# Equazioni Differenziali

Foglio 1

Nome: Consegna entro 30 Gennaio

---

**Esercizio 1** Verificare che le seguenti funzioni sono armoniche nei domini specificati e calcolarne l'armonica coniugata:
1) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ in $\mathbb{R}^2$;
2) $u(x,y) = e^y \sin x$ in $\mathbb{R}^2$;
3) $u(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ in $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\big\}$.

**Esercizio 2** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e connesso di classe $C^1$ e sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una funzione armonica tale che

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Verificare che $u$ è costante.

**Esercizio 3** 1) Sia $u \in C^3(\mathbb{R}^n)$ una funzione a supporto compatto. Verificare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx,$$

dove $|\nabla^2 u|^2 = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} u_{ij}^2$ è la norma della matrice Hessiana.

2) Dedurre dal punto 1) che una funzione armonica con supporto compatto è identicamente nulla.

**Esercizio 4** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera di classe $C^1$ e sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ tale che $u = 0$ su $\partial\Omega$. Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ vale la disuguaglianza

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx.$$

Dedurre che se $u \in C^2(\bar{\Omega})$ è armonica in $\Omega$ e nulla al bordo allora $u = 0$.

**Esercizio 5** Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $g \in C(\Omega)$ una funzione continua e limitata. Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una funzione tale che

$$\int_{\Omega} \big(|\nabla u|^2 + (u-g)^2\big) dx \leq \int_{\Omega} \big(|\nabla v|^2 + (v-g)^2\big) dx$$

per ogni $v \in C^1(\Omega)$. Provare che $u$ risolve l'equazione differenziale $\Delta u = u - g$ in $\Omega$.