

Calcolo delle Variazioni

Foglio 3

consegna entro il 7 maggio 2017

Esercizio 1. 1) Provare che $\|f\|_\infty \leq |Df|(\mathbb{R})$ per ogni funzione $f \in BV(\mathbb{R})$. 2) Costruire una funzione $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ con $n \geq 2$ tale che $f \notin L^\infty(A)$ per un qualsiasi aperto non vuoto $A \subset \mathbb{R}^n$.

Esercizio 2. (Potenziale elettrostatico di una corona) Per $n \geq 1$ ed $R > 1$ consideriamo l'insieme di funzioni

$$\mathcal{A}_R = \{u \in \text{Lip}(\mathbb{R}^n) : u(x) \geq 1 \text{ per } |x| \leq 1 \text{ e } u(x) = 0 \text{ per } |x| \geq R\}.$$

Provare che il funzionale $F : \mathcal{A}_R \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx$$

ha minimo su \mathcal{A}_R e calcolarlo.

Suggerimenti. Provare l'esistenza in $H_0^1(B_R)$. Provare l'unicità per stretta convessità. Dedurre la simmetria radiale del minimo dall'unicità. Derivare l'equazione di Eulero-Lagrange nel caso simmetrico. Calcolare il minimo risolvendo l'equazione differenziale ordinaria. Costatare a posteriori che il minimo u è Lipschitz.

Esercizio 3. (Transizione di fase da 0 a 1) Sia X l'insieme delle funzioni $\chi \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ tali che $\chi(0) = 1/2$ e tali che esistano i limiti

$$\chi(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \chi(x) = 0 \quad \text{e} \quad \chi(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \chi(x) = 1,$$

e si consideri il funzionale $F : X \rightarrow [0, \infty]$

$$F(\chi) = \int_{\mathbb{R}} (\chi'^2 + \chi^2(1 - \chi)^2) dx.$$

Provare che F ha minimo su X e calcolarlo.

Suggerimenti. Sia $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione minimizzate. Si può supporre $0 \leq \chi_n \leq 1$. Discutere questo aspetto: posso supporre che le χ_n siano crescenti? Estrarre una sottosuccessione che converge debolmente in $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$. Si potrà anche avere convergenza puntuale quasi ovunque. Semicontinuità inferiore. Dedurre l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole. Il minimo χ è più regolare. Integrare l'equazione ed arrivare alla soluzione esplicita.