Introduzione al Calcolo delle Variazioni

Roberto Monti

Matematica – Anno Accademico 2016-17

Appunti del Corso – 30 Maggio 2017
E-mail address: monti@math.unipd.it

Impaginazione e file pdf a cura di Marco De Zotti

Indice

METODO DIRETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Sia X un insieme e sia $F : X \to (-\infty, \infty]$ una funzione. Vogliamo studiare il problema di minimo

$$\min \{ F(x) \in (-\infty, \infty] \; : \; x \in X \}.$$

① Esistenza. Una strategia per dimostrare l'esistenza del minimo è il "metodo diretto del calcolo delle variazioni".

Cerchiamo una topologia τ su X con queste due proprietà:

i) $F : X \to (-\infty, \infty]$ è semicontinua inferiormente ovvero $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{ x \in X \; ; \; F(x) > t \} \in \tau .$$

I sopralivelli stretti (aperti) sono insiemi aperti.

ii) (X, τ) è compatto.

Le due proprietà sono in competizione perché è più probabile che (X, τ) sia compatto quando ci sono pochi aperti ("τ è debole"). In questo caso però è più difficile che F sia s.c.i.

TEOREMA Sia (X,τ) compatto e sia $F : X \to (-\infty,\infty]$ s.c.i. su X rispetto a τ. Allora F assume minimo su X.

Dim. Sia

$$m = \inf\{F(x) \in (-\infty,\infty] : x \in X\}.$$

Stiamo supponendo $F \not\equiv \infty$ e quindi $m \in [-\infty,\infty)$. Sia $(\lambda_h)_{h\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\lambda_{h+1} < \lambda_h \quad e \quad \lim_{h\to\infty} \lambda_h = m.$$

Gli insiemi

$$A_h = \{x \in X ; \ F(x) > \lambda_h\}$$

sono aperti e $A_{h+1} \supset A_h$.

Per assurdo sia $F(x) \neq m \ \forall x \in X$. Allora

$$X = \bigcup_{h=1}^{\infty} A_h.$$

Per compattezza esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$X = \bigcup_{h=1}^{N} A_h = A_N.$$

Quindi $F(x) > \lambda_N > m \ \forall x \in X$ contro la definizione di m.

$\square$

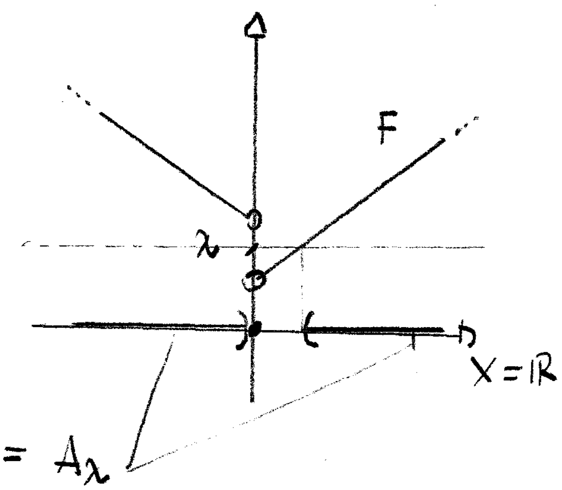
Esercizio Siano (X,d) uno spazio metrico ed $F: X \to (-\infty, \infty]$. Mostrare che sono equivalenti:

A) F è s.c.i. su X.

B) Per ogni $x_0 \in X$ si ha:

$$F(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} F(x) := \lim_{r \to 0^+} \inf_{\substack{x \in B_r(x_0) \\ x \neq x_0}} F(x).$$

Esempio tipico:



② Condizioni necessarie. Se $x_0 \in X$ è un punto di minimo di F, allora è spesso possibile trovare delle condizioni necessarie di minimalità, che si ottengono "derivando" F in qualche modo. Con notazione classica (che lasceremo indefinita) dovrà essere verificata un'equazione del tipo

(*) $$\delta F(x_0) = 0,$$

Se $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione è semplicemente $F'(x_0) = 0$.

Talvolta è possibile trovare anche condizioni necessarie del secondo ordine sotto forma di disequazioni del tipo

$$\delta^2 F(x_0) \geq 0 .$$

Quando X è uno spazio funzionale, l'equazione $*)$ si chiama equazione di Eulero-Lagrange

③ Condizioni sufficienti. Se $x_0 \in X$ è un punto stazionario, cioè verifica l'equazione variazionale $*)$, è interessante capire se è un minimo. Trovare condizioni sufficienti è tipicamente difficile.

④ Unicità. Sia X (un sottoinsieme convesso di) uno spazio lineare reale. Se $F: X \to (-\infty, \infty]$ è strettamente convessa:

$$F(tx + (1-t)y) < t\,F(x) + (1-t)\,F(y)$$

per $x \neq y$ in X e $t \in (0,1)$, allora il (punto di) minimo è unico (se esiste).

Inoltre con la convessità anche non stretta i punti stazionari sono minimi.

⑤ Regolarità. Se non si riesce a dimostrare l'esistenza di minimi per F su X si può tentare questa strada.

Siano $\hat{X} \supset X$ ed $\hat{F} : \hat{X} \to (-\infty, \infty]$ tali che $\hat{F}_{|X} = F$.

Ora è più facile trovare una topologia (debole) su $\hat{X}$ che faccia funzionare il metodo diretto.

Se troviamo un minimo $\hat{x} \in \hat{X}$ per $\hat{F}$ possiamo sperare che sia in realtà $\hat{x} \in X$.

Questa strategia porta al <u>problema della regolarità</u>: il minimo trovato in uno spazio di funzioni poco regolari è in realtà in uno spazio di funzioni più regolari.

EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE PER FUNZIONALI CLASSICI

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $L : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con proprietà da discutere.
Usiamo le variabili $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.
La funzione L è detta Lagrangiana.
Posto che sia ben definito, consideriamo il funzionale $F : C^1(A) \to \mathbb{R}$

$$(*) \qquad F(u) = \int_A L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx .$$

Bisogna assicurarsi che $x \mapsto L(x, u(x), \nabla u(x))$ sia integrabile.
Un funzionale integrale della forma $(*)$ si dice funzionale classico del Calcolo delle Variazioni.

Supponiamo che $u \in C^1(A)$ sia un minimo per variazioni compatte:

$$F(u) \leq F(u+\varphi) \qquad \forall \varphi \in C_c^1(A).$$

Fissiamo una $\varphi \in C_c^1(A)$ e consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = F(u + t\varphi), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Allora f ha un minimo in $t=0$ e se è

derivabile in $t=0$ allora deve essere $f'(0)=0$.

Con dei conti da giustificare caso per caso si trova

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \int_A L(x, u(x)+t\varphi(x), \nabla u(x)+t\nabla\varphi(x))\, dx$$

Da giustificare

$$= \int_A \frac{d}{dt} \Big(L(x, u(x)+t\varphi(x), \nabla u(x)+t\nabla\varphi(x)) \Big)\, dx$$

Da giust.

$$= \int_A \Big(L_u(\ldots)\, \varphi(x) + \langle \nabla_\xi L(\ldots), \nabla\varphi(x) \rangle \Big)\, dx.$$

Devono esistere le derivate $L_u = \frac{\partial L}{\partial u}$ e $L_{\xi_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i}$, $i=1,\ldots,n$.

Mettendo $t=0$ si trova l'<u>equazione di Eulero-Lagrange in forma debole</u>:

$$(\text{ELd})\quad 0 = \int_A \Big(L_u(x,u(x),\nabla u(x))\,\varphi(x) + \langle \underbrace{\nabla_\xi L(x,u(x),\nabla u(x))}_{= G(x)}, \nabla\varphi(x) \rangle \Big)\, dx,$$

che è verificata $\forall \varphi \in C_c^1(A)$.

Se $G : A \to \mathbb{R}^n$, $G(x) = \nabla_p L(x, u(x), \nabla u(x))$, è di classe $C^1(A;\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\langle G(x), \nabla\varphi(x) \rangle = \operatorname{div}(\varphi(x)\, G(x)) - \varphi(x) \operatorname{div} G(x)$$

Ora usiamo il seguente Lemma

<u>Lemma</u> Se $\varphi \in C^1_c(A)$ e $G \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ allora

$$\int_A \operatorname{div}(\varphi(x)\, G(x))\, dx = 0 .$$

Segue dal teorema della divergenza o anche - più semplicemente - da Fubini - Tonelli e dal teorema fondamentale del calcolo integrale.

Dunque, l'equazione di Eulero - Lagrange (EL) diventa

$$0 = \int_A \varphi(x) \left\{ L_u(x, u(x), \nabla u(x)) - \operatorname{div}\left(\nabla_\xi L(x, u(x), \nabla u)\right)\right\} dx$$

per ogni $\varphi \in C^1_c(A)$.

Ora usiamo il seguente Lemma

<u>Lemma</u> Sia $f \in C(A)$. Se $\int_A \varphi(x) f(x)\, dx = 0$ per ogni $\varphi \in C^\infty_c(A)$ allora $f = 0$.

Se fosse $f \in L^1_{loc}(A)$ si avrebbe $f = 0$ q.o. su A.

Dunque, se $x \mapsto \{ \dots \}$ è continua si trova l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\text{(EL)} \qquad \operatorname{div}\left(\nabla_\xi L\,(x, u(x), \nabla u(x))\right) = L_u\,(x, u(x), \nabla u(x)) \, .$$
$$x \in A$$

Qui abbiamo bisogno di $u \in C^2(A)$.

L'equazione (EL) è un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine in forma di divergenza.

Esempi

① Funzioni armoniche. Quando $L(\xi) = \frac{1}{2} |\xi|^2$ si ha $L_u = 0$ e $\nabla_\xi L = \xi$.

Dunque l'equazione di Eulero-Lagrange per

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_A |\nabla u|^2 dx \quad \text{è} \quad \Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = 0 \text{ in } A$$

② p-Laplaciano. Dato $p > 1$:

$$F(u) = \frac{1}{p} \int_A |\nabla u|^p dx \quad \xrightarrow{EL} \quad \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = 0$$

(3) Superfici minime. Per il funzionale dell'Area

$$F(u) = \int_A \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, dx \quad \xrightarrow{EL} \quad \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0$$

Questa è l'equazione delle superfici minime

In (1)-(2)-(3) F è convesso.
L'equazione in (1) è lineare.
Le equazioni in (2)-(3) sono non lineari.

EQUAZIONE DI DU BOIS - REYMOND

In dimensione $n=1$, l'equazione di Eulero-Lagrange si può integrare esplicitamente una volta, a patto che la Lagrangiana sia "autonoma" ovvero non dipenda dal punto $x \in A$ con $A \subset \mathbb{R}$ intervallo.

Sia $L : \underset{u}{\mathbb{R}} \times \underset{\xi}{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ almeno di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e sia $u \in C^2(A)$, $A \subset \mathbb{R}$ intervallo, una soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange;

$$\left(L_\xi(u,u')\right)' - L_u(u,u') = 0 \quad \text{su } A,$$

consideriamo la funzione ausiliaria $H = H(x)$

$$H(x) = u'(x)\, L_\xi(u(x), u'(x)) - L(u(x), u'(x)).$$

La sua derivata è

$$\begin{aligned} H' &= \cancel{u'' L_\xi(u,u')} + u' \left(L_\xi(u,u')\right)' \\ &\quad - L_u(u,u')\, u' - \cancel{L_\xi(u,u')\, u''} \\ &= u' \left\{ \left(L_\xi(u,u')\right)' - L_u(u,u') \right\} = 0. \end{aligned}$$

Quindi esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$H = u' L_{\xi}(u,u') - L(u,u') = C \quad \text{su } A.$$

Questa è l'equazione di Du Bois-Reymond.

$\square$

METODO DI CONVESSITÀ (Metodi indiretti)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera "regolare" (per il Teorema della divergenza), ad esempio localmente grafico di una funzione Lipschitz.

Sia $L : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che:

1) $L \in C^2(\bar{A} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$;

2) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (u, \xi) \longmapsto L(x, u, \xi)$ è convessa per ogni $x \in A$.

Consideriamo il funzionale $F : C^1(\bar{A}) \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx .$$

Sia $\varphi : \partial A \to \mathbb{R}$ una funzione continua assegnata

Sia $u \in C^1(\bar{A})$ una funzione tale che:

i) $u = \varphi$ su ∂A;

ii) u verifica in senso debole l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$0 = \int_A \{ \psi(x)\, L_u(x, u, \nabla u) + \langle \nabla_\xi L(x, u, \nabla u), \nabla \psi \rangle \} dx$$

per ogni $\psi \in C^1(\bar{A})$ tale che $\psi = 0$ su ∂A.

TEOREMA Nelle ipotesi precedenti la funzione $u \in C^1(\bar{A})$ è un minimo del problema

$$\min \{ F(v) \; ; \; v \in C^1(\bar{A}), \quad v = \varphi \text{ su } \partial A \}.$$

Dim. Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = F(u + t(v-u)) .$$

Allora $f(1) = F(v)$ ed $f(0) = F(u)$.
Vogliamo provare che $f(1) \geq f(0)$.
Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ esiste $t^* \in [0,1]$ tale che

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2} f''(t^*).$$

Calcoliamo

$$f'(t) = \int_A \frac{d}{dt} L(x, u + t(v-u), \nabla u + t\nabla(v-u))\, dx$$

$$= \int_A \Big(L_u(\ldots)\,(v-u) + \langle \nabla_\xi L(\ldots), \nabla(v-u) \rangle \Big)\, dx$$

$$= 0,$$

in quanto $\psi = v - u \in C^1(\bar{A})$ è $\equiv 0$ su ∂A.

Quindi usando ii) si trova $f'(0) = 0$.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(t) = \int_A \left\langle H_{(u,\xi)} L\,(\ldots)\,(u-v, \nabla u - \nabla v), (u-v, \nabla u - \nabla v) \right\rangle$$

dove $H_{(u,\xi)} L$ è la matrice Hessiana di L. La derivata dentro l'integrale è lecita. Per la convessità si ha:

$$\left\langle H_{(u,\xi)} L\,(x, u+t(v-u), \nabla u + t\nabla(v-u))\,(u-v, \nabla u - \nabla v), (u-v, \nabla u - \nabla v)\right\rangle \geq 0$$

in ogni punto $x \in A$ e per ogni $t \in [0,1]$. La tesi segue.

$\square$

<u>ESEMPIO</u> (Legge dell'ottica geometrica)

Sia $f \in L^\infty(0,1)$ una funzione tale che $0 < m \leq f(x) (\leq M)$ per ogni $x \in (0,1)$.

Per $u \in Lip([0,1])$ si consideri

$$F(u) = \int_{[0,1]} \underset{\substack{\text{densità ottica}\\ \text{che dipende}\\ \text{dallo spazio (mezzo)}}}{f(x)} \underbrace{\sqrt{1+u'(x)^2}}_{\text{elemento di lunghezza}}\, dx$$

La funzione $\xi \longmapsto \sqrt{1+\xi^2}$ è strettamente convessa. La sua derivata è $\xi / \sqrt{1+\xi^2}$.

L'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole è

$$\int_{[0,1]} f(x) \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \varphi'(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,1).$$

Questo implica che esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che (ESERCIZIO!)

$$f(x) \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} = C \quad \text{per q.o. } x \in (0,1).$$

Siccome $f(x) > 0$ deduciamo che $u'(x)$ ha segno costante (q.o.). Inoltre

$$f(x)^2 \, u'(x)^2 = c^2 \left(1+u'(x)^2\right) \quad \Longleftrightarrow$$

$$u'(x)^2 \left(f(x)^2 - c^2\right) = c^2$$

Dunque $f(x)^2 > c^2$. (ovvero $|c| < 1$).

In definitiva:

$$u'(x) = \pm \sqrt{\frac{c^2}{f(x)^2 - c^2}} \quad \text{per q.o. } x$$

Fissiamo un punto iniziale $(0,u_0)\in\mathbb{R}^2$ e un punto finale $(1,u_1)\in\mathbb{R}^2$. Per fissare le idee supponiamo $u_1 \geq u_0$ e quindi scegliamo il segno + in u'. Integrando

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \sqrt{\frac{c^2}{f(t)^2 - c^2}}\, dt .$$

La condizione finale è

$$(*) \qquad u(1) = u_1 = u_0 + \int_0^1 \sqrt{\frac{c^2}{f(t)^2 - c^2}}\, dt .$$

Sia

$$m := \sup\{\lambda\in\mathbb{R} ;\ f(x)\geq\lambda \text{ per } \mathcal{L}^1\text{-q.o. } x\in[0,1]\}$$

l'estremo inferiore essenziale di f. Per ipotesi abbiamo $m>0$. Deve essere

$$c^2 < m^2 .$$

La funzione $g : [0, m^2) \longrightarrow [0,\infty)$

$$g(s) := \int_0^1 \sqrt{\frac{s}{f(t)^2 - s}}\, dt$$

è continua e strettamente crescente.

Sia $\Delta = \lim_{s \to m^2} g(s)$. Dunque, se

$$u_1 - u_0 < \Delta$$

esiste una unica $C \in [0, m)$ tale che la condizione di punto finale (*) sia verificata.

<u>TEOREMA</u> Siano $0 \leq u_1 - u_0 < \Delta$ e

$$X = \{ u \in \mathrm{Lip}([0,1]) \; ; \; u(0) = u_0 \text{ e } u(1) = u_1 \}.$$

Allora il funzionale $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{[0,1]} f(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} \, dx$$

ha minimo unico su X.

DIM. Abbiamo trovato un unico elemento di X che verifica l'equazione di Eulero-Lagrange e le condizioni al bordo. Per convessità questo elemento è un punto di minimo.

$\square$

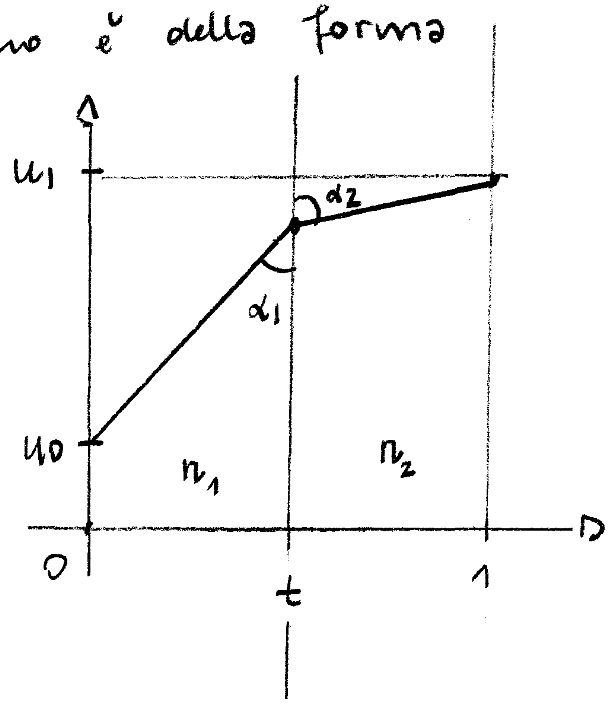
Principio di Fermat

* Fissiamo $t \in (0,1)$ e supponiamo che

$$f(x) = \begin{cases} n_1 & x \in (0,t), \\ n_2 & x \in (t,1). \end{cases}$$

con $n_1 > 0$ ed $n_2 > 0$, costanti.

Il minimo è della forma



Gli angoli α_1 e α_2 sono determinati.

Dedurre la legge di rifrazione:

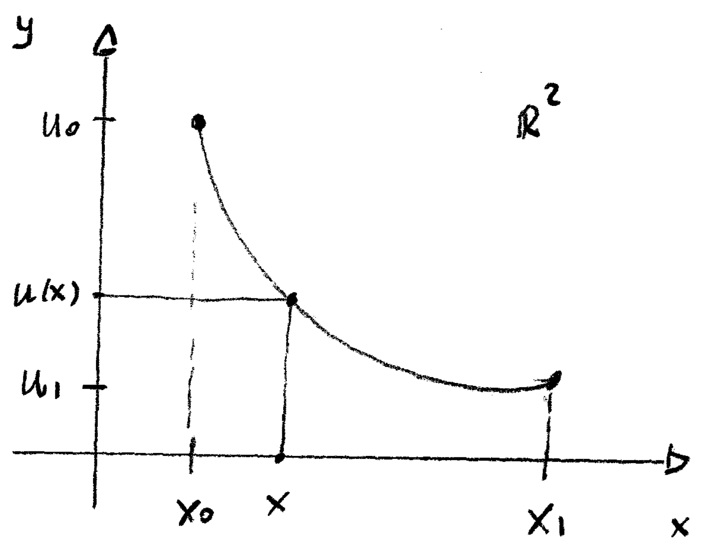
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}.$$

PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRÓNA

Siano $x_0 < x_1$ e $u_0 > u_1$.

Trovare la traiettoria che una particella percorre in tempo minimo cadendo sotto la forza di gravità, partendo dal punto $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ arrivando al punto $(x_1, u_1) \in \mathbb{R}^2$, "senza frizione".

Galileo 1638 : Arco di circonferenza.



m = massa g = costante gravitazionale

v = velocità ($v=0$ nel punto (x_0, u_0))

$u(x)$ = altezza all'ascissa $x \in [x_0, x_1]$

Conservazione energia:

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g u(x) = m g u_0$$

e quindi $\quad v = \sqrt{2g(u_0 - u)}$. La velocità è

$$v = \frac{ds}{dt} \quad , \quad s = \text{lunghezza curvilinea}$$

e quindi $\quad dt = ds/v$. Il tempo totale è

$$F(u) := T = \left(\int \frac{ds}{v} = \right) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{2g(u_0 - u(x))}} \, dx$$

Possiamo supporre $2g = 1$. La funzione

$$(u, \xi) \longmapsto \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\sqrt{u_0 - u}}$$

non sembra convessa. Tuttavia ponendo

$$v = \sqrt{u_0 - u} \geq 0$$

con $\quad v^2 = u_0 - u \quad$ e $\quad u' = -2vv' \quad$ si trova

$$G(v) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1}{v(x)^2} + 4v'(x)^2} \, dx \, .$$

La funzione

$$(v,\xi) \longmapsto \sqrt{\frac{1}{v^2} + 4\xi^2} = \sup_{\substack{\alpha^2+\beta^2=1 \\ \alpha>0}} \left(\frac{\alpha}{v} + 2\beta\xi \right)$$

definita per $v>0$ e $\xi \in \mathbb{R}$ è convessa, in quanto sup di funzioni convesse.

Dunque, i punti stazionari (soluzioni di Eulero-Lagrange) del funzionale

$$F(u) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{u_0 - u(x)}}\, dx$$

con $u(0) = u_0$ e $u(1) = u_1$ sono minimi del problema

$$\min \left\{ F(u) \; ; \; \substack{u \in C([x_0,x_1]) \cap C^2(x_0,x_1) \\ u(0)=u_0,\ u(1)=u_1,\ u'<0} \right\}.$$

La Lagrangiana $L(u,\xi) = \sqrt{1+\xi^2} \big/ \sqrt{u_0-u}$ ha le derivate

$$L_\xi = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}\,\sqrt{u_0-u}}\,, \qquad L_u = +\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{(u_0-u)^{3/2}}\,.$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è:

$$\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}\,\sqrt{u_0-u}} \right)' = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+u'^2}}{(u_0-u)^{3/2}} .$$

In realtà l'equazione si può integrare con il metodo di Du Bois-Reymond; esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{u'^2}{\sqrt{1+u'^2}\,\sqrt{u_0-u}} - \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u_0-u}} = C$$

che diventa

$$-1 = C\,\sqrt{1+u'^2}\,\sqrt{u_0-u} .$$

quindi $C<0$ e quadrando:

$$(1+u'^2)(u_0-u) = \frac{1}{C^2} ,$$

ovvero
$$u' \sqrt{\frac{C^2(u_0-u)}{1-C^2(u_0-u)}} = -1$$

Integrando si trova

$$\int_{x_0}^{x} u'(t)\sqrt{\frac{c^2(u_0-u(t))}{1-c^2(u_0-u(t))}}\,dt = -(x-x_0)$$

ovvero

$$\int_{u(x)}^{u_0}\sqrt{\frac{c^2(u_0-\tau)}{1-c^2(u_0-\tau)}}\,d\tau = x-x_0$$

con $x = x_1$ si trova la condizione

$$(*) \qquad \int_{u_1}^{u_0}\sqrt{\frac{c^2(u_0-\tau)}{1-c^2(u_0-\tau)}}\,d\tau = x_1-x_0 .$$

La costante c deve verificare $1-c^2(u_0-\tau)>0$ per ogni $\tau \in (u_1,u_0)$ e quindi

$$0 \leq c^2 < \frac{1}{u_0-u_1} .$$

L'equazione $(*)$ ha soluzione unica c^2 se

$$(**) \qquad x_1-x_0 < \int_{u_1}^{u_0}\sqrt{\frac{u_0-\tau}{\tau-u_1}}\,d\tau ,$$

Riassumiamo la discussione precedente nel seguente teorema.

<u>TEOREMA</u> Siano $x_0 \leq x_1$ e $u_0 \geq u_1$ numeri reali che verificano (**). Sia poi

$$X = \left\{ u \in C([x_0,x_1]) \cap C^2(x_0,x_1) \; ; \; \begin{array}{l} u(x_0) = u_0 \\ u(x_1) = u_1 \\ u' < 0 \end{array} \right\}$$

e sia $F : X \to [0,\infty]$

$$F(u) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{u_0 - u(x)}}\, dx .$$

Allora F ha minimo unico su X.

La dimostrazione è nelle pagine precedenti. In effetti il grafico del minimo u descrive un arco di cicloide.

BOUNDED SLOPE CONDITION

- $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato,
- $\mathcal{U} : \partial A \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione assegnata (Lipschitz continua),
- $\mathcal{A} = \{ u \in Lip(\bar{A}) \; : \; u_{|\partial A} = \mathcal{U} \}$
  classe di funzioni ammesse,
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione convessa.

Consideriamo il funzionale $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_A f(\nabla u(x))\, dx .$$

Dipende dal solo gradiente.
Per il Teorema di Rademacher $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^n$ esiste per q.o. $x \in A$, e inoltre $|\nabla u(x)| \leq Lip(u)$, la costante di Lipschitz di u.
Inoltre, $x \longmapsto f(\nabla u(x))$ e' in $L^\infty(A)$ e quindi l'integrale converge.
Vogliamo studiare l'esistenza del minimo

$$\min \{ F(u) \; : \; \underbrace{u \in Lip(\bar{A}) \text{ e } u_{|\partial A} = \mathcal{U}}_{u \in \mathcal{A}} \}.$$

ESEMPIO (Funzionale dell'area) La funzione $f(\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}$ è strettamente convessa e

$$F(u) = \int_A \sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}\, dx$$

è il funzionale dell'area.

Negli spazi di Sobolev l'ambiente naturale sarebbe $W^{1,1}(A)$ con $p = 1$, quindi.

Assegnata $U \in Lip(\partial A)$ vogliamo trovare il grafico di area minima che ha come bordo il grafico di U. Non sempre esiste.

DEFINIZIONE (Bounded slope Condition - Pendenza limitata)

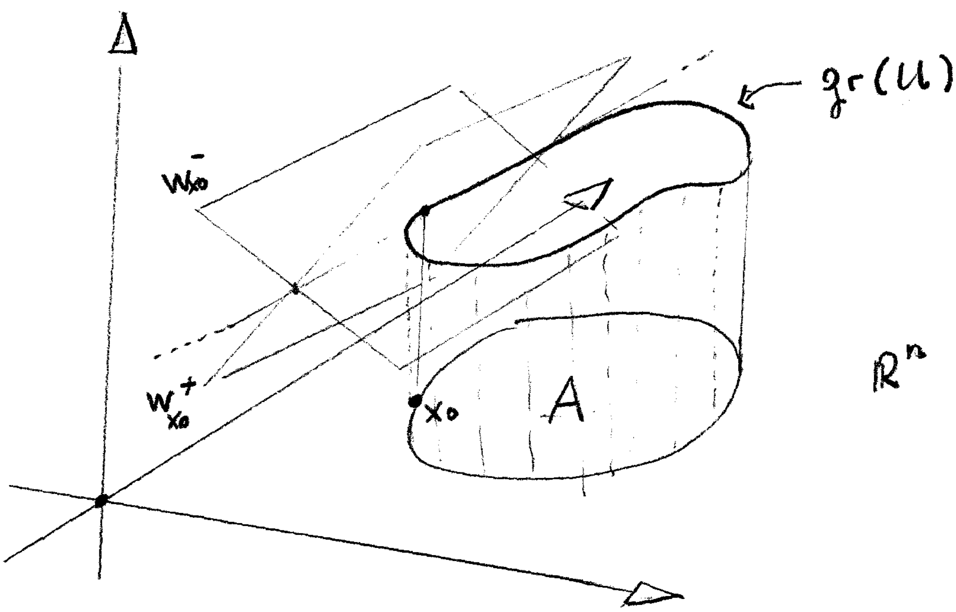
La coppia (A, U), con $U : \partial A \to \mathbb{R}$, verifica la bounded slope condition (BSC) se:

Esiste $Q > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \partial A$ esistono $w^-_{x_0}$, $w^+_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affini tali che:

i) $w^-_{x_0} \leq U \leq w^+_{x_0}$ su ∂A;

ii) $w^-_{x_0}(x_0) = U(x_0) = w^+_{x_0}(x_0)$;

iii) $Lip(w^{\pm}_{x_0}) \leq Q$.



<u>ESERCIZIO</u> Supponiamo che u non sia affine. Provare che:

$$(A, u) \text{ verifica BSC } \Longrightarrow A \text{ è convesso.}$$

<u>REMARK</u> Se ∂A è di classe C^2 e le curvature principali di ∂A sono positive (>0) in ogni punto allora (A, u) verifica BSC per ogni $u \in C^2(\partial A)$. Teorema di Miranda, vedi Giusti Metodi Diretti del CdV Sez. 1.2.

Nostro obiettivo è di provare il seguente risultato.

limitato

TEOREMA 1 Supponiamo che $(A, \mathcal{U})$ verifichi BSC, e sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (strettamente) convessa. Allora il minimo

$$\min \left\{ \int_A f(Du(x))\,dx \ ; \ u \in Lip(\bar{A}) \ e \ u|_{\partial A} = \mathcal{U} \right\}$$

è raggiunto (in modo unico se c'è "strettamente").

NOTAZIONI

$$Lip(u) = Lip_A(u) = \sup_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|}$$

$$Lip(A) = \{ u : \bar{A} \to \mathbb{R} \mid Lip(u) < \infty \}$$

$$Lip_k(A) = \{ u \in Lip(A) \ ; \ Lip(u) \leq k \} , \quad k>0$$

$$Lip(A;\mathcal{U}) = \{ u \in Lip(A) \ : \ u|_{\partial A} = \mathcal{U} \}$$

$$Lip_k(A;\mathcal{U}) = \{ u \in Lip(A;\mathcal{U}) \ ; \ Lip(u) \leq k \}.$$

Proposizione 2 Siano $k > 0$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa e $\mathcal{U} \in Lip_k(\partial A)$. Allora il minimo

$$\min \left\{ F(u) = \int_A f(Du(x))\,dx \ : \ u \in Lip_k(A;\mathcal{U}) \right\}$$

è raggiunto.

DIM. In primo luogo $\mathrm{Lip}_k(A;\mathcal{U}) \neq \emptyset$, segue dal Teorema di estensione di Mac Shane.

■ → Supponiamo per semplicità $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Sia $L = \inf\{F(u) ; u \in \mathrm{Lip}_k(A;\mathcal{U})\}$ e consideriamo una successione minimizzante $u_h \in \mathrm{Lip}_k(A;\mathcal{U})$, $h \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{h\to\infty} F(u_h) = L \in [-\infty, \infty). \quad (L \in \mathbb{R})$$

Abbiamo :

(x₀ ∈ ∂A a piacere)

i) $\mathrm{Lip}(u_h) \leq K \quad \forall h$

ii) $$|u_h(x)| \leq |u_h(x) - u_h(x_0)| + |u_h(x_0)|$$
$$\leq K|x-x_0| + |\mathcal{U}(x_0)|$$
$$\leq K \operatorname{diam}(A) + |\mathcal{U}(x_0)| \quad \forall x \in A \ \forall h \in \mathbb{N}.$$

Siamo nelle ipotesi del Teorema di Ascoli - Arzelà. Quindi esiste una sottosuccessione - chiamata ancora $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ - che converge uniformemente ad una funzione $u \in \mathrm{Lip}_k(A;\mathcal{U})$:

$$\lim_{h\to\infty} \max_{x\in\bar{A}} |u_h(x) - u(x)| = 0.$$

Dalla convessità di f:

$$f(\nabla u_h(x)) = f(\nabla u(x) + \nabla(u_h(x) - u(x))) \geq$$

Esiste q.o.

$$\geq f(\nabla u(x)) + \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla(u_h(x) - u(x))\rangle$$

e quindi

$$F(u_h) \geq F(u) + \int_A \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla(u_h(x) - u(x))\rangle\, dx.$$

Vogliamo usare la convergenza uniforme $u_h \rightrightarrows u$: bisogna togliere le derivate.

Siccome $\nabla f(\nabla u(x)) \in L^\infty(A;\mathbb{R}^n)$, $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\int_A |G(x) - \nabla f(\nabla u(x))|\, dx \leq \varepsilon.$$

Dunque

$$\int_A \langle \nabla f(\nabla u(x)), \nabla(u_h - u)\rangle\, dx = \int_A \langle G, \nabla(u_h - u)\rangle\, dx +$$

$$+ \int_A \langle \nabla f(\nabla u) - G, \nabla(u_h - u)\rangle\, dx$$

$$\leq \int_A \langle G, \nabla(u_h - u)\rangle\, dx + 2K\varepsilon.$$

Con una integrazione per parti e usando $u_h - u = 0$ su ∂A

$$\int_A \langle G, \nabla(u_h - u)\rangle\, dx = \underbrace{- \int_A \operatorname{div}(G)(u_h - u)\, dx}_{\downarrow\, h \to \infty \atop 0}$$

Concludiamo che

$$L = \lim_{h \to \infty} F(u_h) \geq F(u) - 2K\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

e quindi $F(u) \leq L$ e quindi $F(u) = L$.

□

<u>REMARK</u> Sia u il minimo della Proposizione 2.
Se fosse $\mathrm{Lip}(u) < K$ potremmo procedere nel seguente modo.
Sia $v \in \mathrm{Lip}(A; u)$ solamente con $\mathrm{Lip}(v) < \infty$.
Per $t \in (0,1)$ piccolo risulta $u + t(v - u) \in \mathrm{Lip}_K(A; u)$ e quindi:

$$F(u) \leq F(tv + (1-t)u) \overset{\text{convessità}}{\leq} t F(v) + (1-t) F(u)$$

$$\Downarrow \quad (t > 0)$$

$$F(u) \leq F(v)$$

Dunque, u sarebbe anche minimo per il TEOR. 1.

□

DEFINIZIONE Una funzione $w \in Lip_k(A)$ si dice super-minimo del funzionale F se per ogni $\theta \in Lip_k(A, w)$ si ha

$$w \leq \theta \text{ in } A \quad \Longrightarrow \quad F(w) \leq F(\theta).$$

Una funzione $v \in Lip_k(A)$ si dice sub-minimo per F se per ogni $\theta \in Lip_k(A, v)$ si ha

$$\theta \leq v \text{ in } A \quad \Longrightarrow \quad F(v) \leq F(\theta).$$

COMMENTO I minimi di F (con dato al bordo fissato) sono sia super- che sub-minimi

TEOREMA (Principio del Massimo) Siano $k > 0$ ed $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ strettamente convessa. Siano $w \in Lip_k(A)$ un superminimo di F e $v \in Lip_k(A)$ un sub-minimo di F. Allora:

$$v \leq w \text{ su } \partial A \quad \Longrightarrow \quad v \leq w \text{ in } A.$$

DIM. L'insieme $B = \{x \in A \,;\, v(x) > w(x)\}$ è aperto. Per assurdo supponiamo che $B \neq \emptyset$.

La funzione

$$\theta = \max\{v, w\} = \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in B \\ w(x) & \text{se } x \in A \setminus B \end{cases}$$

è in $Lip_k(A)$. Inoltre $\theta = w$ su ∂A e $\theta \geq w$ in A. Poichè w è un superminimo, si ha

$$\int_A f(\nabla w)\, dx = F(w) \leq F(\theta) = \int_A f(\nabla \theta)\, dx ,$$

Siccome su $A \setminus B$ si ha $\nabla w = \nabla \theta$, deduciamo che

$$\int_B f(\nabla w)\, dx \leq \int_B f(\nabla v)\, dx .$$

Lavorando con $\hat{\theta} = \min\{v, w\}$ si ottiene la disuguaglianza opposta

$$\int_B f(\nabla v) dx \leq \int_B f(\nabla w)\, dx ,$$

e quindi;

$$\int_B f(\nabla v)\, dx = \int_B f(\nabla w)\, dx .$$

Sull'insieme B si deve avere $\nabla v \neq \nabla w$ su un insieme di misura positiva, altrimenti sarebbe $v = w$ in B (esercizio). Dunque, per la stretta convessità di f:

$$\int_B f\left(\nabla\left(\frac{v+w}{2}\right)\right) dx < \underbrace{\frac{1}{2}\int_B f(\nabla v)\,dx + \frac{1}{2}\int_B f(\nabla w)\,dx}_{\displaystyle \int_B f(\nabla v)\,dx} .$$

Dunque la funzione

$$\hat{v} = \begin{cases} \dfrac{v+w}{2} & \text{su } B \\ v & \text{su } A \setminus B \end{cases}$$

contraddice la sub-minimalità di F.

Infatti $\hat{v} \in Lip_k(A)$, $\hat{v} = v$ su ∂A e $\hat{v} \le v$ in A.

$\square$

<u>COROLLARIO</u> Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strettamente convessa e $k > 0$. Siano $v, w \in Lip_K(A)$ due minimi di F ciascuno nella sua classe di dato al bordo. Allora: $\sup_A |v - w| = \sup_{\partial A} |v - w|$.

Dim. Esercizio.

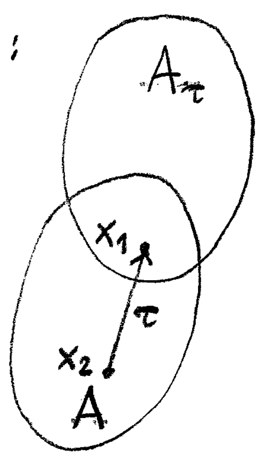
LEMMA (Riduzione alla frontiera) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ strettamente convessa e sia $u \in \mathrm{Lip}_K(A)$ un minimo di:

$$F(u) = \int_A f(\nabla u(x))\, dx$$

in $\mathrm{Lip}_K(A)$. Allora

$$\mathrm{Lip}(u, A) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in \partial A}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} .$$

Dim. Siano $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$ e definiamo $\tau = x_1 - x_2$, $A_\tau = \tau + A$, $u_\tau(x) = u(x - \tau)$ con $u_\tau : A_\tau \to \mathbb{R}$, si ha:



$$x_1 \in A \cap A_\tau \neq \emptyset .$$

Le due funzioni u e u_τ minimizzano

$$\int_{A \cap A_\tau} f(\nabla u(x))\, dx$$

(ciascuna con il suo dato al bordo).

Dal Principio del massimo (dal suo Corollario) segue:

$$|u(x_1) - u(x_2)| = |u(x_1) - u_\tau(x_1)| \leq$$

$$\leq |u(\bar{x}) - u_\tau(\bar{x})| = |u(\bar{x}) - u(\bar{x}-\tau)|$$

per qualche $\bar{x} \in \partial(A \cap A_\tau)$. Dunque si ha

$$\bar{x} \in \partial A \quad \text{oppure} \quad \bar{x} - \tau \in \partial A .$$

Quindi

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \frac{|u(\bar{x}) - u(\bar{x}-\tau)|}{|\tau|} \leq \sup_{\substack{x \in A \\ y \in \partial A}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|},$$

e siccome x_1, x_2 sono generici, questo conclude la prova.

□

<u>DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1</u>. Sia $Q > 0$ la costante della BSC e fissiamo $K > Q$.
Sia $u \in Lip_K(A; \mathcal{U})$ un (il, per stretta convessità) minimo di

$$\min \left\{ \int_A f(\nabla u)\, dx \ ; \ u \in Lip_K(A; \mathcal{U}) \right\}.$$

Sia $x_0 \in \partial A$. Siccome $u(x) = \mathcal{U}(x)$ per $x \in \partial A$, dal Principio del Massimo segue

$$w^-_{x_0} \leq \mathcal{U} \leq w^+_{x_0} \text{ su } \partial A \overset{PM}{\Longrightarrow} w^-_{x_0} \leq u \leq w^+_{x_0} \text{ su } A.$$

Per il Lemma di riduzione alla frontiera:

$$\mathrm{Lip}(u,A) = \sup_{\substack{x \in A \\ x_0 \in \partial A}} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|}.$$

D'altra parte,

$$u(x) - u(x_0) \leq w^+_{x_0}(x) - w^+_{x_0}(x_0) \leq Q\,|x - x_0|$$

$$u(x) - u(x_0) \geq w^-_{x_0}(x) - w^-_{x_0}(x_0) \geq -Q\,|x - x_0|$$

e quindi $|u(x) - u(x_0)| \leq Q\,|x - x_0|$, ovvero

$$\mathrm{Lip}(u,A) \leq Q < K.$$

Dall'osservazione fatta in precedenza segue che u è un minimo senza la restrizione $\mathrm{Lip}(u,A) \leq K$.

$\square$

<u>ESERCIZIO</u>: I piani sono minimi nella loro classe di dato al bordo.

ELEMENTI ESSENZIALI SUGLI SPAZI DI SOBOLEV

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un aperto limitato e $1 \leq p \leq \infty$.
Diciamo che $f \in W^{1,p}(A)$ – f appartiene allo spazio di Sobolev $W^{1,p}(A)$ – se:

1) $f \in L^p(A)$;

2) Esistono funzioni $g_1, \dots, g_n \in L^p(A)$ tali che

$$\int_A f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = - \int_A g_i(x)\, \varphi(x)\, dx$$

per ogni $i = 1, \dots, n$ e $\varphi \in C_c^\infty(A)$.

Chiameremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := g_i \in L^p(A), \qquad i = 1, \dots, n,$$

le derivate parziali deboli di f.
Indicheremo con

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

il gradiente (debole) di f.

con la norma

$$\|f\|_{W^{1,p}(A)} = \|f\|_{L^p(A)} + \|\nabla f\|_{L^p(A)}$$

$W^{1,p}(A)$ è uno spazio di Banach.

Lo spazio $W_0^{1,p}(A) \subset W^{1,p}(A)$ è formato dalle funzioni $f \in W^{1,p}(A)$ "che sono 0 su ∂A".

Precisamente:

$$W_0^{1,p}(A) = \overline{C_c^\infty(A)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(A)}}.$$

<u>Notazione</u> Quando $p=2$ si incontrano le notazioni

$$H^1(A) = W^{1,2}(A), \qquad H_0^1(A) = W_0^{1,2}(A).$$

In dimensione $n=1$ gli spazi di Sobolev si descrivono in modo più concreto. Ad esempio, per l'intervallo $(0,1) \subset \mathbb{R}$ si ha:

$$W^{1,p}(0,1) = \{ f \in AC([0,1]) \,;\, f' \in L^p(0,1) \},$$

$$W_0^{1,p}(0,1) = \{ f \in AC([0,1]) \,;\, f' \in L^p(0,1),\ f(0) = f(1) = 0 \}.$$

TOPOLOGIA FORTE E DEBOLE Su $W^{1,p}(A)$ ci sono la topologia forte e la topologia debole.
Quando $1 \leq p < \infty$ la topologia debole si descrive sequenzialmente nel seguente modo.

Siano $f, f_h \in W^{1,p}(A)$, $h \in \mathbb{N}$. Diciamo che

$$f_h \xrightarrow[h \to \infty]{W^{1,p}(A)} f \qquad \text{(convergenza debole in } W^{1,p}(A)\text{) sequenziale}$$

se:

① $$\int_A f_h \varphi \, dx \xrightarrow[h \to \infty]{} \int_A f \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in L^q(A)$$

② $$\int_A \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \varphi \, dx \xrightarrow[h \to \infty]{} \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in L^q(A) \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

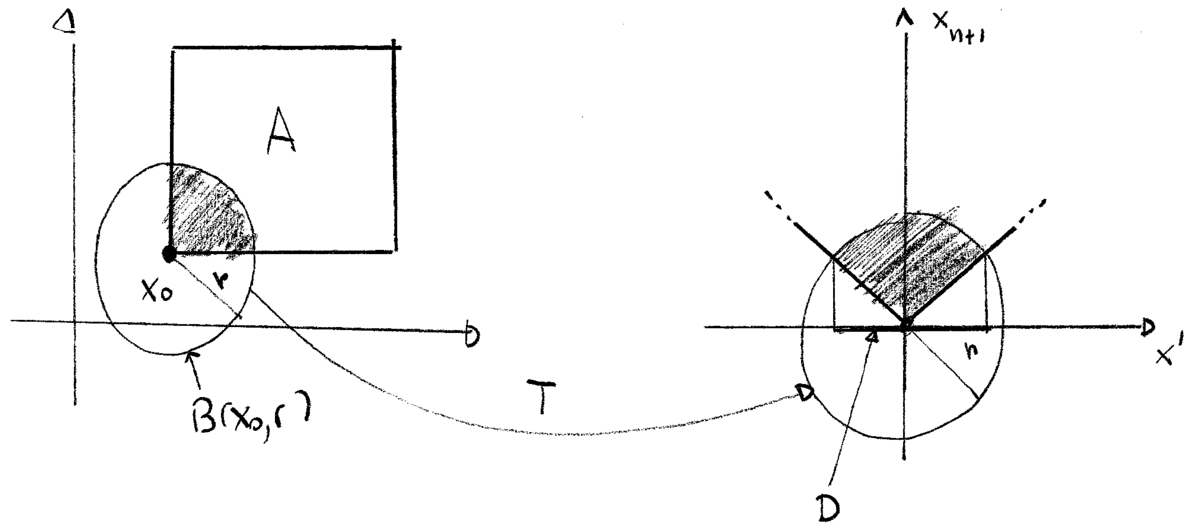
dove $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Quando $1 < p < \infty$, lo spazio $L^p(A)$ è riflessivo. Quindi per il Teorema di Banach-Alaoglu i sottoinsiemi limitati di $L^p(A)$ sono precompatti per la topologia debole.

Quindi gli insiemi limitati di $W^{1,p}(A)$ sono precompatti per la topologia debole di $W^{1,p}(A)$.

<u>DEFINIZIONE</u> Diciamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ ha frontiera Lipschitziana se per ogni $x_0 \in \partial A$ esistono $r > 0$, un'isometria $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ed una funzione Lipschitziana $\psi : D \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tali che

$$T\big(\partial A \cap B(x_0, r)\big) = \{(x', \psi(x')) \in \mathbb{R}^n : x' \in D\}.$$



TEOREMA (Rellich - Kondrachov) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato con frontiera Lipschitziana. Sia $1 \leq p \leq \infty$. Allora l'immersione

$$W^{1,p}(A) \subset\subset L^p(A)$$

è compatta. Ovvero: i sottoinsiemi limitati di $W^{1,p}(A)$ sono precompatti in $L^p(A)$.

Quando $p = \infty$ è una variante del Teorema di Ascoli - Arzelà. Vedremo in seguito la dimostrazione nel caso $p = 1$ per le funzioni BV.

Sia ora $1 \leq p < n$ e definiamo l'esponente di Sobolev coniugato:

$$p^* = \frac{pn}{n-p}$$

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera Lipschitz, $1 \leq p < n$ e $1 \leq q < p^*$. Allora l'immersione $W^{1,p}(A) \subset\subset L^q(A)$ è compatta.

COMMENTO Per $W_0^{1,p}(A)$ si ha:

$$W_0^{1,p}(A) \subset\subset L^p(A) \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

$$W_0^{1,p}(A) \subset\subset L^q(A) \qquad \begin{array}{l} 1 \leq p < n \\ 1 \leq q < p^* \end{array}$$

con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato (senza ∂A Lipschitz).

DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato ed $f \in L^1(A)$.
La media è

$$f_A = \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \int_A f(x)\, dx.$$

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, connesso con frontiera Lipschitz. Per ogni $1 \leq p < \infty$ esiste una costante $C = C(n, p, A)$ tale che

$$\int_A |f - f_A|^p dx \leq C \int_A |\nabla f|^p dx$$

per ogni $f \in W^{1,p}(A)$.

La dimostrazione segue da Rellich-Kondrachov.
Una variante è questa:

<u>TEOREMA</u> Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $1 \leq p < \infty$.
Esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\int_A |f|^p dx \leq C \int_A |\nabla f|^p dx$$

per ogni $f \in W_0^{1,p}(A)$.

SEMICONTINUITÀ INFERIORE DELLA NORMA

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato con duale $(X^*, \|\cdot\|_*)$ dove

$$\|x^*\|_* := \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x, x^* \rangle$$

Dal Teorema di Hahn-Banach segue che

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\|_* \leq 1} \langle x, x^* \rangle$$

Supponiamo che $x_h \xrightarrow[h \to \infty]{X} x$, ovvero:

$$\langle x_h, x^* \rangle \xrightarrow[h \to \infty]{} \langle x, x^* \rangle \qquad \forall x^* \in X^*$$

Dunque, se $\|x^*\|_* \leq 1$ si ha:

$$\langle x, x^* \rangle = \lim_{h\to\infty}(\inf) \langle x_h, x^* \rangle \leq \liminf_{h\to\infty} \|x_h\|$$

e passando a sup si trova la semicontinuità inferiore della norma per la convergenza debole

$$\|x\| \leq \liminf_{h\to\infty} \|x_h\|$$

se $x_h \rightharpoonup x$.

TEOREMA DI BANACH - ALAOGLU

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach con duale $(X^*, \|\cdot\|_*)$.
La topologia debole-* su X^* è la più piccola topologia che rende continui tutti i funzionali lineari $T_x : X^* \to \mathbb{R}$, $x \in X$, della forma

$$T_x(x^*) = \langle x, x^* \rangle, \quad x^* \in X^*$$

ovvero x^* che agisce su x.

TEOREMA La palla unitaria

$$B = \{ x^* \in X^* \; ; \; \|x^*\|_* \leq 1 \}$$

è compatta nella topologia debole-$*$ di X^*.

Il teorema si basa sul Teorema di Tychonov: il prodotto di spazi topologici compatti è compatto. (E quindi sull'assioma della scelta).

In casi concreti ci sono però dimostrazioni dirette.

Sia X^{**} il duale di X^*. In generale $X \subsetneqq X^{**}$, se $(X, \|\cdot\|)$ e $(X^{**}, \|\cdot\|_{**})$ sono isomorfi allora X si dice riflessivo.

ESEMPIO L^p con $1 < p <$ è riflessivo.

L^1 NON è riflessivo.

COROLLARIO Sia X uno spazio di Banach riflessivo. Gli insiemi chiusi (topologia forte) e limitati di X sono compatti per la topologia debole.

CONVESSITÀ E SEMICONTINUITÀ INFERIORE IN $W^{1,p}$

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f: A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice di Carathéodory se:

i) $x \longmapsto f(x,u,\xi)$ è ($\mathcal{L}^n$-)misurabile $\forall u \in \mathbb{R}$ e $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$;

ii) Per ($\mathcal{L}^n$-)q.o. $x \in A$, la funzione $(u,\xi) \longmapsto f(x,u,\xi)$ è continua.

ESERCIZIO Se f è di Carathéodory e $u: A \to \mathbb{R}$ e $v: A \to \mathbb{R}^n$ sono misurabili allora la funzione $x \longmapsto f(x, u(x), v(x))$ è misurabile.

Supponiamo d'ora in poi che sia anche $f \geq 0$.
Per $1 \leq p \leq \infty$ consideriamo il funzionale $F: W^{1,p}(A) \to [0, \infty]$

$$F(u) = \int_A f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx.$$

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $f: A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ continua. Supponiamo che valga una delle due ipotesi:

1) F è sequenzialmente sci in $W^{1,p}(A)$-debole per qualche $1 \leq p < \infty$. Oppure:
2) F è seq. sci in $W^{1,\infty}(A)$-debole*.

Allora $\xi \longmapsto f(x,u,\xi)$ è convessa $\forall x \in A$ e $\forall u \in \mathbb{R}$.

DIM. In realtà 1) => 2). Quindi supponiamo 2).

Presentiamo la dimostrazione nel seguente caso:

$$n = 1 \ , \quad A = (0,1), \quad f = f(\xi) \text{ con } f : R \to [0,\infty).$$

L'ipotesi è che:

$$u_h \xrightarrow{W^{1,\infty}\text{-debole}*} u \qquad \Rightarrow \qquad F(u) \leq \liminf_{h\to\infty} F(u_h).$$

L'antecedente significa che

$$\lim_{h\to\infty} \int_{[0,1]} u_h \phi \, dx = \int_{[0,1]} u \phi \, dx \ ,$$

$$\forall \phi \in W^{1,1}(0,1)$$

$$\lim_{h\to\infty} \int_{[0,1]} u_h' \phi' \, dx = \int_{[0,1]} u' \phi' \, dx \ .$$

Dobbiamo provare che $\forall \xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall t \in [0,1]$ si ha:

$$f(t\xi_1 + (1-t)\xi_0) \leq t f(\xi_1) + (1-t) f(\xi_0) \ .$$

Definiamo $v : [0,1) \to \mathbb{R}$

$$v(x) = \begin{cases} \xi_1 & \text{se } x \in [0,t) \\ \xi_0 & \text{se } x \in [t,1) \end{cases}$$

estesa su $\mathbb{R}$ per 1-periodicità. Poi sia $v_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$v_h(x) = v(hx) \ , \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Per h grande le oscillazioni sono frequenti.
Ora integriamo e definiamo $u_h : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$u_h(x) = \int_0^x v_h(s)\, ds.$$

Si ha $u_h \in W^{1,\infty}(0,1)$, $u_h' = v_h$ e inoltre per ogni $\psi \in L^1(0,1)$ si ha

$$\lim_{h\to\infty} \int_{[0,1]} v_h \psi \, dx \overset{\text{Esercizio}}{=} \left(\int_{[0,1]} v(x)\,dx\right)\left(\int_{[0,1]} \psi(x)\,dx\right)$$

$$= (t\xi_1 + (1-t)\xi_0) \int_{[0,1]} \psi(x)\,dx.$$

In altri termini:

$$u_h' = v_h \xrightarrow[h\to\infty]{L^\infty(0,1)\text{-debole}^*} t\xi_1 + (1-t)\xi_0 \quad \text{costante}.$$

Analogamente: $u_h \xrightarrow[h\to\infty]{L^\infty-d*} x(t\xi_1 + (1-t)\xi_0) =: u$.

Dall'ipotesi si ricava che

$$\int_{[0,1]} f(t\xi_1 + (1-t)\xi_0)\,dx = F(u) \le \liminf_{h\to\infty} F(u_h) =$$

$$= \liminf_{h\to\infty} \int_{[0,1]} f(v_h)\,dx$$

Ma con gli argomenti precedenti si vede che

$$f(v_h) \xrightarrow[h\to\infty]{L^\infty(0,1)\text{-debole}*} t\, f(\xi_1) + (1-t)\, f(\xi_0)$$

e concludiamo che

$$f(t\xi_1 + (1-t)\xi_0) \leq t\, f(\xi_1) + (1-t)\, f(\xi_0).$$

$\square$

Ora invertiamo il teorema precedente: mostriamo che la convessità implica la semicontinuità inferiore in $W^{1,p}(A)$-debole.

<u>TEOREMA</u> (Tonelli) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $f : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty]$ di Carathéodory. Supponiamo che $\xi \longmapsto f(x,u,\xi)$ sia convessa per q.o. $x \in A$ ed $u \in \mathbb{R}$. Allora il funzionale $F : W^{1,p}(A) \longrightarrow [0,\infty]$, $1 \leq p < \infty$,

$$F(u) = \int_A f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

è s.c.i. in $W^{1,p}(A)$-debole.
(sequenzialmente)

Dim. Vediamo la dimostrazione in un caso modello. Sia $f = f(\xi)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo inoltre che esista una costante $C > 0$ tale che

$$|\nabla f(\xi)| \leq C\,|\xi|^{p-1} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Siano dunque $u, u_h \in W^{1,p}(A)$ tali che

$$u_h \xrightarrow[h \to \infty]{} u \quad \text{in } W^{1,p}(A)\text{-debole}.$$

Usando la convessità di f si trova

$$F(u_h) = \int_A f(\nabla u_h)\,dx \geq \int_A \Big(f(\nabla u) + \langle \nabla f(\nabla u), \nabla u_h - \nabla u \rangle \Big) dx$$

Osserviamo che

$$|\nabla f(\nabla u)| \leq C\,|\nabla u|^{p-1} \in L^q(A)$$

con $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Infatti $(p-1)q = p$ e $|\nabla u| \in L^p(A)$.

Dunque si ha

$$\lim_{h \to \infty} \int_A \langle \nabla f(\nabla u), \nabla u_h - \nabla u \rangle\, dx = 0.$$

Concludiamo che

$$\liminf_{h \to \infty} F(u_h) \geq \int_A f(\nabla u)\,dx = F(u).$$

$\square$

ESISTENZA DI MINIMI IN $W^{1,p}$

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitz. Fissiamo una funzione $u_0 \in W^{1,p}(A)$ che svolge il ruolo di dato al bordo, con $1 \leq p < \infty$, e consideriamo la classe di funzioni ammissibili

$$\mathcal{A} = u_0 + W_0^{1,p}(A).$$

Data una funzione di Carathéodory $f : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ consideriamo il funzionale $F : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$

$$F(u) = \int_A f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx.$$

Supponiamo che esista $\bar{u} \in \mathcal{A}$ tale che $F(\bar{u}) < \infty$.

TEOREMA Oltre alle ipotesi precedenti supponiamo che:

i) sia $1 < p < \infty$;

ii) $\xi \longmapsto f(x, u, \xi)$ sia convessa $\forall u \in \mathbb{R}$ e per q.o. $x \in A$;

iii) Esistano $g \in L^1(A)$ e $C > 0$ tali che [[Coercività]]

$$f(x, u, \xi) \geq g(x) + C|\xi|^p \quad \forall \xi \text{ e per q.o. } x,$$

Allora F ha minimo su $\mathcal{A}$.

Dim. Sia $K = \{ u \in \mathcal{A} \; ; \; F(u) \leq F(\bar{u}) \} \subset W^{1,p}(A)$.
Finiamo su K la topologia debole di $W^{1,p}(A)$.
Dalla ii) (convessità di $\xi \mapsto f(\cdot,\cdot,\xi)$) segue che $F : K \to \mathbb{R}$ è semicontinuo inferiormente.
Inoltre, se $u \in K$ dalla condizione di coercività iii) segue che

$$F(\bar{u}) \geq F(u) = \int_A f(x, u(x), \nabla u(x)) dx \geq$$

$$\geq \int_A g(x)\, dx + c \int_A |\nabla u(x)|^p dx$$

e quindi

$$\int_A |\nabla u|^p dx \leq \frac{1}{c} \left(\|g\|_1 + F(\bar{u}) \right).$$

Dalla Disuguaglianza di Poincaré:

$$\|u\|_{L^p(A)} \leq \|u - u_0\|_{L^p(A)} + \|u_0\|_{L^p(A)}$$

$$\leq C_1 \left(\int_A |\nabla u - \nabla u_0|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \|u_0\|_{L^p(A)}$$

$$\leq C_1 \|\nabla u\|_{L^p(A)} + C_2 \|u_0\|_{W^{1,p}(A)}.$$

Quindi K è limitato in $W^{1,p}(A)$.

Siccome K è chiuso per la topologia debole $W^{1,p}(A)$ e siccome $p > 1$ (caso riflessivo)

dal Teorema di Banach - Alaoglu segue che K è compatto nella topologia debole di $W^{1,p}(A)$.

L'esistenza del minimo segue dal Teorema di Weierstraß.

$\square$

<u>ESEMPIO 1</u> Sia $\mathcal{A} = \left\{ u \in W^{1,1}([0,1]) = AC([0,1]) : \begin{array}{l} u(0)=0 \\ u(1)=1 \end{array} \right\}$

e sia $F : \mathcal{A} \to [0,\infty)$

$$F(u) = \int_{[0,1]} \sqrt{u^2 + u'^2} \, dx .$$

Le ipotesi ii) e iii) sono verificate. Non la (i): qui abbiamo $p = 1$.

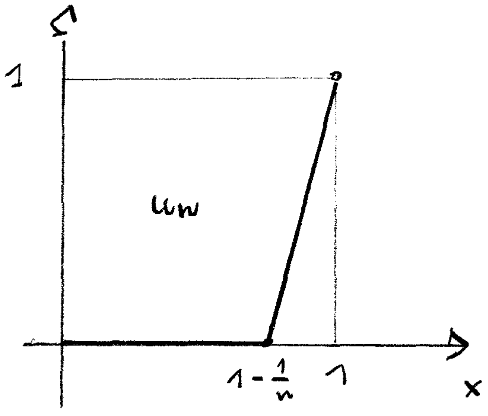
Verifichiamo che il minimo non è raggiunto.

Se $u \in \mathcal{A}$ allora

$$(*) \qquad F(u) \geq \int_{[0,1]} |u'| \, dx \geq \int_{[0,1]} u'(x) \, dx \overset{u \in AC}{=} u(1) - u(0) = 1$$

Quindi $\inf \{ F(u) : u \in \mathcal{A} \} \geq 1$.

Dato $n \in \mathbb{N}$ si consideri $u_n \in AC([0,1])$ fatta in questo modo



Allora

$$F(u_n) = \int_{[1-\frac{1}{n},1]} \sqrt{u^2+u'^2}\,dx \le \int_{[1-\frac{1}{n},1]} \sqrt{1+n^2}\,dx = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}$$

e quindi

$$\inf\{F(u) \; ; \; u \in \mathcal{A}\} = 1.$$

Se $u \in \mathcal{A}$ fosse un minimo, allora in $(*)$ dovremmo avere tutte uguaglianze, cosa che implicherebbe $u(x) = 0$ per (quasi) ogni $x \in [0,1]$, contro le condizioni al bordo.

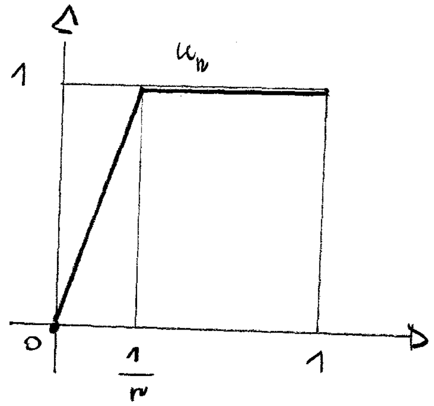
$\square$

ESEMPIO 2 (Weierstrass) Sia $\mathcal{A} = \left\{ u \in W^{1,2}(0,1) \;:\; \begin{array}{l} u(0)=0 \\ u(1)=1 \end{array} \right\}$

e sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty)$

$$F(u) = \int_{[0,1]} x^2 u'(x)^2 \, dx .$$

Le condizioni i) e ii) sono verificate, ma non la coercività iii). Verifichiamo che il minimo non viene raggiunto. Basta considerare $u_n \in W^{1,2}(0,1)$ fatta nel seguente modo



$$F(u_n) = \int_{[0,\frac{1}{n}]} x^2 n^2 \, dx = \frac{1}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

quindi $\inf\{ F(u) \;;\; u \in \mathcal{A} \} = 0$. Ma $F(u) = 0$ implica $u' = 0$ q.o. e quindi $u =$ costante (perché $u \in AC$). Questo è incompatibile con i dati al bordo.

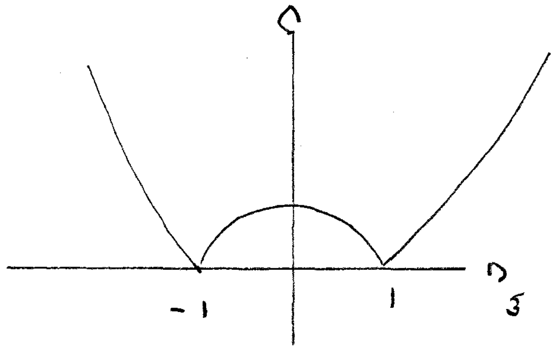
$\square$

ESEMPIO 3 (Bolza) Sia $\mathcal{A} = \{ u \in W^{1,2}(0,1) \, ; \, u(0) = u(1) = 0 \}$

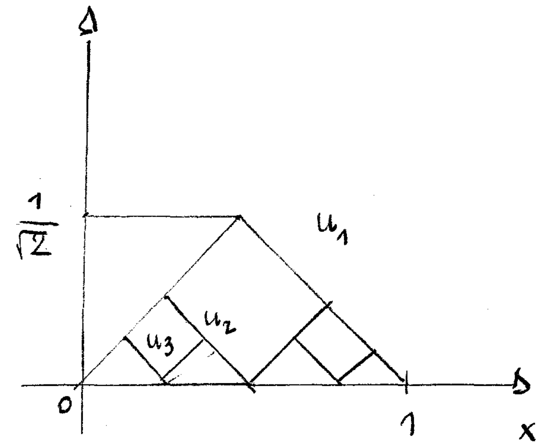
e sia $F : \mathcal{A} \to [0,\infty)$

$$F(u) = \int_{[0,1]} \left(|u'^2 - 1| + u^2 \right) dx .$$

La i) e la iii) sono verificate, ma non la ii) perché $\xi \mapsto |\xi^2 - 1|$ non è convessa



Per $n \in \mathbb{N}$ sia $u_n \in W^{1,2}(0,1)$ come in figura:



Chiaramente $|u_n'(x)| = 1$ q.o. e inoltre $\|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2}n}$

Quindi $\lim_{n\to\infty} F(u_n) = 0$ e dunque $\inf \{ F(u) \, ; \, u \in \mathcal{A} \} = 0$. Ma $F(u) = 0$ implica $|u'(x)| = 1$ q.o. e $u = 0$, che sono incompatibili.

$\square$

ESEMPIO 4 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitz, $n \geq 1$. Sia

$$X = \left\{ u \in H^1(A) \; ; \; \int_A u \, dx = 0 \right\}.$$

Si tratta di un sottospazio chiuso di $H^1(A)$.
É il complemento ortogonale della funzione $1 \in H^1(A)$.

Sia $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ il funzionale

$$F(u) = \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + f u \right\} dx$$

dove $f \in L^2(A)$ è una funzione fissata.
Studiamo il problema di minimo

$$\min \left\{ F(u) \; ; \; u \in X \right\}.$$

Sia $u_h \in X$, $h \in \mathbb{N}$, una successione minimizzante :

$$\lim_{h \to \infty} F(u_h) = \inf \left\{ F(u) \; ; \; u \in X \right\}.$$

Esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che $\forall h \in \mathbb{N}$

$$\int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u_h|^2 + f u_h \right\} dx \leq C .$$

Dato un parametro $\varepsilon > 0$, avremo

$$\int_A f u_h \, dx \geq -\frac{1}{2} \int_A \left(\frac{1}{\varepsilon} f^2 + \varepsilon \, u_h^2 \right) dx$$

e per la disuguaglianza di Poincaré esiste una costante $C_A > 0$ tale che

$$\int_A |u_h|^2 dx = \int_A |u_h - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Media} = 0}}{(u_h)_A}|^2 dx \leq C_A \int_A |\nabla u_h|^2 dx$$

e dunque

$$\int_A f\, u_h\, dx \geq -\frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2}^2 + \varepsilon C_A \int_A |\nabla u_h|^2 dx \right\}.$$

In definitiva si trova

$$\frac{1}{2}(1 - \varepsilon C_A) \int_A |\nabla u_h|^2 dx \leq C + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(A)}^2 ,$$

e scegliendo $1 - \varepsilon C_A \geq \frac{1}{2}$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2 C_A} \right)$

si vede che esiste una costante $0 < C_1 < \infty$ tale che

$$\int_A |\nabla u_h|^2 dx \leq C_1 \qquad \forall h \in \mathbb{N}$$

e quindi anche

$$\int_A u_h^2 dx \leq C_A \cdot C_1 \qquad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Per il teorema di compattezza debole esiste $u \in H^1(A)$ ed esiste una sottosuccessione di $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ – chiamata ancora $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ – tale che

$$u_h \xrightarrow[h \to \infty]{H^1(A)} u$$

ovvero:

$$u_h \xrightarrow{L^2} u \,,$$

$$\nabla u_h \xrightarrow{L^2} \nabla u \,.$$

(Dal Teorema di Rellich-Kondrachov segue che $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ è (pre)compatta in $L^2(A)$ e quindi – a meno di ulteriore s.s. – si ha in effetti $u_h \xrightarrow{L^2} u$ fortemente. Non useremo questo fatto.)

Per semicontinuità inferiore si ha

$$\int_A |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{h \to \infty} \int_A |\nabla u_h|^2 dx \,.$$

Inoltre

$$\lim_{h \to \infty} \int_A u_h f \, dx = \int_A u f \, dx$$

e

$$0 = \lim_{h \to \infty} \int_A u_h \, dx = \int_A u \, dx \,,$$

In particolare $u \in X$. Infine

$$F(u) = \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + f u \right\} dx \leq$$

$$\leq \liminf_{h \to \infty} \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u_h|^2 + f u_h \right\} =$$

$$= \lim_{h \to \infty} F(u_h) .$$

Quindi u è il minimo di F su X.

Supponiamo che u e $\bar{u}$ siano due minimi. Siccome $u \mapsto F(u)$ è convesso si ha

$$F\left(\frac{u+\bar{u}}{2} \right) \leq \frac{1}{2} F(u) + \frac{1}{2} F(\bar{u})$$

e per la minimalità si ha $=$, cosa che implica

$$\int_A \left| \nabla \frac{u+\bar{u}}{2} \right|^2 dx = \frac{1}{2} \int_A |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_A |\nabla \bar{u}|^2 dx$$

Dalla stretta convessità di $\xi \mapsto |\xi|^2$ si deduce che deve essere $\nabla u = \nabla \bar{u}$ q.o. su A, ovvero $\nabla (u - \bar{u}) = 0$. La disuguaglianza di Poincaré

$$\int_A (u-\bar{u})^2 dx \leq c_A \int_A |\nabla (u-\bar{u})|^2 dx = 0$$

implica $u = \bar{u}$.

Questo prova l'unicità del minimo.
Deriviamo l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole. Sia $\varphi \in C_c^\infty(A)$, allora

$$\psi := \varphi - \varphi_A = \varphi - \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \int_A \varphi \, dx \in X.$$

Per $\varepsilon \in \mathbb{R}$ si consideri

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= F(u+\varepsilon\psi) \\ &= \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u + \varepsilon \nabla \psi|^2 + f(u+\varepsilon\psi) \right\} dx \\ &= \int_A \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 |\nabla \psi|^2 + \varepsilon \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle \right. \\ &\qquad \left. + f(u+\varepsilon\psi) \right\} dx \end{aligned}$$

e dunque

$$g'(0) = \int_A \{ \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle + f\psi \} \, dx .$$

Se u è un minimo si trova

$$0 = g'(0) = \int_A \{ \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + f(\varphi - \varphi_A) \} \, dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(A)$.

Osserviamo che $\int_A f\,\varphi_A\,dx = \int_A f_A\,\varphi\,dx$

e quindi l'equazione è

$$\int_A \{\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle + (f - f_A)\varphi\}\,dx \overset{\forall\varphi}{=} 0 .$$

Per la teoria della regolarità (che noi non vedremo) si ha $u \in H^2(A)$, ovvero u possiede le derivate seconde in $L^2(A)$ in senso debole. Inoltre

$$⊛ \qquad \int_A \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle\,dx \overset{\varphi \in C_c^\infty(A)}{=} -\int_A \Delta u\,\varphi\,dx$$

e l'equazione diventa

$$\int_A \{-\Delta u + f - f_A\}\,\varphi\,dx \overset{\forall\varphi}{=} 0$$

Quindi si trova l'equazione in $L^2(A)$

$$(\square) \qquad \Delta u = f - f_A \quad \text{in } L^2(A)$$

(Equazione di Poisson).

I conti precedenti si possono ripetere anche a partire da $\varphi \in C^\infty(\bar{A})$. L'unica differenza è in ⊛. Ora si ha

$$\int_A \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx = \int_A \left\{ \operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \varphi \Delta u \right\} dx .$$

In modo "formale" si trova col teorema della divergenza

$$\int_A \operatorname{div}(\varphi \nabla u) \, dx = \int_{\partial A} \varphi \langle \nabla u, \nu \rangle \, dH^{n-1} .$$

Bisogna che ∇u sia definito H^{n-1}-q.o. su ∂A.

Tenuto conto di (□), l'equazione di Eulero-Lagrange diventa ora

$$\int_{\partial A} \varphi \langle \nabla u, \nu \rangle \, dH^{n-1} = 0 \quad \forall \varphi \in C(\partial A)$$

Questo implica che

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu \rangle = 0 \quad \text{su } \partial A .$$

Questa è la condizione di Neumann.

□

FUNZIONI A VARIAZIONE LIMITATA

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

DEF Diciamo che $f \in BV(A)$ è una funzione a variazione limitata in A se $f \in L^1(A)$ e

$$\|Df\|(A) := \sup \left\{ \int_A f \operatorname{div} \varphi \, dx \; : \; \begin{array}{c} \varphi \in C^1_c(A; \mathbb{R}^n) \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \end{array} \right\} < \infty.$$

Chiamiamo $\|Df\|(A)$ la variazione totale di f in A.

DEF Diciamo che $f \in BV_{loc}(A)$ è una funzione localmente a variazione limitata se $f \in L^1_{loc}(A)$ e per ogni aperto $B \subset\subset A$ ($\underset{\text{compatto}}{\overline{B}} \subset A$) si ha $\|Df\|(B) < \infty$.

Notazione $\operatorname{div} \varphi = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$ è la divergenza di $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Le funzioni a variazione limitata hanno derivata distribuzionale come misura.

Notazione Con $C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ indichiamo l'insieme delle funzioni continue $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tali che

$$\operatorname{spt}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

è compatto. Qui $n, m \geq 1$.

Il teorema di Riesz descrive il duale delle funzioni continue con supporto compatto.

TEOREMA (Riesz) Sia $T : C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$ una trasformazione lineare che sia continua (limitata) nel seguente senso: per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ si ha

$$\sup\left\{ T(f) : \begin{array}{l} f \in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m),\ \operatorname{spt}(f) \subset K \\ \|f\|_\infty \leq 1 \end{array} \right\} < \infty.$$

Allora esistono una misura di Radon μ su $\mathbb{R}^n$ ed una funzione μ-misurabile $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tali che:

(i) $T(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle f, \sigma \rangle \, d\mu \qquad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m);$

(ii) $|\sigma(x)| = 1$ per μ-q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Omettiamo la dimostrazione, che si fa così:

1) Si costruisce μ nel seguente modo:

$$\mu(A) = \sup\{ T(f) : f \in C_c(A; \mathbb{R}^m), \ \|f\|_\infty \le 1 \}$$

con A aperto.

2) Si prova che μ è di Borel regolare finita sui compatti (-> Radon)

3) Si costruisce σ. Questa parte è complicata. Si lavora per componenti. Si usa il teorema

$$L^1(\mathbb{R}^n; \mu)^* = L^\infty(\mathbb{R}^n; \mu).$$

Si verifica che $|\sigma(x)| = 1$ q.o.

Con il teorema di Riesz si ottiene la descrizione distribuzionale del gradiente distribuzionale delle funzioni BV.

<u>TEOREMA</u> Sia $f \in BV_{loc}(A)$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Allora esistono una misura di Radon μ in A ed una funzione μ-misurabile $\sigma : A \to \mathbb{R}^n$ tali che:

i) $|\sigma(x)| = 1$ μ-q.o.

ii) Vale la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_A f \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_A \langle \varphi, \sigma \rangle \, d\mu$$

per ogni $\varphi \in C_c^1(A; \mathbb{R}^n)$.

<u>NOTAZIONE</u> Useremo le seguenti notazioni:

$\|Df\| = \mu$ misura di Radon ≥ 0,

$[Df] = \sigma\mu$ misura di Radon vettoriale,

$\mu^i = \sigma^i \mu$ misura di Radon con segno.

$i = 1, \dots, n$

La formula di integrazione per parti diventa

$$\int_A f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_A \varphi \, d\mu^i$$

$$i = 1, \dots, n$$

per ogni $\varphi \in C^1_c(A)$. Ovvero, μ^i è la derivata direzionale i-esima di f (è una misura) nel senso delle distribuzioni.

DIMOSTRAZIONE Definiamo l'operatore lineare

$T : C^1_c(A; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$T(\varphi) = - \int_A f \operatorname{div} \varphi \, dx , \quad \varphi \in C^1_c(A; \mathbb{R}^n).$$

Siccome $f \in BV_{loc}(A)$, per ogni insieme aperto $B \subset\subset A$ si ha

$$\|Df\|(B) = \sup \left\{ \int_A f \operatorname{div} \varphi \, dx : \begin{array}{l} \varphi \in C^1_c(B; \mathbb{R}^n) \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \end{array} \right\} < \infty ,$$

e quindi

$$(*) \qquad |T(\varphi)| \leq \|Df\|(B)\,\|\varphi\|_\infty \,, \qquad \forall \varphi \in C^1_c(B;\mathbb{R}^n).$$

Sia ora $K \subset A$ un insieme compatto e sia $B \subset A$ aperto tale che $K \subset B$. Data $\varphi \in C(A;\mathbb{R}^n)$ con $\operatorname{spt}(\varphi) \subset K$, esiste una successione $\varphi_k \in C^\infty_c(B;\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, tale che

$$(\square) \qquad \lim_{k\to\infty} \|\varphi - \varphi_k\|_{L^\infty(B)} = 0.$$

Basta fare delle mollificazioni.

Dalla $(*)$ segue che

$$(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ di Cauchy in } L^\infty(B) \implies (T(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ di Cauchy in } \mathbb{R}$$

Quindi esiste finito il limite

$$T(\varphi) := \lim_{k\to\infty} T(\varphi_k)$$

(e non dipende da $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, purché valga $(\square)$).

Ora abbiamo $T: C_c(A;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare e dalla $*)$ segue che

$$\sup\left\{ T(\varphi) : \begin{array}{l}\varphi \in C_c(A;\mathbb{R}^n),\ spt(\varphi) \subset K \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1\end{array} \right\} \leq \|Df\|(B) < \infty$$

con $K \subset B \subset\subset A$ come sopra.

Ora riuso il Teorema di Riesz per trovare μ e σ.

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Sia $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Provare che $f \in BV(\mathbb{R}^n)$, calcolare σ e μ.

COMMENTO STORICO La definizione di De Giorgi di $BV(\mathbb{R}^n)$ era la seguente. Data $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si considera il problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \text{in } L^1(\mathbb{R}^n) \end{cases}.$$

La soluzione u verifica $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ e

$$\lim_{t \to 0^+} \| u(x,t) - f(x) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0 ,$$

La soluzione è in effetti unica ed è

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy .$$

De Giorgi osserva che la funzione

$$t \longrightarrow \phi(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|\, dx , \quad t > 0$$

è decrescente e quindi si può sempre definire

$$\|Df\|(\mathbb{R}^n) := \lim_{t \to 0^+} \phi(t) \in [0, \infty].$$

Allora diciamo che $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|Df\|(\mathbb{R}^n) < \infty$.

La definizione è equivalente alle precedenti.

$\square$

Ora vogliamo esaminare la struttura della misura vettoriale $[Df]$. Ci serve il teorema di decomposizione delle misure di Radon.

<u>DEFINIZIONE</u> Diciamo che due misure di Radon μ e ν in $\mathbb{R}^n$ sono ortogonali se esiste un insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\nu(B) = \mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = 0$.
Scriveremo $\mu \perp \nu$.

TEOREMA Siano μ e ν due misure di Radon in $\mathbb{R}^n$. Allora esistono due misure di Radon ν_{ac} e ν_s su $\mathbb{R}^n$ tali che:

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s \,, \quad \nu_{ac} \ll \mu \quad e \quad \nu_s \perp \mu .$$

DIM. Impostiamo la dimostrazione.

Si può supporre che $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ e $\nu(\mathbb{R}^n) < \infty$.

Definiamo

$$\mathcal{E} = \{ A \subset \mathbb{R}^n : \ A \text{ di Borel},\ \mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0 \} .$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $B_k \in \mathcal{E}$ tale che

$$\nu(B_k) \leq \inf_{A \in \mathcal{E}} \nu(A) + \frac{1}{k} .$$

L'insieme

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$$

è di Borel e inoltre

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = \mu\left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) =$$

$$= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathbb{R}^n \setminus B_k) = 0$$

e dunque $B \in \mathcal{E}$.

Ora definiamo le misure di Radon

$$\nu_{ac} = \nu \llcorner B$$
$$\nu_s = \nu \llcorner (\mathbb{R}^n \setminus B)$$

dove $\llcorner$ = restrizione.

Chiaramente: $\nu_s(B) = 0$ (e $\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = 0$), e quindi $\nu_s \perp \mu$.

Proviamo che $\nu_{ac} \ll \mu$. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ (Borel) con $\mu(A) = 0$. Allora $B \setminus A \in \mathcal{E}$, infatti:

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus (B \setminus A)) = \mu(A \cup \mathbb{R}^n \setminus B) = 0,$$

Quindi:

$$\nu(B) = \min_{E \in \mathcal{E}} \nu(E) \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ \nu(B \setminus A) + \nu(B \cap A)}}{\nu(B)} \leq \nu(B \setminus A)$$

Conclusione: $\nu_{ac}(A) := \nu(B \cap A) = 0$. $\square$

DECOMPOSIZIONE DELLA MISURA [Df]

Sia $f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Abbiamo introdotto le notazioni:

$$\mu = \|Df\|, \qquad [Df] = \sigma\mu, \qquad \mu^i = \sigma^i \mu .$$

Per il teorema di decomposizione esistono delle misure μ^i_{ac} e μ^i_s (con segno) tali che

$$\mu^i = \mu^i_{ac} + \mu^i_s, \qquad \mu^i_{ac} \ll \mathcal{L}^n \text{ e } \mu^i_s \perp \mathcal{L}^n.$$

Per il Teorema di differenziazione delle misure di Radon esistono funzioni $g_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\mu^i_{ac} = g_i \mathcal{L}^n, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Introduciamo le seguenti ulteriori notazioni:

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i} := g^i$ funzioni L^1_{loc}

$Df := \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ gradiente L^1_{loc}

$[Df]_{ac} = Df\, \mathcal{L}^n$ misura vett. AC.

$[Df]_s = (\mu^1_s, \dots, \mu^n_s)$ misura vettoriale singolare

ESERCIZIO Sia $f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Provare che

$$f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n) \iff \mu^1_s = \dots = \mu^n_s = 0.$$

SEMICONTINUITÀ INFERIORE E APPROSSIMAZIONE

Una delle utilità della definizione variazionale (quella con il sup) di BV è che fornisce gratis la semicontinuità inferiore della V.Tot. in L^1_{loc}.

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f_k \in BV(A)$, $k \in \mathbb{N}$, una successione tale che $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ in $L^1_{loc}(A)$. Allora

$$\|Df\|(A) \leq \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(A).$$

DIM. Sia $\varphi \in C^1_c(A;\mathbb{R}^n)$ tale che $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Allora

$$\int_A f \operatorname{div}\varphi \, dx = \lim_{k\to\infty}(\inf) \int_A f_k \operatorname{div}\varphi \, dx$$

$$\leq \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(A).$$

Col sup si ottiene la tesi. $\square$

Se la successione approssimante è scelta in modo opportuno allora le variazioni totali convergono alla variazione totale.

<u>TEOREMA</u> Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto ed $f \in BV(A)$. Allora esiste una successione $f_k \in BV(A) \cap C^\infty(A)$, $k \in \mathbb{N}$, tale che:

1) $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ in $L^1(A)$

2) $\|Df_k\|(A) \longrightarrow \|Df\|(A)$.

DIM. Proviamo il teorema quando $A = \mathbb{R}^n$. Sia $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, un nucleo di mollificazione standard. Definiamo

$$f_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy.$$

Sappiamo che $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e che

$$f_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} f \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n).$$

Per semicontinuità

$$\|Df\|(\mathbb{R}^n) \le \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \|Df_k\|(\mathbb{R}^n).$$

Sia ora $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $\|\varphi\|_\infty \leq 1$.
Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \operatorname{div} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) \operatorname{div} \varphi(x)\, dx \right) dy$$

$$\nabla = \nabla_x$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla \eta_\varepsilon(x-y), \varphi(x) \rangle\, dx \right) dy$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\, \varphi_i(x)\, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\, \varphi(x)\, dx \right) dy$$

$(\varphi(x) = \varphi(-x))$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \operatorname{div} \varphi_\varepsilon(y)\, dy .$$

Inoltre $(\eta_\varepsilon \geq 0)$

$$|\varphi_\varepsilon(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y-x) \underbrace{|\varphi(x)|}_{\leq 1} dx \leq 1 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Segue che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\, \mathrm{div}\, \varphi(x)\, dx \leq \|Df\|(\mathbb{R}^n) \qquad \forall \varepsilon > 0$$

e col sup si ottiene $\quad \|Df_\varepsilon\|(\mathbb{R}^n) \leq \|Df\|(\mathbb{R}^n)$,

che implica

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \|Df_\varepsilon\|(\mathbb{R}^n) \leq \|Df\|(\mathbb{R}^n).$$

$\square$

<u>COMMENTO</u> Una regolarizzazione alternativa è tramite il nucleo del calore.

Quando $f \in C^1(A) \cap BV(A)$ si ha

$$\|Df\|(A) = \int_A |\nabla f(x)|\, dx .$$

Una definizione alternativa della variazione totale si ottiene per rilassamento:

$$\|Df\|(A) := \inf \left\{ \liminf_{k \to \infty} \int_A |\nabla f_k|\, dx \ : \ \begin{array}{l} f_k \in C^1(A) \\ f_k \xrightarrow[k \to \infty]{L^1_{loc}(A)} f \end{array} \right\}.$$

TEOREMA DI COMPATTEZZA

Daremo un'idea schematica della dimostrazione del seguente teorema di compattezza.

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitz. Sia $f_k \in BV(A)$, $k \in \mathbb{N}$, una successione tale che

$$M := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{L^1(A)} + \|Df_k\|(A) < \infty.$$

Allora esistono $f \in BV(A)$ ed una sottosuccessione $(f_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ tali che

$$f_{k_j} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} f \quad \text{in } L^1(A).$$

COMMENTO L'ipotesi ∂A Lipschitz può essere indebolita, ma qualche regolarità del bordo è necessaria. Per $k \geq 1$ sia

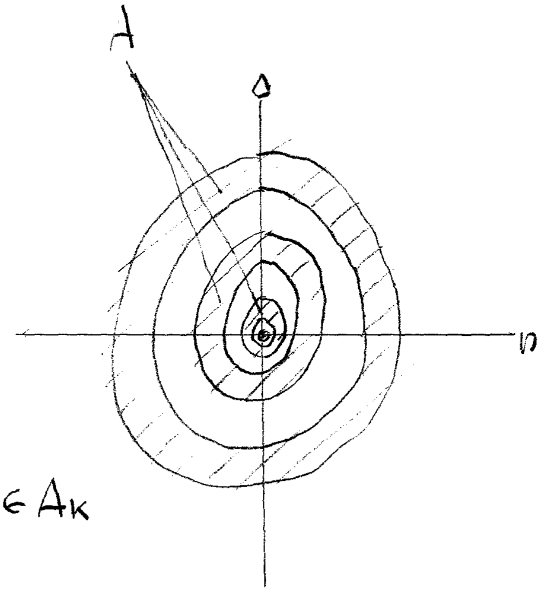
$$A_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2k+1} < |x| < \frac{1}{2k} \right\}$$

e consideriamo

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{aperto limitato.}$$

Si ha

$$C_k := \mathcal{L}^n(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 ,$$



Definiamo $f_k : A \to \mathbb{R}$

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_k} & x \in A_k \\ 0 & \text{Altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $\|f_k\|_{L^1(A)} = 1$ e $\|D' f_k\|(A) = 0 \quad \forall k$.

Tuttavia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ non ha sottosuccessioni che convergono in $L^1(A)$.

DIM. Proviamo il teorema nel seguente caso semplificato: $A = \mathbb{R}^n$ ed esiste $R>0$ tale che $\operatorname{spt}(f_k) \subset B(0,R) \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Sia $\mathcal{F} = \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$. Affermiamo che $\mathcal{F}$ è totalmente limitato in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Siccome $L^1(\mathbb{R}^n)$ è completo segue che $\overline{\mathcal{F}}$ è compatto in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Per $\varepsilon > 0$ si consideri
$$\mathcal{F}_\varepsilon = \{ f_\varepsilon \mid f \in \mathcal{F} \}$$

dove $f_\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$, η_ε nucleo di regolarizzazione.

Per ogni $f \in \mathcal{F}$ si ha:

i) $\operatorname{spt}(f_\varepsilon) \subset B(0, R+\varepsilon)$;

ii) $|f_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon^n} \|\eta\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy \leq \frac{1}{\varepsilon^n} \|\eta\|_\infty M$;

iii) $|Df_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \|D\eta\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy \leq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \|D\eta\|_\infty M$.

Quindi $\mathcal{F}_\varepsilon$ è equicontinua ed equilimitata.
Per il Teorema di Ascoli-Arzelà $\mathcal{F}_\varepsilon$ è totalmente limitata per la norma $\|\cdot\|_\infty$ della convergenza uniforme. Quindi $\mathcal{F}_\varepsilon$ è totalmente limitata per la norma $\|\cdot\|_1$.

Ora proviamo che $\mathcal{F}_\varepsilon$ è "uniformemente vicina" ad $\mathcal{F}$ nella norma $\|\cdot\|_1$.

Sia $f \in \mathcal{F}$ e supponiamo preliminarmente che $f \in C^1$.

Allora si ha:

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy - f(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) \Big(f(x-\varepsilon z) - f(x) \Big)\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x - t\varepsilon z)\, dt\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) \int_0^1 \langle Df(x - t\varepsilon z), -\varepsilon z \rangle\, dt\, dz .$$

Segue che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\, dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |Df(x - t\varepsilon z)|\, |z|\, dx\, dt\, dz$$

$$\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |Df(x)|\, dx = \varepsilon\, \| Df \| (\mathbb{R}^n) .$$

Per approssimazione la stessa stima vale quando $f \in BV(\mathbb{R}^n)$.
La conclusione è che

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \| f_\varepsilon - f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \cdot M .$$

Ora proviamo che $\mathcal{F}$ è totalmente limitato in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Fissiamo $\sigma > 0$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon M < \frac{\sigma}{3}$.

Siccome $\mathcal{F}_\varepsilon$ è totalmente limitato in $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\exists f_1, \dots, f_N \in \mathcal{F} \text{ tali che } \mathcal{F}_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{L^1(\mathbb{R}^n)}(f_{i,\varepsilon}, \sigma/3).$$

Sia $f \in \mathcal{F}$. Allora $(\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^n)})$

$$\|f - f_i\| \leq \underbrace{\|f - f_\varepsilon\|}_{<\ \sigma/3} + \underbrace{\|f_\varepsilon - f_{i,\varepsilon}\|}_{<\ \sigma/3} + \underbrace{\|f_{i,\varepsilon} - f_i\|}_{<\ \sigma/3} < \sigma.$$

su scelta di i

□

<u>ESERCIZIO</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $f \in BV(A)$ tale che $\|Df\|(A) = 0$. Provare che f è costante q.o.

<u>ESERCIZIO</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso limitato con frontiera Lipschitz. Provare che esiste una costante $0 \leq C < \infty$ tale che

$$\int_A |f(x) - f_A|\, dx \leq C\, \|Df\|(A)$$

per ogni $f \in BV(A)$.

Traces and Extensions

Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be open and let $f, g \in BV(A)$. The function

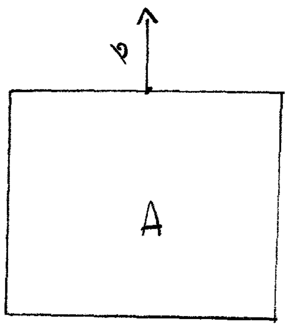
$$d(f,g) = \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \big|\,\|Df\|(A) - \|Dg\|(A)\,\big|$$

is a distance on $BV(A)$. The convergence in d is called "strict convergence".

Theorem 1. (Traces) Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open set with Lipschitz boundary. There is a linear and continuous (in the strict convergence) mapping $T : BV(A) \longrightarrow L^1(\partial A; H^{n-1})$ such that

$$\int_A f \operatorname{div} \varphi \, dx = -\int_A \varphi \cdot d[Df] + \int_{\partial A} (\varphi \cdot \nu)\, Tf \, dH^{n-1}$$

for all $f \in BV(A)$ and for all $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.
Here, ν is the exterior normal to ∂A, that is defined H^{n-1}-a.e. on ∂A.



Definition

The function $Tf : \partial A \longrightarrow [-\infty, \infty]$, $Tf \in L^1(\partial A; H^{n-1})$, is called the trace of $f \in BV(A)$ on ∂A.

Theorem 2 $A \subset \mathbb{R}^n$ open bounded, ∂A Lipschitz. Let $f \in BV(A)$.
Then for H^{n-1}-a.e. $x \in \partial A$ we have

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(A \cap B_r(x))} \int_{A \cap B_r(x)} |f(y) - Tf(x)| \, dy = 0 .$$

In particular,

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(A \cap B_r(x))} \int_{A \cap B_r(x)} f(y) \, dy = Tf(x) .$$

Comment If $f \in BV(A) \cap C(\bar{A})$ then we have
$$Tf(x) = f(x) \quad \text{for } H^{n-1}\text{-a.e. } x \in \partial A .$$

Theorem 3 $A \subset \mathbb{R}^n$ open bounded, ∂A Lipschitz. Let $f_1 \in BV(A)$
let $f_2 \in BV(\mathbb{R}^n \setminus \bar{A})$. Define $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A \\ f_2(x) & x \in \mathbb{R}^n \setminus A , \end{cases}$$

Then $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ and

$$\|Df\|(\mathbb{R}^n) = \|Df_1\|(A) + \|Df_2\|(\mathbb{R}^n \setminus A) + \\ + \int_{\partial A} |Tf_1 - Tf_2| \, dH^{n-1} .$$

For proofs see [EG] pp. 176 - 184.

Fine Properties of BV functions

Definition Let $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be $\mathcal{L}^n$-measurable. Define for any $x \in \mathbb{R}^n$

$$\mu(x) = \operatorname{ap}\limsup_{y \to x} f(y) = \inf \left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f > t\} \cap B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} = 0 \right\},$$

$$\lambda(x) = \operatorname{ap}\liminf_{y \to x} f(y) = \sup \left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{f < t\} \cap B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} = 0 \right\}.$$

Theorem 1 Let $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be $\mathcal{L}^n$-measurable. Then

$$\lambda(x) = \mu(x) \in \mathbb{R} \quad \text{for } \mathcal{L}^n\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Moreover, λ and μ are Borel measurable.

Definition Define the "approximate discontinuity set" of a measurable function $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$J = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ \lambda(x) < \mu(x) \}.$$

("Jump set").

By Theorem 1 we have $\mathcal{L}^n(J) = 0$.

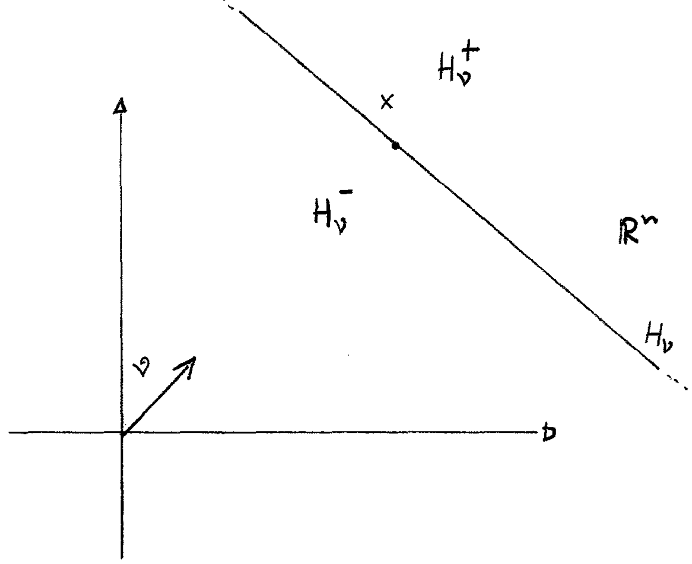
Theorem 2 Let $f \in BV(\mathbb{R}^n)$. Then we have

$$-\infty < \lambda(x) \leq \mu(x) < \infty \quad \text{for } H^{n-1}\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}^n$$

Comment: The function $F(x) = \dfrac{\lambda(x) + \mu(x)}{2}$ is finite H^{n-1}-a.e. on $\mathbb{R}^n$, for a function $f \in BV(\mathbb{R}^n)$.

Definition For $x \in \mathbb{R}^n$ and $\nu \in \mathbb{R}^n$ with $|\nu| = 1$ let

$$H_\nu = \{ y \in \mathbb{R}^n ; \ (y - x) \cdot \nu = 0 \},$$
$$H_\nu^+ = \{ y \in \mathbb{R}^n ; \ (y - x) \cdot \nu \geq 0 \},$$
$$H_\nu^- = \{ y \in \mathbb{R}^n ; \ (y - x) \cdot \nu \leq 0 \}.$$



Theorem 3 Let $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ and let $F(x) = \left(\lambda(x) + \mu(x)\right)/2$.

Then we have :

(1) $$\lim_{r \downarrow 0} \fint_{B_r(x)} |f(y) - F(x)| \, dy = 0 \quad \text{for } \mathcal{H}^{n-1}\text{- a.e. } x \in \mathbb{R}^n \setminus J ;$$

(2) For $\mathcal{H}^{n-1}$- a.e. $x \in J$ there exists $\nu = \nu(x) \in \mathbb{R}^n$, $|\nu| = 1$, such that

$$\lim_{r \downarrow 0} \fint_{B_r(x) \cap H_\nu^+} |f(y) - \mu(x)| \, dy = 0,$$

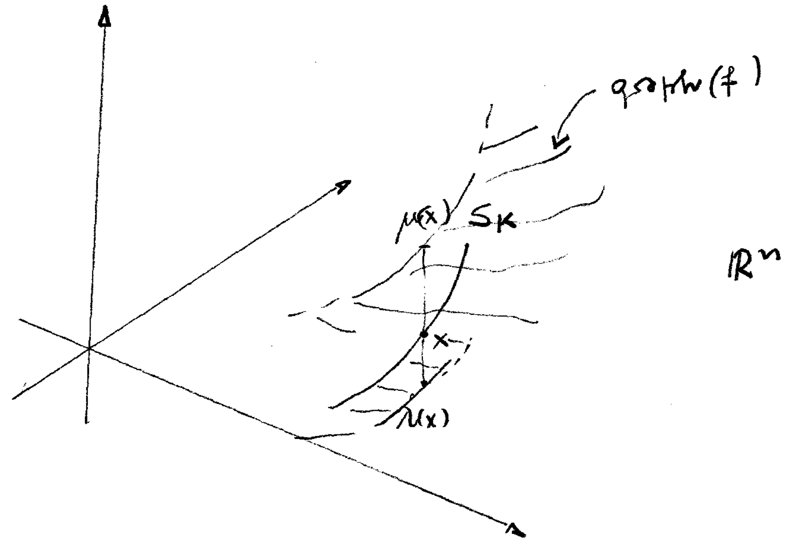
$$\lim_{r \downarrow 0} \fint_{B_r(x) \cap H_\nu^-} |f(y) - \lambda(x)| \, dy = 0.$$

Theorem 4 Let $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ and let J be the approximate discontinuity set of f. There exist countably many C^1-hypersurfaces $S_K \subset \mathbb{R}^n$, $K \in \mathbb{N}$, such that

$$H^{n-1}\left(J \setminus \bigcup_{K=1}^{\infty} S_K\right) = 0 .$$

Comment: J is H^{n-1}-rectifiable.

Picture:



Definition Let $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ and let $\mu = \|Df\|$ be the total variation measure of f. We know that

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s \qquad \text{with } \mu_{ac} \ll \mathcal{L}^n \text{ and } \mu_s \perp \mathcal{L}^n.$$

We let

$$\mu_j = \mu_s \llcorner J \qquad \text{"Jump part of } \mu_s\text{"},$$

$$\mu_c = \mu_s \llcorner (\mathbb{R}^n / J) \qquad \text{"Cantor part of } \mu_s\text{"}.$$

<u>Theorem 5</u> Let $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ and let $\mu = \|Df\|$ be the total variation measure. Then we have

$$\mu = \underbrace{|\nabla f| \mathcal{L}^n}_{\text{Absolutely continuous Part}} + \underbrace{|\lambda(x) - \mu(x)| \mathcal{H}^{n-1} \llcorner J}_{\text{Jump Part}} + \underbrace{\mu_c}_{\text{Cantor Part}} .$$

Here we have $|\nabla f(x)| = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))}$, the density of the absolutely continuous part. Moreover

$$\int_J |\lambda(x) - \mu(x)| \, d\mathcal{H}^{n-1} < \infty .$$

<u>Definition</u> We say that $f \in SBV(\mathbb{R}^n)$, special function of bounded variation, if $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ and $\mu_c = 0$.

FUNZIONALE DI MUMFORD-SHAH

Sia $A = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ e fissiamo una funzione $g : A \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ misurabile.

La funzione g è la "scala di grigio" o "immagine".

Introduciamo questo insieme

$$X = \{ (u, K) \, ; \; K \subset \bar{A} \text{ compatto}, \; u \in W^{1,2}_{loc}(A \setminus K) \},$$

e consideriamo il funzionale di Mumford-Shah

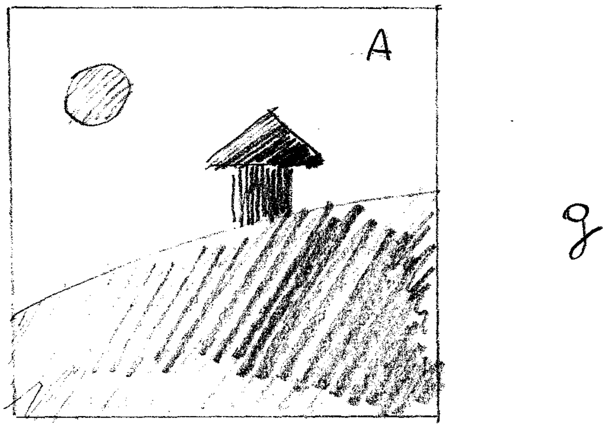
$F : X \to [0, \infty)$

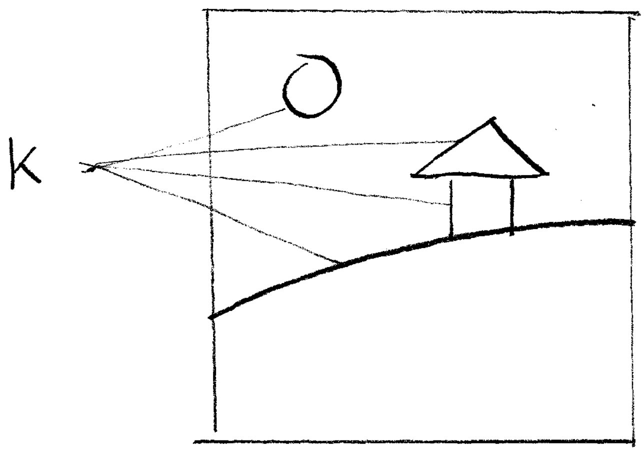
$$F(u,K) = \underbrace{\int_{A\setminus K} |\nabla u|^2 dx}_{\text{"Energia di sfumatura"}} + \underbrace{\int_{A \setminus K} |u - g|^2 dx}_{\text{distanza } L^2 \text{ dall'immagine}} + \underbrace{H^1(K)}_{\text{Lunghezza totale dei contorni}}$$

Consideriamo il problema di minimo

$$\min \{ F(u,K) \; : \; (u,K) \in X \}.$$

Nell'immagine $g \in L^\infty(A)$ vogliamo selezionare un insieme di "contorni" K dove "g è discontinua" e approssimare g su $A \setminus K$ in modo regolare (con "energia" piccola)





Se $(u, K) \in X$ è un minimo allora u risolve in senso debole

$$\Delta u = u - g \qquad \text{in } A \setminus K$$

Per troncamento si può supporre che $\|u\|_\infty \leq \|g\|_\infty \leq 1$.

Dalla teoria della regolarità per le Equazioni Differenziali si deduce che $u \in C^1(A \setminus K)$.

In modo formale si avrebbe anche la condizione necessaria

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{su } \partial A \text{ e su } K$$

con ν "normale".

<u>CONGETTURA</u> Se (u, K) è un minimo per F allora K è un unione localmente finita di curve $C^{1,1}$.

Questa è la congettura di Mumford - Shah.

L'esistenza di minimi si può dimostrare usando la teoria delle funzioni $SBV(A)$.

Definiamo $G : SBV(A) \longrightarrow [0, \infty]$

$$G(u) = \int_A |\nabla u|^2 \, dx + \int_A |u - g|^2 dx + H^1(S_u)$$

dove $S_u \subset A$ è l'insieme di salto di u

e $|\nabla u| \mathcal{L}^n$ è la parte assolutamente continua

della derivata $\mu = [Du]$.

L'esistenza di minimi si basa sul seguente

teorema di compattezza di Luigi Ambrosio:

TEOREMA Sia $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di

funzioni in $SBV(A)$ tali che:

i) $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{L^\infty(A)} < \infty$

ii) $\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_A |\nabla u_k|^2 dx + H^1(S_{u_k}) < \infty$

Allora esiste una sottosuccessione $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ ed

esiste una funzione $u \in SBV(A)$ tali che:

1) $u_{k_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} u$ in $L^1(A)$

2) $[Du_{k_j}] \longrightarrow [Du]$ nel senso debole* delle misure;

ed inoltre

A) $\int_A |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{j \to \infty} \int_A |\nabla u_{k_j}|^2 dx$,

B) $H^1(S_u) \leq \liminf_{j \to \infty} H^1(S_{u_{k_j}})$.

Dal teorema di compattezza/semicontinuità si ottiene l'esistenza di un minimo u.

L'insieme S_u non è chiuso. Ma $K := \overline{S_u}$ è chiuso e inoltre $\mathcal{H}^1(\overline{S_u} \setminus S_u) = 0$. (difficile!)

Sappiamo che $\overline{S_u}$ è rettificabile. Non sappiamo ancora che $K = \overline{S_u}$ è unione localmente finita di curve $C^{1,1}$.

Su $A \setminus K$ la funzione u è di classe C^1.

Dunque la coppia $(u|_{A \setminus K}, K)$ fornisce un minimo per il funzionale originale F.

$\square$

INSIEMI DI PERIMETRO FINITO IN $\mathbb{R}^n$

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathcal{L}^n$-misurabile.

<u>Definizione</u> Diciamo che E è un insieme di perimetro localmente in un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ se $\chi_E \in BV_{loc}(A)$ owero se per ogni aperto $A' \subset\subset A$ si ha

$$\|\partial E\|(A') = \sup\left\{ \int_E \operatorname{div}\varphi\, dx \; : \; \varphi \in C_c^1(A'; \mathbb{R}^n), \; \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\} < \infty.$$

Diciamo che E ha perimetro finito in A se $\|\partial E\|(A) < \infty$.

<u>Notazioni</u>

- $P(E; A) = \|\partial E\|(A)$ perimetro di E in A.
- $P(E) = P(E; \mathbb{R}^n)$ perimetro di E.
- Siano μ e $\sigma : A \to \mathbb{R}^n$, $|\sigma| = 1$, la misura e il campo vettoriale dati dal Teorema di Riesz.

Allora è valido "per costruzione" il Teorema della divergenza:

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \sigma \, d\mu$$

$\mathbb{R}^n \updownarrow \partial E$ frontiera topologica

per ogni $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, se E ha perimetro (localmente) finito in $\mathbb{R}^n$.

Chiameremo

$\|\partial E\| = \mu$ "misura perimetro di E"

$\nu_E := -\sigma$ "measure theoretic exterior (unit) normal"

<u>Osservazioni</u>

(1) Gli insiemi E ed $\mathbb{R}^n \setminus E$ hanno lo stesso perimetro. Questo segue dal fatto che per ogni $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} \varphi \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus E} \operatorname{div} \varphi \, dx.$$

(2) La misura $\mu = \|\partial E\|$ è concentrata sulla frontiera topologica di E. Infatti:

$$\varphi \in C^1_0(\mathrm{int}(E); \mathbb{R}^n) \implies \int_E \operatorname{div}\varphi \, dx = 0$$

e la stessa cosa vale per $\mathrm{ext}(E)$,

<u>ESEMPIO 1</u> Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato con frontiera regolare (C^∞, C^1 oppure Lipschitz). Allora, per il Teorema della divergenza si ha

$$\int_E \operatorname{div}\varphi \, dx = \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu_E \, dH^{n-1}$$

per ogni $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, dove ν_E è la normale esterna, Siccome

$$\int_{\partial E} \varphi \cdot \nu_E \, dH^{n-1} \leq \int_{\partial E} \underbrace{|\varphi|}_{\leq 1} \overbrace{|\nu_E|}^{=1} \, dH^{n-1} \leq H^{n-1}(\partial E)$$

deduciamo che

$$P(E) = \|\partial E\|(\mathbb{R}^n) \leq H^{n-1}(\partial E).$$

Se $\partial E \in C^\infty$ possiamo definire $\varphi = \nu_E$ su ∂E e poi estendere a $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ mantenendo $|\varphi| \leq 1$. Con tale scelta si vede che $P(E) = H^{n-1}(\partial E)$.

Quando invece è solamente DE Lipschitz si può procedere con una approssimazione e ottenere lo stesso risultato. I dettagli sono omessi (Teorema di Lusin e teorema di Tietze-Urysohn).

ESEMPIO 2 Sia $\mathbb{Q}^n = \{ q_i \in \mathbb{Q}^n ; i \in \mathbb{N} \}$ una enumerazione dei razionali. Siano $r_i > 0$ raggi da fissare in seguito. I seguenti insiemi sono aperti di $\mathbb{R}^n$:

$$E_k = \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_i}(q_i),$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(q_i).$$

Allora

$$\mathcal{L}^n(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{r_i}(q_i)) = \omega_n \sum_{i=1}^{\infty} r_i^n$$

con $\omega_n = \mathcal{L}^n(B_1)$. Fissato $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere i raggi in modo tale che

$$\omega_n \sum_{i=1}^{\infty} r_i^n < \varepsilon.$$

Su ciascun E_k possiamo applicare il Teorema della divergenza, con $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ troviamo

$$\int_{E_k} \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\partial E_k} \varphi \cdot \nu_{E_k} \, dH^{n-1} \leq H^{n-1}(\partial E_k)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} H^{n-1}(\partial B_{r_i}(q_i)) =$$

$$= n\omega_n \sum_{i=1}^{k} r_i^{n-1} .$$

Di conseguenza si ha

$$P(E_k) \leq n\omega_n \sum_{i=1}^{K} r_i^{n-1} < n\omega_n \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{n-1}$$

Possiamo scegliere i raggi $r_i > 0$ anche in modo tale che

$$n\omega_n \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{n-1} < \varepsilon .$$

Siccome

$$\chi_{E_k} \xrightarrow[K \to \infty]{} \chi_E \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n)$$

dalla semicontinuità inferiore del perimetro segue che:

$$P(E) \leq \liminf_{K \to \infty} P(E_K) \leq \varepsilon .$$

Dunque abbiamo costruito un insieme aperto $E \subset \mathbb{R}^n$ con queste proprietà:

i) $\overline{E} = \mathbb{R}^n$, dal momento che l'insieme dei centri $\{q_i \,;\, i \in \mathbb{N}\}$ è denso.

ii) $\mathcal{L}^n(E) \leq \varepsilon$;

iii) $P(E) \leq \varepsilon$;

iv) $\mathcal{L}^n(\partial E) = \mathcal{L}^n(\overline{E} \setminus E) = \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) = \infty$.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI PLATEAU IN FORMA DEBOLE

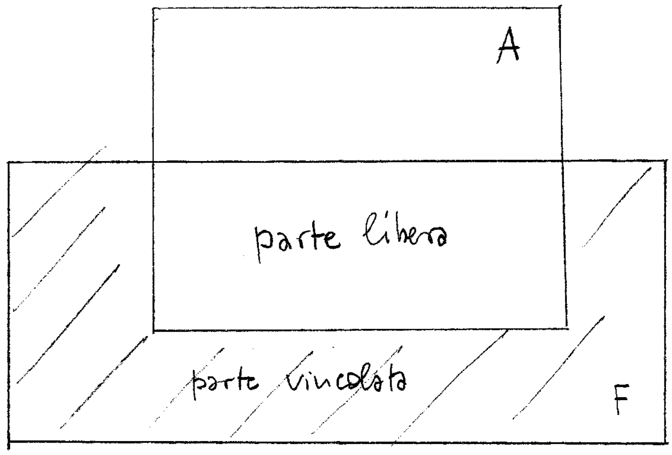
Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato, sia $F \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile tale che $P(F) < \infty$. Consideriamo la famiglia di insiemi

$$\mathcal{A}_F = \{ E \subset \mathbb{R}^n \,;\, E \text{ misurabile con } \chi_E = \chi_F \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus A \text{ q.o.} \}$$

Studiamo il problema di minimo

$$(*) \qquad \min \{ P(E) \;;\; E \in \mathcal{A}_F \}.$$

Proviamo che il minimo viene raggiunto.



Senza perdere di generalità possiamo supporre che F sia limitato.

Sia $E_k \in \mathcal{A}_F$ una successione minimizzante:

$$\lim_{k \to \infty} P(E_k) = \inf \{ P(E) : E \in \mathcal{A}_F \} := L$$

Dunque:

1) $\sup_{k \in \mathbb{N}} P(E_k) < \infty$;

2) $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n(E_k) < \infty$;

3) Esiste $R > 0$ tale che $E_k \subset B_R \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Per il Teorema di compattezza esiste una sottosuccessione - chiamata ancora $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ - tale che

$$\chi_{E_k} \xrightarrow[k\to\infty]{L^1(\mathbb{R}^n)} f \in BV(\mathbb{R}^n).$$

A meno di una ulteriore sottosuccessione $\chi_{E_k} \to f$ q.o.
e quindi $f(x) \in \{0,1\}$ per $\mathcal{L}^n$-q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.
Quindi si ha $f = \chi_E$ per $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile.
In effetti $E \in \mathcal{A}_F$.
Per semicontinuità inferiore

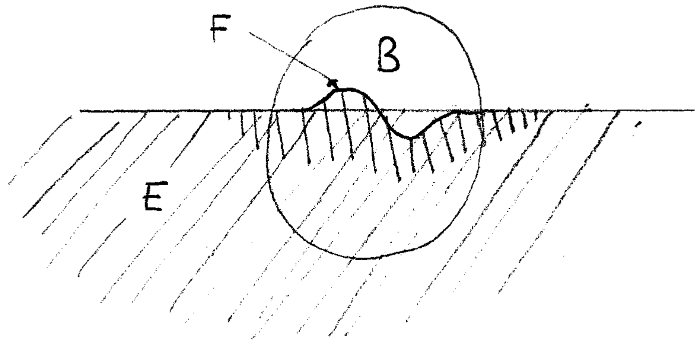
$$P(E) \leq \liminf_{k\to\infty} P(E_k) = L$$

e quindi E è un minimo del problema, $P(E) = L$.

I minimi del problema (*) sono in particolare "minimi rispetto a variazioni compatte in A".

<u>DEFINIZIONE</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Un insieme $E \subset A$ con perimetro localmente finito in A si dice minimo per variazioni compatte se per ogni aperto $B \subset\subset A$ e per ogni $F \subset A$ si ha:

$$E \Delta F := E\setminus F \cup F\setminus E \implies P(E,B) \leq P(F,B).$$



PROBLEMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitziana. Sia $T: BV(A) \to L^1(\partial A; \mathcal{H}^{n-1})$ l'operatore di traccia. Sia $B \subset \partial A$ un insieme di Borel e consideriamo la famiglia

$$\mathcal{A}_B = \{ E \subset A ; \; P(E;A) < \infty \text{ e } T(\chi_E) = \chi_B \} .$$

Domanda: si riesce a provare l'esistenza del minimo

$$\min \{ P(E;A) : E \in \mathcal{A}_B \} \quad ?$$

ESERCIZIO Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato con frontiera Lipschitz, sia $m \in \mathbb{R}$ tale che $0 < m < \mathcal{L}^n(A)$, sia poi

$$\mathcal{A}_m = \{ E \subset A : E \; \mathcal{L}^n\text{-misurabile con } \mathcal{L}^n(E) = m \} .$$

Provare che il minimo

(D) $$\min \{ P(E;A) : E \in \mathcal{A}_m \}$$

viene raggiunto.

PROBLEMA Se A è convesso, è vero che il minimo E di (D) è un insieme convesso?

Non si sa.

FRONTIERA RIDOTTA

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme con perimetro localmente finito. Sia $\mu = \|\partial E\| = \|D\chi_E\|$ la misura perimetro e sia $\nu_E = -\sigma$ la normale esterna.

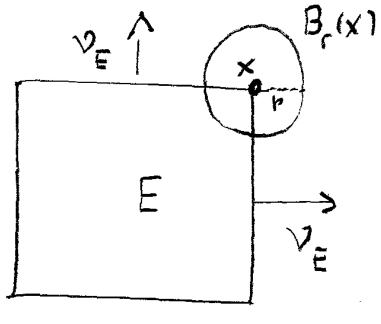
<u>Definizione</u> La frontiera ridotta $\partial^* E \subset \mathbb{R}^n$ di E è l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che:

(1) $\mu(B_r(x)) > 0 \quad \forall r > 0$;

(2) $\displaystyle \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \nu_E(y)\, d\mu = \nu_E(x)$;

(3) $|\nu_E(x)| = 1$.

<u>Esempio</u> Consideriamo il quadrato $E = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Il punto $x = (1,1) \in \partial E$ non è nella frontiera ridotta;



$$\fint_{B_r(x)} \nu_E \, d\mu = \frac{1}{2r} \left\{ (1,0)\, r + (0,1)\, r \right\}$$

$$= \frac{(1,1)}{2} \qquad \forall r > 0,$$

ma $\left| \dfrac{(1,1)}{2} \right| \neq 1$.

Osservazioni

(1) Si ha $\partial^* E \subset \partial E$. Infatti se $x \notin \partial E$ allora esiste $r>0$ tale che $B_r(x) \subset \text{int}(E) \cup \text{ext}(E)$ e quindi $\mu(B_r(x)) = 0$.

(2) Si ha $\mu(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) = 0$. Infatti:
L'insieme $N_1 = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ \text{Esiste } r>0 \text{ tale che } \mu(B_r(x)) = 0\}$ ha misura nulla.
L'insieme N_2 dei punti dove non vale

$$\lim_{r \downarrow 0} \fint_{B_r(x)} \nu_E \, d\mu = \nu_E(x)$$

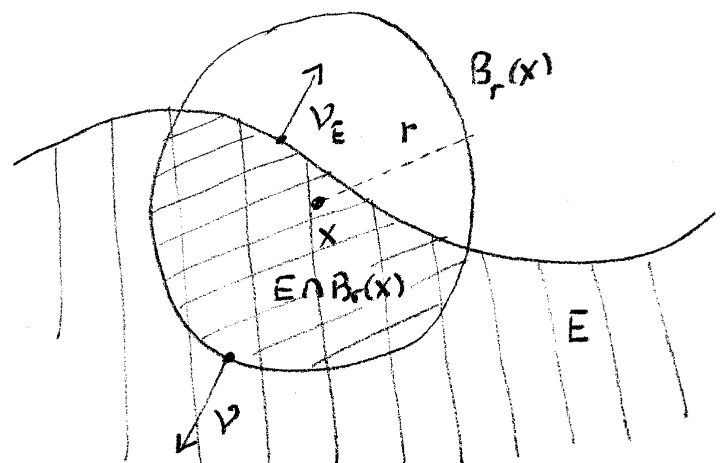
ha misura nulla per il Teorema di differenziazione di Besicovitch-Lebesgue.
L'insieme N_3 dei punti dove $|\nu_E(x)| \neq 1$ ha misura μ nulla.
Dunque $\mu(N_1 \cup N_2 \cup N_3) = 0$.

Il prossimo lemma è una regola per la derivata del prodotto $\chi_{E \cap B_r} = \chi_E \cdot \chi_{B_r}$.

Lemma 1 Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ di perimetro localmente finito, $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Allora per $\mathcal{L}^1$-q.o. $r>0$ si ha:

$$\int_{E\cap B_r(x)} \operatorname{div}\varphi(y)\,dy = \int_{\underset{\text{palla chiusa}}{B_r(x)}} \varphi\cdot\nu_E\,d\mu + \int_{E\cap\partial B_r(x)} \varphi\cdot\nu\,dH^{n-1},$$

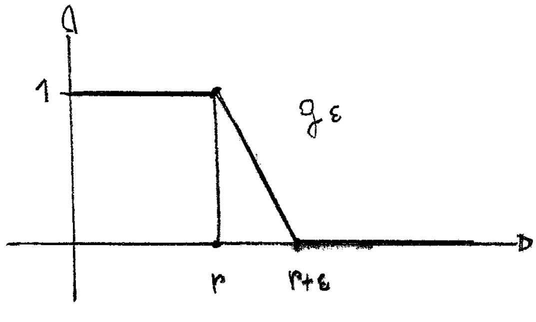
dove ν è la normale esterna a $\partial B_r(x)$.



Dim. Per $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\,\varphi\cdot\nu_E\,d\mu = \int_E \operatorname{div}(h\varphi)\,dy = \int_E \nabla h\cdot\varphi\,dy + \int_E h\operatorname{div}(\varphi)\,dy.$$

Per $\varepsilon>0$ definiamo $g_\varepsilon : [0,\infty) \to [0,1]$ come in figura



Per approssimazione la formula precedente vale anche per $h_\varepsilon(y) = g_\varepsilon(|y-x|)$, che verifica

$$\nabla h_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y-x|<r \text{ o } |y-x|>r+\varepsilon, \\ -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{y-x}{|y-x|} & \text{se } r<|y-x|<r+\varepsilon. \end{cases}$$

Sostituendo sopra si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_\varepsilon\, \varphi\cdot\nu_E\, d\mu = -\int_{\{r<|y-x|<r+\varepsilon\}\cap E} \frac{1}{\varepsilon}\frac{y-x}{|y-x|}\cdot\varphi\, dy + \int_E h_\varepsilon \operatorname{div}\varphi\, dy,$$

e con $\varepsilon\downarrow 0$ si trova

$$\int_{B_r(x)} \varphi\cdot\nu_E\, d\mu = -\int_{\partial B_r(x)\cap E} \nu\cdot\varphi\, dH^{n-1} + \int_{B_r(x)\cap E} \operatorname{div}\varphi\, dy.$$

palla chiusa

□

Abbiamo usato il seguente lemma:

<u>Lemma 2</u> Sia $g\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Allora la funzione

$$r \longrightarrow \phi(r) = \int_{\partial B_r} g(x)\, dH^{n-1}, \quad r\geq 0,$$

è localmente integrabile. Inoltre, per ogni $r>0$

si ha la formula di integrazione in coordinate sferiche

$$\psi(r) := \int_{B_r} g(x)\,dx = \int_0^r \int_{\partial B_s} g(x)\,dH^{n-1}\,ds,$$

dove ψ è assolutamente continua con

$$\psi'(r) = \int_{\partial B_r} g(x)\,dH^{n-1}$$

per q.o. $r>0$.

<u>Lemma 3</u> Esistono costanti dimensionali $c_1, c_2 > 0$ tali che per ogni punto $x \in \partial^* E$ si ha:

(1) $$\liminf_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^n} \mathcal{L}^n(E \cap B_r(x)) \geq c_1 > 0;$$

(2) $$\liminf_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^n} \mathcal{L}^n(B_r(x) \setminus E) \geq c_2 > 0.$$

Dim. Sia $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $|\varphi| \leq 1$. Per il Lemma 1

$$\int_{E \cap B_r(x)} \operatorname{div} \varphi\,dy = \int_{B_r(x)} \varphi \cdot \nu_E\,d\mu + \int_{E \cap \partial B_r(x)} \varphi \cdot \nu\,dH^{n-1}$$

e quindi

(*) $$P(E \cap B_r(x)) \leq P(E; B_r(x)) + H^{n-1}(\partial B_r(x) \cap E).$$

Scegliendo φ tale che $\varphi \equiv \nu_E(x)$ su tutta $B_r(x)$ si trova anche l'identità:

$$0 = \nu_E(x) \cdot \int_{B_r(x)} \nu_E(y)\, d\mu + \nu_E(x) \cdot \int_{E \cap \partial B_r(x)} \nu \, dH^{n-1}.$$

Usando ora il fatto che $x \in \partial^* E$ si ottiene

$$1 = |\nu_E(x)|^2 = \nu_E(x) \cdot \lim_{r \downarrow 0} \fint_{B_r(x)} \nu_E(y)\, dy$$

$$= - \nu_E(x) \cdot \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{E \cap \partial B_r(x)} \nu \, dH^{n-1}.$$

Deduciamo che esiste $r_0 = r_0(x) > 0$ tale che per $0 < r < r_0$

$$\frac{1}{2} \leq \left| \nu_E(x) \cdot \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{E \cap \partial B_r(x)} \nu \, dH^{n-1} \right| \leq \frac{H^{n-1}(E \cap \partial B_r(x))}{\mu(B_r(x))}$$

e ripartendo dalla $*)$ si trova

$$P(E \cap B_r(x)) \leq 3 \; H^{n-1}(E \cap \partial B_r(x))$$

che vale per q.o. $0 < r < r_0$. (Lemma 1 -> q.o.)

Consideriamo ora la funzione $\psi(r) = \mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))$.
Per il Lemma 2 abbiamo

$$\psi(r) = \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x) \cap E} dH^{n-1} \right) ds = \int_0^r H^{n-1}(\partial B_s(x) \cap E)\, ds$$

e inoltre

$$\psi'(r) = H^{n-1}(\partial B_r(x) \cap E) \qquad q.o. \ r>0.$$

Usando la disuguaglianza isoperimetrica, che proveremo prossimamente, si ottiene

$$\psi(r)^{\frac{n-1}{n}} = \mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))^{\frac{n-1}{n}} \leq c_n \, P(E \cap B_r(x))$$

$$\leq 3 c_n \, H^{n-1}(E \cap \partial B_r(x)) = 3 c_n \, \psi'(r)$$

per q.o. $r>0$. La disuguaglianza può essere riscritta nel seguente modo

$$n \left(\psi(r)^{\frac{1}{n}} \right)' \geq \frac{1}{3 c_n}$$

che fornisce

$$\psi(r)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{3 c_n n} r \quad , \quad r \geq 0 ,$$

ovvero $\quad \mathcal{L}^n(E \cap B_r(x)) \geq \dfrac{1}{(3 n c_n)^n} r^n, \qquad 0 < r < r_0 .$

$\square$

Lemma 4 Esistono costanti dimensionali $C_3, C_4, C_4 > 0$ tali che per ogni $x \in \partial^* E$ si ha:

1) $\liminf\limits_{r \downarrow 0} \dfrac{1}{r^{n-1}} P(E; B_r(x)) \geq C_3 > 0$;

2) $\limsup\limits_{r \downarrow 0} \dfrac{1}{r^{n-1}} P(E; B_r(x)) \leq C_4 < \infty$;

3) $\limsup\limits_{r \downarrow 0} \dfrac{1}{r^{n-1}} P(E \cap B_r(x)) \leq C_5 < \infty$.

Dim. 1) Segue dalla disuguaglianza isoperimetrica relativa alle palle. Esiste una costante $C > 0$ tale che

$$P(E; B_r(x)) \geq C \min\Big\{ \underbrace{\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))}_{\geq \, C_1 r^n}, \underbrace{\mathcal{L}^n(B_r(x) \setminus E)}_{\geq \, C_2 r^n} \Big\}^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\geq C_3 r^{n-1}.$$

2) $P(E; B_r(x)) \leq \cancel{3}^{\,2} H^{n-1}(\partial B_r(x) \cap E) \leq \cancel{3}^{\,2} n \omega_n r^{n-1}$.

3) $P(E \cap B_r(x)) \leq P(E; B_r(x)) + H^{n-1}(\partial B_r(x) \cap E)$.

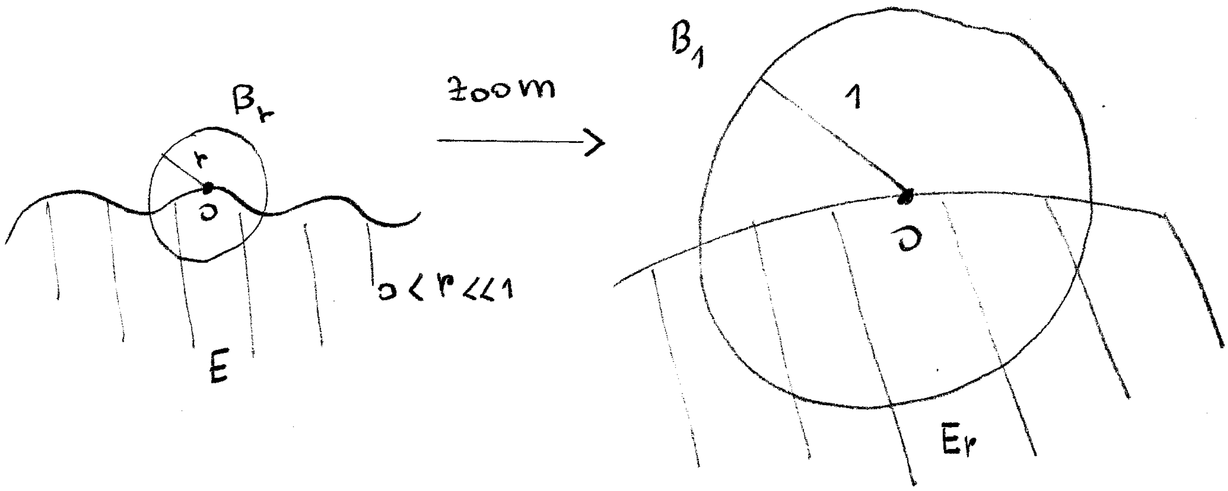
$\square$

BLOW-UP DELLA FRONTIERA RIDOTTA

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme con perimetro localmente finito e sia $x \in \partial^* E$. Senza perdere di generalità supponiamo che $x = 0$.

Per $r > 0$ definiamo l'insieme dilatato

$$E_r = \frac{1}{r} E = \{ x \in \mathbb{R}^n \; ; \; rx \in E \}.$$



Supponiamo $\nu_E(0) = e_n = (0, \dots, 0, 1)$.
Definiamo:

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_n = 0 \} = \{ x_n = 0 \},$$

$$H^+ = \{ x_n \geq 0 \},$$

$$H^- = \{ x_n \leq 0 \}.$$

TEOREMA Se $0 \in \partial^* E$ con $\nu_E(0) = e_n$, allora

$$\chi_{E_r} \xrightarrow[r \downarrow 0]{L^1_{loc}} \chi_{H^-}.$$

DIM. Proveremo che $\forall\, r_k \downarrow 0$ esiste $(r_{k_j'})_{j\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\chi_{E_{r_{k_j'}}} \xrightarrow[j\to\infty]{} \chi_{H^-} \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Fissiamo $L>0$ e sia $D_r = E_r \cap B_L$. Allora:

$$\mathcal{L}^n(D_r) \leq \mathcal{L}^n(B_L) < \infty \qquad \forall\, r>0.$$

Inoltre si ha

$$P(D_r) = \frac{1}{r^{n-1}}\, P(E \cap B_{Lr}) \underset{\text{Lemma 4, parte 3)}}{\overset{\forall r>0 \text{ piccolo}}{\leq}} C < \infty .$$

Quindi esiste, per compattezza, $s_j = r_{k_j}$ tale che posto $E_j' = E_{s_j}$ si ha

$$\chi_{E_j'} \xrightarrow[j\to\infty]{L^1_{loc}} \chi_F$$

per un insieme $F \subset \mathbb{R}^n$ con perimetro localmente finito. Per il Teorema di Gauss-Green

$$\int_F \operatorname{div}\varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\cdot\nu_F \, d\mu_F \qquad \forall\, \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$$

dove ν_F e μ_F sono date dal Teorema di Riesz.

Affermiamo che $\nu_F = (0, \dots, 0, 1)$ μ_F-q.o. su $\mathbb{R}^n$.

In primo luogo:

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_{E_j} \operatorname{div}\varphi \, dx & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_{E_j} \, d\mu_{E_j} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle j \to \infty} & \Longrightarrow \; (*) & \Big\downarrow \qquad \forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \\ \displaystyle\int_F \operatorname{div}\varphi \, dx & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_F \, d\mu_F \end{array}$$

Ovvero $\nu_j \mu_{E_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} \nu_F \mu_F$ nel senso debole-$*$ delle misure di Radon.

Per q.o. $L > 0$ si ha $\mu_F(\partial B_L) = 0$ (Esercizio).

La convergenza in $(*)$ implica per tali L

$$(**) \qquad \lim_{j \to \infty} \int_{B_L} \nu_{E_j} \, d\mu_{E_j} = \int_{B_L} \nu_F \, d\mu_F .$$

Osserviamo che:

- $\mu_{E_j}(B_L) = P(E_j; B_L) = \dfrac{1}{s_j^{n-1}} P(E; B_{Ls_j})$;

- $\displaystyle\int_{B_L} \nu_{E_j} \, d\mu_{E_j} = \frac{1}{s_j^{n-1}} \int_{B_{Ls_j}} \nu_E \, d\mu_E$.

Deduciamo che

$$\lim_{j \to \infty} \fint_{B_L} \nu_{E_j'} \, d\mu_{E_j'} = \lim_{j \to \infty} \fint_{B_{Ls_j}} \nu_E \, d\mu_E$$

$$= \nu_E(0) = (0, \dots, 0, 1),$$

e quindi

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{\mu_{E_j'}(B_L)} \int_{B_L} \nu_E(0) \cdot \nu_{E_j'} \, d\mu_{E_j'} = 1.$$

Per semicontinuità inferiore:

$$P(F; B_L) \leq \liminf_{j \to \infty} P(E_j'; B_L)$$

$$\leq \liminf_{j \to \infty} \int_{B_L} \nu_E(0) \cdot \nu_{E_j'} \, d\mu_{E_j'}$$

$$\overset{(**)}{=} \int_{B_L} \nu_E(0) \cdot \nu_F \, d\mu_F$$

$$\leq \mu_F(B_L) = P(F; B_L).$$

Quindi sopra si hanno tutti "=" ed in particolare

$$\nu_F = \nu_E(0) = (0, \dots, 0, 1) \quad \mu_F\text{-q.o.}$$

Ed inoltre $P(F; B_L) = \liminf_{j\to\infty} P(E_j; B_L) \geq C > 0$
per il Lemma 4 parte 1).

Per $\varepsilon > 0$ definiamo $f_\varepsilon = (\chi_F)_\varepsilon$ con nucleo di regolarizzazione standard. Per $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_F \operatorname{div}(\varphi_\varepsilon)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \underset{\substack{(0,\dots,0,1)\\ \text{q.o.}}}{\underset{\parallel}{\nu_F}} \cdot \varphi_\varepsilon \, d\mu_F .$$

Deduciamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0 \qquad i = 1, \dots, n-1$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon \, d\mu_F$$

per ogni $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Questo implica che

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^n \quad \text{per } i = 1, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_n} \leq 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^n.$$

Siccome $f_\varepsilon \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\longrightarrow} \chi_F$ in L^1_{loc}, deduciamo che l'insieme F è della forma $F = \{x_n \leq \gamma\}$ per qualche $\gamma \in \mathbb{R}$. Siccome $P(F; B_1) > 0$ deve essere $\gamma = 0$.

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Provare che $\displaystyle\lim_{r \downarrow 0} \frac{P(E; B_r)}{n\,\omega_n r^{n-1}} = 1$.

TEOREMA DI STRUTTURA

<u>TEOREMA</u> Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme con perimetro localmente finito. Allora:

1) La frontiera ridotta $\partial^* E$ è H^{n-1}-rettificabile. Precisamente, si ha:

$$\partial^* E = \bigcup_{h=1}^{\infty} K_h \cup N$$

dove $\mu_E(N) = 0$ e K_h è un sottoinsieme compatto di una ipersuperficie $S_h \subset \mathbb{R}^n$ di classe C^1.

2) $\nu_E|_{K_h}$ è la normale di S_h.

3) $\mu_E = H^{n-1} \llcorner \partial^* E$.

FORMULA DELL'AREA: GRAFICI C^1

Vogliamo dare una dimostrazione della seguente variante della formula dell'area.

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C^1(A)$. Allora

$$\mathcal{H}^n(gr(f)) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}\, dx.$$

DIM. Iniziamo dal caso in cui f sia affine (lineare)

$$f(x) = \langle v, x \rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

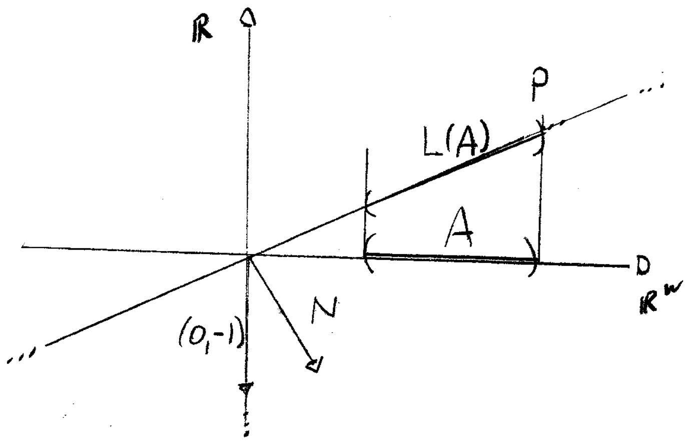
per qualche $v \in \mathbb{R}^n$. Sia $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ la mappa lineare

$$L(x) = (x, \langle v, x\rangle), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

La normale al piano $P = L(\mathbb{R}^n)$ è

$$N = \frac{(v, -1)}{\sqrt{1 + |v|^2}}.$$

Sia $T \in O(n+1)$ la (una) trasformazione ortogonale tale che $T(N) = (0, -1)$



Allora abbiamo, con $S := T \circ L$, dove S è lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$,

$$H^n(L(A)) \underset{T \text{ isometria}}{=} H^n(T \circ L(A))$$

$$= H^n(S(A)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ H^n = \mathcal{L}^n \\ \text{su } \mathbb{R}^n}}{=} \mathcal{L}^n(S(A))$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatto noto}}}{=} |\det(S)| \, \mathcal{L}^n(A).$$

Inoltre, detta S^* la trasposta di S,

$$|\det(S)| = |\det(S^* S)|^{1/2} = |\det(L^* T^* T L)|^{1/2}$$

$$= |\det(L^* L)|^{1/2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{algebra} \\ \text{lineare}}}{=} \sqrt{1+|v|^2}$$

e quindi

$$H^n(L(A)) = \int_A \sqrt{1+|v|^2}\, dx = \int_A \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx.$$

Sia ora $f \in C^1(A)$, siano $F(x) = (x, f(x))$ e

$$G = \{ F(x) \in \mathbb{R}^{n+1} \; ; \; x \in A \}.$$

Senza perdere generalità possiamo supporre che $\mathrm{Lip}(F) < \infty$. Questo è vero localmente.

Sia μ la misura di Borel su A definita in questo modo

$$\mu(B) = H^n(F(B)), \quad B \subset A \text{ di Borel}.$$

Abbiamo

$$\mu(B) \leq \mathrm{Lip}(F)^n \, H^n(B) = \mathrm{Lip}(F)^n \, \mathcal{L}^n(B)$$

e quindi $\mu \ll \mathcal{L}^n$. Dunque esiste una funzione $g \in L^1_{loc}(A)$ tale che

$$\mu(B) = \int_B g(x) \, dx$$

e in effetti:

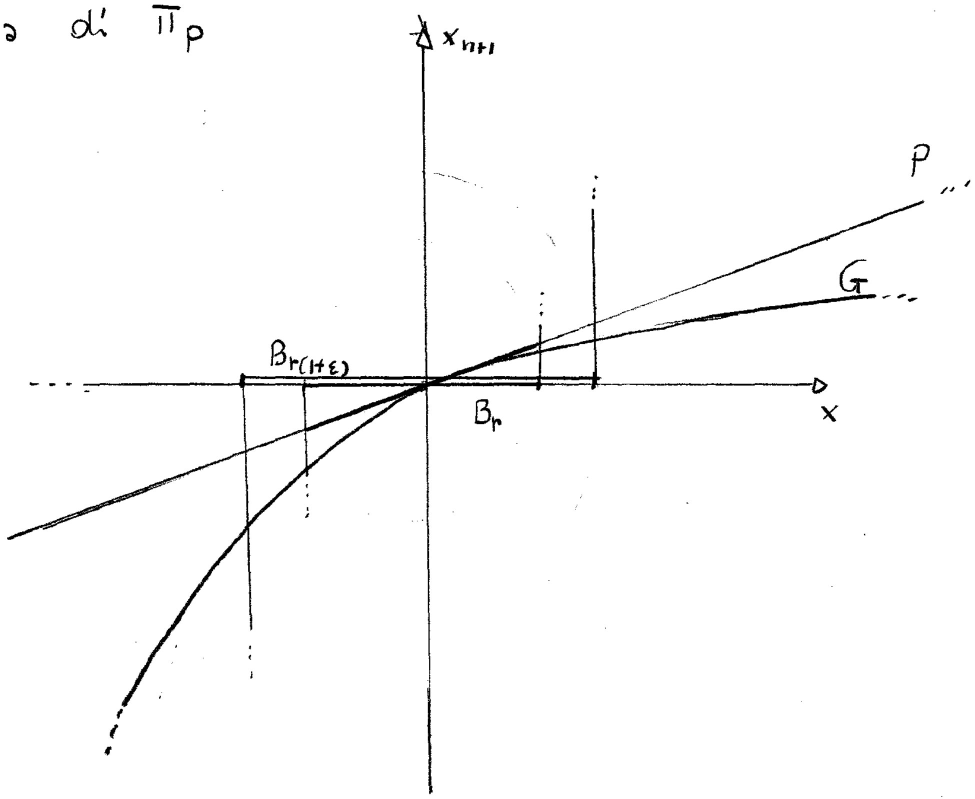
$$g(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{H^n(F(B_r(x)))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))},$$

per $\mathcal{L}^n$-q.o. x.

Calcoliamo il limite in ogni punto $x \in A$. Senza perdere di generalità supponiamo $x = 0$ e $f(0) = 0$.

Sia $v = \nabla f(0)$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ sia $L(x) = (x, \langle v, x\rangle)$ e poi $P = L(\mathbb{R}^n)$. Indichiamo con $\pi_P : \mathbb{R}^{n+1} \to P$ la proiezione ortogonale su P.

Detto $G = F(A)$ il grafico di f, sia $\pi_G : \pi_P(G) \to G$ l'inversa di π_P



Siano $r > 0$, $\varepsilon > 0$ e $B_r = B_r(0)$, $B_{r(1+\varepsilon)} = B_{r(1+\varepsilon)}(0)$.

Affermiamo che esiste $r_0 > 0$ tale che per $0 < r < r_0$ si ha:

1) $F(B_r) \subset \pi_G\left(L\left(B_{r(1+\varepsilon)}\right)\right)$,

2) $L(B_r) \subset \pi_p\left(F\left(B_{r(1+\varepsilon)}\right)\right)$.

La proiezione π_p è 1-Lipschitz.
Per $r_0 > 0$ opportuno, la "proiezione" π_G è $(1+\varepsilon)$-Lipschitz.

Dunque, usando 1):

$$
\begin{aligned}
H^n(F(B_r)) &\leq H^n\left(\pi_G\left(L\left(B_{r(1+\varepsilon)}\right)\right)\right) \\
&\leq (1+\varepsilon)^n H^n\left(L\left(B_{r(1+\varepsilon)}\right)\right) \\
&= (1+\varepsilon)^n \sqrt{1+|v|^2}\, \mathcal{L}^n\left(B_{r(1+\varepsilon)}\right) \\
&= (1+\varepsilon)^{2n} \sqrt{1+|v|^2}\, \mathcal{L}^n(B_r)
\end{aligned}
$$

(Prima parte)

e quindi

$$
\limsup_{r \downarrow 0} \frac{H^n(F(B_r))}{\mathcal{L}^n(B_r)} \leq (1+\varepsilon)^{2n} \sqrt{1+|v|^2}.
$$

Usando invece 2):

$$\sqrt{1+|v|^2}\,\mathcal{L}^n(B_r) = \mathcal{H}^n(L(B_r)) \leq \mathcal{H}^n(\pi_p(F(B_{r(1+\varepsilon)})))$$

$$\leq \mathcal{H}^n(F(B_{r(1+\varepsilon)}))$$

che può essere riscritta in questo modo:

$$\mathcal{H}^n(F(B_r)) \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\sqrt{1+|v|^2}\,\mathcal{L}^n(B_r)$$

e quindi

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{H}^n(F(B_r))}{\mathcal{L}^n(B_r)} \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\sqrt{1+|v|^2}\,.$$

Siccome $\varepsilon>0$ è libero, si trova

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{H}^n(F(B_r))}{\mathcal{L}^n(B_r)} = \sqrt{1+|v|^2} = \sqrt{1+|\nabla f(0)|^2}\,.$$

Proviamo la 1). É equivalente a $\pi_p(F(B_r)) \subset L(B_{r(1+\varepsilon)})$.
Detta $\pi(x,x_{n+1}) = x$ si tratta di verificare che

$$\pi(\pi_p(F(B_r))) \subset B_{r(1+\varepsilon)}$$

per $0<r<r_0$.

Sia $x \in B_r$. Allora $\Pi_p(F(x)) = F(x) - \langle F(x), N\rangle N$

e quindi

$$\Pi(\Pi_p(F(x))) = x - \langle F(x), N\rangle \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2}}$$

$$= x - \left(\langle x, v\rangle - f(x)\right) \frac{v}{1+|v|^2}$$

dove $f(x) = f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle + o(|x|)$

$$= \langle v, x\rangle + o(|x|)$$

Segue che

$$|\Pi(\Pi_p(F(x)))| = |x| \, (1+o(1))$$

$$\leq r\,(1+\varepsilon)$$

se $|x| < r$ e $o(1) < \varepsilon$ vero per $r < r_0$.

Lasciamo la verifica di 2) come esercizio.

$\square$

FORMULA DI COAREA, UN CASO MODELLO

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana. Allora

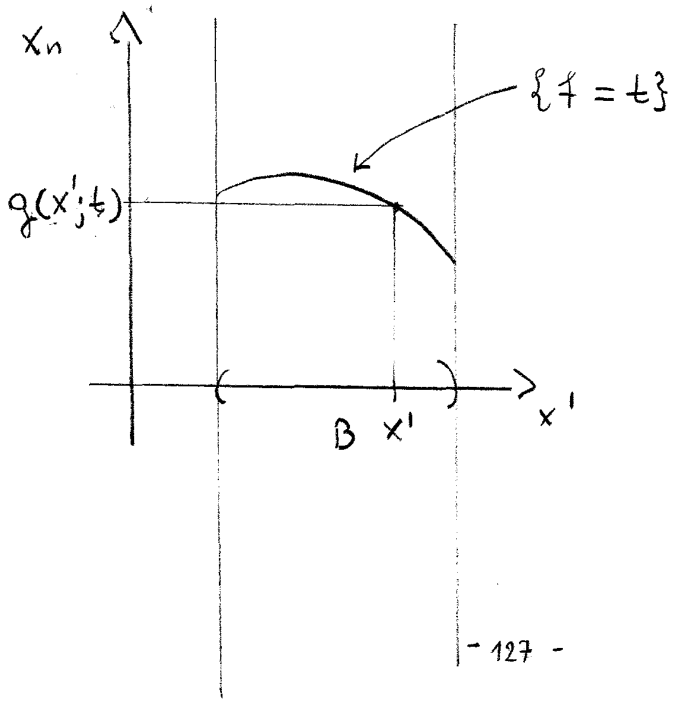
$$\int_A |\nabla f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}\big(\partial \{x \in A : f(x) > t\}\big)\,dt.$$

É una variante "curvilinea" del teorema di Fubini-Tonelli.

Dimostriamo il teorema nella seguente situazione modello:

$$A = B \times \mathbb{R} \qquad \text{con} \quad B \subset \mathbb{R}^{n-1} \text{ aperto}$$

$$f \in C^1(B \times \mathbb{R}) \quad \text{con} \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0 \quad \text{su } B \times \mathbb{R}.$$



Per il Teorema della funzione implicita l'insieme

$$\{x \in B \times \mathbb{R} \,;\ f(x) = t\} \text{ è il grafico di una funzione } g(x';t)$$

Precisamente

$$\{f = t\} = \{(x', g(x';t)) \in \mathbb{R}^n \,;\ x' \in B\}$$

con $g(\cdot\,;t) \in C^1(B)$. Inoltre

$$f(x', g(x';t)) \equiv t$$

e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x', g(x';t)) \, \dfrac{\partial g}{\partial t}(x';t) = 1 \\[2ex] \nabla_{x'} f(x', g(x';t)) + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x', g(x';t)) \, \nabla_{x'} g(x';t) = 0. \end{cases}$$

In particolare

$$|\nabla f(x', g)| = \left(|\nabla_{x'} f(x', g)|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', g) \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', g) \right| \left(1 + |\nabla_{x'} g(x';t)|^2 \right)^{1/2}.$$

Con il cambio di variabile $x = G(\xi,t) := (\xi, g(\xi;t))$

con $\xi \in B$ si trova

$$\int_{B\times\mathbb{R}} |\nabla f(x)|\,dx = \int_{B\times\mathbb{R}} |\nabla f(\xi, g(\xi,t))| \left| \frac{\partial g}{\partial t}(\xi;t) \right| d\xi\,dt$$

Fubini - Tonelli

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{B} \sqrt{1+|\nabla_\xi g(\xi;t)|^2}\, d\xi\,dt$$

Formula Area

$$= \int_{\mathbb{R}} H^{n-1}(\{x \in B\times\mathbb{R} \,;\, f(x) = t\})\,dt \, ,$$

$\square$

Γ - CONVERGENZA

1) RILASSAMENTO

2) Γ- LIMITI

3) CONVERGENZA DEI MINIMI E DEI VALORI MINIMI

1) Rilassamento.

(X, τ) spazio topologico

$$\mathcal{I}(x) = \{ U \subset X : U \text{ intorno di } x \}, \quad x \in X$$

DEF (Semicontinuità inferiore) Una funzione $F : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ è semicontinua inferiormente su X (sci) se per ogni $x \in X$ si ha

$$F(x) \leq \sup_{U \in \mathcal{I}(x)} \inf_{y \in U} F(y).$$

COMMENTI

1) É equivalente richiedere: $F(x) = \sup\limits_{U \in \mathcal{I}(x)} \inf\limits_{y \in U} F(y)$.

2) Se X è uno Spazio Metrico (oppure uno

spazio topologico $N_{\mathcal{I}}$) allora F è sci se $\forall x \in X$ e per ogni $x_h \xrightarrow[h\to\infty]{} x$ si ha

$$F(x) \leq \liminf_{h\to\infty} F(x_h).$$

<u>DEF (Inviluppo semicontinuo inferiore)</u> Data $F: X \to (-\infty, \infty]$ chiamiamo la funzione $F^{sci}: X \to [-\infty, \infty]$

$$F^{sci}(x) = \sup_{U\in\mathcal{I}(x)} \inf_{y\in U} F(y)$$

l'inviluppo semicontinuo inferiore di F.

<u>COMMENTI</u>

1) $F^{sci}(x) = \sup\left\{ G(x) \;;\; \begin{array}{l} G: X \to [-\infty,\infty], \; G \leq F \\ G \text{ sci} \end{array} \right\}$

2) Negli Spazi Metrici:

$$F^{sci}(x) = \inf\left\{ \liminf_{h\to\infty} F(x_h) \;;\; x_h \xrightarrow[h\to\infty]{} x \right\}.$$

3) F^{sci} è sci su X.

2) Γ- limiti

(X,τ) Spazio Topologico

$F_h : X \to (-\infty, \infty]$, $h \in \mathbb{N}$

<u>DEFINIZIONE</u> Definiamo le funzioni $F^-, F^+ : X \to [-\infty, \infty]$

$$F^-(x) = \Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h(x) = \sup_{U\in\mathcal{I}(x)} \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y),$$

$$F^+(x) = \Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h(x) = \sup_{U\in\mathcal{I}(x)} \limsup_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y),$$

per $x \in X$. Se $F^- = F^+ = F$ diremo che esiste il Γ-limite

$$F(x) = \Gamma\text{-}\lim_{h\to\infty} F_h(x), \quad x \in X.$$

Negli spazi metrici il Γ-limite si descrive in modo sequenziale.

<u>TEOREMA</u> Sia (X,d) uno spazio metrico, $F, F_h : X \to (-\infty, \infty]$ con $h \in \mathbb{N}$. Sono equivalenti:

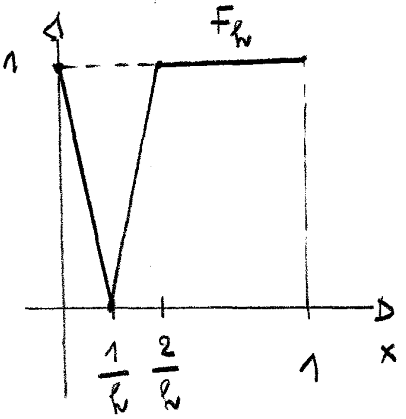
A) $F = \Gamma\text{-}\lim_{h\to\infty} F_h$;

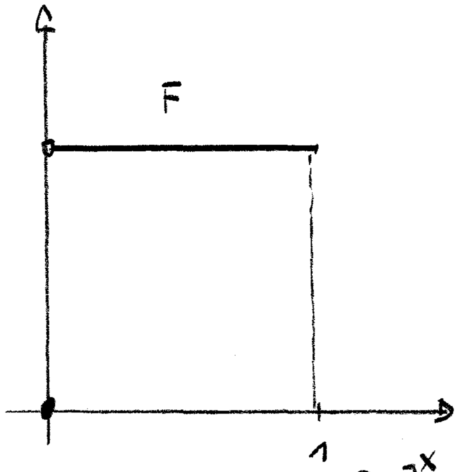
B) i) $\forall x \in X$ e $\forall x_h \xrightarrow[h\to\infty]{} x$: $F(x) \leq \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h)$;

ii) $\forall x \in X \; \exists \, x_h \xrightarrow[h\to\infty]{} x$; $F(x) \geq \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h)$.

Non proveremo il teorema e useremo B) come definizione di Γ-limite negli spazi metrici.

<u>ESEMPIO</u> Siano $F, F_h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ le funzioni in figura:





$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Allora si ha

$$F = \Gamma\text{-}\lim_{h \to \infty} F_h .$$

Controlliamo i) e ii) nel punto $x = 0$:

i) $0 = F(0) \leq \liminf\limits_{h \to \infty} \underbrace{F_h(x_h)}_{\geq 0} \qquad \forall x_h \to 0$

ii) Esiste $x_h \to 0$ tale che $0 = F(0) \geq \limsup\limits_{h \to \infty} F_h(x_h)$.

Basta scegliere $x_h = \frac{1}{h}$.

$\square$

3) Convergenza dei minimi.

(X, d) Spazio Metrico

$F, F_h : X \to (-\infty, \infty]$, $h \in \mathbb{N}$

<u>LEMMA</u> $F = \Gamma\text{-}\lim_{h \to \infty} F_h$ è s.c.i. su X.

DIM. Siano $x \in X$ e $x_h \to x$. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste $x_{k,h} \underset{k \to \infty}{\to} x_h$ tale che

$$F(x_h) \geq \limsup_{k \to \infty} F_k(x_{k,h})$$

e quindi $\forall h \; \exists k_h$ tale che

$$\left.\begin{aligned} F(x_h) &\geq F_k(x_{k,h}) - \frac{1}{h}, \\ |x_{k,h} - x_h| &< \frac{1}{h}, \end{aligned}\right\} \quad \forall k \geq k_h .$$

Dunque, con $k = k_h$

$$\liminf_{h \to \infty} F(x_h) \geq \liminf_{h \to \infty} F_{k_h}(x_{k_h, h}) \geq F(x)$$

in quanto $x_{k_h, h} \to x$,

$\square$

TEOREMA Sia X compatto e sia $F_h \geq C > -\infty$ $\forall h$. Se esiste $F = \Gamma\text{-}\lim_{h\to\infty} F_h$ allora F ha minimo su X e inoltre

$$\min_X F = \lim_{h\to\infty} \inf_X F_h .$$

DIM. Dall'ipotesi $F_h \geq C > -\infty$ deduciamo che $F(x) > -\infty$ per ogni $x \in X$. Siccome F è sci su X, possiede minimo; esiste $x_0 \in X$ tale che

$$F(x_0) = \min_{x\in X} F(x) .$$

Esiste $x_h \to x_0$ tale che

$$(1) \qquad F(x_0) \geq \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h) \geq \limsup_{h\to\infty} \inf_X F_h ,$$

D'altra parte esiste $x_h \in X$ tale che

$$a_h = F_h(x_h) \leq \inf_X F_h + \frac{1}{h} .$$

Affermiamo che per ogni s.s. $(a_{h_k})_{k\in\mathbb{N}}$ esiste una ulteriore s.s. $(a_{h_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tale che

$$F(x_0) \leq \liminf_{j\to\infty} a_{h_{k_j}} . \qquad (*)$$

Siccome X è compatto, la successione $(x_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente

$$x_{h_{k_j}} \xrightarrow[j \to \infty]{} \bar{x} \in X .$$

Siccome $F = \Gamma\text{-}\lim\limits_{h \to \infty} F_h$ si ha

$$F(x_0) \leq F(\bar{x}) \leq \liminf_{j \to \infty} F_{h_{k_j}}(x_{h_{k_j}}) . \quad \text{Questo prova } (*).$$

Dalla affermazione in "} segue che

$$(2) \qquad F(x_0) \leq \liminf_{h \to \infty} F_h(x_h) \leq \liminf_{h \to \infty} \inf_X F_h .$$

Da (1) e (2) deriva la tesi:

$$F(x_0) = \lim_{h \to \infty} \inf_X F_h .$$

$\square$

<u>TEOREMA</u> Sia (X,d) uno spazio metrico e siano $F, F_h : X \to (-\infty, \infty]$ funzioni tali che $F = \Gamma\text{-}\lim\limits_{h \to \infty} F_h$. Supponiamo esistano punti $x, x_h \in X$ tali che

i) $F_h(x_h) = \min\limits_X F_h$;

ii) $x_h \xrightarrow[h \to \infty]{} x$.

Allora si ha $F(x) = \min\limits_X F$.

DIM. Da un lato si ha:

$$F(x) \leq \liminf_{h \to \infty} F_h(x_h) = \liminf_{h \to \infty} \min_X F_h .$$

D'altra parte, per ogni $y \in X$ esiste $y_h \to y$ tale che

$$F(y) \geq \limsup_{h \to \infty} F_h(y_h) \geq \limsup_{h \to \infty} \min_X F_h \geq$$

$$\geq \liminf_{h \to \infty} F_h(x_h) \geq F(x).$$

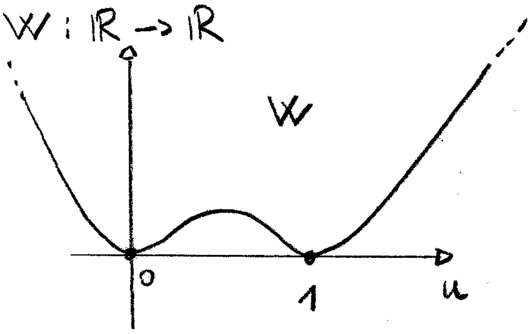
$\square$

FUNZIONALE DI MODICA-MORTOLA

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un insieme aperto e limitato.

Consideriamo il "potenziale" $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$W(u) = u^2 (1-u)^2$$



Fissiamo $0 < V < \mathcal{L}^n(A)$.

Consideriamo il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_A W(u(x))\,dx \ ; \ u \in L^1(A),\ \|u\|_1 = V \right\}.$$

Vogliamo separare la fase 0 (olio) dalla fase 1 (acqua).

Le soluzioni sono della forma $u = \chi_E$ con $\mathcal{L}^n(E) = V$.

Ci sono troppe soluzioni. Occorre un criterio di selezione.

Sia $\varepsilon > 0$ un parametro. Definiamo $F_\varepsilon : L^1(A) \to [0,\infty]$

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_A \left\{ \varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right\} dx & \text{se } u \in H^1(A) \\ \infty & \text{se } u \in L^1(A) \setminus H^1(A). \end{cases}$$

Ricordiamo che $H^1(A) = \{ u \in L^2(A) \ ; \ \underset{\text{gradiente debole}}{|\nabla u|} \in L^2(A) \}$.

(Eventualmente: $F_\varepsilon(u) = \infty$ se $\|u\|_{L^1} \neq V$)

Poi definiamo $F : L^1(A) \longrightarrow [0,\infty]$

$$F(u) = \begin{cases} 2\alpha\, P(E;A) & \text{se} \quad u = \chi_E, \\ \infty & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

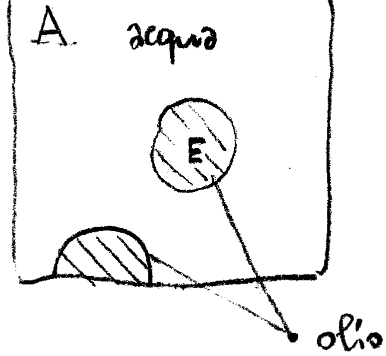
dove

$$\alpha = \int_0^1 \sqrt{W(u)}\, du = \frac{1}{6}.$$

(Eventualmente: $F(u) = \infty$ se $\mathcal{L}^n(E) \neq V$)

<u>TEOREMA</u> Si ha $F = \Gamma - \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon$ in $L^1(A)$.

<u>COMMENTO</u> I punti di minimo di F_ε convergono per $\varepsilon \downarrow 0$ ai punti di minimo del perimetro (eventualmente: con vincolo di volume).
Le gocce di olio nell'acqua hanno forma sferica.



PREPARAZIONE EURISTICA Consideriamo il problema 1-dimensionale

$$\min \left\{ F_\varepsilon(x) \;:\; x: \mathbb{R} \to [0,1] \,,\; \begin{array}{l} x' \in L^2(\mathbb{R}) \\ x(-\infty) = 0 \quad x(\infty) = 1 \end{array} \right\}$$

dove

$$F_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varepsilon\, x'^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(x) \right\} dt \,,$$

Vogliamo andare da 0 a 1 con energia minima.

L'equazione di Eulero-Lagrange associata è

$$-2\varepsilon\, x_\varepsilon'' + \frac{1}{\varepsilon} W'(x_\varepsilon) = 0 \qquad \text{su } \mathbb{R}$$

Moltiplicando per x_ε':

$$-\varepsilon\,(x_\varepsilon'^2)' + \frac{1}{\varepsilon}\,(W(x_\varepsilon))' = 0$$

e integrando

$$-\varepsilon\, x_\varepsilon'^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(x_\varepsilon) = \text{costante} = 0 \,.$$

Che debba essere costante $= 0$ si vede con $t \mapsto \pm\infty$.

In definitiva

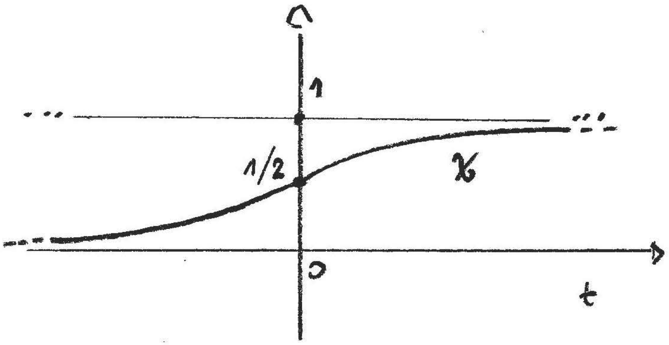
$$x_\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{W(x_\varepsilon)} \,.$$

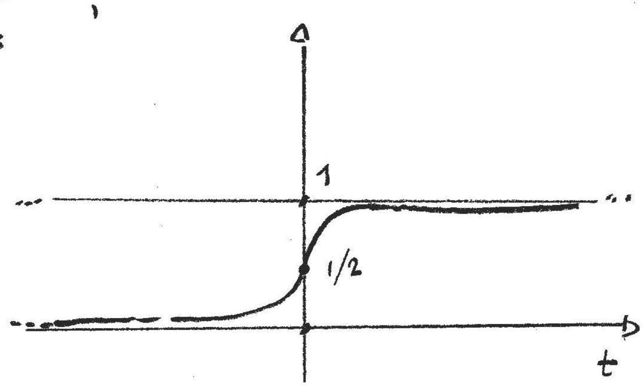
In effetti si ha $x_\varepsilon(t) = x(t/\varepsilon)$ dove

$$\begin{cases} x' = \sqrt{W(x)} \quad \text{su } \mathbb{R} \\ x(-\infty) = 0, \quad x(\infty) = 1 \quad \left(\Leftarrow \quad x(0) = 1/2 \right). \end{cases}$$

La soluzione è:

$$x(t) = \frac{e^t}{1+e^t}, \qquad t \in \mathbb{R}$$





x_ε con $0 < \varepsilon << 1$.

x_ε separa 0 da 1 in modo rapido quando $0 < \varepsilon << 1$.

DIM. Per semplicità ignoriamo il vincolo di volume.

Notazione: $\varepsilon = \varepsilon_h = 1/h$ con $\varepsilon \to 0^+ \Leftrightarrow h \to \infty$.

i) Siano $u \in L^1(A)$ e $u_\varepsilon \in L^1(A)$ tali che $u_\varepsilon \xrightarrow{L^1} u$.

Vogliamo provare che

$$F(u) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Possiamo supporre che $\liminf_{\varepsilon \to 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon) < \infty$.

Possiamo anche supporre che: $u_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} u(x)$ q.o.

Per il Lemma di Fatou:

$$\int_A W(u)\,dx \leq \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \int_A W(u_\varepsilon)\,dx \leq$$

$$\leq \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0.$$

Quindi $W(u) = 0$ q.o. $\Rightarrow u \in \{0,1\}$ q.o.

$\Rightarrow u = \chi_E$.

Possiamo anche supporre che $0 \leq u_\varepsilon \leq 1$.
Infatti il troncamento continua a convergere ad u in $L^1(A)$ e inoltre l'energia diminuisce.

Per $t \in [0,1]$ definiamo

$$\varphi(t) = \int_0^t \sqrt{W(u)}\,du$$

e quindi definiamo

$$w(x) := \varphi(u(x)) = d\, u(x),$$

$$w_\varepsilon(x) := \varphi(u_\varepsilon(x)).$$

Con $L = \sup_{0 \leq u \leq 1} \sqrt{W(u)}$ si ha $|w_\varepsilon - w| \leq L\,|u_\varepsilon - u|$

e quindi $w_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{L^1(A)} w$.

Per la semicontinuità inferiore della variazione totale:

$$\alpha P(E;A) = \|\nabla w\|(A) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \int_A |\nabla w_\varepsilon| \, dx =$$

$$= \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \int_A \sqrt{W(u_\varepsilon)} \, |\nabla u_\varepsilon| \, dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \int_A \left\{ \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \liminf_{\varepsilon \to 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Questo prova la prima condizione della Γ-convergenza.

ii) Ora sia $u \in L^1(A)$ e proviamo che esistono $u_\varepsilon \in L^1(A)$ tali che

$$F(u) \geq \limsup_{\varepsilon \to 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Basta considerare $u = \chi_E$ con $P(E;A) < \infty$.
In effetti basta considerare il caso

$$\partial E \cap A \text{ è } C^\infty \quad \left(\text{e} \quad H^{n-1}(\partial A \cap \partial E) = 0 \right).$$

Consideriamo la funzione distanza

$$\rho(x) = \begin{cases} \operatorname{dist}(x;\partial E) & \text{se } x \in E \cap A \\ -\operatorname{dist}(x;\partial E) & \text{se } x \in A \setminus E \end{cases}$$

É noto che $|\nabla \rho| = 1$ q.o. e $\rho \in C^\infty$ in un intorno di ∂E.

Definiamo le funzioni

$$u_\varepsilon(x) = \chi_\varepsilon(\rho(x)) = \chi(\rho(x)/\varepsilon), \quad x \in A,$$

dove $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e' $\chi(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t}$.

Usando la Formula di Coarea e $|\nabla \rho| = 1$:

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_A \left\{ \varepsilon \left| \chi'(\rho/\varepsilon) \frac{\nabla \rho}{\varepsilon} \right|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(\chi(\rho/\varepsilon)) \right\} dx$$

$$= \int_A \left\{ \frac{1}{\varepsilon} |\chi'(\rho/\varepsilon)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(\chi(\rho/\varepsilon)) \right\} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ |\chi'(t/\varepsilon)|^2 + W(\chi(t/\varepsilon)) \right\} \int_{\{x \in A \,:\, \rho(x) = t\}} dH^{n-1} \; dt$$

In definitiva si ottiene

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \chi'^2 + W(\chi) \} H^{n-1}(\{\rho = \tau\varepsilon\} \cap A)\varepsilon d\tau .$$

É possibile provare (omettiamo la dimostrazione) che

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} H^{n-1}(\{\rho = \tau\varepsilon\} \cap A) = H^{n-1}(\partial E \cap A)$$
$$= P(E; A),$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = P(E;A) \int_{-\infty}^{\infty} \{ \chi'^2 + W(\chi) \} d\tau$$
$$= P(E;A) \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} W(\chi)\, d\tau \qquad (\chi(\tau) = u)$$
$$= P(E;A) \quad 2 \int_0^1 \sqrt{W(u)}\, du .$$

$\square$

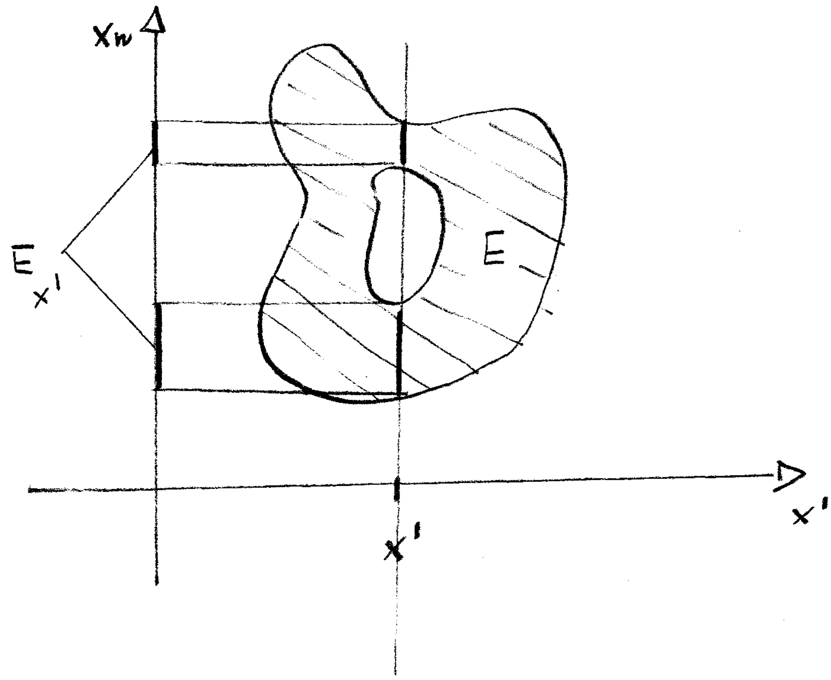
16

SIMMETRIZZAZIONE DI STEINER

Coordinate in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$: $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Per $E \subset \mathbb{R}^n$ e $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ definiamo le sezioni:

$$E_{x'} = \{ x_n \in \mathbb{R} : (x', x_n) \in E \}$$



Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile con $\mathcal{L}^n(E) < \infty$.

Definiamo la funzione $\vartheta : \mathbb{R}^{n-1} \to [0, \infty)$

$$\vartheta(x') = \begin{cases} \mathcal{L}^1(E_{x'}) & \text{se } \mathcal{L}^1(E_{x'}) < \infty \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Fubini-Tonelli $\Rightarrow$ $\vartheta \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$.

DEFINIZIONE Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile con $\mathcal{L}^n(E) < \infty$, l'insieme

$$E^* = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_n| < \frac{1}{2} \vartheta(x') \right\}$$

si chiama riarrangiamento di Steiner di E.

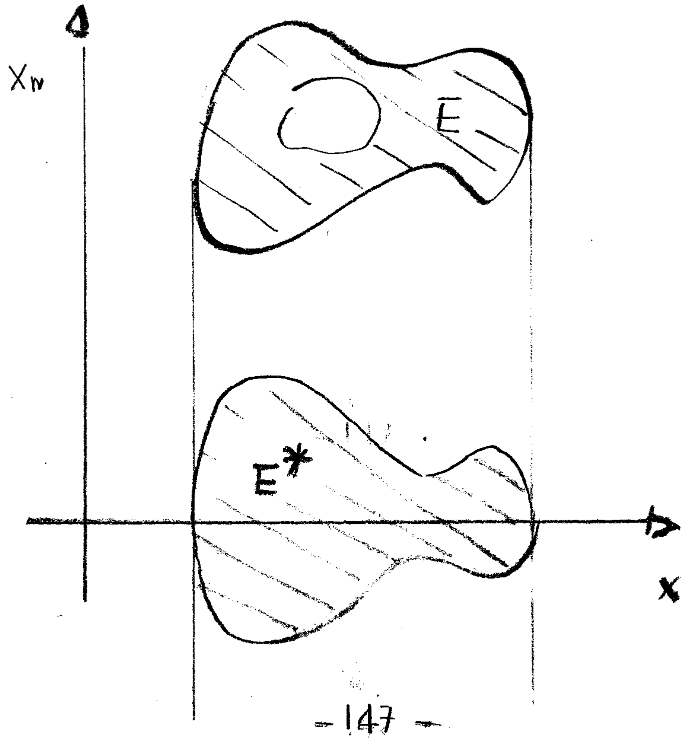
OSSERVAZIONI

(1) E^* è $\mathcal{L}^n$-misurabile ed $\mathcal{L}^n(E^*) = \mathcal{L}^n(E)$.

(2) E^* è x_n-simmetrico:

$$(x', x_n) \in E^* \iff (x', -x_n) \in E^*.$$

(3) E^* è x_n-normale, ovvero gli insiemi $E_{x'} \subset \mathbb{R}$ sono intervalli.



ESERCIZIO Provare che $\mathrm{diam}(E^*) \leq \mathrm{diam}(E)$.

Proveremo il seguente teorema.

TEOREMA Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile con misura finita. Allora:

$$P(E^*) \leq P(E).$$

Inoltre, se $P(E^*) = P(E)$ allora E è equivalente ad un insieme x_n - normale.

Dim. Per $i = 1, \dots, n$ ed $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto definiamo i perimetri parziali:

$$P_i(E; A) = \sup \left\{ \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \; : \; \begin{array}{l} \varphi \in C_c^1(A) \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \end{array} \right\}$$

Esistono $\mu_1, \dots, \mu_n$ misure di Borel finite su $\mathbb{R}^{n-1}$ tali che per ogni $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aperto si abbia

$$\mu_i(A) = P_i(E; A \times \mathbb{R}), \quad i = 1 \dots n.$$

In modo analogo esistono misure di Borel μ_i^*, $i=1,\dots,n$, tali che

$$\mu_i^*(A) = P_i(E^*; A\times\mathbb{R})$$

con $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aperto.

<u>CLAIM:</u> $\mu_i^*(A) \leq \mu_i(A)$ $\forall i = 1,\dots,n$
$\forall A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aperto.

Partiamo dal caso $i=n$. Abbiamo:

$$\mu_n(A) = P_n(E; A\times\mathbb{R}) \leq P(E; A\times\mathbb{R}^n) \leq$$

$$\leq P(E;\mathbb{R}^n) < \infty$$

Possiamo supporre

Poi si ha:

$$\mu_n(A) = \sup_{\substack{\varphi\in C_c^1(A\times\mathbb{R})\\ |\varphi|\leq 1}} \int_{(A\times\mathbb{R})\cap E} \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx$$

$$(*)$$

$$= \sup_{''} \int_A \int_{E_{x'}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n\, dx' \geq$$

$$\overset{(*)}{\underset{(=)}{\geq}} \int_A \left(\sup_{\substack{\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}) \\ |\varphi| \leq 1}} \int_{E_{x'}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_n)\, dx_n \right) dx',$$

<u>ESERCIZIO</u> Provare la disuguaglianza (*) (e dedurre quindi che è un =).

Fare così:

(1) Provare (*) quando χ_E è sostituita da $\chi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$

(2) Approssimare χ_E con funzioni $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ e passare al limite.

Ora affermiamo che per $\mathcal{L}^{n-1}$-q.o. $x' \in A$ si ha

$$\underbrace{\sup_{\substack{\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}) \\ |\varphi| \leq 1}} \int_{E_{x'}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_n)\, dx_n}_{= P(E_{x'})} \overset{(**)}{\geq} \underbrace{\sup_{\substack{\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}) \\ |\varphi| \leq 1}} \int_{E^*_{x'}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_n)\, dx_n}_{= P(E^*_{x'})} .$$

Da (*) e (**) segue che $\mu_n(A) \geq \mu_n^*(A)$.

Proviamo (**). Per $\mathcal{L}^{n-1}$-q.o. $x' \in A$ si ha

$$\mathcal{L}^1(E_{x'}) < \infty \quad e$$
$$P(E_{x'}) < \infty .$$

Quindi (ESERCIZIO) $E_{x'}$ è equivalente ad una unione finita di intervalli:

$$E_{x'} = \bigcup_{j=1}^{k} (a_j', b_j') \subset \mathbb{R}$$

con $k \geq 0$ e dunque $P(E_{x'}) = 2k$.
Se $\mathcal{L}^1(E_{x'}) > 0$ deve essere $k \geq 1$.
In questo caso $P(E_{x'}^*) = 2$ (altrimenti $= 0$).

Questo prova (**).

Ora proviamo il CLAIM quando $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Abbiamo

$$\mu_i(A) = P_i(E; A\times\mathbb{R}) = \sup_{\substack{\varphi \in C_c^1(A\times\mathbb{R}) \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1}} \int_E \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx$$

$$\geq \sup_{\substack{\varphi\in C_c^1(A) \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1}} \int_A \vartheta(x') \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x')\,dx', = (*)$$

dove $\vartheta(x') = \mathcal{L}^1(E_{x'})$. Deduciamo in particolare che $\vartheta \in BV(A)$. Supponendo per un attimo che $\vartheta \in C^1(A)$ si trova:

$$(*) = \int_A \left|\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}(x')\right| dx' = \text{[Formula di Coarea]}$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{A\cap\partial\{\vartheta>t\}} d\lambda_i\right) dt \qquad \lambda_i = \text{misura perimetro parziale } i\text{-esimo}$$

$$= \int_0^\infty \left(\sup_{\substack{\varphi\in C_c^1(A) \\ \|\varphi\|_\infty\leq 1}} \int_{\{x'\in\mathbb{R}^{n-1}:\ \vartheta(x')>t\}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x')\,dx'\right) dt$$

Questi passaggi possono essere "formalizzati" quando $\vartheta\in BV(A)$. Deduciamo che $(t = 2x_n)$

$$(\blacksquare) \geq 2 \sup_{\substack{\varphi \in C^1_c(A) \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1}} \int_0^\infty \int_{\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \frac{1}{2}\vartheta(x') > x_n\}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_n)\, dx'\, dx_n$$

$$= 2\, P_i(E^* ; A \times (0,\infty)) = P_i(E^* ; A \times \mathbb{R})$$

$$= \mu_i^*(A).$$

Questo termina la prova del Claim.

Per terminare la dimostrazione abbiamo bisogno del seguente fatto.

Sia $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ una misura di Borel in $\mathbb{R}^{n-1}$ a valori in $\mathbb{R}^n$. La variazione totale $|\mu|$ di μ è la misura di Borel

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^\infty |\mu(A_k)| \ :\ A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k \text{ disgiunta} \right\}.$$

$A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ di Borel $\qquad A_k \subset \mathbb{R}^{n-1}$ di Borel

<u>ESERCIZIO</u> Provare che nel nostro caso si ha

$$|\mu|(\mathbb{R}^{n-1}) = P(E).$$

Siccome nel nostro caso $\mu^* \leq \mu$ per componenti si deduce che

$$P(E^*) = |\mu^*|(\mathbb{R}^{n-1}) \leq |\mu|(\mathbb{R}^{n-1}) = P(E).$$

Supponiamo ora che sia $P(E^*) = P(E)$.
Allora:

$$|\mu^*|(\mathbb{R}^{n-1}) = |\mu|(\mathbb{R}^{n-1}) \overset{\text{(facile)}}{\Longrightarrow} |\mu^*|(A) = |\mu|(A) \quad \forall A \subset \mathbb{R}^{n-1} \text{ Borel}$$

ESERCIZIO $\longrightarrow$ $\Downarrow$
(Usare Radon-Nycodim)

$$\mu^* = \mu$$

In particolare $\mu^*_n = \mu_n$ e quindi

$$P(E^*_{x'}) = 2 \implies P(E_{x'}) = 2$$

per $\mathcal{L}^{n-1}$-q.o. $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Ovvero: E è equivalente ad un insieme x_n-normale.

$\square$

TEOREMA ISOPERIMETRICO

Consideriamo il problema di trovare l'insieme di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, che ha frontiera di area minima per volume racchiuso fissato:

$$\min \left\{ P(E) \; ; \; E \subset \mathbb{R}^n \ \mathcal{L}^n\text{-misurabile con } \mathcal{L}^n(E) = 1 \right\}.$$

Siccome $\mathcal{L}^n(\lambda E) = \lambda^n \mathcal{L}^n(E)$ e $P(\lambda E) = \lambda^{n-1} P(E)$, determinare il minimo precedente è equivalente a determinare

$$\min \left\{ \frac{P(E)}{\mathcal{L}^n(E)^{\frac{n-1}{n}}} \; ; \; E \subset \mathbb{R}^n \ \mathcal{L}^n\text{-mis. con } 0 < \mathcal{L}^n(E) < \infty \right\}.$$

TEOREMA Il minimo è raggiunto. Gli insiemi minimi sono esattamente le palle Euclidee (a meno di misura nulla).

Una formulazione più precisa del teorema è la seguente.

TEOREMA Sia $n \geq 2$. Per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile si ha

$$\min\{ \mathcal{L}^n(E), \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E)\} \leq c_n \, P(E)^{\frac{n}{n-1}}, \qquad (*)$$

dove $\mathcal{L}^n(B) = c_n \, P(B)^{\frac{n}{n-1}}$ con $B \subset \mathbb{R}^n$ palla.
L'uguaglianza in $(*)$ implica che E oppure $\mathbb{R}^n \setminus E$ è una palla.

Dimostrazione del Teorema isoperimetrico

Dim. Si parte da questo fatto, che non dimostriamo.
Per $n \geq 2$ vale:

$$P(E) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^n(E) < \infty \text{ oppure } \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) < \infty .$$

Supponiamo dunque $\mathcal{L}^n(E) < \infty$.

Supponiamo anche che E sia limitato. Fissiamo $K > 0$ tale che $E \subset B_K(0)$ e consideriamo la famiglia di insiemi

$$\mathcal{F} = \{ F \subset \overline{B_K(0)} \ ; \ F \text{ è } \mathcal{L}^n\text{-misurabile e } \mathcal{L}^n(F) = \mathcal{L}^n(E) \}.$$

Fissiamo su $\mathcal{F}$ la topologia L^1 delle funzioni caratteristiche. Per il Teorema di immersione compatta di $BV(A)$ in $L^1(A)$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato regolare e per la semicontinuità inferiore del perimetro per la convergenza L^1 esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che

$$P(F) = \min \{ P(G) \ ; \ G \in \mathcal{F} \}.$$

Sia F^* il riarrangiamento di Steiner di F in x_n.
Allora si ha ancora $F^* \in \mathcal{F}$ e inoltre $P(F^*) \leq P(F)$.
Dalla minimalità segue che $P(F^*) = P(F)$.
Quindi: F è x_n-normale.
Siccome la scelta del sistema di coordinate è arbitraria:

F è normale rispetto ad ogni iperpiano di $\mathbb{R}^n$ che passa per $0 \in \mathbb{R}^n$.

Quindi F è un insieme convesso e dunque

$$F = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ f_1(x') < x_n < f_2(x') , \ x' \in D \}$$

con $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ convesso ed $f_1, -f_2 : D \to \mathbb{R}$ funzioni convesse. Inoltre

$$F^* = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x_n| < \frac{1}{2} (f_2(x') - f_1(x')) \}.$$

Dato un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$, con $A \subset\subset \mathrm{int}(D)$, per la Formula dell'Area:

$$P(F; A \times \mathbb{R}) = \int_A \left(\sqrt{1+|\nabla f_1|^2} + \sqrt{1+|\nabla f_2|^2} \right) dx',$$

$$P(F^*; A \times \mathbb{R}) = 2 \int_A \sqrt{1 + \frac{1}{4} |\nabla (f_2 - f_1)|^2} \, dx'.$$

Dal fatto che $P(F; A \times \mathbb{R}) = P(F^*; A \times \mathbb{R})$ si deduce (Teor. Differenziazione di Lebesgue) che in q.o. punto di D vale

$$\sqrt{1+|\nabla f_1|^2} + \sqrt{1+|\nabla f_2|^2} = 2 \sqrt{1 + \frac{1}{4} |\nabla f_2 - \nabla f_1|^2}$$

che è equivalente a

$$\sqrt{1+|\nabla f_1|^2} \sqrt{1+|\nabla f_2|^2} = \langle (1, \nabla f_1), (1, -\nabla f_2) \rangle$$

che implica $\nabla f_1 = -\nabla f_2$ q.o. in D.

Segue che $f_1 + f_2$ è costante in D e quindi a meno di una traslazione in x_n possiamo supporre che

$$f_1 + f_2 = 0 \quad \text{in} \quad D.$$

Conclusione: A meno di una traslazione F è simmetrico e normale rispetto ad ogni iperpiano di $\mathbb{R}^n$ passante per $0 \in \mathbb{R}^n$.

Dunque: F è una palla.

Abbiamo finito la dimostrazione (nel caso E limitato):

$$\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(F) = c_n \, P(F)^{\frac{n}{n-1}} \leq c_n \, P(E)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Inoltre se c'è un $=$ allora E è una palla.

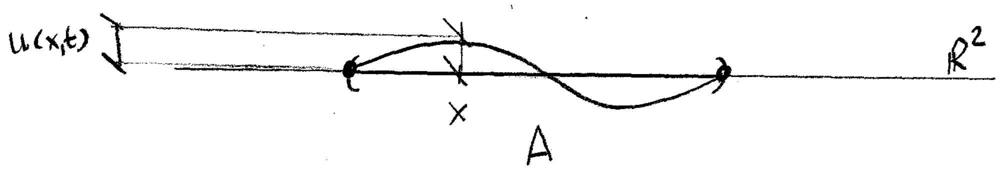
Caso E NON limitato: lasciato al lettore. Considerare $E \cap B_r$ con r opportuno. $\square$

PROBLEMA DELLA FREQUENZA FONDAMENTALE MINIMA

Consideriamo una membrana piana che vibra, rimanendo fissata al suo bordo. Questa membrana è descritta da una funzione $u : \bar{A} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dove $A \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato,

$u(x,t)$ è l'altezza nel punto $x \in A$ al tempo $t \in \mathbb{R}$,

e inoltre $u(x,t) = 0 \quad \forall x \in \partial A$ e $\forall t \in \mathbb{R}$;



PROBLEMA. Fissiamo l'area $\mathcal{L}^2(A)$. Che forma deve avere A affinché la frequenza fondamentale della membrana sia minima?

Evidentemente A deve essere un cerchio. Infatti da sempre i tamburi sono costruiti rotondi.

L'oscillazione della membrana è descritta dall'equazione delle onde

$$\begin{cases} \Delta u = u_{tt} & x \in A,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial A,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$u(x,t) = f(x)\, g(t).$$

Per separazione delle variabili si arriva a:

$$\begin{cases} \Delta f(x) = -\lambda f(x) & x \in A \\ f(x) = 0 & x \in \partial A \end{cases}$$

e

$$g_{tt}(t) = -\lambda g(t) \qquad t \in \mathbb{R},$$

dove $\lambda > 0$ è un parametro reale.

Gli autovalori dell'operatore di Laplace Δ con condizione di Dirichlet 0 al bordo formano una successione

$$\{\lambda_h : h \in \mathbb{N}\} \quad \text{con } \lambda_h > 0 \text{ e } \lambda_h \uparrow \infty \text{ per } h \to \infty.$$

Il primo autovalore $\lambda(A) := \lambda_1$ è il quadrato della frequenza fondamentale.

Moltiplichiamo l'equazione $\Delta f = -\lambda f$ per f e integriamo

$$\int_A f\, \Delta f \, dx = -\lambda \int_A f^2 dx$$

e integrando per parti con $f = 0$ su ∂A si trova

$$\int_A |\nabla f|^2 dx = \lambda \int_A f^2 dx .$$

Questa è una disuguaglianza di Poincaré con "=".

Abbiamo così scoperto la caratterizzazione variazionale del primo autovalore:

$$\circledast \qquad \lambda(A) = \inf \left\{ \frac{\int_A |\nabla f|^2 dx}{\int_A f^2 dx} : f \in H_0^1(A),\ f \neq 0 \right\} .$$

Con il metodo diretto del calcolo delle variazioni si prova che l'estremo inferiore è raggiunto. Si ottiene così la disuguaglianza di Poincaré con costante sharp:

$$\int_A f^2 dx \leq \frac{1}{\lambda(A)} \int_A |\nabla f|^2 dx .$$

Il problema della frequenza fondamentale minima si riformula allora nel seguente modo:

<u>PROBLEMA</u> Per quali $A \subset \mathbb{R}^2$ con $\mathcal{L}^2(A) < \infty$ fissato il valore minimo $\lambda(A)$ in $\circledast$ è minimo.

Vogliamo provare che questo avviene se e solo se A è un cerchio.

RIARRANGIAMENTO DI SCHWARZ

Sia $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $n \geq 1$, una funzione $\mathcal{L}^n$-misurabile e per $t>0$ definiamo i sopralivelli

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, f(x) > t\}.$$

Supponiamo che $\mathcal{L}^n(E_t) < \infty$ per ogni $t>0$.

La funzione f si può rappresentare nel seguente modo:

$$f(x) = \int_0^{f(x)} dt = \int_0^\infty \chi_{(0,f(x))}(t)\, dt = \int_0^\infty \chi_{E_t}(x)\, dt.$$

Per ogni $t>0$ definiamo:

$$E_t^* = B_r(0) \quad \text{dove } r>0 \text{ è tale che } \mathcal{L}^n(B_r) = \mathcal{L}^n(E_t).$$

Per la disuguaglianza isoperimetrica:

$$P(E_t^*) \leq P(E_t) \qquad \forall t>0.$$

Definiamo la funzione $f^* : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ ponendo

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi_{E_t^*}(x)\, dt.$$

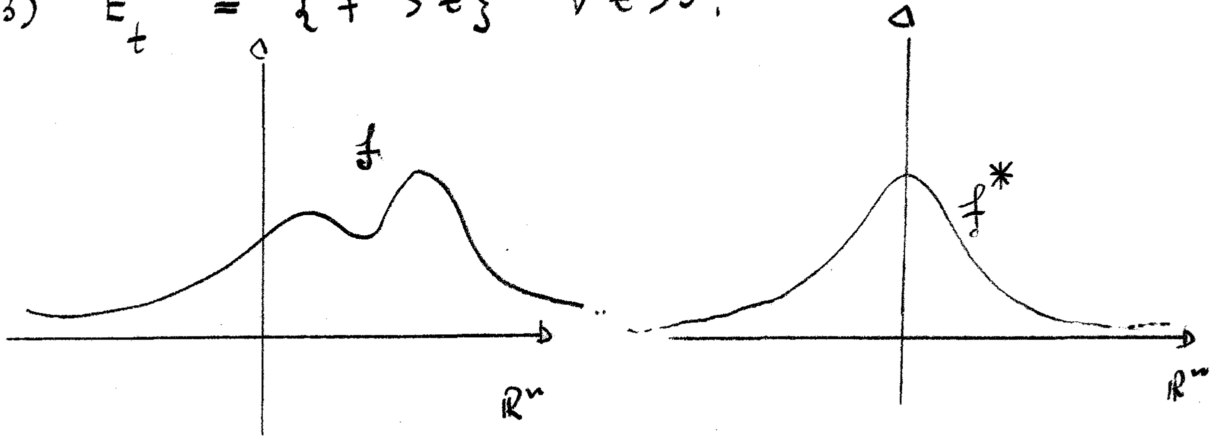
<u>DEF</u> La funzione f^* si dice riarrangiamento di Schwarz di f.

Osservazioni La funzione f^* verifica:

1) f^* è $\mathcal{L}^n$-misurabile,

2) $f^*(x) = \varphi(|x|)$ per una funzione $\varphi: (0,\infty) \to [0,\infty)$ decrescente,

3) $E_t^* = \{f^* > t\}$ $\forall t > 0$.



Commenti

1) $f \in C^1 \not\Rightarrow f \in C^1$.

2) $f \in BV(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f^* \in BV(\mathbb{R}^n)$, Non banale.

3) $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \overset{p>1}{\Longrightarrow} f^* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, Non banale.

Lemma Per ogni $p > 0$ si ha
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f^*(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx.$$

Dim. Si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{f(x)^p} dt\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \chi_{(0,f(x)^{1/p})}(t)\,dt\,dx$$

$$= \int_0^\infty \int_{\{f(x)^p>t\}} dx\,dt = \int_0^\infty \mathcal{L}^n(\{x\in\mathbb{R}^n;\ f(x)>t^{1/p}\})\,dt$$

$$= \int_0^\infty \mathcal{L}^n(\{x\in\mathbb{R}^n;\ f^*(x)>t^{1/p}\})\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)^p\,dx.$$

$\square$

<u>Lemma</u> Sia $f\in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$, $f\geq 0$, una funzione riarrangiabile. Allora $\mathrm{Lip}(f^*)\leq \mathrm{Lip}(f)$.

La dimostrazione usa strumenti non elementari e viene omessa.

<u>TEOREMA</u> Sia $1\leq p<\infty$. Per ogni $f\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$ con $f\geq 0$ e riarrangiabile si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*(x)|^p\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p\,dx,$$

Dim. Sappiamo che $f^*\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$ con differenziabile quasi ovunque. Partiamo dal caso $p=1$. Dalla formula di Coarea:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\,dx = \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_t)\,dt,$$

dove $E_t = \{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t \}$, stiamo supponendo $\mathcal{L}^n(E_t) < \infty$. Analogamente, definiamo $E_t^* = \{ f^* > t \}$.

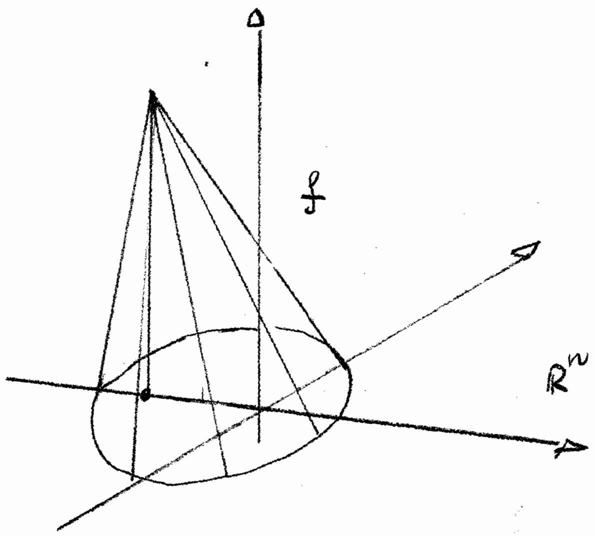
Sappiamo che

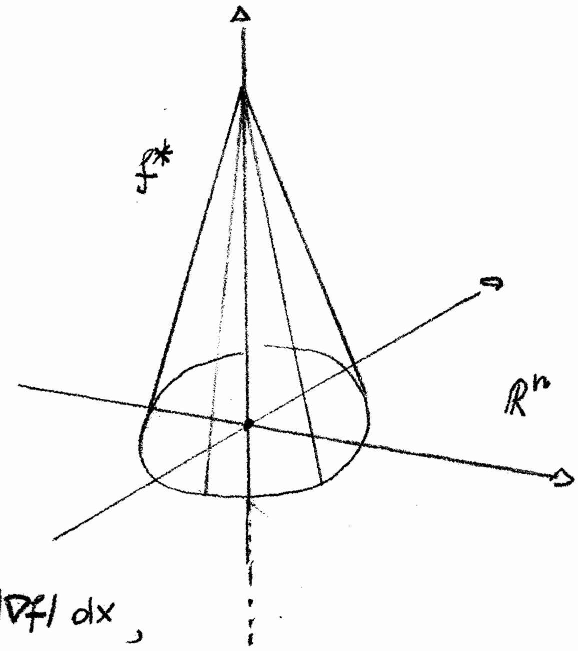
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(E_t^*) &= \mathcal{L}^n(E_t), \\ P(E_t^*) &\leq P(E_t), \end{aligned} \qquad \forall t > 0$$

Di conseguenza

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| \, dx \overset{\circledast}{\geq} \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_t^*) \, dt = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*| \, dx.$$

Se poi in $\circledast$ c'è un "=" allora gli insiemi $E_t \subset \mathbb{R}^n$ sono palle per q.o. $t > 0$. Queste palle tuttavia potrebbero non avere gli stessi centri:





In questo esempio: $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| \, dx$,

ma f non è simmetrica radiale.

Ora passiamo al caso $p>1$. In questo caso la formula di Coarea fornisce

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx = \int_0^\infty \int_{\partial E_t} |\nabla f(x)|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1}(x)\, dt,$$

Osserviamo che

$$\mathcal{L}^n(E_t) = \int_{E_t} \frac{1}{|\nabla f|} |\nabla f|\, dx = \int_t^\infty \int_{\partial E_s} \frac{1}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^{n-1}(x)\, ds,$$

$$\mathcal{L}^n(E_t^*) = \int_t^\infty \int_{\partial E_s^*} \frac{1}{|\nabla f^*|} d\mathcal{H}^{n-1}(x)\, ds = \int_t^\infty \underset{\text{su } \partial E_s}{\frac{1}{|\nabla f^*|}} \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_s^*)\, ds,$$

essendo $|\nabla f^*|$ costante su ∂E_s:

$$|\nabla f^*(x)| = |\nabla(\varphi(|x|))| = \left|\varphi'(|x|)\frac{x}{|x|}\right| = -\varphi'(|x|),$$

Differenziando $\mathcal{L}^n(E_t) = \mathcal{L}^n(E_t^*)$ si trova

$$\int_{\partial E_t} \frac{1}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{|\nabla f^*|} \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_t^*)$$

per q.o. $t>0$.

Siano ora $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ esponenti coniugati, Con la disuguaglianza di Hölder si trova:

$$H^{n-1}(\partial E_t) = \int_{\partial E_t} \frac{1}{|\nabla f|^{\frac{1}{q}}} |\nabla f|^{\frac{1}{q}} \, dH^{n-1} \leq$$

$$\leq \left(\int_{\partial E_t} \frac{1}{|\nabla f|} dH^{n-1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\partial E_t} |\nabla f|^{\frac{p}{q}} dH^{n-1} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{\partial E_t} \frac{1}{|\nabla f|} dH^{n-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\partial E_t} |\nabla f|^{p-1} dH^{n-1} \right)^{\frac{1}{p}},$$

infatti $q = \frac{p}{p-1}$. Deduciamo che

$$\int_{\partial E_t} |\nabla f|^{p-1} dH^{n-1} \geq H^{n-1}(\partial E_t)^p \left(\int_{\partial E_t} \frac{1}{|\nabla f|} dH^{n-1} \right)^{1-p}$$

$$\geq H^{n-1}(\partial E_t)^p \, |\nabla f^*|^{p-1} \, H^{n-1}(\partial E_t^*)^{1-p}$$

$$\geq |\nabla f^*|^{p-1} \, H^{n-1}(\partial E_t^*) = \int_{\partial E_t^*} |\nabla f^*|^{p-1} dH^{n-1}.$$

Integrando su $(0,\infty)$ si trova la tesi.

$\square$

<u>COMMENTO</u> Supponiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p dx$$

con $p>1$. Dal fatto che $H^{n-1}(\partial E_t) = H^{n-1}(\partial E_t^*)$ segue che gli insiemi E_t sono palle, per q.o. $t>0$.

Dalla condizione di uguaglianza nella disuguaglianza di Hölder si deduce che per q.o. $t > 0$

$$\frac{1}{|\nabla f|^{1/q}} = \text{costante} \cdot |\nabla f|^{1/q} \quad \text{su } \partial E_t ,$$

Ovvero: per q.o. $t > 0$ $\exists\ \lambda(t) \geq 0$ tale che

$$x \in \partial E_t \implies |\nabla f(x)| = \lambda(t).$$

Se $\lambda(t) \neq 0$ questo implica che le palle sono concentriche.
Infatti per q.o. $t > 0$ esistono $r(t) > 0$ e $x_0(t) \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$f(x_0(t) + r(t)v) = t \quad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^n \text{ con } |v| = 1.$$

D'altra parte $\nabla f(x_0(t) + r(t)v) = \lambda(t)v$.
Differenziando l'identità precedente (da giustificare la possibilità):

$$1 = \langle \nabla f(x_0(t) + r(t)v),\ \dot{x}_0(t) + \dot{r}(t)v \rangle =$$

$$= \langle \lambda(t)v,\ \dot{x}_0(t) + \dot{r}(t)v \rangle = \lambda(t)\langle v, \dot{x}_0(t)\rangle + \lambda(t)\dot{r}(t),$$

valido $\forall\ |v| = 1$. Se $\lambda(t) \neq 0$ questo implica che $\dot{x}_0(t) = 0$.

□

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un aperto limitato e sia B una palla Euclidea con $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(B)$. Allora le frequenze fondamentali di A e B verificano:

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_1(B),$$

se inoltre $\lambda_1(A) = \lambda_1(B)$ allora A è una palla Euclidea.

Dim. Sia $A^* = B_r(0)$ con $\mathcal{L}^n(B_r(0)) = \mathcal{L}^n(A)$. Sia $f \in H_0^1(A) \cap C^\infty(A)$ il minimo di

$$\lambda_1(A) = \min\left\{ \frac{\int_A |\nabla f|^2 dx}{\int_A f^2 dx} \; ; \; f \in H_0^1(A), f \neq 0 \right\}.$$

Si può supporre $f > 0$ in A.
Sia f^* il riarrangiamento di Schwarz di f.
Allora

$$\int_{A^*} (f^*)^2 dx = \int_A f^2 dx$$

$$\int_{A^*} |\nabla f^*(x)|^2 dx \leq \int_A |\nabla f(x)|^2 dx,$$

e quindi $\lambda_1(B) = \lambda_1(A^*) \leq \lambda_1(A)$.
Omettiamo i dettagli nel caso dell'uguaglianza.

□

CENNI DI TEORIA DEL TRASPORTO OTTIMO

Siano μ, ν due misure di Borel finite su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$
con
$$\mu(\mathbb{R}^n) = \nu(\mathbb{R}^n).$$

Data $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ di Borel ($B \subset \mathbb{R}^m$ Borel $\Rightarrow$ $T^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^n$ Borel), la misura push-forward $T_\# \mu$ è definita
$$T_\# \mu(B) = \mu(T^{-1}B), \quad B \subset \mathbb{R}^m \text{ Borel}.$$

<u>Esercizio</u> Per $f : \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ di Borel si ha la formula del cambiamento di variabile
$$\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, d\, T_\#\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)\, d\mu(x).$$

<u>DEFINIZIONE</u> (Mappe di trasporto) Diciamo che $T \in \mathcal{T}(\mu,\nu)$ se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è di Borel e $T_\#\mu = \nu$.

Sia poi $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{continua}} [0,\infty)$ una "funzione costo".
Uno modello
$$c(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2 \quad \text{"costo quadratico"}$$

Il problema fondamentale del Trasporto ottimo è

$$\min\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} d(x,Tx)\, d\mu(x) \;:\; T \in \mathcal{T}(\mu,\nu)\right\}$$

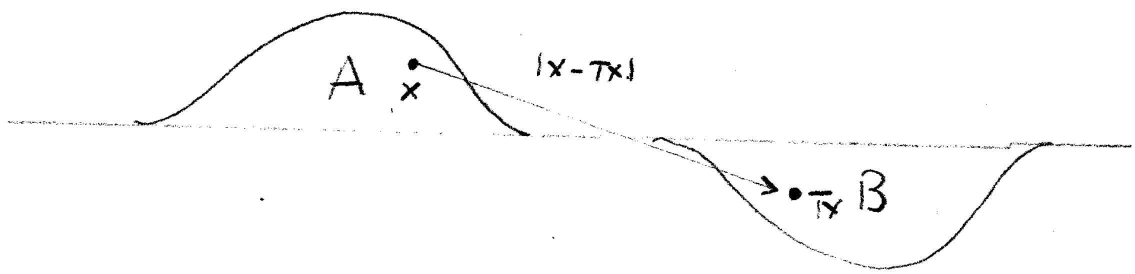
ESEMPIO $\quad \mu = \mathcal{L}^n \llcorner A \quad A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato

$\nu = \mathcal{L}^n \llcorner B \quad B \subset \mathbb{R}^n$ " "

con $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(B)$

Il problema di Monge è: $\quad (d = |x-y|)$

$$\min\left\{ \int_A |x - Tx|\, dx \;:\; T_\# \mathcal{L}^n \llcorner A = \mathcal{L}^n \llcorner B\right\}$$



Qui $d(x,y) = |x-y|$ con esponente $p=1$ in $|x-y|^p$.

COMMENTO $\quad$ Supponiamo

$\mu = f\, \mathcal{L}^n$

$\nu = g\, \mathcal{L}^n \quad$ con $\quad f, g \geq 0$

$\|f\|_1 = \|g\|_1$

Supponiamo che $\nu = T_\# \mu$ con

T diffeomorfismo di classe C^1.

Allora per $B \subset \mathbb{R}^n$ Borel: (ad es, palla)

$$\int_B f(x)\, dx = \mu(B) = \mu(T^{-1}TB) =$$

$$= \nu(TB) = \int_{TB} g(y)\, dy = \left[y = T(x)\right]$$

$$= \int_B g(T(x))\, |\det JT(x)|\, dx$$

Dividendo per $\mathcal{L}^n(B)$ e facendo $\mathcal{L}^n(B) \to 0$ si trova

$$f(x) = g(T(x))\, |\det JT(x)| \quad \text{per q.o. } x.$$

Supponendo $T(x) = \nabla\varphi(x)$ con $\varphi \in C^2$ ed $H\varphi \geq 0$ si ottiene

$$\det H\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(T(x))}$$

dove $g(T(x)) > 0$. Questa è l'equazione di Monge - Ampère.

Kantorovic ha introdotto una formulazione debole del problema di Monge.

Su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ abbiamo le proiezioni

$$p^1(x,y) = x \in \mathbb{R}^n,$$
$$p^2(x,y) = y \in \mathbb{R}^n.$$

<u>DEFINIZIONE</u> (Piano di trasporto) Siano μ, ν come sopra. Definiamo l'insieme dei piani di trasporto:

$$\Pi(\mu,\nu) = \left\{ \pi \text{ misura di Borel su } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ tale che } p^1_\# \pi = \mu \text{ e } p^2_\# \pi = \nu \right\}.$$

<u>OSS</u>: $\mu \otimes \nu \in \Pi(\mu,\nu)$.

Introduciamo il funzionale $I : \Pi(\mu,\nu) \to [0,\infty]$.

$$I(\pi) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d(x,y) \, d\pi$$

Il problema di minimo di Kantorovic è

$$\min \{ I(\pi) \; ; \; \pi \in \Pi(\mu,\nu) \} \; ;$$

Vantaggi:

1) Si cerca una misura invece che una mappa.

2) I vincoli sono lineari.

COMMENTO Supponiamo che $T \in \mathcal{T}(\mu, \nu)$ e consideriamo $Id \times T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ $\quad Id \times T\,(x) = (x, Tx)$.

La misura $\pi = (Id \times T)_{\#}\mu$ è in $\Pi(\mu, \nu)$ e inoltre $spt(\pi) \subset gr(T)$, ovvero $\pi(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus gr(T)) = 0$.

Supponiamo viceversa che $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ sia una misura tale che $spt(\pi) \subset gr(T)$ con $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di Borel. Allora $\nu = T_{\#}\mu$.

Inoltre, nei due casi si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d(x,y)\, d\pi = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d(x,y)\, d\,(Id \times T)_{\#}\mu$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} d(x, Tx)\, d\mu.$$

Quindi, se esistono i minimi si ha

minimo Kantorovic $\leq$ minimo Monge

Se poi il minimo di Kantorovic è del tipo $\pi = (Id \times T)_{\#}\mu$ allora è anche un minimo di Monge.

OSS $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Borel

INSERTO

$$Id \times T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$
$$x \to (x, Tx)$$

① $T \in \mathcal{T}(\mu,\nu) \Rightarrow \pi := (Id \times T)_\# \mu \in \Pi(\mu,\nu)$

e $spt(\pi) \subset gr(T)$

② $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ e $spt(\pi) \subset gr(T)$

$$\Downarrow$$

$$T_\# \mu = \nu$$

Dim
$$\begin{aligned} T_\# \mu(A) &= \mu(T^{-1}A) \\ &= p^1_\# \pi (T^{-1}A) \\ &= \pi(T^{-1}A \times \mathbb{R}^n) \\ &= \pi(\{(x,y) : Tx \in A \ \ y \in \mathbb{R}^n\}) \\ &= \pi(\{(x,y) : Tx \in A \text{ e } y = Tx\}) \\ &= \pi(\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n \text{ e } y \in A\}) \\ &= \pi(\mathbb{R}^n \times A) = p^2_\# \pi(A) \\ &= \nu(A). \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE Siano μ, ν due misure di Borel con supporto compatto e $\mu(\mathbb{R}^n) = \nu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Sia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ continua. Allora, il minimo di Kantorovic esiste finito.

La dimostrazione si basa sul teorema di compattezza per le misure di Radon

TEOREMA Sia $(\mu_h)_{h \in \mathbb{R}}$ una successione di misure di Borel (Radon) tali che

$$\sup_{h \in \mathbb{N}} \mu_h(\mathbb{R}^n) < \infty .$$

Allora esiste una sottosuccessione $(\mu_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ed esiste una misura di Borel (Radon) μ tale che $\mu_{h_k} \xrightarrow{*} \mu$ ovvero

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, d\mu_{h_k} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, d\mu$$

per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, continua con supporto compatto.

DIM. della PROP. Siano H, K compatti per cui $spt(\mu) \subset H$ e $spt(\nu) \subset K$, se $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ allora $spt(\pi) \subset H \times K$.

Sia $\pi_h \in \Pi(\mu,\nu)$ minimizzante:

$$\lim_{h \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d(x,y)\, d\pi_h = m =$$

$$= \inf \{ I(\pi) \; ; \; \pi \in \Pi(\mu,\nu) \} < \infty.$$

A meno di sottosuccessione, si ha $\pi_h \overset{*}{\rightharpoonup} \pi$ con π misura di Borel (Radon).

Siccome $spt\, \pi_h \subset H \times K$ $\forall h$, possiamo considerare d (continua e) con supporto compatto

Dunque

$$\lim_{h \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d(x,y)\, d\pi_h = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d(x,y)\, d\pi.$$

Lasciamo ora come esercizio di verificare che

$$p^1_{\#}\pi = \mu \quad e \quad p^2_{\#}\pi = \nu.$$

HINT: $\pi_h \overset{*}{\rightharpoonup} \pi \iff \pi_h(B) \to \pi(B)$
$\forall B$ Borel con $\pi(\partial B) = 0$.

$\square$

Kantorovic ha trasformato il problema $\min\{I(\pi)\ ;\ \pi\in\Pi(\mu,\nu)\}$ in un problema duale.

Consideriamo l'insieme di coppie di funzioni

$$\Phi = \left\{ (\varphi,\psi) :\ \begin{array}{l}\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n;\mu)\\ \psi\in L^1(\mathbb{R}^n;\nu)\end{array},\ \begin{array}{c}\varphi(x)+\psi(y)\le d(x,y)\\ x,y\in\mathbb{R}^n\end{array}\right\}$$

dove d è la funzione costo assegnata.

Definiamo $J : \Phi \to \mathbb{R}$

$$J(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\, d\nu .$$

Se $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$, e' come scrivere

$$J(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \big(\varphi(x)+\psi(y)\big)\, d\pi ,$$

e chiaramente

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi} J(\varphi,\psi) \le \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} d(x,y)\, d\pi = I(\pi)$$

e quindi

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi} J(\varphi,\psi) \le \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi) .$$

In realtà, vale il seguente

<u>TEOREMA (di dualità)</u> Siano μ, ν due misure di Borel tali che $\mu(\mathbb{R}^n) = \nu(\mathbb{R}^n)$, sia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ continua. Allora

$$\circledast \qquad \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi} J(\varphi,\psi) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi),$$

La dimostrazione è omessa, si basa su argomenti di analisi funzionale.

D'ora in avanti supporremo che

$$d(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2 .$$

In questo caso:

$$I(\pi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \left(|x|^2 - 2\langle x,y\rangle + |y|^2\right) d\pi$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 d\mu + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 d\nu}_{\overset{\shortparallel}{M}} - \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \langle x,y\rangle \, d\pi$$

Analogamente:

$$J(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\,d\nu$$

$$= M - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|x|^2}{2} - \varphi(x)\right) d\mu$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|y|^2}{2} - \psi(y)\right) d\nu$$

$$= M - \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\varphi}(x)\,d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\psi}(y)\,d\nu$$

e inoltre

$$\bar{\varphi}(x) + \bar{\psi}(y) = \frac{1}{2}|x|^2 - \varphi(x) + \frac{1}{2}|y|^2 - \psi(y)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(|x|^2 + |y|^2\right) - \frac{1}{2}|x-y|^2 = \langle x, y\rangle .$$

In questi conti occorre: $M < \infty$.

Dunque $\circledast$ si riformula nel seguente modo

$$(**) \qquad \inf_{\substack{(\bar{\varphi},\bar{\psi}) \\ \bar{\varphi}(x)+\bar{\psi}(y) \geq \langle x,y\rangle}} J(\bar{\varphi},\bar{\psi}) = \sup_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \langle x,y\rangle\, d\pi$$

È un massimo.
Lo abbiamo provato.

Definiamo la funzione convessa coniugata

$$\bar{\varphi}^*(y) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \langle y, z\rangle - \bar{\varphi}(z), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

É convessa in quanto sup di funzioni affini. Inoltre

$$\bar{\varphi}^*(y) \leq \bar{\psi}(y), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

e dunque

$$J(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \geq J(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}^*) \geq J(\bar{\varphi}^{**}, \bar{\varphi}^*)$$

dove ora $\bar{\varphi}^*$ e $\bar{\varphi}^{**}$ sono entrambe convesse (e coniugate fra loro).

LEMMA L'estremo inferiore

$$\inf_{(\bar{\varphi}^*, \bar{\varphi}^{**})} J(\bar{\varphi}^*, \bar{\varphi}^{**}) \qquad \text{D}$$

è raggiunto.

La dimostrazione è omessa. Si basa sul Teorema di Ascoli - Arzelà.

Sia $\varphi := \bar{\varphi}^*$ una funzione convessa che fornisce il minimo in (D).

Sia $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ un piano di trasporto ottimale.

Allora (**) diventa

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (\varphi(x) + \varphi^*(y))\, d\pi = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \langle x,y\rangle\, d\pi$$

ovvero

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \underbrace{(\varphi(x) + \varphi^*(y) - \langle x,y\rangle)}_{\substack{\geq \ \forall x,y \\ 0}}\, d\pi = 0$$

Deduciamo che π-q.o. si ha

$$\varphi(x) + \varphi^*(y) = \langle x,y\rangle$$

e quindi per π-q.o. (x,y) si trova

$$\langle x,y\rangle \overset{(\geq)}{=} \varphi(x) + \varphi^*(y) \geq \varphi(x) + \langle y,z\rangle - \varphi(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

ovvero

$$\varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle y, z-x\rangle \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

ovvero $y \in \partial\varphi(x)$, sottodifferenziale di f in x.

Esiste dunque $N \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tale che

1) $\pi(N) = 0$.

2) $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus N \implies y \in \partial\varphi(x)$.

La funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile q.o. $-\mathcal{L}^n$.
Dunque esiste $N_1 \subset \mathbb{R}^n$ tale che

a) $\mathcal{L}^n(N_1) = 0$

b) $x \in \mathbb{R}^n \setminus N_1 \implies \partial\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}$

Supponiamo ora che $\mu << \mathcal{L}^n$. Allora

$$0 = \mu(N_1) = p^1_{\#}\pi\,(N_1) = \pi\,(N_1 \times \mathbb{R}^n).$$

Dunque se $(x,y) \notin N \cup N_1 \times \mathbb{R}^n$ ($\leftarrow$ misura $\pi = 0$)
deve essere $y = \nabla\varphi(x)$. La funzione

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \begin{array}{ll} T(x) = \nabla\varphi(x) & x \in \mathbb{R}^n \setminus N_1 \\ T(x) = 0 & x \in N_1 \end{array}$$

è di Borel e inoltre $\mathrm{spt}(\pi) \subset \mathrm{gr}(T)$ ovvero

$$\pi = (\mathrm{Id} \times T)_{\#}\,\mu$$

Il piano di trasporto π è indotto da una mappa di trasporto $T = \nabla\varphi$.
Abbiamo dimostrato il seguente teorema di Brenier:

(Brenier)

<u>TEOREMA</u> Siano μ, ν due misure di Borel in $\mathbb{R}^n$ con supporto compatto, $\mu(\mathbb{R}^n) = \nu(\mathbb{R}^n) < \infty$ e $\mu \ll \mathcal{L}^n$. Allora esiste una funzione convessa $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $T = \nabla\varphi$ realizza il minimo

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |x - Tx|^2 \, d\mu \; : \; T_\# \mu = \nu \right\}.$$

<u>APPLICAZIONE ALLA DISUGUAGLIANZA ISOPERIMETRICA</u>

Sia $B = \{ x \in \mathbb{R}^n ; |x| < 1 \}$ la palla unitaria e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e aperto. Consideriamo le misure

$$\mu = \mathcal{L}^n \llcorner A$$

$$\nu = \mathcal{L}^n \llcorner B$$

con l'ipotesi $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(B)$.

Esiste $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $T = \nabla\varphi$ verifica $T_\# \mu = \nu$ (ed è un minimo con costo quadratico)

<u>ASSUMIAMO</u> che T sia un diffeomorfismo di classe C^1 da A in B.

Per provarlo occorre la teoria della regolarità.

Allora avremo: (JT = Jacobiano di T)

1) $T(x) \in B$ per ogni $x \in A$

2) $|\det JT(x)| = 1$ per ogni $x \in A$.

Possiamo dire che $\det JT(x) = +1$ per $x \in A$.

Ora useremo la disuguaglianza:

$$\circledast \qquad \det(M)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \operatorname{tr}(M)$$

per ogni matrice M simmetrica $n \times n$.
(È la disuguaglianza media geom. $\leq$ media aritm.)
Inoltre se c'è $=$ in $\circledast$ allora gli autovalori di M sono tutti uguali fra loro ed in particolare M è diagonale.

Dunque:

$$\mathcal{L}^n(A) = \int_A \det JT(x)^{\frac{1}{n}} dx \overset{\circledast}{\leq} \frac{1}{n} \int_A \operatorname{div} T(x)\, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \int_{\partial A} \langle T(x), N(x) \rangle \, dH^{n-1} \leq$$

Normale Esterna a ∂A

$|T(x)| \leq 1$

$$\leq \frac{1}{n} H^{n-1}(\partial A).$$

Per la palla sappiamo che $\mathcal{L}^n(B) = \frac{1}{n} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B)$,

Deduciamo che

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial B) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial A).$$

Se poi è $\mathcal{H}^{n-1}(\partial B) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A)$ allora sopra nel punto ⊛ c'è un "=" e quindi

$$1 = \det JT(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(JT(x))$$

per $x \in A$. Deduciamo che $JT(x) = \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$,

ovvero $T(x) = x_0 + x$, per $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

In altri termini T è una traslazione e quindi A è una palla.

□

CENNI SULLA TEORIA DELLE CORRENTI

1. Richiami sulle algebre esterne
2. Correnti, massa bordo
3. Problema di Plateau
4. Lemma di deformazione
5. Cenni sulla teoria della regolarità
6. Coni di Simon
7. Le varietà olomorfe sono minime

Le correnti sono "superfici generalizzate". Sono funzionali lineari e continui sulle forme differenziali con supporto compatto. Sono state introdotte per provare l'esistenza di soluzioni per il problema di Plateau in dimensione generica.

① Richiami sulle algebre esterne

V spazio vettoriale reale $(V = \mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$

Indichiamo con $\Lambda_m(V)$ la m-algebra esterna.
É uno spazio vettoriale. Una base è

$$\{ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} \; ; \; 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n \}$$

dove $e_1 \dots e_n$ è una base di $V = \mathbb{R}^n$.
Elementi di $\Lambda_m(V)$ sono somme di elementi indecomponibili della forma

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_m \; , \qquad v_i \in V.$$

Sia $\langle \cdot , \cdot \rangle$ un prodotto scalare su V. Lo si estende su $\Lambda_m(V)$ in questo modo;

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_m \, , w_1 \wedge \dots \wedge w_m \rangle = \det \left((\langle v_i, w_j \rangle)_{i,j=1\dots m} \right)$$

e quindi

$$|v_1 \wedge \dots \wedge v_m| = \sqrt{\det \left((\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1\dots m} \right)}$$

É il volume del "parallelepipedo"

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} t_i v_i \; ; \; 0 \leq t_i \leq 1 \right\}.$$

Sia V^* il duale di V, con base duale $dx_1, \dots, dx_n$.
Allora

$$\Lambda_m(V^*) = \Lambda_m(V)^* = \Lambda^m(V).$$

Una base è data da

$$\{ dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n \}.$$

La dualità è data da

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m (v_1 \wedge \dots \wedge v_m) = \det (\omega_i (v_j))_{i,j=1,\dots,m}$$

dove $\omega_i \in V^*$ e $v_j \in V$.

2 Correnti, massa e bordo.

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.
Definiamo le m-forme con supporto compatto in A

$$D^m(A) = \left\{ \omega : A \to \Lambda^m(\mathbb{R}^n) \text{ tali che } \omega(x) = \sum_I f_I(x)\, dx_I \right\}$$

dove $f_I \in C_c^\infty(A)$, $I = \{ i_1 < i_2 < \dots < i_m \}$ e

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}.$$

DEFINIZIONE $T : \mathcal{D}^m(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ è una corrente se:

i) T è lineare;

ii) T è limitato (continuo) nel senso che:

$\forall K \subset\subset A \ \exists C > 0 \ \exists k \in \mathbb{N}$ tali che

$$|T(\omega)| \leq C \, \|\omega\|_{C^k} \qquad \forall \omega \in \mathcal{D}^m(A)$$

con $\operatorname{spt} \omega \subset K$.

Sopra abbiamo usato $\|\omega\|_{C^k} = \sum_I \|f_I\|_{C^k}$.
Scriveremo: $T \in \mathcal{D}^m(A)^* = \mathcal{D}_m(A)$.

ESEMPIO Sia $\Sigma \subset A$ una superficie di classe C^∞ e $\dim(\Sigma) = m$, ed orientabile. Definiamo

$$[\![\Sigma]\!](\omega) = \underbrace{\int_\Sigma \omega}_{\text{definizione geometrica}} \overset{\text{Formula Area}}{=} \int_\Sigma \omega(\tau) \, d\mathcal{H}^m,$$

dove $\tau = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ e $v_1, \dots, v_m \in T_x \Sigma$ sono ortonormali e positivamente orientati.

Sia $K \subset\subset A$ compatto. Allora

$$\|\omega\|_{C^0} = \sup_{x \in \Sigma \cap K} \ \sup_{\substack{\tau \in \Lambda_m(\mathbb{R}^n) \\ |\tau| \leq 1}} |\omega(\tau)| < \infty$$

e quindi

$$\left| [\![\Sigma]\!](\omega) \right| \leq \|\omega\|_C \cdot H^m(\Sigma \cap A).$$

Dunque $T = [\![\Sigma]\!]$ è lineare e continua.
Dunque le superfici <u>orientate</u> sono correnti. $\square$

Sia $\omega \in C_c(A; \Lambda^m(\mathbb{R}^n)) =: X$, ovvero $\omega : A \to \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ è continua con supporto compatto. La comassa di ω è

$$\|\omega\|_C = \sup_{x \in A} \sup_{\substack{|\tau| \leq 1 \\ \tau \in \Lambda^m(\mathbb{R}^n)}} |\omega(\tau)|.$$

$(X, \|\cdot\|_C)$ è uno spazio normato.

<u>DEF (Massa di una corrente)</u> La massa di una corrente $T \in D^m(A)^*$

$$M(T) = \sup_{\|\omega\|_C \leq 1} |T(\omega)|.$$

Se $M(T) < \infty$ diremo che T ha massa finita.
Scriveremo anche $\|T\| = M(T)$.

Le correnti di massa finita con $\|\cdot\|$ formano uno spazio normato che coincide con il duale di X.
In particolare X^* è uno spazio di Banach.

<u>COMMENTO</u> Gli insiemi chiusi (top. forte) e limitati in un duale sono compatti nella topologia debole*. Quindi: se $(T_K)_{K\in\mathbb{N}}$ è una successione di correnti tale che

$$\sup_{K\in\mathbb{N}} M(T_K) < \infty$$

allora esiste una sottosuccessione $(T_{K_j})_{j\in\mathbb{N}}$ ed esiste T corrente (di massa finita) tali che

i) $T_{K_j}(\omega) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} T(\omega) \quad \forall \omega \in C_0(A;\Lambda^m(\mathbb{R}^n))$;

ii) La massa è semicontinua inferiormente

$$M(T) \leq \liminf_{j\to\infty} M(T_{K_j}) .$$

Il punto ii) segue dal fatto che $M(\cdot)$ è una norma duale.

<u>COMMENTO</u> Se $\Sigma \subset A$ è una superficie orientabile di dimensione $m\in\mathbb{N}$, si ha

$$M([\![\Sigma]\!]) = \sup_{\|\omega\|_c\leq 1} [\![\Sigma]\!](\omega)$$

$$= \sup_{\|\omega\|_c\leq 1} \int_\Sigma \omega(\tau)\, dH^m$$

con τ = m-piano tangente a Σ e

$$\|\omega\|_c \leq 1 \iff \sup_{|\tau|\leq 1} |\omega(\tau)| \leq 1$$

Se Σ è compatta ($\Rightarrow$ massa finita) si può scegliere $\omega = \tau^*$ ovvero $\omega(\tau) = 1$ identicamente su Σ e poi estendere ω in A in modo tale che $\omega \in C_c(A; \Lambda^m(\mathbb{R}^n))$ e $\|\omega\|_C \leq 1$.

Quindi si deduce che

$$M([\![\Sigma]\!]) = H^m(\Sigma).$$

Se è solo $H^m(\Sigma) < \infty$ si ragiona per approssimazione.

Quindi: La massa di una corrente estende la nozione di area. $\square$

La derivata esterna di $\omega \in D^m(A)$

$$\omega = \sum_I f_I(x)\, dx_I$$

è la $m+1$ forma $d\omega \in D^{m+1}(A)$

$$d\omega = \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I(x)}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I.$$

<u>DEF (Corrente bordo)</u> Il bordo di una corrente $T \in D^m(A)^*$ è la corrente $\partial T \in D^{m-1}(A)^*$

$$\partial T(\omega) = T(d\omega), \quad \omega \in D^{m-1}(A).$$

Osserviamo che $\omega \mapsto \partial T(\omega)$ è lineare.
Inoltre:

$$|\partial T(\omega)| = |T(d\omega)| \leq C \|d\omega\|_{C^K}$$

$$\leq C \|\omega\|_{C^{K+1}}$$

e quindi ∂T è limitato.

<u>COMMENTO</u> Sia Σ una superficie orientabile con bordo $\partial\Sigma$. Allora

$$[\![\partial\Sigma]\!](\omega) = \int_{\partial\Sigma} \omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\Sigma} d\omega = [\![\Sigma]\!](d\omega).$$

Quindi

$$\underset{\text{frontiera}}{[\![\underset{\uparrow}{\partial}\Sigma]\!]} = \underset{\text{corrente bordo}}{\underset{\uparrow}{\partial}[\![\Sigma]\!]} .$$

<u>DEF (Corrente normale)</u> Diciamo che T è una corrente normale se

$$M(T) + M(\partial T) < \infty .$$

Le correnti normali formano uno spazio di Banach.

③ PROBLEMA DI PLATEAU

Sia $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ una corrente senza bordo, $\partial T = 0$, e con supporto compatto.

Il Problema di Plateau è lo studio del problema di minimo

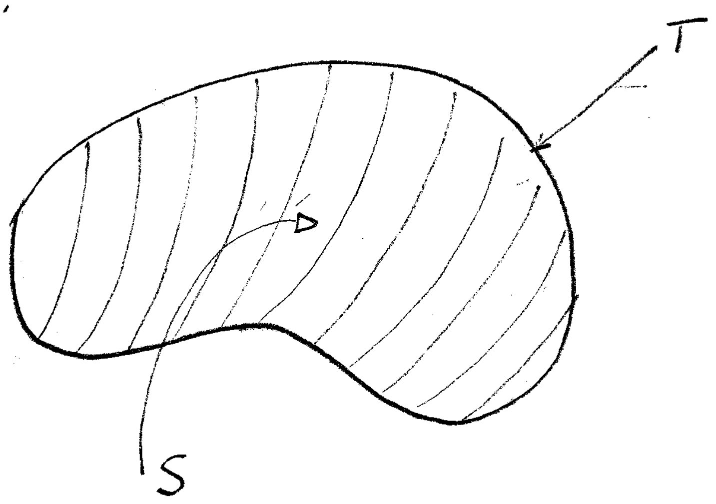
$$\min \left\{ M(S) \quad ; \quad S \in \mathcal{D}_{m+1}(\mathbb{R}^n) \ , \ \partial S = T \right\}.$$

Le questioni sono:

1) Esistenza dei minimi (possibilmente in classi ristrette di correnti)

2) Unicità dei minimi. In generalità non c'è.

3) Regolarità dei minimi: il minimo S è sperabilmente una superficie classica regolare.



DEF (Supporto) Il supporto di $T \in D_m(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme chiuso

$$spt(T) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \Omega$$

dove l'unione è fatta sugli aperti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tali che $T(\omega) = 0$ per ogni $\omega \in D^m(\Omega)$.

La teoria di Federer - Fleming stabilisce l'esistenza nella classe delle correnti rettificabili intere.

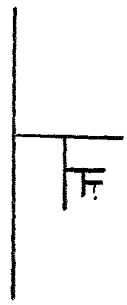
DEF (Insieme $\mathcal{H}^m$-rettificabile) Un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ è $\mathcal{H}^m$- rettificabile se:

1) $S = S_0 \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ con $\mathcal{H}^m(S_0) = 0$

ed $S_j \subset f_j(\mathbb{R}^m)$ con $f_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Lip. ;
(limitato)
(compatto)

2) $\mathcal{H}^m(S) < \infty$.

Esempio



É $\mathcal{H}^1$- rettificabile se la lunghezza totale è finita

DEF (Corrente rettificabile) Una corrente $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ si dice rettificabile se è della forma:

$$T(\omega) = \int_K \theta(x) \langle \vec{\tau}, \omega \rangle \, d\mathcal{H}^m(x)$$

dove:

1) $K \subset \mathbb{R}^n$ è $\mathcal{H}^m$-rettificabile

2) $\theta : K \to \mathbb{Z}$ è integrabile (funzione molteplicità)

3) $\vec{\tau} : K \to \Lambda_m(\mathbb{R}^n)$ è di Borel e inoltre

$$\vec{\tau}(x) = \tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_m \quad \text{(orientazione del piano tangente)}$$

con $\tau_1 \dots \tau_m$ ortonormali tangenti a K.

DEF (Corrente intera) Una corrente $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ si dice intera se:

1) T è rettificabile e $spt(T)$ è compatto

2) ∂T è rettificabile e $spt(\partial T)$ è compatto.

OSS. Le correnti intere sono normali, $M(T) < \infty$ e $M(\partial T) < \infty$.

Flat metric Per una corrente intera $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ definiamo

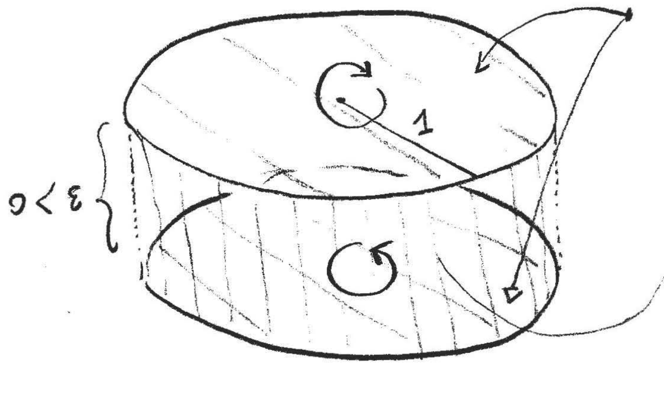
$$\mathcal{F}(T) = \inf\left\{ M(S) + M(A) \;:\; \underset{\text{con } S, A \text{ intere}}{T = S + \partial A} \right\}.$$

Osservazioni

1) $\mathcal{F}$ è una norma (esercizio) e $\mathcal{F}(T) \le M(T)$.

2) Se $\mathcal{F}(T_j - T) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ allora $T_j \xrightarrow[j\to\infty]{*} T$, la topologia della "flat metric" è più forte della topologia debole-$*$ (esercizio).

3) Si guardi la figura:



T_ε = due dischi di raggio 1, orientazioni opposte

S = superficie laterale del cilindro, orientata opportunamente

A = cilindro solido

In effetti: $T_\varepsilon = \partial A + S$ e inoltre

$$\mathcal{F}(T_\varepsilon) \overset{(=)}{\le} M(A) + M(S) = \pi\varepsilon + 2\pi\varepsilon = 3\pi\varepsilon$$

$$M(T_\varepsilon) = 2\pi.$$

TEOREMA (Federer - Fleming). Sia $R>0$ e siano $T_j \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}$, correnti intere tali che:

1) $\operatorname{spt}(T_j) \subset \overline{B(0,R)}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$;

2) $\sup_{j \in \mathbb{N}} M(T_j) + M(\partial T_j) < \infty$.

Allora esiste una corrente intera $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ tale che $\mathcal{F}(T_j - T) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

La dimostrazione si basa sul teorema di deformazione e viene omessa.

TEOREMA (Esistenza per il Problema di Plateau)

Sia $B \in \mathcal{D}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto tale che esista $T_0 \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ intera con supporto compatto tale che $\partial T_0 = B$. Allora il minimo

$$\min \{ M(T) \, : \, T \text{ intera con } \partial T = B \}$$

viene raggiunto.

Dim, Sia $R>0$ tale che $spt(B) \subset \overline{B(0,R)}$ e $spt(T_0) \subset \overline{B(0,R)}$.

Sia $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ minimizzante, ovvero:

i) T_j intera con $\partial T_j = B$;

ii) $\lim_{j\to\infty} M(T_j) = \inf\{M(T) : T \text{ intera}, \partial T = B\}$.

Sia $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la proiezione su $\overline{B(0,R)}$

$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| \leq R \\ R\dfrac{x}{|x|} & \text{se } |x| \geq R \end{cases}$$

È 1-Lipschitz. Le correnti

$$(\pi_\# T_j)(\omega) := T_j(\pi^*\omega)$$

pull-back di forme

verificano $M(\pi_\# T_j) \leq Lip(\pi)^m M(T_j) \leq M(T_j)$.

Inoltre $spt(\pi_\# T_j) \subset \overline{B(0,R)}$. (Esercizi)

Dunque possiamo supporre: $spt(T_j) \subset \overline{B(0,R)}$.

Definiamo

$$\hat{T}_j = T_j - T_0 .$$

Allora:

i) $spt(\hat{T}_j) \subset \overline{B(0,R)}$

ii) $M(\hat{T}_j) \leq M(T_j) + M(T_0) \leq C < \infty \quad \forall j$

iii) $\partial \hat{T}_j = \partial T_j - \partial T_0 = B - B = 0$.

Siamo nelle ipotesi del teorema di compattezza.
A meno di una sottosuccessione, esiste $\hat{T} \in D_m(\mathbb{R}^n)$ intera tale che

$$\mathcal{F}(\hat{T}_j - \hat{T}) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0 \qquad \left(\Rightarrow \ \hat{T}_j \overset{*}{\underset{j \to \infty}{\rightharpoonup}} \hat{T} \right)$$

Definiamo

$$T = \hat{T} + T_0 \, , \qquad (T \text{ è } \underline{\text{intera}})$$

Siccome $\partial \hat{T} = 0$ (in quanto $\partial \hat{T}_j = 0 \ \forall j$)
si ha

$$\partial T = \partial \hat{T} + \partial T_0 = 0 + B = B .$$

Inoltre

$$T_j \overset{*}{\underset{j \to \infty}{\rightharpoonup}} T$$

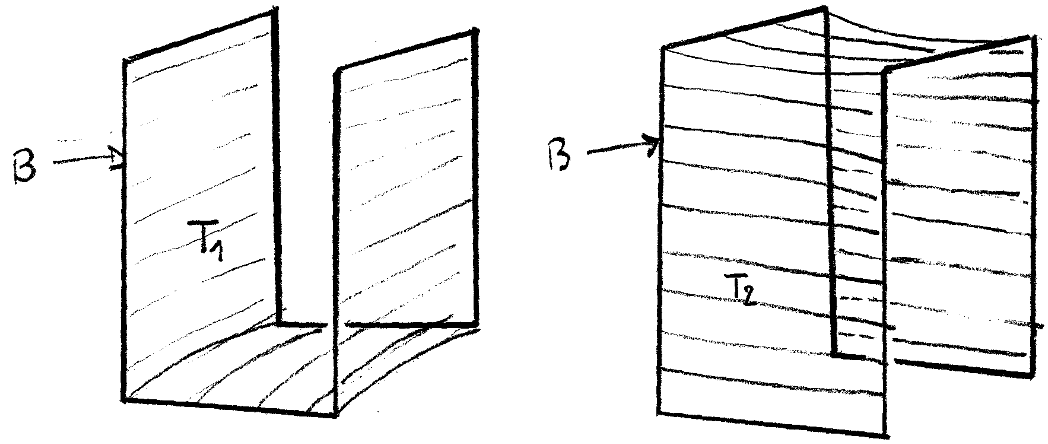
e per semicontinuità inferiore:

$$M(T) \leq \liminf_{j \to \infty} M(T_j) .$$

Quindi T è un minimo.

$\square$

<u>Commento</u> In generale non c'è unicità:



Ma sappiamo che se B è un grafico Lipschitz con la BSC allora la soluzione è unica.

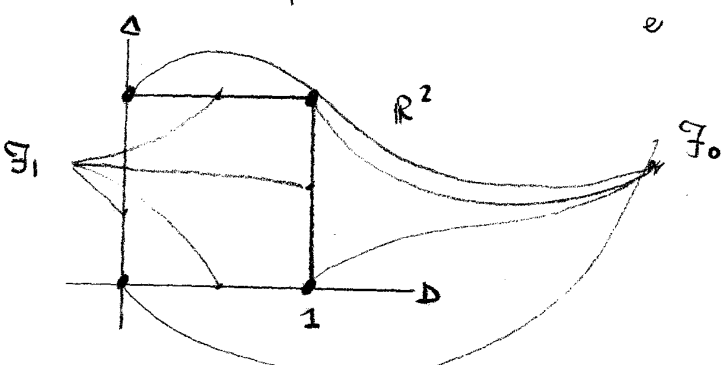
(4) LEMMA DI DEFORMAZIONE

Siano $0 \leq m < n$. Il cubo unitario di $\mathbb{R}^n$ è

$$C = [0,1]^n$$

su cui fissiamo una orientazione.
Le facce m-dimensionali di C sono

$$\mathcal{F}_m = \left\{ F = \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i] \quad \alpha_i, \beta_i \in \{0,1\}, \ \alpha_i \leq \beta_i \quad \text{e} \quad \alpha_i = \beta_i \ \ n-m \text{ volte} \right\}.$$



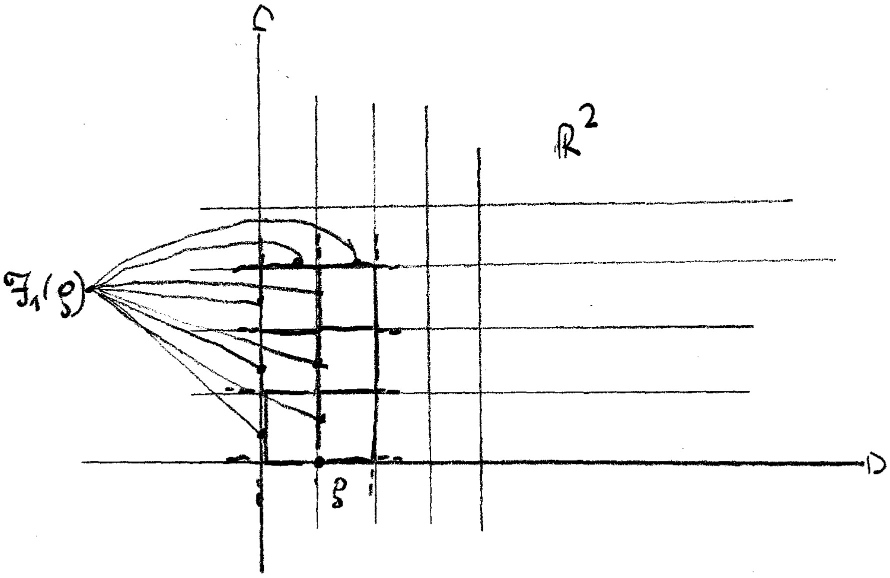
Riscaliamo e trasliamo:

$$C_\rho(x) = x + [0,\rho]^n \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad \rho > 0,$$

Prendiamo $x = \rho z$ con $z \in \mathbb{Z}^n$.

Facce di <u>tutti</u> i cubi traslati e riscalati:

$$\mathcal{F}_m(\rho) = \{ \rho(z + F) \; ; \; F \in \mathcal{F}_m , \; z \in \mathbb{Z}^n \}.$$



Per $F \in \mathcal{F}_m(\rho)$ con orientazione indotta, indichiamo con $[\![F]\!]$ la relativa corrente in $\mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$.

TEOREMA (DI DEFORMAZIONE) Siano $1 \leq m \leq n-1$ e $\rho > 0$.

Sia $T \in D_m(\mathbb{R}^n)$ una corrente normale:

$$M(T) + M(\partial T) < \infty .$$

Esistono $P, S \in D_m(\mathbb{R}^n)$ e $R \in D_{m+1}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$T - P = \partial R + S$$

e inoltre:

1) $P = \sum_{F \in \mathcal{F}_m(\rho)} p_F [\![F]\!]$ con $p_F \in \mathbb{R}$ ($p_F \in \mathbb{Z}$ se T è intera);

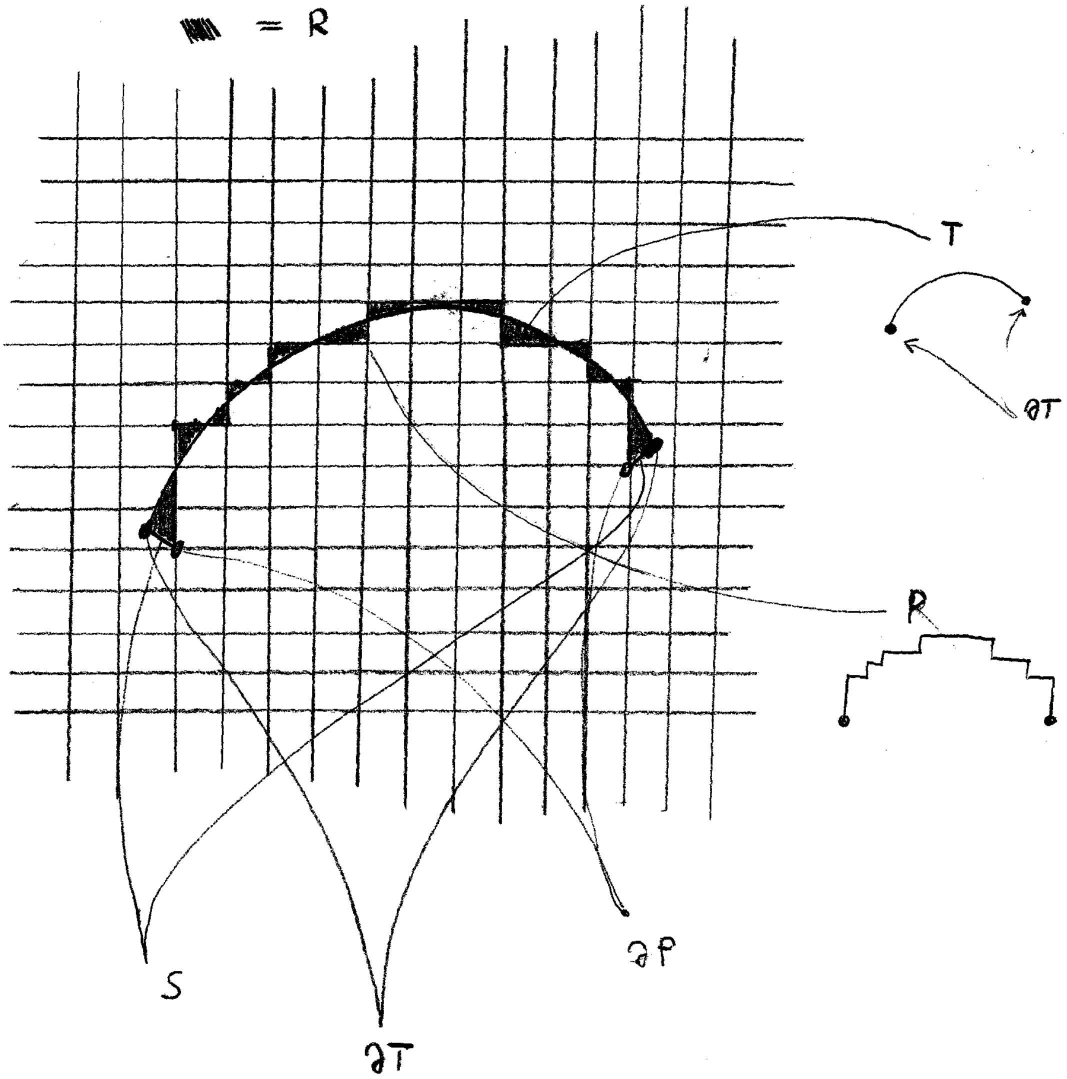
2) $M(P) \leq c\, M(T)$ e $M(\partial P) \leq c\, M(\partial T)$;

3) $M(R) \leq \rho\, c\, M(T)$;

4) $M(S) \leq \rho\, c\, M(\partial T)$.

Sopra, $c = c(m,n) > 0$ dipende da m ed n.

Spieghiamo la situazione con un disegno:



si ha $\partial R = T - P + S$

$$M(P) \leq C\,M(T) \quad e \quad \underset{\binom{''}{2}}{M(\partial P)} \leq C\,\underset{\binom{''}{2}}{M(\partial T)}$$

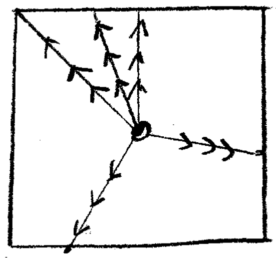
$$M(R) \leq \rho\, C\, M(T) \simeq \rho \cdot \text{lunghezza di } T$$

$$M(S) \leq \rho\, C\, M(\partial T) \simeq \rho .$$

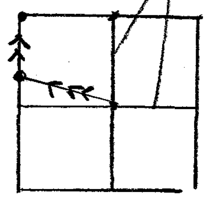
Idea della dimostrazione.

$\rho = 1$

$\psi : C \setminus \{(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})\} \to \partial C$ proiezione:



Per composizione si arriva a definire



$$\psi := \psi_m : C \setminus S_m \longrightarrow \bigcup_{F \in \mathcal{F}_m} F$$

1° step

$$\int_{[-1/2,\,1/2]^n} |\nabla \psi_m|^m \, dx < \infty$$

2° step. Esiste $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi(x+a)|^m \, d\|T\| \leq C \, M(T)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi(x+a)|^m \, d\|\partial T\| \leq C \, M(\partial T)$$

3° Step. Supponiamo $a = 0$, si considera la proiezione

$$\psi_\# T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n).$$

é concentrata su $\bigcup_{F \in \mathcal{F}_m(1)} F$.

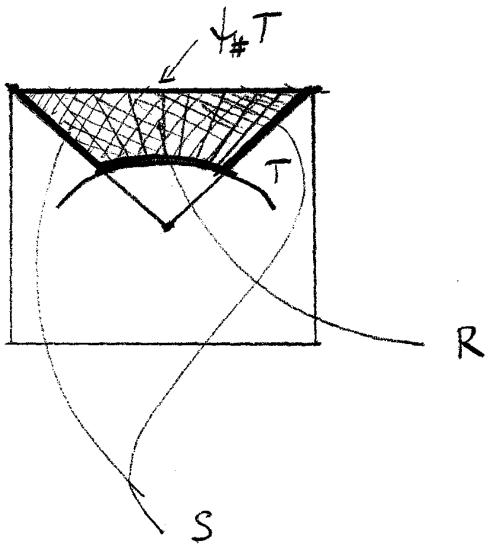
Si usa la <u>formula di omotopia</u> per legare T con $\psi_\# T$

$$T = \psi_\# T + \partial\left[h_\# ([\![(0,1)]\!] \times T) \right] \leftarrow \partial R$$

$$+ h_\# \left([\![(0,1)]\!] \times \partial T \right) \leftarrow S$$

dove

$$h(t,x) = tx + (1-t)\psi(x).$$



La corrente prodotto si definisce in questo modo:

$$T_1 \times T_2 \, (g(x,y)\, dx \wedge dy) = T_1 \left(T_2 \left(g(x,y)\, dy \right) \cdot dx \right).$$

4° step. La corrente $\psi_{\#}T$ su F non è del tipo $\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{p_F}\, [\![F]\!]$. Tuttavia è del tipo $\theta_F\, [\![F]\!]$ con $\theta_F \in BV(F)$. Dalla Disuguaglianza di Poincaré segue che sostituendo θ_F con la sua "media" si ottiene una buona approssimazione.

$\square$

Il teorema di deformazione ha varie applicazioni. Ad esempio:

$$\left.\begin{array}{l} T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n) \text{ intera} \\ M(\partial T) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \partial T \text{ intera}.$$

$\rightarrow$ Rettificabilità del bordo

Un altro corollario è il teorema isoperimetrico.

<u>TEOREMA</u> Siano $2 \le m \le n$ e $T \in \mathcal{D}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ una corrente intera con $\partial T = 0$ e $\operatorname{spt}(T)$ compatto. Allora esiste $R \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ intera tale che

$$T = \partial R \quad \text{e} \quad M(R)^{\frac{m-1}{m}} \le C(m,n)\, M(T).$$

Dim. Per il Teorema di Deformazione si

$$T - P = \partial R + S$$

con $S = 0$ in quanto $M(\partial T) = M(0) = 0$,

E inoltre

$$P = \sum_{F \in \mathcal{F}_{m-1}(\rho)} p_F [\![F]\!] \quad \text{con} \quad p_F \in \mathbb{Z}$$

$$M(P) \leq C(m,n)\, M(T)$$

$$M(R) \leq \rho\, C(m,n)\, M(T),$$

Siccome $M([\![F]\!]) = \rho^{m-1}$ se $F \in \mathcal{F}_{m-1}(\rho)$

si ha

$$M(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_{m-1}(\rho)} |p_F|\, M([\![F]\!])$$

$$= N(\rho)\, \rho^{m-1} \quad \text{con} \quad N(\rho) \in \underset{\{0,1,2,..\}}{\overset{}{\mathbb{N}}}.$$

Scegliendo $\rho > 0$ tale che

$$\underset{(\#)}{\rho^{m-1} > C(m,n)\, M(T)} \qquad \left(\text{ad es: } \rho = 2\,(C M(T))^{\frac{1}{m-1}}\right)$$

si deduce che $N(\rho) = 0 \implies P = 0 \implies T = \partial R$.

Inoltre

$$M(R) \leq 2\left(C\, M(T)\right)^{\frac{1}{m-1}} \cdot M(T) = C'\, M(T)^{\frac{m}{m-1}}.$$

$\square$

(5) Cenni sulla teoria della regolarità

Sia $T \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ una corrente intera, $1 \leq m \leq n$, e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto tale che $\partial T = 0$ su A.

Diciamo che T è una corrente di area minima in A se $M(T) \leq M(S)$ per ogni $S \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$ tale che $T - S$ ha supporto compatto in A.

Elenchiamo i principali teoremi di regolarità sulle correnti di area minima.

<u>Teorema (De Giorgi - Almgren)</u> Sia $m = n-1$ (codimensione 1).

1) Se $n \leq 7$ e T è di area minima, allora T è una ipersuperficie analitica.

2) Se $n > 7$, e T è di area minima, allora T è regolare al di fuori di un insieme di dimensione $\leq n-8$.

I coni di Simons provano che il risultato al punto 2) è preciso.

Teorema (Almgren - De Lellis - Spadaro) Sia $m < n-1$.
Se T è di area minima, allora T è una superficie regolare al di fuori di un insieme al più $(m-2)$-dimensionale.

Vedremo che le varietà olomorfe in $\mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{R}^4$ forniscono esempi di 2-superfici di area minima che possono avere singolarità in punti (insieme di dimensione 0).

⑥ Coni di Simons

Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ una ipersuperficie orientata e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Sia $\nu_\Sigma : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ un campo normale (continuo).

Un modo per provare che Σ è di area minima in A è mediante una tecnica di (sub)-calibrazione.

Supponiamo che sia $\Sigma = \partial E$ per un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ e supponiamo che esista un campo vettoriale $V \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ che verifichi le seguenti proprietà:

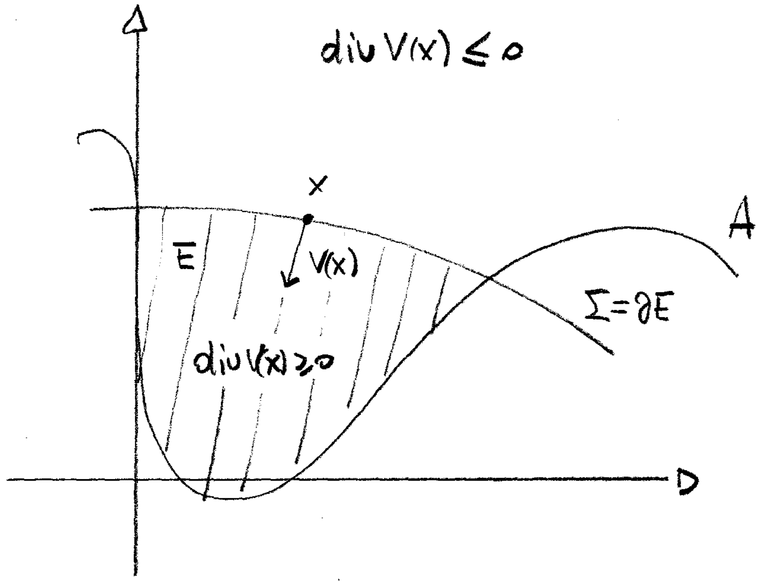
Il campo $V \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ verifica:

(1) $|V(x)| = 1$ per ogni $x \in A$,

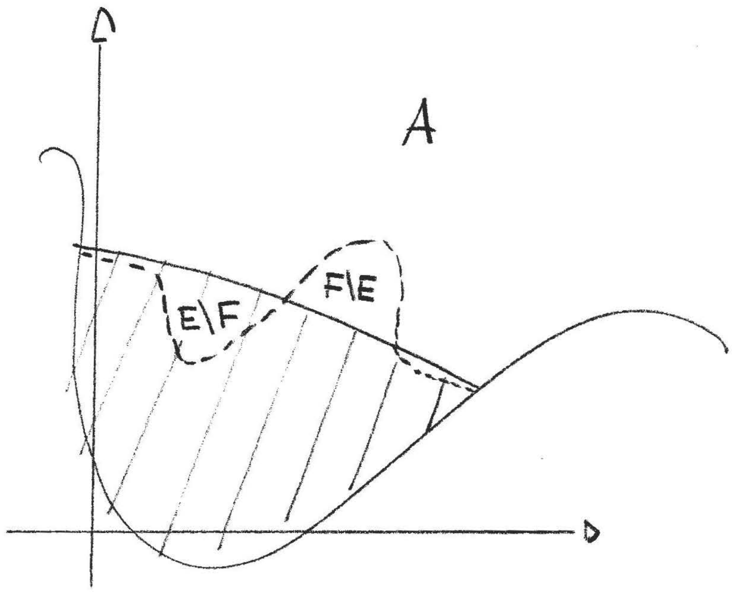
(2) $V(x) = \nu_E(x)$ normale interna di $\Sigma = \partial E$ nel punto $x \in \Sigma$. ($\nu_E = \nu_\Sigma$ interna)

(3) $\operatorname{div} V(x) \geq 0$ per $x \in E \cap A$.

(4) $\operatorname{div} V(x) \leq 0$ per $x \in A \setminus E$.



Sia poi $F \subset \mathbb{R}^n$ un insieme tale che $\partial F \cap A$ sia regolare (ad es. di classe C^1) ed $E \Delta F \subset\subset A$.



Possiamo supporre che $\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma \cap A) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap A) < \infty$.
Usando il Teorema della divergenza si trova su $E \setminus F$:

$$0 \overset{(3)}{\leq} \int_{E\setminus F} \operatorname{div} V(x)\, dx \overset{\substack{\text{Teorema}\\ \text{divergenza}}}{=} \int_{\partial E \setminus F} \underbrace{\langle V, -\nu_E \rangle}_{=-1} d\mathcal{H}^{n-1} +$$

$$+ \int_{\partial F \cap E} \underbrace{\langle V, \nu_F \rangle}_{\leq 1} d\mathcal{H}^{n-1} \overset{(1)+(2)}{\leq}$$

normale interna ad F

$$\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial F \cap E) - \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \setminus F)$$

In modo analogo:

$$0 \overset{(4)}{\geq} \int_{F\setminus E} \operatorname{div} V(x)\,dx = \int_{\partial F\setminus E} \overbrace{\langle V, -\nu_F\rangle}^{\geq -1} dH^{n-1} +$$

$$+ \int_{\partial E\cap F} \overbrace{\langle V, \nu_E\rangle}^{=1} dH^{n-1} \geq$$

$$\geq H^{n-1}(\partial E\cap F) - H^{n-1}(\partial F\setminus E).$$

Riordinando e sommando si deduce che $\Sigma = \partial E$ è di area minima in A:

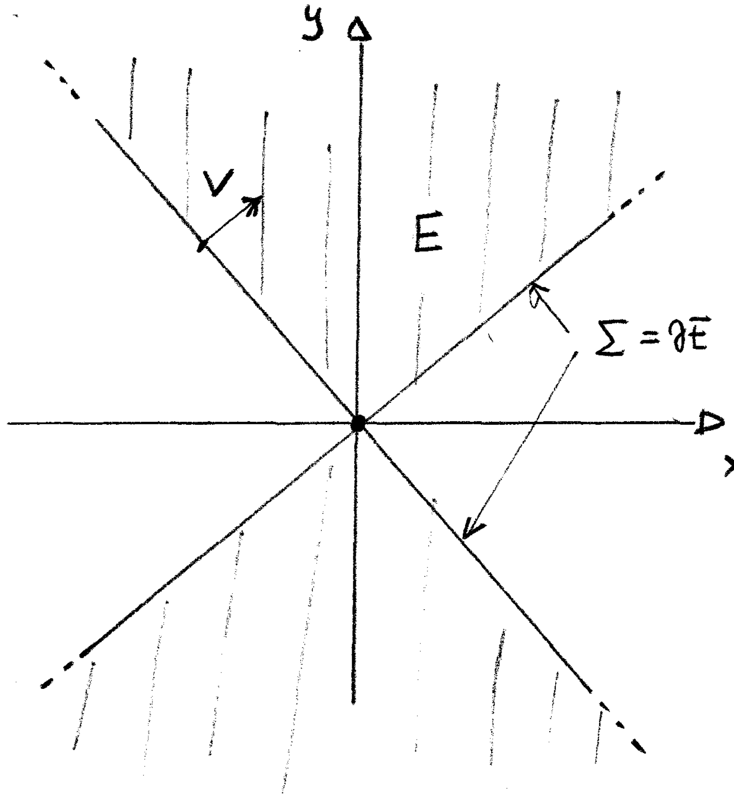
$$H^{n-1}(\partial E\cap A) \leq H^{n-1}(\partial F\cap A). \qquad \bar{\bar{D}}$$

Applichiamo la tecnica di subcalibrazione ai coni di Simons.

In $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ con coordinate $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ consideriamo il cono

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n : |x| < |y|\}$$

e la corrente $[\![\Sigma]\!]\in\mathcal{D}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ con $\Sigma = \partial E$.



TEOREMA Se $n \geq 4$ la corrente $[\Sigma]$ è un minimo dell'area in $\mathbb{R}^{2n}$.

Dim. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left(|x|^4 - |y|^4\right).$$

Allora $E = \{ f(x,y) < 0 \}$. Suo gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \left(|x|^2 x, -|y|^2 y \right).$$

Per $(x,y) \neq (0,0)$ è definito:

$$V(x,y) = \frac{-\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|} = \frac{\left(-|x|^2 x, +|y|^2 y\right)}{\sqrt{|x|^6 + |y|^6}}.$$

Chiaramente si ha $|V| = 1$ su $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{(0,0)\}$.

Inoltre

$$V(x,y) = \nu_E(x,y) \quad \text{normale interna}$$

per $(x,y) \in \Sigma \setminus \{(0,0)\}$.

Conti:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{|x|^2 x_i}{\sqrt{|x|^6+|y|^6}}\right) = -\frac{(|x|^2+2x_i^2)\sqrt{|x|^6+|y|^6} - \frac{|x|^2 x_i\, 3|x|^4 x_i}{\sqrt{|x|^6+|y|^6}}}{|x|^6+|y|^6}$$

$$= -\frac{(|x|^2+2x_i^2)(|x|^6+|y|^6) - 3|x|^6 x_i^2}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}.$$

Quindi

$$\operatorname{div} V(x,y) = -\frac{(n|x|^2+2|x|^2)(|x|^6+|y|^6) - 3|x|^8}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}$$

$$+\frac{(n+2)|y|^2(|x|^6+|y|^6) - 3|y|^8}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}$$

$$= \frac{(n+2)(|y|^2-|x|^2)(|x|^6+|y|^6) - 3(|y|^8-|x|^8)}{(|x|^6+|y|^6)^{3/2}}$$

Usando $|x|^6 + |y|^6 = (|x|^2 + |y|^2)(|x|^4 - |x|^2|y|^2 + |y|^4)$
si trova

$$\operatorname{div} V(x,y) = (|y|^4 - |x|^4) \cdot \frac{(n+2)(|x|^4 - |x|^2|y|^2 + |y|^4) - 3(|x|^4 + |y|^4)}{(|x|^6 + |y|^6)^{3/2}}$$

$$= (|y|^4 - |x|^4) \frac{(n-1)|x|^4 - (n+2)|x|^2|y|^2 + (n-1)|y|^4}{(|x|^6 + |y|^6)^{3/2}} .$$

Il discriminante del polinomio omogeneo al numeratore verifica

$$\Delta = (n+2)^2 - 4(n-1)^2 \leq 0 \iff n \geq 4 .$$

quindi per $n \geq 4$ si ha

$$\operatorname{div} V(x,y) \geq 0 \iff |y|^4 - |x|^4 \geq 0$$
$$\iff (x,y) \in E$$

Questo verifica i punti (3) e (4).
Il fatto che V non è definito in $(0,0)$ si sistema in questo modo.
Per omogeneità esiste $C > 0$ tale che

$$|\operatorname{div} V(x,y)| \leq \frac{C}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2}} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{(0,0)\},$$

Dunque si può usare il Teorema della divergenza su $\mathbb{R}^{2n} \setminus B_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, insieme al fatto che il fatto che

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \overbrace{|\langle V, \nu_{B_\varepsilon} \rangle|}^{\leq 1} \, d\mathcal{H}^{2n-1} \leq \underbrace{\varepsilon^{2n-1} \mathcal{H}^{2n-1}(\partial B_1)}_{\substack{\downarrow \ \varepsilon \to 0^+ \\ 0}}$$

e

$$\int_{B_\varepsilon} |\operatorname{div} V(x,y)| \, dx dy \leq \underbrace{\frac{c}{\varepsilon} \varepsilon^{2n} \mathcal{L}^{2n}(B_1)}_{\substack{\downarrow \ \varepsilon \to 0^+ \\ 0}}.$$

$\square$

(7) Le varietà olomorfe sono minime

Proveremo che le varietà olomorfe (luoghi di zeri di funzioni olomorfe) sono minime.

In questo caso la calibrazione è fornita da una specifica forma differenziale universale.

Ci accontenteremo di vedere i conti in un esempio.

Sia $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.
Nelle coordinate $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ questo significa che

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0 \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{w}} = 0 .$$

Consideriamo l'insieme

$$M = \{ (z,w) \in \mathbb{C}^2 ; F(z,w) = 0 \} .$$

L'insieme $M \cap \{ \nabla F \neq 0 \}$ è una varietà olomorfa, di dimensione reale 2 immersa (embedded) in $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{C}^2$. Dove $\nabla F = 0$ M presenta delle singolarità.

Ad esempio con $F(z,w) = z^2 - w^3$ si ha

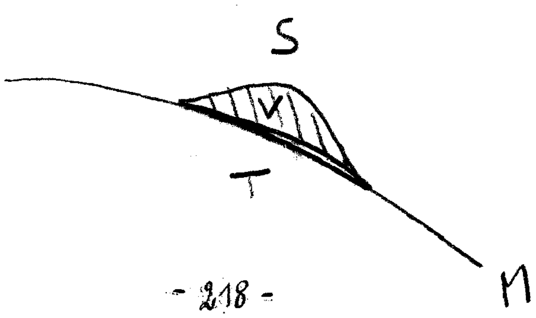
$$M = \{ (z,w) \in \mathbb{C}^2 ; z^2 = w^3 \}$$

che ha un punto singolare in $(0,0)$.

Sia $T \subset M$ con $\mathcal{H}^2(T) < \infty$.
Sia $S \subset \mathbb{C}^2$ una 2-superficie orientata.
Sia $V \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R}^4)$ tale che, nel senso delle correnti,

$$\partial V = [\![T]\!] - [\![S]\!],$$

con V di supporto compatto.



TEOREMA Nelle ipotesi precedenti si ha $H^2(T) \leq H^2(S)$.

Osserviamo che il piano tangente di M nella parte regolare è un sottospazio complesso di $\mathbb{C}^2$.

Consideriamo la 2-forma

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

dove $z = x_1 + i x_2$ e $w = x_3 + i x_4$. Chiaramente

$$d\omega = 0$$

avendo ω coefficienti costanti.

Sia $\tau = u \wedge v$ con

$$u = \sum_{i=1}^{4} u_i e_i \qquad v = \sum_{i=1}^{4} v_i e_i$$

$e_1 - e_4$ base canonica duale di $dx_1 - dx_4$

Dopo pochi conti:

$$\omega(\tau) = \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} u_3 & u_4 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

$$= \langle u, Jv \rangle \qquad \langle \cdot, \cdot \rangle = \text{standard di } \mathbb{R}^4$$

dove $Jv = J(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_2, -v_1, v_4, -v_3)$

è struttura complessa (la moltiplicazione per $-i$).

Dunque, se u e V sono ortonormali (e quindi $|\tau|=1$ nella norma naturale):

$$|\omega(\tau)| = |\langle u, JV\rangle| \leq |u|\,|JV| = |u|\,|V| = 1$$

e si ha $=$ se e solo se $u = \pm JV$, ovvero se e solo se $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{u, V\}$ è un sottospazio complesso di $\mathbb{C}^2$ ("τ è complesso").

Dunque

$$[\![T]\!](\omega) = \int_T \omega = H^2(T)$$

$$[\![S]\!](\omega) = \int_S \omega \leq H^2(S)$$

mentre

$$0 \underset{d\omega = 0}{=} V(d\omega) = \partial V(\omega) = [\![T]\!](\omega) - [\![S]\!](\omega)$$

da cui segue che

$$H^2(S) \leq H^2(T).$$

$\square$

SUPERFICI MINIME

Una mappa lineare $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $m \geq n$ si può fattorizzare $L = T \circ S$ con T ortogonale ed $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare simmetrica. Si definisce

$$[\![L]\!] = |\det S|$$

Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è di classe C^1 si definisce lo Jacobiano ("elemento d'area")

$$Jf(x) = [\![Df(x)]\!] \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Se f è 1-1 su $B \subset \mathbb{R}^n$, la formula dell'area stabilisce che

$$H^n(f(B)) = \int_B Jf(x)\, dx =: A(f; B)$$

L'insieme $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ è una superficie immersa quando $Df(x)$ ha rango n $\forall x \in B$.

Diciamo che $f \in C^1(B; \mathbb{R}^m)$ è (parametrizza) una superficie minima se $\forall \varphi \in C^1_c(B; \mathbb{R}^m)$ si ha

$$\frac{d}{dt} A(f + t\varphi) \Big|_{t=0} = 0 .$$

Dunque le superfici minime sono i punti stazionari dell'area e <u>non</u> i minimi

<u>ESERCIZIO</u> Sia $f \in C^2(B;\mathbb{R}^3)$ con $B \subset \mathbb{R}^2$ aperto. Provare che f parametrizza una superficie minima se e solo se $S = f(B)$ ha curvatura media identicamente nulla.

<u>ESERCIZIO</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $f \in C^2(A)$ una soluzione di

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0 \quad \text{in } A.$$

Provare che $S = \operatorname{gr}(f)$ è un <u>minimo</u> dell'area nel cilindro $A \times \mathbb{R}$.

FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE DI WEIERSTRASS

Deduciamo la formula di rappresentazione di Weierstrass per le superfici minime immerse in modo conforme in $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ dominio aperto, $z = u + iv \in \mathbb{C}$

In $\mathbb{R}^3$ siano $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $| \cdot |$ il prodotto scalare e la norma standard.

Per $F \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^3)$ usiamo le notazioni:

$$F_u(z) = \frac{\partial}{\partial u} F(z) \ (\in \mathbb{R}^3) \quad , \quad z \in \mathcal{U}$$

$$F_v(z) = \frac{\partial}{\partial v} F(z) \ (\in \mathbb{R}^3).$$

<u>DEF.</u> $F \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^3)$ si dice conforme se:

1) $|F_u| = |F_v| > 0$ in $\mathcal{U}$;

2) $\langle F_u , F_v \rangle = 0$ in $\mathcal{U}$.

La funzione $E : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $E(z) = |F_u(z)|^2 = |F_v(z)|^2$ si dice fattore conforme di F.

Diremo che $\Sigma = F(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ è una ipersuperficie immersa in $\mathbb{R}^3$ data dalla parametrizzazione conforme F.

I campi F_u e F_v sono tangenti a Σ e ortogonali.
La normale a Σ è data da

$$N = \frac{F_u \wedge F_v}{|F_u \wedge F_v|} = \frac{1}{E}(F_u \wedge F_v).$$

Dipende da $z \in U$.

<u>Notazioni</u>. In un generico $z \in U$:

$$F_z = \frac{1}{2}(F_u - i F_v) \in \mathbb{C}^3,$$

$$F_{\bar z} = \frac{1}{2}(F_u + i F_v) \in \mathbb{C}^3.$$

Estendiamo $\langle \cdot , \cdot \rangle$ su $\mathbb{C}^3$ in modo $\mathbb{C}$-lineare.
Se $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle A + iB, C + iD \rangle = \langle A, C \rangle + i \langle A, D \rangle + i \langle B, C \rangle - \langle B, D \rangle.$$

Dalle 1)-2) deduciamo che

$$\langle F_z, F_z \rangle = \frac{1}{4} \langle F_u - i F_v, F_u - i F_v \rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left(|F_u|^2 - |F_v|^2 - 2i \langle F_u, F_v \rangle \right)$$

$$= 0.$$

Diremo che F_z è isotropo.

LEMMA Sia $F \in C^2(U;\mathbb{R}^3)$ conforme e sia H la curvatura media di $\Sigma = F(U)$. Allora in un generico punto $z \in U$:

$$\Delta F = (2EH)\, N\,,$$

DIM. ΔF è ortogonale a F_z ed $F_{\bar z}$:

$$\langle \Delta F, F_z \rangle = 4 \langle F_{z\bar z}, F_z \rangle = 2 \frac{\partial}{\partial \bar z} \langle F_z, F_z \rangle$$

$$= 0 \quad \text{perché } F_z \text{ è isotropo.}$$

Analogamente: $\langle \Delta F, F_{\bar z} \rangle = 0$.
Quindi ΔF è parallelo ad N:

$$\langle \Delta F, N \rangle = 4 \langle F_{z\bar z}, N \rangle = -4 \langle F_{\bar z}, N_z \rangle$$

in quanto $\langle F_{\bar z}, N \rangle = 0$. Espandiamo:

$$\langle \Delta F, N \rangle = -\langle F_u - i F_v, N_u + i N_v \rangle$$

$$= -\Big(\langle F_u, N_u \rangle + \langle F_v, N_v \rangle + + i \langle F_u, N_v \rangle - i \langle F_u, N_v \rangle \Big)$$

$$= -\big(\langle F_u, N_u \rangle + \langle F_v, N_v \rangle \big)$$

$$= -2E \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\langle F_u, N_u \rangle}{E} + \frac{\langle F_v, N_v \rangle}{E} \right)$$

Per la definizione di curvatura media si ottiene

$$\langle \Delta F, N \rangle = 2EH .$$

$\square$

<u>COMMENTI</u> Se Σ è una superficie minima allora $H=0$ e quindi $\Delta F = 0$. Le coordinate di F sono funzioni armoniche e quindi $F \in C^\infty(U;\mathbb{R}^3)$. Quindi una superficie minima di classe C^2 è automaticamente di classe C^∞.

Consideriamo il campo vettoriale complesso $G: U \to \mathbb{C}^3$

$$G(z) = 2 F_z(z) , \quad z \in U.$$

Se Σ è una superficie minima si ha

$$G_{\bar z} = 2 F_{z\bar z} = 0,$$

ovvero le coordinate di G sono funzioni olomorfe. Sia X una primitiva complessa di G:

i) $X_{\bar z} = 0$ in U;

ii) $X_z = G$ in U,

LEMMA Sia $F: U \to \mathbb{R}^3$, con $U \subset \mathbb{C}$ connesso, la parametrizzazione conforme di una superficie minima. Allora $F - \mathrm{Re}(X)$ è costante in U.

DIM. Consideriamo

$$Y = F - \mathrm{Re}(X) = F - \frac{X + \overline{X}}{2}.$$

Allora:

$$Y_z = F_z - \frac{X_z + \overline{X_{\bar z}}}{2} = F_z - \frac{G}{2} = 0$$

$$Y_{\bar z} = F_{\bar z} - \frac{X_{\bar z} + \overline{X_z}}{2} = F_{\bar z} - \frac{\overline{G}}{2}$$

$$= F_{\bar z} - \frac{1}{2}\,\overline{2 F_z} = F_{\bar z} - \overline{F}_{\bar z} = F_{\bar z} - F_{\bar z} = 0.$$

Infatti $F = \overline{F}$.

Concludiamo che Y è costante su U.

$\square$

Il campo $G = (G_1, G_2, G_3)$ è isotropo:

$$0 = \langle G, G \rangle = G_1^2 + G_2^2 + G_3^2$$

ovvero:

$$(G_1 + i\,G_2)(G_1 - i\,G_2) + G_3^2 = 0.$$

Poniamo

$$f = G_1 + i\,G_2,$$

$$g = G_1 - i\,G_2,$$

$$h = G_3.$$

$f, g, h : U \to \mathbb{C}$ sono olomorfe.

Si ricava:

$$f = -\frac{h^2}{g} \qquad \text{dove } g \neq 0,$$

Le soluzioni G_1, G_2 del sistema

$$\begin{cases} G_1 + i\,G_2 = -\dfrac{h^2}{g} \\[2ex] G_1 - i\,G_2 = g \end{cases}$$

sono

$$G_1 = \frac{1}{2}\left(g - \frac{h^2}{g}\right),$$

$$G_2 = \frac{i}{2}\left(g + \frac{h^2}{g}\right).$$

Si ottiene la formula per G:

$$(*) \qquad G = \left(\frac{1}{2}\left(g - \frac{h^2}{g}\right), \frac{i}{2}\left(g + \frac{h^2}{g}\right), h \right).$$

<u>TEOREMA</u> Sia $F: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{C}$ connesso, la parametrizzazione conforme di una superficie minima. Allora a meno di una traslazione si ha

$$F = \mathrm{Re}(X)$$

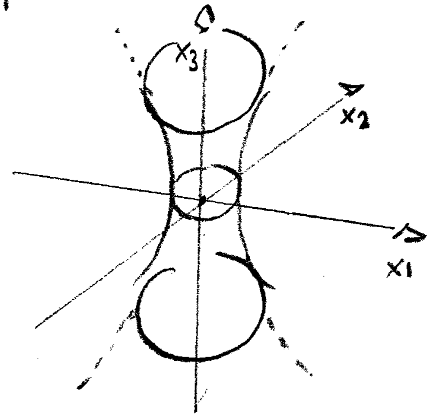
dove X è una primitiva olomorfa di una G della forma $(*)$ con h, g olomorfe in U.

<u>COMMENTI</u> Date h, g olomorfe possiamo formare G come in $(*)$ e poi calcolare una sua primitiva X. I conti delle pagine precedenti mostrano che $F = \mathrm{Re}(X)$ è una parametrizzazione conforme di una superficie minima.

Lo stesso vale per $\hat{F} = \mathrm{Im}(X)$.

<u>ESERCIZIO</u> Siano $\mathcal{U} = \mathbb{C}$, $h = 1$ e $g(z) = e^z$ per $z \in \mathbb{C}$. Calcolare le superfici minime date dalle parametrizzazioni $F = \mathrm{Re}(X)$ e $\hat{F} = \mathrm{Im}(X)$.

Risposta: F parametrizza una catenoide:



$\hat{F}$ parametrizza un'elicoide.

1. Esercizi

1.1. Semicontinuità inferiore.

Esercizio 1. Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $F : X \to (-\infty,\infty]$. Provare che sono equivalenti:

A) F è semicontinua inferiormente su X.

B) Per ogni $x_0 \in X$ si ha

$$F(x_0) \le \lim_{r\to 0^+} \inf_{x\in B_r(x_0)} F(x).$$

C) F è sequenzialmente semicontinua inferiormente, ovvero per ogni $x_0 \in X$ ed ogni successione $x_h \to x_0$ si ha

$$F(x_0) \le \liminf_{h\to\infty} F(x_h).$$

Esercizio 2. Sia (X,τ) uno spazio topologico e data $F : X \to \mathbb{R}$ sia

$$\bar{F}(x) = \sup_{U\in\mathscr{I}(x)} \inf_{y\in U} F(y), \quad x \in X,$$

l'inviluppo semicontinuo inferiore di F. Provare che per ogni $x \in X$ si ha

$$\bar{F}(x) = \sup\{G(x) : G \le F,\, G \text{ isc su } X\}.$$

Esercizio 3. Sia A un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : A \times \mathbb{R} \to (-\infty,\infty]$ una funzione misurabile tale che:

i) $u \mapsto f(x,u)$ è semicontinua inferiormente in $\mathbb{R}$ per q.o. $x \in A$;

ii) esistono $g \in L^1(A)$, $b \in \mathbb{R}$ e $1 \le p < \infty$ tali che

$$f(x,u) \ge g(x) + b|u|^p, \qquad x \in A, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Provare che la funzione $F : L^p(A) \to (-\infty,\infty]$

$$F(u) = \int_A f(x,u(x))dx,$$

è ben definita (ha valori $\neq -\infty$) ed è semicontinua inferiormente in $L^p(A)$ nella topologia forte.

1.2. Funzionali su AC, Lip, C^1 di un intervallo.

Esercizio 4. Sull'insieme $X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = 1,\, u(1) = 0\}$ si consideri il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_0^1 \big(\mathrm{e}^{u'(x)} + u(x)^2\big)dx.$$

i) Derivare l'equazione di Eulero-Lagrange associata al funzionale F.

ii) Integrare l'equazione con le condizioni iniziali $u(0) = 1$ e $u'(0) = \alpha$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

iii) Provare che F non ha minimo su X.

ESERCIZIO 5. Siano $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ e $t \in (0,1)$. Sia poi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = n_1$ se $0 \le x \le t$ e $f(x) = n_2$ se $t < x \le 1$. Sia $u \in \mathrm{Lip}([0,1])$ il minimo del funzionale $F : \mathrm{Lip}([0,1]) \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{[0,1]} f(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}dx, \qquad u(0) = u_1,\ u(1) = u(1).$$

Calcolare u ed in particolare descrivere gli angoli di incidenza nel punto $x = t$ (principio di Fermat).

ESERCIZIO 6. Sull'insieme $X = \{u \in \mathrm{Lip}([0,1]) : u(0) = u(1) = 0,\ u \neq 0\}$ si consideri il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \frac{1}{\|u\|_\infty} \int_{[0,1]} |u'|dx.$$

Calcolare il minimo di F su X.

ESERCIZIO 7. Dati $X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ ed $\alpha \in (0,1]$, si consideri $F_\alpha : X \to \mathbb{R}$

$$F_\alpha(u) = \int_{[0,1]} \big(|u'|^\alpha + 3|u - 1|\big)dx.$$

Provare che:

i) $\inf_X F_\alpha = 0$ se $0 < \alpha < 1$, e $\inf_X F_1 \le 2$ se $\alpha = 1$.
ii) F_α non ha minimo su X.

ESERCIZIO 8. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ una funzione continua e positiva ($f(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$). Provare che il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_0^1 f(u'(x))dx$$

non ha minimo sullo spazio di funzioni $X = \big\{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\big\}$.

ESERCIZIO 9 (Moltiplicatori di Lagrange). Dato $v > 0$ si considerino lo spazio funzionale $X = \big\{u \in C^1([-1,1]) : u(\pm 1) = 0\big\}$ ed $F, G : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + u'(x)^2}dx, \qquad G(u) = \int_{-1}^1 u(x)\,dx.$$

i) Date $\varphi, \psi \in C_c^\infty(-1,1)$ definiamo $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(\varepsilon, \tau) = G(u + \varepsilon\varphi + \tau\psi)$. Provare che esiste una funzione di classe C^1, $\varepsilon \mapsto \tau(\varepsilon)$, tale che $H(\varepsilon, \tau(\varepsilon)) = v$ per ogni $|\varepsilon| < \delta$.
ii) Provare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ (il "moltiplicatore di Lagrange", in questo caso la curvatura) tale che

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}}\Big) = \lambda.$$

iii) Integrare l'equazione precedente. Abbiamo risolto (in parte) il "Problema di Didone".

È facile generalizzare l'esempio ad F e G più generali.

1.3. Bounded slope condition e funzioni Lipschitz.

Esercizio 10. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $U : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione che non sia affine. Provare che se (Ω, U) verifica la bounded slope condition, allora Ω deve essere convesso.

Esercizio 11. Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$, I un insieme di indici ed $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in I$, funzioni Lipschitziane tali che $\mathrm{Lip}(f_i) \le M$ e $|f_i(x_0)| \le M$ per ogni $i \in I$, con $0 \le L, M < \infty$. Dimostrare che le funzioni

$$f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x), \qquad g(x) = \inf_{i\in I} f_i(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

sono ben definite e Lipschitziane su $\mathbb{R}^n$ con $\mathrm{Lip}(f), \mathrm{Lip}(g) \le L$.

Esercizio 12. Siano $k > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato ed $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strettamente convessa. Provare che due minimi $u, v \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ del funzionale

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))dx,$$

verificano

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x) - v(x)| = \max_{x\in\partial\Omega} |u(x) - v(x)|.$$

Esercizio 13. Dimostrare che se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è Lipschitz, allora

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} u(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{\partial u}{\partial v}(x)dx,$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 14. Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \mathrm{dist}(x; C)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che $|\nabla f(x)| = 1$ per $\mathscr{L}^n$-q.o. $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$.

1.4. Funzionali su spazi di Sobolev in dimensione 1.

Esercizio 15. Calcolare – se esiste – la più piccola costante $C > 0$ che rende vera la disuguaglianza

$$\Big(\int_{[0,1]} u(x)dx\Big)^2 \le C \int_{[0,1]} u'(x)^2 dx,$$

per tutte le funzioni $u \in H_0^1(0,1)$ e calcolare – se esistono – tutte le funzioni che realizzano l'uguaglianza (relativamente alla costante ottimale).

Esercizio 16. Dati $X = H^1_0(0,1)$ ed $\varepsilon \in \mathbb{R}$, si consideri $F_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$

$$F_\varepsilon(u) = \int_{[0,1]} \big(\sin(u') + \varepsilon u^2\big) dx.$$

Provare che:

i) se $\varepsilon \neq 0$ allora F_ε non ha minimo su X;
ii) se $\varepsilon = 0$ allora F_0 ha un'infinità di minimi su X, ma nessuno in $C^1([0,1])$.

Esercizio 17. Sia X l'insieme delle funzioni $u \in AC([\delta,1])$ per ogni $0 < \delta < 1$ e tali che

$$\int_{[0,1]} x u'(x)^2 dx < \infty,$$

e sia $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{[0,1]} (xu'^2 + u^2) dx + \int_{[0,1]} uf\, dx,$$

dove $f \in C([0,1])$ è una funzione assegnata. Provare che:

i) X con il prodotto scalare

$$\langle u, v\rangle = \int_{[0,1]} (xu'v' + uv) dx$$

è uno spazio di Hilbert.
ii) F ha minimo unico su X.
iii) Il minimo verifica $u \in C^2((0,1])$ e

$$-\frac{d}{dx}(xu') + u = f \quad \text{su } (0,1].$$

iv) Il minimo verifica

$$\lim_{x\to 0^+} xu'(x) = 0.$$

Esercizio 18. Su $X = \big\{u \in H^1(0,1) : u(0) = 0,\, u(1) = 1\big\}$ si consideri $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{[0,1]} \sqrt{1 + (x+\varepsilon)u'(x)^2}\, dx,$$

dove $\varepsilon \geq 0$ è un parametro. Provare che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ il funzionale F non ha minimo su X.

Esercizio 19. Su $X = \big\{u \in H^1(0,1) : u(0) = \alpha,\, u(1) = \beta\big\}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{[0,1]} (1 + |u|)u'^2 dx.$$

Studiare il minimo di F su X.

Esercizio 20. Sia X l'insieme delle funzioni $\chi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ tali che $\chi(0) = 0$ e tali che esistano i limiti

$$\chi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \chi(x) = 0 \quad \text{e} \quad \chi(\infty) = \lim_{x\to\infty} \chi(x) = 1,$$

e si consideri il funzionale $F : X \to [0, \infty]$

$$F(\chi) = \int_{\mathbb{R}} \big(\chi'^2 + \chi^2(1-\chi)^2\big)dx.$$

Provare che F ha minimo su X e calcolarlo.

Suggerimenti. Sia $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzate. Si può supporre $0 \le \chi_n \le 1$. Si può supporre χ_n crescente. Estrarre una sottosuccessione che converge debolmente in $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Si potrà anche avere convergenza puntuale quasi ovunque. Semicontinuità inferiore. Dedurre l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole. Il minimo χ è più regolare. Integrare l'equazione ed arrivare alla soluzione esplicita.

1.5. Funzionali su spazi di Sobolev in dimensione maggiore.

Esercizio 21. Dato un aperto limitato $A \subset \mathbb{R}^n$ con $n \ge 1$, si considerino una funzione $f \in L^2(A)$, lo spazio $X = H^1_0(A)$ e il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_A \Big\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu\Big\}dx.$$

i) Provare che F ha minimo unico su X.
ii) Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole verificata dal minimo.
iii) Supponendo la necessaria regolarità, scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange in forma forte.

Esercizio 22. Dato un aperto limitato e con frontiera Lipschitz $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, si considerino una funzione $f \in L^2(A)$, lo spazio

$$X = \Big\{u \in H^1(A) : \int_A u\,dx = 0\Big\},$$

e il funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_A \Big\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu\Big\}dx.$$

i) Provare che F ha minimo unico su X.
ii) Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole verificata dal minimo.
iii) Supponendo la necessaria regolarità, dedurre le equazioni per il minimo

$$\Delta u = f - f_A \quad \text{in } A \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial A,$$

dove f_A è la media di f su A e ν è la normale (esterna) a ∂A.

Esercizio 23. Dato $\gamma \in (0,1]$, si consideri $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < y^\gamma,\ 0 < y < 1\}$. Provare che se $1 \le p < 1+\gamma$ e

$$q > \frac{(1+\gamma)p}{1+\gamma-p},$$

allora non esiste alcuna costante $C_{pq\gamma}$ tale che

$$\Big(\int_A |u-u_A|^q dxdy\Big)^{1/p} \le C_{pq\gamma}\Big(\int_A |\nabla u|^p dxdy\Big)^{1/p}.$$

Esercizio 24. Per $n \ge 1$ ed $R > 1$ consideriamo l'insieme di funzioni

$$\mathscr{A}_R = \big\{u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n) : u(x) \ge 1 \text{ per } |x| \le 1 \text{ e } u(x) = 0 \text{ per } |x| \ge R\big\}.$$

Provare che il funzionale $F : \mathscr{A}_R \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx$$

ha minimo su $\mathscr{A}_R$.

Suggerimenti. Provare l'esistenza in $H^1_0(B_R)$. Provare l'unicità per stretta convessità. Dedurre la simmetria radiale del minimo dall'unicità. Derivare l'equazione di Eulero-Lagrange nel caso simmetrico. Calcolare il minimo risolvendo l'equazione differenziale ordinaria. Constatare a posteriori che il minimo u è Lipschitz.

Esercizio 25. Per $n \ge 1$ ed $R > 1$ consideriamo l'insieme di funzioni

$$\mathscr{A}_R = \big\{u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n) : u(x) \ge 1 \text{ per } |x| \le 1 \text{ e } u(x) = 0 \text{ per } |x| \ge R\big\}.$$

Si consideri il funzionale $G : \mathscr{A}_R \to \mathbb{R}$

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)| dx.$$

Discutere l'esistenza del minimo di G su $\mathscr{A}_R$.

1.6. Funzioni BV.

Esercizio 26. Sia $f \in BV(\mathbb{R}^n)$. Provare che $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\mu^1_s = \ldots = \mu^n_s = 0$, dove μ^i è la misura derivata distribuzionale i-esima di f e μ^i_s è la sua parte singolare rispetto alla misura di Lebesgue.

Esercizio 27. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0, \\ y & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Calcolare la misura vettoriale $[Df]$, il gradiente distribuzionale di f.

Esercizio 28. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Provare che $f \in BV(\mathbb{R}^n)$, calcolare la misura μ e la funzione σ tali che $[Df] = \sigma\mu$. Provare che $f \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 29. Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Verificare la regola per il prodotto della derivata distribuzionale (nel senso delle misure)

$$[D(fg)] = g\nabla f \mathscr{L}^n + f[Dg].$$

Esercizio 30. Sia $u \in BV(\mathbb{R}^n)$ una funzione a supporto compatto. Dimostrare che $[Du](\mathbb{R}^n) = 0$.

Esercizio 31. 1) Provare che $\|f\|_\infty \leq |Df|(\mathbb{R})$ per ogni funzione $f \in BV(\mathbb{R})$. 2) Costruire una funzione $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ tale che $f \notin L^\infty(A)$ per un quasiasi aperto non vuoto $A \subset \mathbb{R}^n$.

Esercizio 32. Sia μ una misura di Borel finita su $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che per ogni $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ si abbia

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \text{div}\varphi \, d\mu \Big| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Provare che esiste una funzione $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ tale che $\mu = f \mathscr{L}^n$.

Esercizio 33. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ una aperto limitato con frontiera Lipschitz. Provare che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\int_A |f - f_A| dx \leq C\|Df\|(A)$$

per ogni $f \in BV(A)$.

Esercizio 34. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $f \in BV(A)$ una funzione tale che $\|Df\|(A) = 0$. Provare che f è costante.

1.7. Insiemi di perimetro finito.

Esercizio 35. Dati $\gamma \in (0, 1]$ ed $n \geq 2$, si consideri $A = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x'| < x_n^\gamma,\ 0 < x_n < 1\}$. Al variare di γ, discutere la validità della disuguaglianza isoperimetrica relativa

$$\mathscr{L}^n(E)^{\frac{n-1}{n}} \leq C_{n,\gamma} P(E; A),$$

per insiemi $E \subset A$ tali che $\mathscr{L}^n(E) \leq \frac{1}{2}\mathscr{L}^n(A)$.

Esercizio 36. Sia $E \subset (0, 1)$ un insieme di perimetro finito. Dimostrare che a meno di insiemi trascurabili E è unione finita di intervalli.

1.8. Superfici minime.

ESERCIZIO 37. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto. Determinare tutte le funzioni $u \in C^\infty(A)$ della forma

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y), \quad (x, y) \in A,$$

i cui grafici siano superfici minime.

ESERCIZIO 38. Sia $S = F(\mathbb{R} \times [0, 2\pi]) \subset \mathbb{R}^3$ dove

$$F(x, \vartheta) = (x, f(x) \cos \vartheta, f(x) \sin \vartheta),$$

ed $f \in C^2(\mathbb{R})$ è una funzione che verifica $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 0$.

i) Supponendo che $S \subset \mathbb{R}^3$ sia una superficie minima, derivare l'equazione differenziale per f
$$(1 + f'^2)f - f^2 f'' = 0.$$
ii) Provare che f è una catenoide.

ESERCIZIO 39. Sia $r > 0$ e per $f \in C^2([-r, r])$ si consideri la superficie $S = \big\{(x, f(x) \cos \vartheta, f(x) \sin \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [0, 2\pi],\ |x| \le r,\ f(\pm r) = 1\big\}$.

Provare che esiste un $r_0 > 0$ tale che:

i) Se $r > r_0$ allora S non può essere una superficie minima.
ii) Se $r = r_0$ allora c'è un'unica superficie minima della forma data.
iir) Se $0 < r < r_0$ esistono 2 superfici minime della forma data.

ESERCIZIO 40. Siano $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$ ed $M \ge 0$. Sull'insieme di funzioni

$$\mathscr{A}_M = \big\{u \in C(\bar{A}) \cap C^1(A) : u = 0 \text{ su } |x| = 2 \text{ ed } u = M \text{ su } |x| = 1\big\}$$

consideriamo il problema di minimo $\min\big\{F(u) : u \in \mathscr{A}_M\big\}$ dove $F : \mathscr{A}_M \to [0, \infty]$ è il funzionale dell'area

$$F(u) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} dx.$$

Provare le seguenti affermazioni:

i) Se il minimo esiste allora è unico.
ii) Se il minimo esiste allora è della forma $u(x) = \varphi(|x|)$ con $\varphi \in C([1, 2]) \cap C^1(1, 2)$.
iii) Per una funzione u come nel punto precedente ("u radiale") si ha
$$F(u) = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1 + \varphi'(r)^2} r dr.$$

iv) Per un minimo radiale $u(x) = \varphi(|x|)$ si ha

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{r\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\Big) = 0, \quad r \in (1,2).$$

v) Provare che esiste $M_0 > 0$ tale che per $M > M_0$ il problema di minimo in esame non ha soluzione.

Esercizio 41. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione

$$f(x,y) = \left(x + xy^2 - \frac{1}{3}x^3, -y - x^2y + \frac{1}{3}y^3, x^2 - y^2\right).$$

Verificare che $S = f(\mathbb{R}^2)$ è una superficie minima (superficie di Enneper) data tramite una parametrizzazione conforme.

Sia poi $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$,

$$F(z) = \left(\frac{1}{2}h(z)(1 - g(z)^2), \frac{i}{2}h(z)(1 + g(z)^2), h(z)g(z)\right),$$

con $h(z) = 2$ e $g(z) = z$. Verificare che tramite la formula di rappresentazione di Weierstrass

$$f(z) = \mathrm{Re}\int_0^z F(\zeta)d\zeta$$

parametrizza la superficie di Enneper.

Esercizio 42. Provare che non esistono superfici minime compatte.

Esercizio 43. Siano $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un insieme aperto ed $f \in C^2(A)$ una funzione che risolve l'equazione delle superfici minime

$$\mathrm{div}\Big(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\Big) = 0 \quad \text{in } A.$$

Provare che il grafico $S = \mathrm{gr}(f)$ è un minimo dell'area nel cilindro $A \times \mathbb{R}$. Precisamente, provare che per ogni $(n-1)$-superficie $T \subset \mathbb{R}^n$ di classe C^1 e con $S\Delta T = S \setminus T \cup T \setminus S$ contenuto in modo compatto in $A \times \mathbb{R}$ si verifica

$$\mathscr{H}^{n-1}(S) \leq \mathscr{H}^{n-1}(T).$$

Esercizio 44. Sia $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una ipersuperficie (embedded) di classe C^2 e indichiamo con H la sua curvatura media (la traccia del differenziale della mappa di Gauss divisa per n).

1) Supponiamo che $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0\}$ con $f \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ e $\nabla f \neq 0$. Verificare che

$$H = \frac{1}{n}\mathrm{div}\Big(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\Big).$$

2) Supponiamo che $S = \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\}$ con $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Verificare che

$$H = \frac{1}{n}\mathrm{div}\Big(\frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}\Big).$$

3) Supponiamo che esista una funzione (continua) $\bar{H} : S \to \mathbb{R}$ tale che

$$\int_S \mathrm{div}_S V d\mathscr{H}^n = \int_S \bar{H}\langle V, \nu_S\rangle d\mathscr{H}^n$$

per ogni $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^{n+1})$, dove $\mathrm{div}_S V = \mathrm{div} V - \langle \nu_E, (\nabla V)\nu_S\rangle$ e ν_S è la normale ad S. Provare che $H = \bar{H}$.

1.9. Correnti.

Esercizio 45. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso a sia $T \in \mathscr{D}_n(A)$ una corrente tale che $\partial T = 0$. Provare che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $T = c[\![A]\!]$.

Esercizio 46. Per $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ si considerino gli anelli

$$A_n = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n+1} < |x| \leq \frac{1}{n}\Big\},$$

con A_n orientato positivamente per n dispari, orientato negativamente per n pari. La corrente $T \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R}^2)$ associata è

$$T = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}[\![A_n]\!].$$

Descrivere il bordo $\partial T \in \mathscr{D}_1(\mathbb{R}^2)$ e provare che $M(\partial T) = \infty$.

è

Esercizio 47. Siano $K = [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\tau \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$. Provare che

$$T(\omega) = \int_K \omega(\tau) d\mathscr{H}^1, \quad \omega \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R}^2),$$

definisce una corrente $T \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R}^2)$ di massa finita. Stabilire se ∂T ha massa finita.

Esercizio 48. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile di misura finita e sia $T \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^n)$ la corrente

$$T(\omega) = \int_E \omega = \int_E f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_E f(x)dx,$$

per ogni $\omega \in \mathscr{D}^n(\mathbb{R}^n)$ della forma $f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ con $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Provare che la corrente bordo ∂T ha massa finita, $\mathbf{M}(\partial T) < \infty$, se e solo se E ha perimetro finito.

1.10. Rilassamento e Γ-convergenza.

Esercizio 49. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $1 \le p < \infty$ ed $F : L^p(A) \to [0, \infty]$

$$F(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_A |Du|^p dx + \int_A |u|^p dx & u \in C^1(A) \cap L^p(A) \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Su $L^p(A)$ fissiamo la topologia ("convergenza") di $L^1_{\text{loc}}(A)$ e sia $\bar{F}$ l'inviluppo semicontinuo inferiore di F. Determinare l'insieme $X = \{u \in L^p(A) : \bar{F}(u) < \infty\}$.

Esercizio 50. Siano (X, τ) uno spazio topologico, $F, F_h : X \to \mathbb{R}$ funzioni e $\bar{F}, \bar{F}_h$ i loro inviluppi semicontinui inferiori, $h \in \mathbb{N}$. Provare che:

i) Se $F_h \to F$ uniformemente su X allora

$$\Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h = \bar{F}.$$

ii) Se $F_h \to F$ puntualmente ed $(F_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è decrescente allora

$$\Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h = \bar{F}.$$

iii) Se $(F_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è crescente allora

$$\Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h = \lim_{h\to\infty} \bar{F}_h.$$

Esercizio 51. Costruire funzioni $F, F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$\Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h(x) \neq \lim_{h\to\infty} F_h(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1.11. Vari.

Esercizio 52. Siano $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ e $u_h : A \to \mathbb{R}^2$, $h \in \mathbb{N}$,

$$u_h(x) = \frac{x}{|x| + 1/h}.$$

Provare che $\det \nabla u_h \rightharpoonup \pi\delta$ nel senso delle distribuzioni,

Esercizio 53 (Lagrangiane nulle). Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato con frontiera Lipschitz e $u, v \in C^2(\bar{A}; \mathbb{R}^2)$ due funzioni tali che $u = v$ su ∂A. Provare che

$$\int_A \det \nabla u \, dx = \int_A \det \nabla v \, dx.$$

Esercizio 54. Costruire una funzione u in $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ tale che $\Delta u \in C(A)$ ma $u \notin C^2(A)$.

Esercizio 55. La lunghezza di una curva continua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ è

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1,\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto e siano $x, y \in K$ due punti che possono essere collegati da una curva in K di lunghezza finita. Provare che allora sono collegati da una curva in K di lunghezza minima.

Esercizio 56. Dimostrare che la simmetrizzazione di Steiner in $\mathbb{R}^n$ non aumenta il diametro di un insieme.

Esercizio 57. Sia $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una enumerazione di $\mathbb{Q}^2$ e sia $S_k \subset \mathbb{R}^2$ un segmento con punto medio q_k e lunghezza $1/k^2$. Dimostrare che $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$ è 1-rettificabile.

Esercizio 58. Sia E l'unione di tutte le rette che passano per due punti di $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Dimostrare che E è numerabilmente 1-rettificabile e che $\mathscr{H}^1 \llcorner E$ è σ-finita ma non localmente finita.

Esercizio 59. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e chiuso e sia $\pi : \mathbb{R}^n \to K$ la proiezione definita dalla condizione $\pi(x) = y \in K$ se e solo se $|x-y| = \min_{z\in K} |x-z|$. Provare che $\mathscr{H}^s(\pi(E)) \le \mathscr{H}^s(E)$ per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ e $0 \le s \le n$.

Esercizio 60. Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ il grafico di $u \in C^1([0,1])$ provare che

$$\mathscr{H}^1(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + u'(x)^2}\,dx.$$

Esercizio 61. Siano μ, ν due misure vettoriali su $\mathbb{R}^n$ concentrate su insiemi disgiunti, ovvero esiste un insieme A tale che $|\mu|(A) = \nu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$. Dimostrare che $|\mu + \nu| = |\mu| + |\nu|$.

Esercizio 62. Sia $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi k-rettificabili. Dimostrare che $\mathrm{Tan}(A_1, x) = \mathrm{Tan}(A_2, x)$ per $\mathscr{H}^k$-q.o. $x \in A_1 \cap A_2$.

Esercizio 63. Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$, be the function defined by $f(x) = 1$ if $|x| < 1$ and $f(x) = 0$ if $|x| \ge 1$, with $x \in \mathbb{R}^n$. Prove that $f \in BV(\mathbb{R}^n)$, compute the measure μ and the vector σ given by the structure theorem of BV-functions. Show that $f \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 64. Let $T : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ be the functional

$$T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx, \quad f \in C_c(\mathbb{R}),$$

where the integral is the Riemann-integral. Show that T il linear and bounded (for the sup-norm, when the support of the functions is contained in a fixed compact set). Compute the measure μ given by Riesz theorem, (i.e., prove that μ must be the Lebesgue measure).

Esercizio 65. Let $\mathscr{A}$ be a σ-algebra on X, let $\mathscr{B}$ be a σ-algebra on Y and let $f : X \to Y$ be measurable (that is, $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ for all $B \in \mathscr{B}$). Let $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ be a measure. Show that $f_\sharp \mu = \nu$ defined by

$$\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B},$$

is a measure, called the *push-forward measure of* μ. Prove the following change-of-variable formula

$$\int_Y g(y) d\nu(y) = \int_X g(f(x)) d\mu(x),$$

for any $g \in L^1(Y; \nu)$.

Esercizio 66. Let μ be the Lebesgue measure on $[0, 1]$. Write $[0, 1] = A \cup B$ where $\mu(A) = 0$ and

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

with $K_n \subset [0, 1]$ compact sets containing no open intervals.

Bibliografia

[1] L. Ambrosio & N. Fusco & D. Pallara, Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems, Oxford University Press.

[2] G. Buttazzo & M. Giaquinta & S. Hildebrandt, One-dimensional Variational Problems, Oxford University Press 2008.

[3] B. Dacorogna, Introduction to the Calculus of Variations, Imperial College Press 2015.

[4] B. Dacorogna, Direct Methods in the Calculus of Variations, Springer 2007.

[5] G. Dal Maso, An Introduction to Γ-Convergence, Birkhäuser 1993.

[6] L. C. Evans & R. F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC press.

[7] H. Federer, Geometric Measure Theory, Springer.

[8] E. Giusti, Metodi diretti nel calcolo delle variazioni, UMI

[9] J. Jost & X. Li-Jost, Calculus of Variations, Cambridge 2008

[10] S. G. Krantz & H. R. Parks, Geometric Integration Theory, Birkhäuser 2008. È un'introduzione ragionevole alla teoria delle correnti.

[11] F. Maggi, Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems: An Introduction to Geometric Measure Theory, Cambridge 2012.

[12] F. Morgan, Geometric Measure Theory, Academic Press 2008. È un'introduzione al libro di Federer.

[13] C. Villani, Topics in Optimal Transportation, Graduate Studies in Mathematics Vol. 58, Springer

Riferimenti generali

1. Calcolo delle variazioni. Il volume [**3**] di Dacorogna è un'introduzione eccellente che copre il programma fino alle superfici minime. Ci sono moltissimi esercizi con le soluzioni. Un'alternativa è [**9**].

2. Funzionali in dimensione 1. Il libro di Buttazzo, Giaquinta e Hildebrandt [**2**] è interamente dedicato ai funzionali in dimensione 1.

3. Bounded slope condition. Abbiamo seguito il classico libro di Giusti [**8**], che contiene anche la teoria della regolarità.

4. Funzionali negli spazi di Sobolev. Abbiamo semplificato la presentazione fatta in [**4**], un libro avanzato che contiene anche il caso vettoriale.

5. Funzioni BV. Abbiamo seguito l'introduzione agile che si trova in [**6**]. In [**1**] si trova una trattazione più completa, dove c'è una discussione dettagliata del funzional di Mumford-Shah.

6. Insiemi di perimetro finito. Abbiamo di nuovo seguito l'introduzione che si trova in [**6**]. Tuttavia è molto migliore la presentazione in [**11**] che contiene anche la regolarità dei minimi.

7. Teoria geometrica della misura e correnti. Il riferimento obbligatorio è il libro di Federer [**7**], che è di lettura impegnativa. Un'introduzione ragionevole è [**12**]. Noi abbiamo seguito parte della presentazione di [**10**].

8. Γ-convergenza. Un testo di riferimento è [**5**]

9. Trasporto ottimo. Abbiamo seguito il libro di Villani [**13**].