

Equazioni Differenziali 2

Nome:

Scritto del 14 Giugno 2010

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' = y - 2y^3.$$

- i) (4 punti) Provare che tutte le soluzioni sono limitate e definite su tutto \mathbb{R} .
- ii) (4 punti) Sia $y \in C^2(\mathbb{R})$ la soluzione dell'equazione differenziale relativa ai dati iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Provare che $0 < y(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x).$$

Esercizio 2 (8 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|1 - y^2|}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- i) (4 punti) Provare che esiste un'unica soluzione locale e calcolarla.
- ii) (4 punti) Descrivere l'insieme di tutte le soluzioni $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema. Calcolare la soluzione superiore e quella inferiore.

Esercizio 3 (8 punti) Enunciare i principali teoremi sull'esistenza globale di soluzioni di equazioni differenziali (fuga dai compatti, esistenza in grande). Illustrare brevemente l'idea di una dimostrazione significativa. Max. 1 pagina.