Calcolo delle Variazioni

Foglio 2

consegna entro il 16 aprile 2018

Esercizio 1. (Non esistenza dei minimi senza la convessità del dominio)
Siano $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$ ed $M \geq 0$. Sull'insieme di funzioni

$$\mathcal{A}_M = \big\{u \in C(\bar{A}) \cap C^1(A) : u = 0 \text{ su } |x| = 2 \text{ ed } u = M \text{ su } |x| = 1\big\}$$

consideriamo il problema di minimo $\min\{F(u) : u \in \mathcal{A}_M\}$ dove $F : \mathcal{A}_M \to [0, \infty]$ è il funzionale dell'area

$$F(u) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}dx.$$

Provare le seguenti affermazioni:

i) Se il minimo esiste allora è unico.

ii) Se il minimo esiste allora è della forma $u(x) = \varphi(|x|)$ con $\varphi \in C([1, 2]) \cap C^1(1, 2)$.

iii) Per una funzione u come nel punto precedente ("u radiale") si ha

$$F(u) = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1 + \varphi'(r)^2}rdr.$$

iv) Per un minimo radiale $u(x) = \varphi(|x|)$ si ha

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{r\varphi'}{\sqrt{1 + \varphi'^2}}\Big) = 0, \quad r \in (1, 2).$$

v) Provare che esiste $M_0 > 0$ tale che per $M > M_0$ il problema di minimo in esame non ha soluzione.

Esercizio 2. (Disuguaglianza di Poincaré in dimensione 1)
Provare che esiste e calcolare la più piccola costante $C > 0$ ("costante ottimale") che rende vera la disuguaglianza

$$\Big(\int_{[0,1]} u(x)dx\Big)^2 \leq C \int_{[0,1]} u'(x)^2dx,$$

per tutte le funzioni $u \in H_0^1(0, 1)$. Calcolare tutte le funzioni che rendono questa disuguaglianza un'uguaglianza relativamente alla costante ottimale.

Esercizio 3. (Moltiplicatori di Lagrange per funzionali del calcolo delle variazioni)
Si considerino l'insieme di funzioni $X = \{u \in C^1(-1,1) \cap C([-1,1]) : u(\pm 1) = 0\big\}$ e i funzionali $F, G : X \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + u'(x)^2} dx, \qquad G(u) = \int_{-1}^{1} u(x)\, dx.$$

Fissata una costante $v > 0$, supponiamo di sapere che il seguente minimo esista:

$$\min \big\{ F(u) : u \in X,\, G(u) = v \big\}.$$

Vogliamo calcolarlo.

i) Date $\varphi, \psi \in C_c^\infty(-1,1)$ definiamo $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(\varepsilon, \tau) = G(u + \varepsilon\varphi + \tau\psi)$. Se ψ ha integrale non nullo, allora esiste una funzione $\varepsilon \mapsto \tau(\varepsilon)$ tale che $H(\varepsilon, \tau(\varepsilon)) = v$. Nel seguito serve conoscere $\tau'(0)$.

ii) Provare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ (il "moltiplicatore di Lagrange", in questo caso la curvatura) tale che il minimo verifica l'equazione ordinaria

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} \Big) = \lambda.$$

Discutere la regolarità $u \in C^2(-1,1)$.

iii) Integrare l'equazione precedente.

Abbiamo risolto (in parte) il "Problema di Didone".