (7.10.89) si dice *flusso* del campo vettoriale F. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ponendo $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$.

PROPOSIZIONE 7.10.4. Sia $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ un campo completo. Allora il suo flusso Φ verifica le seguenti proprietà:

i) $\Phi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.
ii) $\Phi(0, x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, ovvero $\Phi_0 = \mathrm{Id}$.
iii) Il flusso verifica la proprietà di gruppo $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$. In particolare, $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$.

DIM. L'affermazione i) segue dal Teorema di 7.10.2. L'affermazione iii) segue dall'unicità della soluzione per il Problema di Cauchy. □

11. Esercizi

11.1. Equazioni del primo ordine.

ESERCIZIO 7.11.1. Date le costanti positive R, L, V, risolvere il problema (circuito RCL)

$$\begin{cases} LI' + RI = V \\ I(0) = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 7.11.2. $\star$ Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare esistenza e unicità della soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema

$$\begin{cases} x^3 y' - y + 1 = 0, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

ESERCIZIO 7.11.3. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = yx^2 + \frac{1}{1+x^2}$ e dimostrare che ve ne è esattamente una che risulta limitata in $[0, +\infty[$.

ESERCIZIO 7.11.4. Dimostrare che l'equazione $y' + xy = e^x$ non ammette soluzioni limitate in $[0, +\infty[$.

ESERCIZIO 7.11.5. Risolvere l'equazione funzionale

$$y(x) = 1 + \frac{x^4}{4} - \int_0^x 2ty(t)dt.$$

ESERCIZIO 7.11.6. $\star$ Calcolare la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1 + 2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.7. $\star$ Calcolare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$\text{i) } y' = \frac{y\cos x}{1+\sin x} + \sin x; \quad \text{ii) } y' = \frac{3}{x}y + x^2 + 1, \quad x > 0.$$

Esercizio 7.11.8. $\star$ Calcolare la soluzione dei seguenti Problemi di Cauchy

$$\text{i) } \begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x} \\ y(0) = 0. \end{cases} \qquad \text{ii) } \begin{cases} y' = y^2 \log(x+3) \\ y(-2) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.9. $\star$ Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - y)\log(2+x).$$

i) Determinare il suo integrale generale.
ii) Risolvere il problema di Cauchy con dato $y(-1) = 1/2$.

Esercizio 7.11.10. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (y-1)(y-4)\frac{\cos x}{\sin x}.$$

i) Trovare tutte le soluzioni costanti.
ii) Calcolare la soluzione generale dell'equazione in forma implicita.
iii) Calcolare in forma esplicita la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(3\pi/2) = 5$.

Esercizio 7.11.11. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$, $f(t) > 0$ se $t \neq 0$, e

$$\int_0^1 \frac{dt}{f(t)} = \infty.$$

Provare che $y = 0$ è l'unica soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.12. Calcolare la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\pi\cos(xy)}{x^2} \\ y(1) = \pi. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.13. Calcolare la soluzione $y \in C^1(a,b)$, $-\infty \le a < 1 < b \le \infty$, del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y-x}{y+x}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

e disegnare un grafico qualitativo di y. Calcolare b e mostrare che $a > -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}$.

Esercizio 7.11.14. $\star$ Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x+y+3) \\ y(0) = -3. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.15. Calcolare la soluzione generale della seguente equazione differenziale
$$y' = y - \frac{x^2}{y}.$$

Esercizio 7.11.16. $\star$ Calcolare la soluzione del seguente Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = y(y-1)(x+1), & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.17. $\star$ Si consideri l'equazione differenziale
$$(1 - \cos y)y' = x \sin x \sin y.$$

i) Determinare tutte le soluzioni costanti;
ii) Calcolare (in forma implicita) l'integrale generale;
iii) Calcolare la soluzione che verifica la condizione iniziale $y(0) = \frac{5}{2}\pi$.

Esercizio 7.11.18. Trovare le soluzioni di $y' = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Esercizio 7.11.19. Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}, & x > 1 \\ y(\sqrt{2}) = \sqrt{2\log 2}. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.20. Trovare le soluzioni di $xy' = -y^2 \log x - 2y$.

Esercizio 7.11.21. Trovare le soluzioni di $y = xy' - \frac{1}{3}(y')^3$.

Esercizio 7.11.22. Dimostrare che esiste un'unica soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema differenziale
$$\begin{cases} (y'(x))^2 = 1 + \sqrt{|y(x)|}, & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.23.
$$\begin{cases} y' = \sqrt{x} + \sqrt{|y|}, & x \geq 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Dimostrare che ogni soluzione y verifica $y(x) \geq \frac{2}{3}x^{3/2}$ per $x \geq 0$.
ii) Usando il Teorema delle contrazioni provare che esiste un'unica soluzione locale del problema.
iii) Provare che la soluzione è definita su tutto $[0, \infty)$.
iv) Dimostrare che
$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x^2} = \frac{1}{4}, \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)}{x^{3/2}} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 7.11.24. Dimostrare che esistono soluzioni periodiche $y \in C^1(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale
$$y'(x) = 2 \sin y(x) + \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 7.11.25. Si consideri l'equazione differenziale

$$x^3 y' - 2y + 2x = 0.$$

Provare che:

i) Ogni soluzione $y \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ si estende ad una funzione in $C^1(\mathbb{R})$;
ii) L'equazione non ha soluzioni analitiche definite in un intorno di $x = 0$.

Esercizio 7.11.26. per $\alpha > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y \sin y}{1 + x^\alpha}, & x > 0, \\ \lim\limits_{x \to \infty} y(x) = \lambda. \end{cases}$$

Per dati α e λ, studiare esistenza e unicità di soluzioni $y \in C^1(0, \infty)$ del problema.

Esercizio 7.11.27. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata e fissiamo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Provare che il Problema di Cauchy $y' = f(x, y)$ e $y(x_0) = y_0$ ha almeno una soluzione. Usare il Teorema di punto fisso di Schauder e il Teorema di Ascoli-Arzelà.

11.2. Equazioni del secondo ordine.

Esercizio 7.11.28. $\star$ Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Esercizio 7.11.29. $\star$ Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + 2y' + 2y = te^{-t}, \quad y(0) = \alpha, \ y'(0) = \beta.$$

1) Calcolare la soluzione y.
2) Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali esiste finito il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{y(t)}{t}.$$

Esercizio 7.11.30. Calcolare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$y'' + 4y = x^2 e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 7.11.31. Calcolare la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x(1 + e^x), & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.32. $\star$ Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}, & x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.33. $\star$ Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + 3xy' - 3y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+ \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 4. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.34. $\star$ Calcolare la soluzione $y \in C^2(\mathbb{R})$ del seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.35. $\star$ Sia $g \in C([0,\infty))$ una funzione tale che

$$\int_0^\infty |g(x)|\, dx < \infty,$$

e sia $y \in C^2([0,\infty))$ la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = g(x)y, \quad x \geq 0, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Dimostrare che esiste una costante $M > 0$ tale che $|y(x)| \leq M$ per ogni $x \geq 0$.

Esercizio 7.11.36. $\star$ Sia $f \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua tale che $tf(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Provare che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \mathrm{e}^{-x} f(y) = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione $y = 0$.

Esercizio 7.11.37. $\star$ Sia $F \in C^1([0,\infty))$ una funzione tale che $F(0) > 0$ ed $F'(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$. Provare che ogni soluzione $y \in C^2([0,\infty))$ dell'equazione differenziale

$$y'' + F(x)y = 0, \quad x \geq 0,$$

è limitata. Suggerimento: moltiplicare per y' ed integrare.

Esercizio 7.11.38. $\star$ Sia $y \in C^2(\mathbb{R})$ la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y^3 = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Provare che la soluzione è effettivamente definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, che $\|y\|_\infty \leq 1$, che y è pari e periodica.

Esercizio 7.11.39. Sia $\alpha \geq 0$ un numero reale e si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{\alpha}{x} y' + y^3 = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

i) Dimostrare che il Problema ha un'unica soluzione $y \in C^2([0,T))$ per qualche $T > 0$.
ii) Provare che la soluzione è definita su tutto $[0,\infty)$;
iii) Per $\alpha = 0$ dimostrare che la soluzione y è periodica e che

$$\max_{x\in[0,\infty)} y(x) = 1, \qquad \min_{x\in[0,\infty)} y(x) = -1.$$

Suggerimento: moltiplicare per x^α ed usare il Teorema delle contrazioni.

Esercizio 7.11.40. Siano $a, b \in C(\mathbb{R})$ funzioni continue e sia $y_1 \in C^2(\mathbb{R})$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + ay' + by = 0$$

tale che $y_1(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Determinare una soluzione $y_2 \in C^2(\mathbb{R})$ linearmente indipendente da y_1.

Esercizio 7.11.41. Provare che per ogni numero reale $\alpha > 0$ il problema con dati al bordo

$$\begin{cases} y'' = -y^2, & -\alpha < x < \alpha, \\ y(-\alpha) = y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

ha esattamente due soluzioni $y \in C^2([-\alpha,\alpha])$.

Esercizio 7.11.42. Per $\varepsilon > 0$ si consideri il problema con dati al bordo

$$\begin{cases} -\varepsilon y'' + y'^2 - 1 = 0 \text{ su } [-1,1], \\ y(1) = y(-1) = 0 \end{cases}$$

i) Provare che se il problema ha una soluzione $y \in C^2([-1,1])$ allora questa è unica. In particolare è pari: $y(x) = y(-x)$.
ii) Provare che ogni soluzione y del problema verifica $|y'(x)| < 1$ per ogni $x \in [-1,1]$.
iii) Calcolare la soluzione $y = y_\varepsilon \in C^2([-1,1])$ del problema.
iv) Calcolare il limite $z(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} y_\varepsilon(x)$.

Esercizio 7.11.43. Siano $n \geq 3$ e $\lambda > 0$. Dimostrare che la funzione

$$\varphi(r) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + r^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

è l'unica soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \varphi''(r) + \dfrac{n-1}{r}\varphi'(r) = -n(n-2)\varphi(r)^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad r > 0, \\ \varphi(0) = \lambda^{\frac{2-n}{2}} \\ \varphi'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.44. Sia $\varphi \in C^2(0,\infty)$ con $\varphi \geq 0$ una soluzione dell'equazione

$$(*) \qquad \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = -n(n-2)\varphi(r)^{\frac{n+2}{n-2}}, \qquad r > 0,$$

e sia $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ la funzione definita da $\varphi(r) = r^{\frac{2-n}{2}}\psi(-\log r)$. Tale sostituzione si chiama sostituzione di Fowler-Emder.

i) Provare che esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$(**) \qquad \psi'(t)^2 = (n-2)^2 \left(\frac{1}{4}\psi(t)^2 - \psi(t)^{\frac{2n}{n-2}} \right) + C, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

ii) Assumendo φ limitata vicino $r = 0$, provare che deve essere $C = 0$.

iii) Sia $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\varphi \geq 0$, una soluzione di $(*)$ e sia $\vartheta \in C^2(0,\infty)$ la funzione definita da $\varphi(r) = (r\vartheta(r))^{\frac{2-n}{2}}$. Usando $(**)$ con $C = 0$, provare che ϑ risolve l'equazione di Eulero

$$r^2\vartheta'' + r\vartheta' - \vartheta = 0,$$

e quindi determinare φ.

11.3. Analisi qualitativa.

Esercizio 7.11.45. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia y_α la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x \sin y \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Tramite analisi qualitativa (ovvero: senza calcolare esplicitamente le soluzioni) dimostrare che si ha esistenza e unicità globali delle soluzioni e studiarne la monotonia. Studiare eventuali proprietà di simmetria delle soluzioni e dimostrare che $y_{-\alpha} = -y_\alpha$, $y_{\alpha+2\pi} = 2\pi + y_\alpha$, $y_{\alpha+\pi} = 2\pi - y_{\pi-\alpha}$.

Esercizio 7.11.46. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y - y^2 \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Tramite analisi qualitativa (ovvero: senza calcolare esplicitamente le soluzioni) stabilire per quali α le soluzioni sono definite globalmente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.11.47. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - x^2 \\ y(0) = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tramite analisi qualitativa (ovvero: senza calcolare esplicitamente le soluzioni) studiare la monotonia delle soluzioni, in particolare di quella associata al dato iniziale $\alpha = 0$. Stabilire se le soluzioni sono definite globalmente o se ve ne sono invece che "scoppiano" in tempo finito.

Esercizio 7.11.48. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1 + y^2 - x^2} \\ y(0) = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Stabilire se le soluzioni sono definite globalmente oppure no.

Esercizio 7.11.49. $\star$ Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x+y} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

1) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale, che è crescente e concava. Trattegiarne il grafico.
2) Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b=\infty$ e che $a>-1/2$.
3) Calcolare il limite
$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{\log x}.$$
4) Calcolare il valore di a.

Esercizio 7.11.50. Si consideri il Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y^2-x^2+1} \\ y(0)=1. \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta,\delta)$ per qualche $\delta>0$;
ii) Provare che la soluzione è una funzione crescente;
iii) Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo di esistenza della soluzione massimale. Provare che $b=\infty$.
iv) Provare che $y(x)>x$ per ogni $x\in(a,b)$;
v) Provare che
$$\lim_{x\to\infty} y(x)-x=0.$$

Esercizio 7.11.51. $\star$ Si consideri il Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = y^2+x^2-1 \\ y(0)=0, \end{cases}$$
dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale.
ii) Discutere eventuali simmetrie.
iii) Studiare qualitativamente la monotonia delle soluzione y.
iv) Sia $(-b,b)\subset\mathbb{R}$, con $0<b\leq\infty$, l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b<\infty$ e che $b>\sqrt{3/2}$.

Esercizio 7.11.52. $\star$ Si consideri il Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = |y|+x \\ y(0)=0, \end{cases}$$
dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

1) Provare che esiste un'unica soluzione $y\in C^1(\mathbb{R})$ del problema e studiarne la monotonia.
2) Calcolare la soluzione.

Esercizio 7.11.53. $\star$ Si consideri il Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \sin(y+x) \\ y(0)=0. \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione definita su tutto $(-\infty,\infty)$.

ii) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \sin(y+x)$ della forma $y = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$.
iii) Studiare la monotonia della soluzione del Problema di Cauchy e disegnarne un grafico qualitativo.
iv) Calcolare eventuali asintoti della soluzione.

Esercizio 7.11.54. $\star$ Dimostrare che esiste un'unica soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Provare che y è pari e che

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty.$$

Esercizio 7.11.55. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2-1)(y^2+x^2) \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

dove $y_0 \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

i) Dimostrare che il problema ha un'unica soluzione massimale;
ii) Provare che per $y_0 = 0$ si ha $y(x) = -x^3/3 + O(x^5)$ per $x \to 0$;
iii) Provare che per $|y_0| < 1$ la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$;
iv) Provare che per $y_0 > 1$ la soluzione non è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.11.56. $\star$ Calcolare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - 2y + \alpha \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

sia definita su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.11.57. $\star$ Dimostrare che la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -(x+1)y^2 + x \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.11.58. $\star$ Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha una soluzione unica definita sull'intervallo $(0, \infty)$.
ii) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 7.11.59. Per $y_0 \in \mathbb{R}$ sia y la soluzione massimale del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x \sin y \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

i) Mostrare che il problema ha un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$;

ii) Provare che il seguente limite esiste

$$\lambda = \lim_{x\to\infty} y(x),$$

e calcolarlo in funzione di y_0.

iii) Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $y(x) = \lambda + o(1/x^n)$ per $x \to \infty$, ovvero

$$\lim_{x\to\infty} x^n(y(x) - \lambda) = 0.$$

Esercizio 7.11.60. Dato un numero reale $y_0 \neq 0$, si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x^2 + y^2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Dimostrare che:

i) Le soluzioni sono globalmente definite su $\mathbb{R}$;
ii) I limiti $L^- = \lim_{x\to-\infty} y(x)$ e $L^+ = \lim_{x\to+\infty} y(x)$ esistono finiti;
iii) Stimare L^+ ed L^- in relazione a y_0.

Esercizio 7.11.61. Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2 + x^2 + 1} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$;
ii) Provare che la soluzione è una funzione dispari: $y(-x) = -y(x)$ per ogni x;
iii) Provare che la soluzione è convessa per $x \geq 0$;
iv) Provare che la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ (usare il Teorema di esistenza globale non ancora dimostrato in classe);
v) Provare che $y(x) \geq \sinh(x)$ per ogni $x \geq 0$.

Esercizio 7.11.62. $\star$ Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(y) - x \\ y(1) = \mathrm{e}. \end{cases}$$

i) Provare che il problema ha un'unica soluzione locale $y \in C^1(1-\delta, 1+\delta)$ per qualche $\delta > 0$.
ii) Studiare la monotonia della soluzione.
iii) Sia (a, b) l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $a = -\infty$ e che $b < \infty$.
iv) Studiare la convessità della soluzione.

Esercizio 7.11.63. Siano s, c le soluzioni dei problemi di Cauchy del secondo ordine

$$\begin{cases} s'' = -s \\ s(0) = 0 \\ s'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c'' = -c \\ c(0) = 1 \\ c'(0) = 0. \end{cases}$$

In questo esercizio è vietato utilizzare le funzioni $\sin, \cos$ e le loro proprietà.

i) Dimostrare che le soluzioni s, c sono uniche e definite globalmente in tutto $\mathbb{R}$.
ii) Dimostrare che $s' = c$, $c' = -s$, $s^2 + c^2 = 1$.
iii) Dimostrare che s è dispari e c è pari. Dimostrare che $s(2x) = 2s(x)c(x)$ e che $\sin(x + \alpha) = s(x)c(\alpha) + c(x)s(\alpha)$ per ogni $x, \alpha \in \mathbb{R}$.
iv) Tramite uno studio di monotonia e concavità/convessità della funzione c dimostrare che è ben definito il numero $\pi := 2\min\{x > 0 : c(x) = 0\}$.
v) Si dimostri che s e c sono periodiche di periodo 2π.

Esercizio 7.11.64. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = yy' + x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \alpha \end{cases}$$

e se ne effettui un'analisi qualitativa, dimostrando in particolare che le soluzioni sono dispari e che non sono definite globalmente. Se ne studino inoltre le proprietà di monotonia. Suggerimento: $yy' + x$ è la derivata di "qualcosa".

11.4. Sistemi e flussi.

Esercizio 7.11.65. Trovare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y' = 3y - 4z \\ z' = y - z. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.66. $\star$ Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che $f(1) = 0$ e sia $0 < x_0 < 1$ un numero reale. Provare che il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = xf(x^2 + y^2) - y \\ y' = yf(x^2 + y^2) + x \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.11.67. Sia A la matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali $y' = Ay$.

Esercizio 7.11.68. Per $0 < T \leq \infty$ ai consideri lo spazio vettoriale $X = \big\{b \in C([0, T); \mathbb{R}^n) : \ b \text{ è limitata}\big\}$ munito della norma

$$\|b\|_\infty = \sup_{x \in [0,T)} |b(x)|.$$

Siano $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$, e si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + b & \text{in } [0, T) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si definisca $T : X \to C^1([0, T); \mathbb{R}^n)$ ponendo $F(b) = y$ se $y \in C^1([0, T); \mathbb{R}^n)$ è la soluzione del Problema di Cauchy con dato b.

i) Dimostrare che per ogni $0 < T < \infty$ esiste una costante $0 < C_T < \infty$ tale che

$$(*) \qquad \|F(b_1) - F(b_2)\|_\infty \leq C_T \|b_1 - b_2\|_\infty$$

per ogni $b_1, b_2 \in X$;

ii) Dimostrare che la stima di continuità $(*)$ vale anche nel caso $T = \infty$, a patto che gli autovalori della matrice $A + A^t$ siano strettamente positivi.

Esercizio 7.11.69. $\star$ Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che:

a) Gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \lambda\}$ sono compatti per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) $\nabla f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot\gamma(t) = -\nabla f(\gamma(t)), & t \geq 0, \\ \gamma(0) = x_0, \end{cases}$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che:

i) Il problema ha un'unica soluzione $\gamma_{x_0} \in C^2([0, \infty))$;
ii) $\lim_{t\to\infty} \gamma_{x_0}(t) = 0$;
iii) Nel caso $f(x) = |x|^2/2$, calcolare il flusso $\Phi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(t, x_0) = \gamma_{x_0}(t)$.

11.5. Equazioni alle derivate parziali.

Esercizio 7.11.70. $\star$ Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione assegnata. Calcolare la soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = u, & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.71. $\star$ Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione assegnata. Calcolare la soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u, & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u(0, y) = \varphi(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.72. $\star$ Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione assegnata. Calcolare la soluzione $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u, & y > 0 \\ u(x, 1) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esercizio 7.11.73. Verificare che la funzione $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, $n \geq 1$,

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

verifica l'*equazione del calore*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

dove $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ è l'operatore di Laplace.

CAPITOLO 8

Teoremi di invertibilità locale e della funzione implicita

1. Teorema di invertibilità locale

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice reale $n \times n$ e consideriamo la funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Il sistema di equazioni lineari

$$f(x) = b \tag{8.1.90}$$

ha soluzione unica per ogni $b \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $\det(A) \neq 0$. In altri termini, f è iniettiva e suriettiva se e solo se $\det(A) \neq 0$. Vogliamo generalizzare questi risultati di risolubilità a sistemi di equazioni (8.1.90) dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è una funzione *non lineare*.

Dobbiamo preliminarmente introdurre i concetti di *diffeomorfismo* e di *diffeomorfismo locale*.

Definizione 8.1.1 (Diffeomorfismo). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f \in C^k(A;\mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq \infty$, si dice *diffeomorfismo di classe* C^k se:

i) $f : A \to f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è iniettiva (e suriettiva);
ii) $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto;
iii) La funzione inversa verifica $f^{-1} \in C^k(f(A); A)$.

Quando $k = 0$ la definizione di diffeomorfismo si riduce a quella di omeomorfismo. Siano A e B due spazi topologici. Una funzione $f : A \to B$ si dice *omeomorfismo* se f è iniettiva e suriettiva, ed inoltre sia f che f^{-1} sono continue. In questo caso (ovvero se f è 1-1 e su), dire che f^{-1} sia continua equivale a dire che f trasforma aperti in aperti.

Definizione 8.1.2 (Diffeomorfismo locale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f \in C^k(A;\mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq \infty$, si dice un *diffeomorsifmo locale di classe* C^k se:

i) f è aperta, e cioè trasforma insiemi aperti in aperti.
ii) Per ogni punto $x \in A$ esiste un $\delta > 0$ tale che $f : B_\delta(x) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva e la funzione inversa verifica $f^{-1} \in C^k(f(B_\delta(x)); \mathbb{R}^n)$.

In particolare, se f è un diffeomorfismo locale allora $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è aperto.

Teorema 8.1.3 (Invertibilità locale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C^k(A;\mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq \infty$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) f è un diffeomorfismo locale di classe C^k;
B) $\det(J_f(x_0)) \neq 0$ in ogni punto $x_0 \in A$, dove J_f è la matrice Jacobiana di f.

Esempio 8.1.4. Si consideri il seguente sistema di due equazioni nelle incognite $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y \sin x = b_1 \\ x^2 y + \sin y = b_2, \end{cases} \tag{8.1.91}$$

dove $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ è un dato assegnato.

Certamente, quando $b = 0$ il sistema ha almeno la soluzione nulla $x = y = 0$. Proviamo il seguente fatto: esistono due numeri $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tali che per ogni $b \in B_\varepsilon(0)$ esiste un'unica soluzione $(x, y) \in B_\delta(0)$ del sistema.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione $f(x, y) = (x + y \sin x, x^2 y + \sin y)$. Risulta $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. La matrice Jacobiana di f è

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + y\cos x & \sin x \\ 2xy & x^2 + \cos y \end{pmatrix}.$$

Nel punto $(x, y) = (0, 0) = 0$ si ha $\det J_f(0) = 1$ e per continuità si deduce l'esistenza di un $\delta > 0$ tale che $\det J_f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in B_\delta(0)$. Dunque, f è un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su $B_\delta(0)$. Per il Teorema di invertibilità locale, pur di prendere $\delta > 0$ ancora più piccolo, f è anche aperta ed iniettiva su $B_\delta(0)$. Dunque l'insieme $f(B_\delta(0)) \subset \mathbb{R}^2$ è aperto e siccome $0 = f(0) \in f(B_\delta(0))$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(0) \subset f(B_\delta(0))$.

Se $b \in B_\varepsilon(0)$ allora esiste $(x, y) \in B_\delta(0)$ tale che $f(x, y) = b$ e per l'iniettività di f il punto (x, y) è unico in $B_\delta(0)$.

Esempio 8.1.5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\big(1/x\big), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Affermiamo che:

i) f è derivabile in tutti i punti ed in particolare $f'(0) = 1$;
ii) f non è iniettiva in alcun intorno di $x = 0$.

In effetti, f non è di classe $C^1(\mathbb{R})$ perchè f' non è continua. Le ipotesi del Teorema di invertibilità locale non sono verificate.

Dalla definizione si calcola immediatamente $f'(0) = 1$ e inoltre per $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 + 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Il limite di $f'(x)$ per $x \to 0$ non esiste. Nei punti

$$x_k = \frac{1}{2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}, \, k \neq 0,$$

si ha $f'(x_k) = 0$ ed $f(x_k) = x_k$. Per $x \neq 0$ la derivata seconda di f è

$$f''(x) = 2\sin(1/x) - \frac{2}{x}\cos(1/x) - \frac{1}{x^2}\sin(1/x),$$

e quindi per $k > 0$ si ha

$$f''(x_k) = -\frac{2}{x_k} < 0.$$

I punti x_k sono punti di massimo locale stretto e $x_k \to 0$ per $k \to \infty$. Quindi f non è iniettiva in alcun intorno di $x = 0$.

Dim. (Dimostrazione del Teorema 8.1.3) A)⇒B). Fissiamo $x_0 \in A$ e sia $\delta > 0$ tale che $f \in C^k(B_\delta(x_0); \mathbb{R}^n)$ sia un diffeomorfismo di classe C^k. Indichiamo con $f^{-1} : f(B_\delta(x_0)) \to B_\delta(x_0)$ la funzione inversa. Allora per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ si ha $f^{-1}(f(x)) =$

$x = I_n(x)$, dove I_n è la matrice identità $n \times n$. Dal teorema sul differenziale della funzione composta si ha

$$J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x) = I_n, \quad x \in B_\delta(x_0).$$

Dal teorema sui determinanti si ottiene allora

$$1 = \det(I_n) = \det\big(J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x)\big) = \det\big(J_{f^{-1}}(f(x))\big)\det(J_f(x)\big).$$

Questo implica che $\det(J_f(x)) \neq 0$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ e in particolare per $x = x_0$.

B)$\Rightarrow$A). Supponiamo che sia $\det(J_f(x)) \neq 0$ in ogni punto $x \in A$. Siano $x_0 \in A$ ed $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere tale che $B_\varepsilon(x_0) \subset A$. Proveremo che

(8.1.92) $$\text{esiste } \delta > 0 \text{ tale che } B_\delta(f(x_0)) \subset f(B_\varepsilon(x_0)).$$

Da questo segue che f trasforma punti interni in punti interni e quindi aperti in aperti. L'affermazione (8.1.92) può essere riscritta nel seguente modo:

(8.1.93) $$\text{esiste } \delta > 0 \text{ t.c. per ogni } y \in B_\delta(f(x_0)) \text{ esiste } x \in B_\varepsilon(x_0) \text{ tale che } f(x) = y.$$

Fissiamo dunque $y \in B_\delta(f(x_0))$ con $\delta > 0$ da determinare e cerchiamo un punto $x \in B_\varepsilon(x_0)$ tale che $f(x) = y$. Sia $T = df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ il differenziale di f in x_0 e osserviamo che $\det(T) = \det(J_f(x_0)) \neq 0$. Dunque esiste l'operatore lineare inverso $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Definiamo la funzione K della variabile x

(8.1.94) $$K(x) = x - T^{-1}(f(x) - y).$$

Vogliamo provare che $K : \bar{B}_\varepsilon(x_0) \to \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ è una contrazione rispetto alla distanza standard.

Siccome $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ è completo con la distanza ereditata da $\mathbb{R}^n$, dal Teorema di punto fisso di Banach segue che esiste un (unico) punto $x \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ tale che $x = K(x)$. Ma allora

$$x = K(x) = x - T^{-1}(f(x) - y) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = T^{-1}(f(x) - y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - y = 0,$$

e quindi $f(x) = y$. Questo prova l'affermazione (8.1.93).

Dobbiamo mostrare che:
i) K è ben definita, e cioè trasforma $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ in se stesso;
ii) K è una contrazione.

Per provare che K è ben definita conviene introdurre la funzione ausiliaria $g(x) = x - T^{-1}(f(x))$. Osserviamo che $dg(x_0) = I_n - T^{-1}df(x_0) = 0$, ovvero, per l'identificazione di differenziale e matrice Jacobiana,

(8.1.95) $$\frac{\partial g_i(x_0)}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Siccome g è di classe C^1 (in quanto lo è f), pur di prendere un $\varepsilon > 0$ più piccolo, si può per continuità supporre che

(8.1.96) $$\|dg(x)\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{per ogni } x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Questa affermazione può essere provata partendo dalla disuguaglianza (Teorema sulle norme equivalenti)

$$\|dg(x)\| \leq C\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\Big)^2\Big)^{1/2},$$

con $C > 0$ costante assoluta. Dalla (8.1.95) e dalla continuità delle derivata parziali di g segue la (8.1.96). È in questo punto che si usa la regolarità almeno C^1 di f.

Sia ora $x \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$. Allora abbiamo

$$\begin{aligned}|K(x) - x_0| &= |x - T^{-1}(f(x) - y) - x_0| = |x - T^{-1}(f(x)) + T^{-1}(y) - x_0| \\ &= |g(x) - g(x_0) + T^{-1}(y - f(x_0))| \leq |g(x) - g(x_0)| + |T^{-1}(f(x_0) - y)|.\end{aligned}$$

Per il Corollario del Teorema del valor medio esiste $z \in [x_0, x]$ tale che

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \|dg(z)\||x - x_o|,$$

e quindi

$$|K(x) - x_0| \leq \|dg(z)\||x - x_0| + \|T^{-1}\||f(x_0) - y| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \delta\|T^{-1}\|.$$

In definitiva, affinchè K sia ben definita è sufficiente scegliere $\delta < \frac{\varepsilon}{2\|T^{-1}\|}$.

Proviamo ora che K è una contrazione. Per ogni $x, \bar{x} \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ si ha come sopra

$$\begin{aligned}|K(x) - K(\bar{x})| &= |x - T^{-1}(f(x) - y) - (\bar{x} - T^{-1}(f(\bar{x}) - y))| \\ &= |x - T^{-1}(f(x)) - (\bar{x} - T^{-1}(f(\bar{x}))| = |g(x) - g(\bar{x})| \leq \frac{1}{2}|x - \bar{x}|.\end{aligned}$$

Dunque K è una contrazione con fattore contrattivo $1/2$.

Prossimo obiettivo è di provare che esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $x, \bar{x} \in B_\varepsilon(x_0)$ si ha

$$|f(x) - f(\bar{x})| \geq M|x - \bar{x}|. \tag{8.1.97}$$

Tale maggiorazione implica in particolare che f è iniettiva e che f^{-1} è continua. Precisamente f^{-1} verifica

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y})| \leq \frac{1}{M}|y - \bar{y}|. \tag{8.1.98}$$

La verifica di (8.1.97) si riconduce nuovamente alle proprietà di g:

$$\begin{aligned}|x - \bar{x}| &= |g(x) + T^{-1}(f(x)) - (g(\bar{x}) + T^{-1}(f(\bar{x})))| \\ &\leq |g(x) - g(\bar{x})| + \|T^{-1}\||f(x) - f(\bar{x})| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - \bar{x}| + \|T^{-1}\||f(x) - f(\bar{x})|,\end{aligned}$$

e quindi $|f(x) - f(\bar{x})| \geq M|x - \bar{x}|$ con $M = \frac{1}{2\|T^{-1}\|}$.

Rimane da provare che la funzione inversa $f^{-1} : f(B_\varepsilon(x_0)) \to B_\varepsilon(x_0)$ è di classe C^k. Proviamo che f^{-1} è differenziabile con derivate parziali continue. Per ipotesi si ha

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + E_{x_0}(x),$$

dove

$$\lim_{x\to x_0}\frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

Invertendo l'identità precedente con $y = f(x)$ ed $y_0 = f(x_0)$ si ottiene

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) &= df(x_0)^{-1}(y - y_0 - E_{x_0}(x)) \\ &= df(x_0)^{-1}(y - y_0) - df(x_0)^{-1}(E_{f^{-1}(y_0)}(f^{-1}(y))). \end{aligned}$$

Dalla stima (8.1.97) si deduce che

$$\lim_{y \to y_0} \frac{E_{f^{-1}(y_0)}(f^{-1}(y))}{|y - y_0|} = \lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|f(x) - f(x_0)|} = \lim_{x \to x_0} \frac{|x - x_0|}{|f(x) - f(x_0)|} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

Questo prova che f^{-1} è differenziabile nel punto y_0 con differenziale

$$df^{-1}(y_0) = df(x_0)^{-1}.$$

Poichè il differenziale può essere rappresentato come la matrice Jacobiana delle derivate parziali, l'ultima identità può essere riformulata dicendo che $Jf^{-1}(y_0) = Jf(x_0)^{-1}$. Dal Teorema sulla matrice inversa deduciamo che le entrate di $Jf^{-1}(y_0)$ sono funzioni che dipendono in modo continuo da y_0. Lo stesso argomento prova che f^{-1} è di classe C^k. □

Il teorema di invertibilità locale ha una naturale riformulazione nell'ambito degli spazi di Banach.

Teorema 8.1.6. Siano X ed Y due spazi di Banach, sia $A \subset X$ un insieme aperto e sia $f : X \to Y$ una funzione di classe $C^1(A)$ (ovvero f è differenziabile in tutti i punti di A e la funzione $A \ni x \mapsto df(x) \in \mathscr{L}(X, Y)$ è continua). Supponiamo inoltre che, per ogni $x \in A$, $df(x)$ sia un'applicazione lineare limitata e invertibile. Allora per ogni $x_0 \in A$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x_0)) \subset Y$ è un aperto, f è invertibile su $B_\delta(x_0)$ ed $f^{-1} \in C^1(f(B_\delta(x_0)); B_\delta(x_0))$.

La dimostrazione del teorema è identica a quella in $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 8.1.7 (Invertibilità globale). Supponiamo che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia un diffeomorfismo locale (ad esempio di classe C^1). In particolare, f è localmente invertibile. Ci si può domandare sotto quali ipotesi ulteriori su f, la funzione f è globalmente invertibile. Teoremi di questo tipo si dicono teoremi di inversione globale. Si veda sul tema il Capitolo 3 di Ambrosetti-Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge. Un esempio di teorema di inversione globale è contenuto nell'Esercizio 8.3.10.

In effetti non è difficile esibire esempi di funzioni $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ non invertibili globalmente e tali che $\det J_f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Si consideri ad esempio la funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ definita da

$$f(x, y) := (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Tale funzione (che altro non è che l'esponenziale complesso $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}$) verifica $\det J_f(x, y) = e^{2x} > 0$ e tuttavia non può essere invertibile (se non localmente) in quanto non iniettiva: $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$.

2. Teorema sulla funzione implicita

2.1. Premessa. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e consideriamo l'equazione $f(x, y) = 0$ nelle variabili $x, y \in \mathbb{R}$. Ci domandiamo quando tale equazione definisca implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ oppure una funzione $x = \psi(y)$, anche solo *localmente*.

Consideriamo l'esempio $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ed analizziamo l'insieme (la circonferenza)
$$M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\big\}.$$
Le derivate parziali di f sono $f_x = 2x$ ed $f_y = 2y$. Dunque, su M si ha $|\nabla f(x,y)| = 2 \neq 0$. In particolare, nel "polo nord" $N = (0,1)$ si ha $f_x = 0$ ed $f_y = 2 \neq 0$, mentre nel "polo est" $E = (1,0)$ si ha $f_x = 2 \neq 0$ ed $f_y = 0$.

La semicirconferenza centrata nel polo nord N è l'y-grafico della funzione $\varphi \in C^\infty(-1,1)$, $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$,
$$M \cap \{y > 0\} = \big\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-1,1)\big\}.$$
La variabile y si esplicita in funzione della variabile x.

Viceversa, la semicirconferenza centrata nel polo est E è l'x-grafico della funzione $\psi \in C^\infty(-1,1)$, $\psi(y) = \sqrt{1-y^2}$,
$$M \cap \{x > 0\} = \big\{(\psi(y), y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (-1,1)\big\}.$$
La variabile x si esplicita come funzione della variabile y.

2.2. Argomento euristico. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $f(0,0) = 0$ ed $f_y(0,0) > 0$. Allora:

- Per continuità delle derivate prime, esistono $\delta > 0$ ed $\eta > 0$ tali che $f_y(x,y) > 0$ per $(x,y) \in [-\delta,\delta] \times [-\eta \times \eta]$.
- Siccome $y \mapsto f(0,y)$ è strettamente crescente ed $f(0,0) = 0$, avremo $f(0,-\eta) < 0$ ed $f(0,\eta) > 0$.
- Per continuità di f, a meno di scegliere $\delta > 0$ ancora più piccolo, avremo $f(x,-\eta) < 0$ ed $f(x,\eta) > 0$ per ogni $x \in [-\delta,\delta]$.
- Per il Teorema degli zeri, per ogni $x \in [-\delta,\delta]$ esiste un punto $y = \varphi(x) \in [-\eta,\eta]$ tale che $f(x,\varphi(x)) = 0$. Per la stretta monotonia, questo punto è unico. Dunque, il grafico della funzione $x \mapsto \varphi(x)$ descrive l'insieme degli zeri di f.

2.3. Teorema di Dini. Siano $p, q \in \mathbb{N}$ numeri interi tali che $p, q \geq 1$. Scomponiamo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, con $n = p + q$. Indichiamo con $x \in \mathbb{R}^p$ la variabile di $\mathbb{R}^p$ e con $y \in \mathbb{R}^q$ la variabile di $\mathbb{R}^q$. Data una funzione derivabile $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \ldots, f_q)$, definiamo le *matrici Jacobiane parziali*
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_q}{\partial x_p} \end{pmatrix}, \quad \text{matrice } q \times p,$$
e analogamente
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_q}{\partial y_q} \end{pmatrix}, \quad \text{matrice } q \times q.$$

Teorema 8.2.1 (del Dini). Siano $A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ un insieme aperto, $(x_0, y_0) \in A$ e sia $f \in C^k(A; \mathbb{R}^q)$, $k \geq 1$, una funzione che verifica

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \det\Big(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Big) \neq 0.$$

Allora esistono due numeri $\eta, \delta > 0$ ed esiste una funzione $\varphi \in C^k(B_\delta(x_0); B_\eta(y_0))$ tali che:

i) $B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0) \subset A$;
ii) $\big\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in B_\delta(x_0)\big\} = \big\{(x, y) \in B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0) : f(x, y) = 0\big\}$;
iii) La funzione φ verifica

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = -\Big(\frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial y}\Big)^{-1} \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial x}, \quad x \in B_\delta(x_0),$$

dove $\partial \varphi / \partial x$ indica la matrice Jacobiana di φ e a destra si intende un prodotto di matrici.

Dim. Definiamo la funzione $F : A \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$

$$F(x, y) = (x, f(x, y)), \quad (x, y) \in A.$$

Siccome $f \in C^k(A; \mathbb{R}^q)$, risulta $F \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$. Inoltre si ha $F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$. La matrice Jacobiana di F è

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \text{matrice } n \times n.$$

e dunque nel punto $(x_0, y_0) \in A$ si ha

$$\det(J_F(x_0, y_0)) = \det\Big(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Big) \neq 0.$$

Per il teorema di invertibilità locale esiste $\eta > 0$ tale che la funzione $F \in C^k(B_\eta(x_0) \times B_\eta(y_0); \mathbb{R}^n)$ è un diffeomorfismo di classe C^k sull'immagine. In particolare, l'insieme $B = F(B_\eta(x_0) \times B_\eta(y_0))$ è aperto e $(x_0, 0) = F(x_0, y_0) \in B$. Dunque esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \times B_\delta(0) \subset B$. Indichiamo con $G : B \to A$ la funzione inversa di F, $G = F^{-1} \in C^k(B; A)$, e indichiamo con $G_1 : B \to \mathbb{R}^p$ e $G_2 : B \to \mathbb{R}^q$ le componenti di G in $\mathbb{R}^p$ ed $\mathbb{R}^q$.

Essendo $F \circ G$ l'identità, risulta $G_1(x, y) = x$ e $y = f(x, G_2(x, y))$. Infatti si ha

$$(x, y) = F(G(x, y)) = F(G_1(x, y), G_2(x, y)) = (G_1(x, y), f(G_1(x, y), G_2(x, y)).$$

Nelle coordinate (x, y), il luogo di zeri di f è dato dall'equazione $y = 0$. Questo suggerisce la definizione

$$\varphi(x) = G_2(x, 0), \quad x \in B_\delta(x_0).$$

Risulta $\varphi \in C^k(B_\delta(x_0); B_\eta(y_0))$. Proviamo l'uguaglianza insiemistica ii).

Per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ si ha

$$f(x, \varphi(x)) = f(x, G_2(x, 0)) = 0,$$

e quindi $(x, \varphi(x)) \in \big\{(x, y) \in B_\delta(x_0) \times B_\eta(y_0) : f(x, y) = 0\big\}$. Questo prova l'inclusione "$\subset$".

Proviamo l'inclusione opposta. Siano $x \in B_\delta(x_0)$ e $y \in B_\eta(y_0)$ tali che $f(x,y) = 0$. Allora, essendo $G \circ F$ l'identità, si ha

$$(x,y) = G(F(x,y)) = G(x, f(x,y)) = G(x,0) = (x, G_2(x,0)) = (x, \varphi(x)),$$

da cui si deduce che $y = \varphi(x)$, e quindi $(x,y) \in \mathrm{gr}(\varphi)$.

Per provare l'affermazione iii), si deriva rispetto ad x l'identità $f(x,\varphi(x)) = 0$, $x \in B_\delta(x_0)$, per ottenere

$$\frac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial y}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = 0. \tag{8.2.99}$$

Riordinando e invertendo si ottiene la tesi. $\square$

Osservazione 8.2.2. Se f è almeno di classe C^2, l'identità (8.2.99) può essere uteriormente derivata, ottenendo formule per le derivate seconde di φ.

Esempio 8.2.3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) La funzione f è continua ed ha derivate parziali in tutti i punti. In particolare si ha
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \neq 0.$$
Inoltre, $f(0,0) = 0$.

ii) L'insieme $\big\{(x,y) \in (-\delta,\delta) \times (-\eta,\eta) : f(x,y) = 0\big\}$ non è un grafico di funzione per alcun $\delta, \eta > 0$.

iii) Tutte le ipotesi del Teorema di Dini sono verificate tranne una. La funzione f non è di classe C^1.

3. Esercizi

Esercizio 8.3.1. ⋆ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

i) Determinare il più grande aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che f sia un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su A.

ii) Stabilire se f è un diffeomorfismo su A;

iii) Dare esempi di insiemi aperti $B \subset A$ massimali su cui f è un diffeomorfismo.

Esercizio 8.3.2. ⋆ Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + y > 0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \log(1+x+y) - \mathrm{e}^{x(1+y)} + 1.$$

1) Provare che l'equazione $f = 0$ definisce implicitamente intorno a $0 \in \mathbb{R}^2$ una funzione φ definita in un intervallo $(-\delta,\delta)$ per qualche $\delta > 0$.
2) Esprimere φ' in funzione di φ e calcolare poi $\varphi'(0)$.
3) Calcolare $\varphi''(0)$.

Esercizio 8.3.3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $\det(Jf(x)) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ l'insieme

$$f^{-1}(\{y\}) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = y\big\}$$

ha cardinalità al più numerabile.

Esercizio 8.3.4. Determinare tutti i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \big(x + \lambda y, y - (\lambda + 1)x^2\big)$$

sia un diffeomorfismo. Calcolare in questi casi la funzione inversa.

Esercizio 8.3.5. Discutere l'esistenza di soluzioni $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^4$ del sistema non lineare di equazioni

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{x+w} + xy + zw\mathrm{e}^{y+z} = 1 \\ y + \sin(xyz) + \cos(xzw) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 8.3.6. Discutere l'esistenza di soluzioni $x, y, z \in \mathbb{R}$ per il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + \mathrm{e}^z + yz\sin(x) = 1 \\ z\mathrm{e}^z + \sin(xyz) + y^2x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 8.3.7. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = z\mathrm{e}^{xy} + xy\mathrm{e}^z + xyz$.

i) Provare che l'equazione $f(x, y, z) = 0$ definisce intorno a 0 una funzione φ di classe C^∞ che esplicita una variabile in funzione delle altre due.
ii) Calcolare il gradiente di φ in $0 \in \mathbb{R}^2$.
iii) Provare che φ ha in $0 \in \mathbb{R}^2$ un punto di sella.

Esercizio 8.3.8. $\star$ Sia $g \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua fissata. Provare che l'equazione funzionale

$$(1 + x^2)\varphi(x) + x\sin\big(\varphi(x)\big) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ha un'unica soluzione continua $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Assumendo che $g \in C^1(\mathbb{R})$, provare che $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 8.3.9 (Teorema della mappa aperta). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C^1(A; \mathbb{R}^m)$ con $1 \leq m \leq n$. Supponiamo che sia $\mathrm{rango}(J_f(x)) = m$ per ogni $x \in A$. Provare che f è aperta, ovvero che trasforma insiemi aperti in aperti.

Esercizio 8.3.10 (Un teorema di invertibilità globale). Sia $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ fissata. Dimostrare che esiste $\varepsilon = \varepsilon(L) > 0$ con la seguente proprietà: se $f \in C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ verifica

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad \|df(x) - L\| < \varepsilon,$$

allora f è un diffeomorfismo (globale) di classe C^k di $\mathbb{R}^n$ in sé.

Esercizio 8.3.11 (Folium di Cartesio). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$ e stabilire se, e in quali punti, il suo luogo di zeri è localmente descritto da una funzione implicita della variabile x e/o della variabile y. Studiare inoltre le proprietà di concavità/convessità della funzione implicita in un intorno del punto $(2^{1/3}, 2^{2/3})$.

Esercizio 8.3.12. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := x^{2021} - y^3 + xy^2 - 1$; discutere l'esistenza di una funzione implicita che parametrizzi il suo luogo di zeri in un intorno del punto $(1, 0)$ e studiarne le proprietà di concavità/convessità.

Esercizio 8.3.13. Analizzare il luogo di zeri di $f(x, y) = \sin^2 x + y^2 \cos xy$ in un intorno di $(0, 0)$.

Esercizio 8.3.14 (Lemniscata di Bernoulli). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := (x^2 + y^2)^2 + 2(y^2 - x^2)$ e stabilire quali sono i punti $(\bar{x}, \bar{y})$ del suo luogo di zeri tali per cui esiste un intorno in cui il luogo di zeri di f è descritto da una funzione implicita $y = \varphi(x)$ e φ assume massimo o minimo in $\bar{x}$.

Esercizio 8.3.15. Stabilire se esiste una successione (x_n, y_n) di punti del piano tale che

$$\begin{cases} x_n + \frac{1}{n}x_n^2 + y_n^3 = \frac{1}{n} \\ x_n - y_n + \sin(\frac{1}{n}x_n y_n) = 0 \\ (x_n, y_n) \to (0, 0) \end{cases}$$

Esercizio 8.3.16. Si consideri la funzione $f(x, y) := x + \int_x^y \arctan t^{10}\, dt$.

i) Si dimostri che esiste una funzione implicita $y = \varphi(x)$ che descrive il luogo di zeri di f in un intorno di $(0, 0)$.
ii) Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 11 di φ in $x = 0$.
iii) Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 31 di φ in $x = 0$.

Esercizio 8.3.17. Si consideri la funzione $f(x, y) := x^2 - \sin y^3 + xy^2 - 1$ e si dimostri che esiste una funzione implicita $x = \varphi(y)$ che descrive il luogo di zeri di f in un intorno di $(1, 0)$. Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 di φ in $y = 0$.

Esercizio 8.3.18. Sia $T > 0$ e sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione T-periodica di classe C^2 strettamente positiva e tale che sia φ' che φ'' si annullano solo due volte (ciascuna) in $[0, T)$. Si supponga per semplicità che $\min \varphi = \varphi(0)$ e che $\max \varphi = \varphi(a)$ con $0 < a < T$.

i) Si tracci un grafico approssimativo di φ.

ii) Si definiscano $\mathscr{N} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) = \varphi(y)\}$ e $\mathscr{N}_0 := \mathscr{N} \cap [0, T)^2$. Dimostrare che $\mathscr{N}$ è $[0, T)^2$-periodico in $\mathbb{R}^2$ e che $\mathscr{N}_0$ è composto da due archi di classe $\mathscr{C}^1$ che si intersecano ad angolo retto.

iii) Si consideri ora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)} - 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

e si provi che per ogni y_0 esiste un'unica soluzione, e che questa è definita su tutto $\mathbb{R}$. Si provi inoltre che ogni soluzione è limitata su $\mathbb{R}$.

iv) Si provi che la soluzione associata al dato iniziale $y_0 = 0$ non è periodica, ma che esiste qualche valore di y_0 per il quale la corrispondente soluzione è periodica.

Esercizio 8.3.19. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che $f(0, 0) = 0$, $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ e $\det Hf(0, 0) > 0$. Cosa si può dire del suo luogo di zeri in un intorno di $(0, 0)$?

Esercizio 8.3.20. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che $f(0,0) = 0$, $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e $\det Hf(0,0) < 0$. Detta Q la forma quadratica

$$Q(x,y) := \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)y^2$$

associata ad $Hf(0,0)$, per ogni $\varepsilon > 0$ si consideri l'insieme ("ε-cono")

$$C_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |Q(x,y)| < \varepsilon(x^2 + y^2)\}.$$

Si dimostri che esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\{(x,y) \in B((0,0),\delta) : f(x,y) = 0\} \subset C_\varepsilon.$$

Si rifletta sulla seguente affermazione: se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti e tali che $Q(v_1) = Q(v_2) = 0$, allora in un opportuno intorno di $(0,0)$ il luogo di zeri di f è costituito da due curve tangenti a v_1 e v_2.

CAPITOLO 9

Appendice: funzioni olomorfe e funzioni armoniche

1. Derivabilità in senso complesso ed equazioni di Cauchy-Riemann

DEFINIZIONE 9.1.1 (Derivata in senso complesso). Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. La *derivata in senso complesso* di f in z_0 è definita da

$$f'(z_0) = Df(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

qualora tale limite esista finito (in $\mathbb{C}$).

Abbiamo l'identificazione canonica $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ data da $z = x+iy \longleftarrow (x, y)$; pertanto una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si può anche pensare come una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dette $u := \Re f$ e $v := \Im f$ useremo dunque indifferentemente le seguenti possibili notazioni:

$$f(z) = f(x+iy) = f(x, y) = u(x+iy) + iv(x+iy) = (u(x, y), v(x, y)). \tag{9.1.100}$$

Coerentemente, le derivate parziali $f_x(z_0), f_y(z_0)$ in un punto $z_0 \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ possono essere interpretate sia come elementi di $\mathbb{R}^2$ che come numeri complessi.

Come si può facilmente indovinare, esiste una relazione tra derivabilità in senso complesso di $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e differenziabilità di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

TEOREMA 9.1.2. La funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è derivabile in senso complesso in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ se e solo se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è differenziabile in (x_0, y_0) e

$$f_y(z_0) = if_x(z_0) = if'(z_0). \tag{9.1.101}$$

DIM. Supponiamo che f sia derivabile in senso complesso in $z_0 = x_0 + iy_0$; allora

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \\ &= f(z_0) + f'(z_0)((x - x_0) + i(y - y_0)) + o(|z - z_0|). \end{aligned}$$

Ponendo $f'(z_0) = a+ib$ e considerando $u = \Re f$ e $v = \Im f$ come in (9.1.100), deduciamo che

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (x-x_0) + \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} (y-y_0) + o(|(x-x_0, y-y_0)|),$$

che implica sia la differenziabilità di f in (x_0, y_0) che la (9.1.101).

L'implicazione opposta si dimostra seguendo a ritroso i passaggi precedenti. $\square$

OSSERVAZIONE 9.1.3 (Equazioni di Cauchy-Riemann). Riscrivendo la (9.1.101) con le notazioni della dimostrazione del Teorema 9.1.2 si trova

$$(u_y + iv_y)_{|(x_0,y_0)} = i(u_x + iv_x)_{|(x_0,y_0)} = (-v_x + iu_x)_{|(x_0,y_0)}.$$

La derivabilità in senso complesso implica dunque la validità delle *equazioni di Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y. \end{cases} \tag{9.1.102}$$

Osserviamo in particolare che la matrice Jacobiana di f assume la forma di "rotazione+dilatazione" del piano complesso:

$$J_f(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{9.1.103}$$

DEFINIZIONE 9.1.4 (Funzioni olomorfe). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto; una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si dice *olomorfa in* Ω se è derivabile in senso complesso in ogni punto di Ω.

ESEMPIO 9.1.5. Esempi di funzioni olomorfe in $\mathbb{C}$ sono forniti dai polinomi a coefficienti complessi e dall'esponenziale complesso $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. La funzione $1/(z^2 - 1)$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$.

Il passaggio al coniugato $z \mapsto \overline{z}$ non è una funzione olomorfa perché non verifica le equazioni di Cauchy-Riemann. Il passaggio al coniugato corrisponde ad una simmetria rispetto all'asse x.

OSSERVAZIONE 9.1.6. Supponiamo che f sia olomorfa in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Utilizzando nuovamente le notazioni della dimostrazione del Teorema 9.1.2, ed in particolare la (9.1.103), osserviamo che $\det J_f(z_0) = a^2 + b^2$. Il Teorema 8.1.3 di invertibilità locale garantisce dunque che, se f' non si annulla mai in Ω, allora f è localmente invertibile in ogni $z_0 \in \Omega$ e

$$J_{f^{-1}}(f(z_0)) = (J_f(z_0))^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

In particolare l'inversa locale f^{-1} risulta olomorfa e

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

ESEMPIO 9.1.7. La funzione esponenziale e^z, pur non essendo iniettiva, è localmente invertibile con inversa (logaritmo complesso) olomorfa.

Ricordiamo l'operatore di Laplace Δ introdotto nell'Esercizio 6.13.31: data $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivabile due volte si pone

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

DEFINIZIONE 9.1.8 (Funzioni armoniche). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto; una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice *armonica* se è derivabile due volte e $\Delta u = 0$ in Ω.

Dimostriamo ora che le parti reale ed immaginaria di una funzione olomorfa sono armoniche. A questo scopo prenderemo per buono il seguente fatto non banale: se f è olomorfa in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$, allora f è di classe C^∞ in Ω e, anzi, analitica in Ω. La dimostrazione si basa sulla *formula integrale di Cauchy*: si veda ad esempio il capitolo 2 del libro *Complex analysis* di E. M. Stein e R. Shakarchi.

TEOREMA 9.1.9. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$, allora $\Re f$ e $\Im f$ sono armoniche in Ω.

Dim. Le equazioni di Cauchy-Riemann (9.1.102) implicano che $u_{xx} = (v_y)_x$ e $u_{yy} = (-v_x)_y$; dato che u è di classe C^∞, il Teorema di Schwarz 6.9.2 garantisce che

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{in } \Omega,$$

cioè u è armonica. L'armonicità di v si dimostra in maniera del tutto analoga. □

2. Teorema della media per funzioni olomorfe e conseguenze

Premettiamo il seguente classico risultato di derivazione sotto il segno di integrale.

Lemma 9.2.1. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $g \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$; fissati $a < b$ definiamo

$$G(x) := \int_a^b g(x, \vartheta)\, d\vartheta, \qquad x \in \Omega.$$

Allora $G \in C^1(\Omega)$ e

$$(\partial_{x_i} G)(x) = \int_a^b (\partial_{x_i} g)(x, \vartheta)\, d\vartheta \qquad \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Dim. Siano $x \in \Omega$ e $i = 1, \dots, n$ fissati; sia poi $r > 0$ tale che $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$. Per $h \in (-r, r)$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{G(x + he_i) - G(x)}{h} &= \int_a^b \frac{g(x + he_i, \vartheta) - g(x, \vartheta)}{h} d\vartheta \\ &= \int_a^b g_{x_i}(\xi(h, \vartheta), \vartheta)\, d\vartheta \end{aligned}$$

per opportuni $\xi(h, \vartheta) \in [x, x + he_i]$. In particolare

$$\left| \frac{G(x + he_i) - G(x)}{h} - \int_a^b (\partial_{x_i} g)(x, \vartheta)\, d\vartheta \right| \le \underbrace{\int_a^b |g_{x_i}(\xi(h, \vartheta), \vartheta) - g_{x_i}(x, \vartheta)|\, d\vartheta}_{R(h)}$$

ed è dunque sufficiente dimostrare che $\lim_{h \to 0} R(h) = 0$: questo segue dal fatto che $\|(\xi(h, \vartheta), \vartheta) - (x, \vartheta)\| \le |h|$ e che g_{x_i}, essendo continua, è uniformemente continua in $\overline{B(x, r)} \times [a, b]$. □

Consideriamo ora una funzione $f : B(0, r) \to \mathbb{C}$ che sia olomorfa in $B(0, r)$ per qualche $r > 0$. Ossserviamo che, per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$, anche la funzione $z \mapsto f(e^{i\vartheta} z)$ (funzione "ruotata" di f di angolo ϑ) è olomorfa in $B(0, r)$ in quanto composizione di funzioni olomorfe. Dimostriamo che la funzione

$$G(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta} z)\, d\vartheta, \qquad z \in B(0, r)$$

(media di f sulla circonferenza $\partial B(0, |z|)$) è olomorfa in $B(0, r)$. Il Lemma 9.2.1 e la (9.1.101) garantiscono che

$$\begin{aligned} G_x(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\vartheta} f'(e^{i\vartheta} z)\, d\vartheta \\ G_y(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i e^{i\vartheta} f'(e^{i\vartheta} z)\, d\vartheta, \end{aligned}$$

da cui $G_y = iG_x$ e G è olomorfa. Inoltre

$$\begin{aligned} izG_x(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ize^{i\vartheta} f'(e^{i\vartheta}z)\,d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(f(e^{i\vartheta}z)\Big)\,d\vartheta \;=\; \frac{1}{2\pi}\Big(f(e^{2\pi i}z) - f(z)\Big) \;=\; 0, \end{aligned}$$

dunque $G_x(z) = 0$ per ogni $z \in B(0,r) \setminus \{0\}$. Per $z = 0$ si ha

$$G_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta} f'(0)\,d\vartheta = 0$$

e quindi $G_x = 0$ su tutta la palla $B(0,r)$. Un ragionamento simile garantisce che $G_y = 0$ su $B(0,r)$, dunque G è costante in $B(0,r)$ e $G(z) = G(0) = f(0)$. In particolare

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}\varrho)\,d\vartheta \qquad \forall\, \varrho \in (0,r).$$

La discussione precedente si può interpretare così: il valore di una funzione olomorfa in un punto fissato è pari alla media della funzione stessa su una qualunque circonferenza centrata in quel punto. Possiamo quindi enunciare il seguente risultato.

Teorema 9.2.2 (Teorema della media). Siano $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e f una funzione olomorfa in $B(z_0, r)$. Allora per ogni $\varrho \in (0,r)$ vale

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \varrho e^{i\vartheta})\,d\vartheta.$$

Osservazione 9.2.3. Più in generale, è possibile dimostrare che ogni funzione $u : B(z_0,r) \to \mathbb{R}$ armonica è in realtà di classe C^∞ e che vale per essa il teorema della media. Si veda la sezione 2.2 del libro *Partial differential equations* di L. C. Evans.

Concludiamo questa sezione con un'interessante e classica applicazione del Teorema della media 9.2.2.

Teorema 9.2.4 (Teorema fondamentale dell'algebra). Sia $P(z)$ un polinomio a coefficienti complessi di grado $n \geq 1$. Allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$.

Dim. Scrivendo $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, osserviamo preliminarmente che

$$\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = \lim_{|z|\to+\infty} |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| = 0 \tag{9.2.104}$$

dato che $a_n \neq 0$. Supponiamo per assurdo che P non abbia radici; allora la funzione $f(z) := \frac{1}{P(z)}$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ e mai nulla. Il Teorema 9.2.2 garantisce che per ogni $\varrho > 0$

$$|f(0)| \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\vartheta}\varrho)|\,d\vartheta \;\leq\; \max_{|z|=\varrho} |f(z)|$$

e, per la (9.2.104), il membro di destra ha limite 0 per $\varrho \to +\infty$. Ne segue che $f(0) = 0$, contraddizione. □

3. Principio del massimo per funzioni armoniche

Dimostriamo in questa sezione un classico risultato sulle funzioni armoniche: su domini limitati, massimi e minimi di funzioni armoniche sono raggiunti al bordo. La limitatezza del dominio è cruciale (Esercizio 9.4.4).

TEOREMA 9.3.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica in Ω; allora

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{9.3.105}$$

In particolare, u non può assumere massimi/minimi stretti (neppure relativi) in Ω.

DIM. Per $\varepsilon > 0$ fissato definiamo $v_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon|x|^2$, $x \in \overline{\Omega}$. Allora

$$\Delta v_\varepsilon(x) = \Delta u(x) + \varepsilon\Delta(|x|^2) = 2n\varepsilon > 0;$$

questo implica che v_ε non può avere alcun massimo relativo $x_0 \in \Omega$, altrimenti la matrice Hessiana $Hv_\varepsilon(x_0)$ sarebbe necessariamente semidefinita negativa e ricaveremmo la contraddizione

$$\Delta v_\varepsilon(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial^2 x_i}(x_0) = \sum_{i=1}^n \langle Hv_\varepsilon(x_0)e_i, e_i\rangle \leq 0.$$

Deduciamo che, se $R > 0$ è tale che $\Omega \subset B(0, R)$, allora

$$v_\varepsilon(x) \leq \max_{\partial\Omega} v_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon R^2 \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

e per $\varepsilon \to 0^+$ ricaviamo la seconda disuguaglianza in (9.3.105).

La prima disuguaglianza (9.3.105) segue in maniera analoga dimostrando che $w_\varepsilon(x) := u(x) - \varepsilon|x|^2$ non ammette minimi locali in Ω o, in alternativa, applicando quanto già dimostrato alla funzione armonica $-u$. □

4. Esercizi

ESERCIZIO 9.4.1. Si dimostri che, se $\Omega \subset \mathbb{C}$ è un aperto connesso, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa e vale una (o più) tra le seguenti ipotesi:

- f assume valori reali;
- $\Re f$ è costante;
- $\Im f$ è costante;
- $|f|$ è costante,

allora f è costante.

ESERCIZIO 9.4.2. Si dimostri che la funzione $f(x + iy) := \sqrt{|xy|}$ verifica le equazioni di Cauchy-Riemann in 0 ma non è olomorfa in (un intorno di) 0.

ESERCIZIO 9.4.3 (Fattori di Blaschke). Siano $z, w \in \mathbb{C}$ tali che $\bar{z}w \neq 1$

i) Dimostrare che

$$\left|\frac{w - z}{1 - \overline{w}z}\right| < 1 \qquad \text{se } |z| < 1 \text{ e } |w| < 1$$

e che

$$\left|\frac{w - z}{1 - \overline{w}z}\right| = 1 \qquad \text{se } |z| = 1 \text{ oppure } |w| = 1.$$

Suggerimento: si può supporre (giustificare!) che z sia reale non negativo.

ii) Sia ora $w \in D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ fissato e si consideri

$$F(z) := \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}.$$

Dimostrare che
a) F è olomorfa in D e $f(D) \subset D$;
b) $F(0) = w$ e $F(w) = 0$;
c) $F(\partial D) \subset \partial D$;
d) $F : D \to D$ è biettiva (suggerimento: calcolare $F \circ F$).

Esercizio 9.4.4. i) Siano $z, w \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$; verificare che il prodotto scalare standard $\langle z, w\rangle$ in $\mathbb{R}^2$ coincide con $\Re(z\overline{w})$. Verificare inoltre che la moltiplicazione per i corrisponde ad una rotazione di 90°.

ii) Siano $z, w \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ non nulli. Verificare che l'angolo $\vartheta(z, w)$ tra z e w è univocamente determinato da

$$\cos\vartheta(z, w) = \frac{\langle z, w\rangle}{|z|\,|w|} \qquad \text{e} \qquad \sin\vartheta(z, w) = \frac{\langle z, -iw\rangle}{|z|\,|w|}.$$

iii) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto e sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$; f si dice *conforme* se è localmente invertibile e preserva gli angoli tra le curve, ovvero se per ogni coppia di curve $\gamma, \eta \in C^1((-1, 1); \mathbb{R}^2)$ tali che $\gamma(0) = \eta(0) \in \Omega$, $\gamma'(0) \neq 0$ e $\eta'(0) \neq 0$ si ha

$$\vartheta\big(\gamma'(0), \eta'(0)\big) = \vartheta\big((f \circ \gamma)'(0), (f \circ \eta)'(0)\big).$$

Si dimostri che, se f è olomorfa e f' non si annulla, allora f è conforme.

Esercizio 9.4.5. Verificare che la funzione $u(x, y) := e^x \cos y$ è armonica in $\Omega := \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e tale che $u(0, 0) = 1$ e $u \equiv 0$ su $\partial\Omega$.

Esercizio 9.4.6. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato; una funzione $u \in C^2(\Omega)$ si dice subarmonica se $\Delta u \geq 0$ in Ω. Verificare che per una funzione subarmonica si ha

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Esercizio 9.4.7. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e convessa. Dimostrare che, se $u \in C^2(\Omega)$ è armonica in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, allora $v := \varphi \circ u$ è subarmonica in Ω.

Esercizio 9.4.8. Dimostrare che, se $u \in C^2(\Omega)$ è armonica in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, allora $v := |\nabla u|^2$ è subarmonica in Ω.