Equazioni Differenziali

Foglio 6

Nome: Consegna entro 12 Marzo

Esercizio 1 Sia $\varphi \in C([0,\pi])$ una funzione continua della forma

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx), \qquad a_n \in \mathbb{R},$$

con serie convergente uniformemente.
Risolvere il Problema di Dirichlet nel rettangolo $R = (0,\pi) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } R \\ u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,\pi] \\ u = 0 & \text{su } \partial R \setminus [0,\pi] \times \{0\}. \end{cases}$$

Suggerimento: cercare soluzioni dell'equazione $\Delta u = 0$ con il metodo della separazione delle variabili: $u(x,y) = f(x)g(y)$, da cui $(f'' - \lambda f)g + (g'' - \lambda g)f = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, separare le equazioni, determinare λ in base ai dati al bordo, etc.

Esercizio 2 (Principio di simmetria di Schwarz) Siano $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $B^+ = \{x \in B : x_n > 0\}$ e $B^- = \{x \in B : x_n < 0\}$. Sia $C(\bar{B}^+)$ una funzione armonica in B^+ tale che $u(x) = 0$ per $x_n = 0$. Definiamo la funzione $\bar{u} : \bar{B} \to \mathbb{R}$:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \bar{B}^+, \\ -u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x \in \bar{B}^-. \end{cases}$$

Dimostrare che $\bar{u}$ è armonica in B.

Esercizio 3 Sia u una funzione armonica in $\mathbb{R}^2$ tale che l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 : u(x) = 0\}$ è l'unione di due rette non coincidenti. Determinare la funzione u.