Equazioni Differenziali

Foglio 2

Nome:

Consegna entro 13 Febbraio

Esercizio 1 (Laplaciano in coordinate polari) Siano $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ coordinate nel piano e siano $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0,2\pi)$ le corrispondenti coordinate polari, cioè $x = r\cos\vartheta$ e $y = r\sin\vartheta$. Verificare che

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}.$$

Esercizio 2 (Esempio di Hadamard) Sia $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e sia $\beta \in \mathbb{N}$ un parametro. Definiamo la funzione u in $\bar{B}$ tramite coordinate polari

$$u(r,\vartheta) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n^\beta} \frac{\sin(n^\beta \vartheta)}{n^2}, \quad 0 \leq r \leq 1,\ \vartheta \in [0,2\pi).$$

Verificare che:

i) $u \in C(\bar{B})$ e $\Delta u = 0$ in B;

ii) $\displaystyle\int_B |\nabla u|^2 dxdy < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \beta < 3.$

Suggerimenti. Considerare la funzione a valori complessi

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n^\beta}}{n^2}, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1,$$

e osservare che $|\nabla u|^2 = |\partial_z f|^2$. Si può (deve) usare l'identità di Parseval

$$\int_B \Big| \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \Big|^2 dxdy = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_B |c_n z^n|^2 dxdy.$$

Esercizio 3 Sia u una funzione armonica non negativa nella palla $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Stimare $u(x)$ per $|x| = 1/2$ in rapporto a $u(0)$.

Esercizio 4 Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione subarmonica. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$\varphi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

è monotona crescente.