Equazioni Differenziali

Foglio 4

Nome: Consegna entro 27 Febbraio

Esercizio 1 Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una (la) soluzione del Problema di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Provare che per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$u(x) \geq \frac{1}{2n} \text{dist}(x; \partial\Omega)^2.$$

Esercizio 2 Sia u una funzione armonica in $\mathbb{R}^n$ tale che per qualche $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{1 + |x|^k} < +\infty.$$

Provare che u è un polinomio di grado al più k.

Esercizio 3 Sia $B = B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$ e si consideri il nucleo di Poisson di B

$$P(x, y) = \frac{1}{n\omega_n r} \frac{r^2 - |x|^2}{|x - y|^n}, \quad x \in B, \, y \in \partial B.$$

Verificare che per ogni $x \in B$ si ha

$$u(x) := \int_{\partial B} P(x, y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 1.$$

Suggerimento: u è armonica in B, calcolare $u(0)$ ed esaminare le simmetrie di u.