Calcolo delle Variazioni   Foglio 1

consegna entro il 26 marzo 2018

Esercizio 1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $F : X \to (-\infty, \infty]$. Provare che sono equivalenti:

A) F è semicontinua inferiormente su X.

B) Per ogni $x_0 \in X$ si ha
$$F(x_0) \leq \lim_{r \to 0^+} \inf_{x \in B_r(x_0)} F(x).$$

C) F è sequenzialmente semicontinua inferiormente, ovvero per ogni $x_0 \in X$ ed ogni successione $x_h \to x_0$ si ha
$$F(x_0) \leq \liminf_{h \to \infty} F(x_h).$$

Esercizio 2. Sia A un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : A \times \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ una funzione misurabile tale che:

i) $u \mapsto f(x, u)$ è semicontinua inferiormente in $\mathbb{R}$ per q.o. $x \in A$;

ii) esistono $g \in L^1(A)$, $b \in \mathbb{R}$ e $1 \leq p < \infty$ tali che
$$f(x, u) \geq g(x) + b|u|^p, \qquad x \in A, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Provare che la funzione $F : L^p(A) \to (-\infty, \infty]$
$$F(u) = \int_A f(x, u(x))dx,$$
è ben definita (ha valori $\neq -\infty$) ed è semicontinua inferiormente in $L^p(A)$ nella topologia forte.

Commenti: la convergenza forte in L^p implica l'esistenza di una sottosuccesione che converge q.o.; per usare il Lemma di Fatou, serve l'ipotesi $f(x, u) - g(x) - b|u|^p \geq 0$.

Esercizio 3. Sia $X = \{u \in \mathrm{Lip}([0, 1]) : u(0) = 0,\ u(1) = 1\}$ e per $\varepsilon \geq 0$ si consideri il funzionale $F_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$
$$F_\varepsilon(u) = \int_{[0,1]} \sqrt{1 + (x + \varepsilon)u'(x)^2}dx.$$

i) Provare che $\inf_X F_0 = 1$ e che quindi F_0 non ha minimo su X.

ii) Provare che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ il funzionale F_ε non ha minimo su X.

Commenti: In ii) calcolare l'equazione di Eulero-Lagrange, "integrarla" con $u(0) = 0$ e mostrare che per ε piccolo non si può avere $u(1) = 1$.