Appunti del Corso di Matematica A, 2007–2008

Roberto Monti, Andrea Centomo

Versione del 15 Novembre 2007
Per segnalare errori: monti@math.unipd.it

Indice

Capitolo 1

Calcolo Differenziale

1.1 Sviluppi di Taylor

Definizione 1.1 (Polinomio di Taylor e Resto) *Sia $A = (a, b)$ un intervallo aperto e sia $f \in C^\infty(A)$. Il polinomio di Taylor di f di grado $n \in \mathbb{N}$, con centro $x_0 \in A$ è*

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Il resto n-esimo è $R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0)$.

Ad esempio, il polinomio di Taylor di f di grado 3 e con centro in $x_0 = 0$ sarà

$$P_3(x, x_0) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3.$$

Teorema 1.2 (Taylor) *Siano $A = (a, b)$ un intervallo aperto, $x_0 \in A$, $f \in C^\infty(A)$, ed $n \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $x \in A$ si ha*

$$f(x) = P_n(x, x_0) + R_n(x, x_0) \tag{1.1}$$

dove il resto verifica

$$R_n(x, x_0) = \frac{(x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \tag{1.2}$$

per un certo ξ compreso fra x_0 e x. In particolare, per $x \to x_0$ si ha

$$R_n(x, x_0) = o\big((x - x_0)^n\big). \tag{1.3}$$

Dim. L'espressione (1.3) per il resto segue dall'espressione (1.2). È sufficiente provare che il resto $R_n(x, x_0)$ si può scrivere nella forma (1.2). Poniamo per semplicità

$$G(x) = (x - x_0)^{n+1} \quad \text{e} \quad F(x) = R_n(x, x_0).$$

Osserviamo che

$$G^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{per} \quad k = 0, 1, \dots, n, \tag{1.4}$$

mentre $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$. Analogamente,

$$F^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{per} \quad k = 0, 1, \dots, n, \tag{1.5}$$

mentre $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$. Per verificare la (1.5), si osserva preliminarmente che

$$\left((x - x_0)^i\right)^{(k)}\Big|_{x=x_0} = \begin{cases} k! & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Dunque,

$$F^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \left((x - x_0)^i\right)^{(k)}\Big|_{x=x_0} = 0$$

per $k = 0, 1, \dots, n$.

Usando ripetutamente (1.4) e (1.5), dal Teorema di Cauchy si trova

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}$$

con ξ_1 compreso fra x_0 e x, e quindi

$$\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(x_0)}{G'(\xi_1) - G'(x_0)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}$$

con ξ_2 compreso fra x_0 e ξ_1. Iterando questo argomento si ottiene la catena di uguaglianze

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \dots = \frac{F^{(n)}(\xi_n) - F^{(n)}(x_0)}{G^{(n)}(\xi_n) - G^{(n)}(x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!},$$

con ξ_{n+1} compreso fra x_0 e ξ_n. In conclusione, si ha

$$R_n(x, x_0) = F(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} G(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

dove si è posto $\xi = \xi_{n+1}$, un numero compreso fra x_0 e x.

Osservazione. L'espressione (1.2) si chiama *Resto in forma di Lagrange*. L'espressione (1.3) si chiama *Resto in forma di Peano*.

1.1.1 Sviluppi delle funzioni elementari

Sviluppiamo le funzioni elementari nel punto $x_0 = 0$.

Sviluppo di e^x. La funzione $f(x) = e^x$ verifica

$$f^{(k)}(x) = e^x, \qquad f^{(k)}(0) = e^0 = 1, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Quindi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x,0),$$

dove il resto è della forma, per un certo ξ compreso fra 0 e x,

$$R_n(x,0) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} = o(x^n)$$

per $x \to 0$.

Sviluppo di $\sin x$. La funzione $f(x) = \sin x$ verifica

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x, \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x, \qquad k \in \mathbb{N},$$

e quindi $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, per $k \in \mathbb{N}$. Si ottiene lo sviluppo di Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x,0),$$

dove il resto è della forma

$$R_{2n+1}(x,0) = (-1)^{n+1}\frac{\sin(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2},$$

con ξ compreso fra 0 e ξ. Osserviamo che lo sviluppo contiene solo potenze di grado dispari, essendo $\sin x$ una funzione dispari. Inoltre, il resto verifica, per $x \to 0$,

$$R_{2n+1}(x,0) = o(x^{2n+2}).$$

Infatti, $\sin(\xi) = o(1)$ per $x \to 0$.

Sviluppo di $\cos x$. La funzione $f(x) = \cos x$ verifica

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x, \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x, \qquad k \in \mathbb{N},$$

e quindi $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$, per $k \in \mathbb{N}$. Si ottiene lo sviluppo di Taylor

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x,0),$$

dove il resto è della forma

$$R_{2n}(x,0) = (-1)^{n+1}\frac{\sin(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

con ξ compreso fra 0 e ξ. Osserviamo che lo sviluppo contiene solo potenze di grado pari, essendo $\cos x$ una funzione pari. Inoltre, il resto verifica, per $x \to 0$,

$$R_{2n}(x,0) = o(x^{2n+1}).$$

Sviluppo di $\log(1+x)$**.** La funzione $f(x) = \log(1+x)$ verifica

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad \text{etc.}$$

e quindi in generale

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \qquad f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)! \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Si ottiene lo sviluppo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}},$$

con ξ compreso fra 0 e x.

Capitolo 2

Integrale di Riemann

2.1 Costruzione dell'integrale di Riemann

Consideriamo un intervallo chiuso e limitato $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definizione 1.1 (Suddivisione) *Una* suddivisione *di A è un insieme ordinato di punti $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$, con $n \geq 1$. Indichiamo con $\mathcal{D}(A)$ l'insieme di tutte le suddivisioni di A.*

Definizione 1.2 (Suddivisione più fine) *Siano D_1 e D_2 due suddivisioni di A. Diremo che D_1 è più fine di D_2 se tutti i punti di D_2 sono contenuti in D_1 ossia se $D_2 \subseteq D_1$.*

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata*. Data una suddivisione $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$, sia $A_i = [x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, \ldots, n$, l'i-esimo intervallo associato a questa suddivisione. Essendo f limitata, sono finiti i seguenti estremi inferiore e superiore

$$m_i = \inf_{x \in A_i} f(x) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x \in A_i} f(x).$$

Si chiamano rispettivamente *somme inferiori* e *somme superiori* di f relativamente alla suddivisione D i valori

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{e} \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Somme inferiori e superiori ammettono una semplice interpretazione geometrica come aree di opportuni plurirettangoli (si vedano le Figura 2.1 e 2.2).

Proprietà delle somme inferiori e superiori:

1) Per ogni suddivisione D vale $s(f, D) \leq S(f, D)$.

2) Se D_1 è una suddivisione più fine di D_2, allora $s(f, D_1) \geq s(f, D_2)$ e $S(f, D_1) \leq S(f, D_2)$.

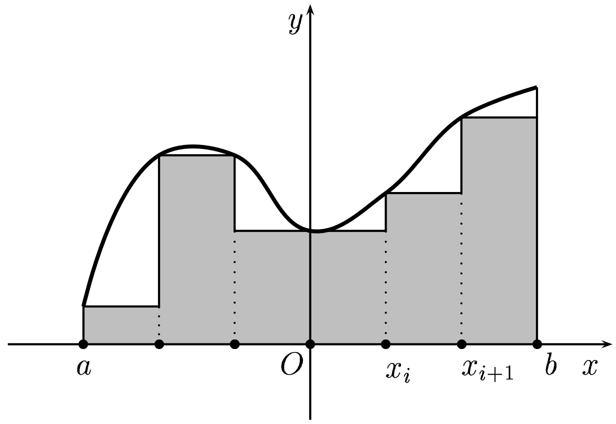

Figura 2.1: Somme inferiori

3) Date due suddivisioni generiche D_1 e D_2, si ha sempre $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$. Per verificare questa affermazione, osserviamo che la suddivisione $D_1 \cup D_2$ è più fine sia di D_1 che di D_2. Quindi, dalle proprietà 1) e 2) segue che

$$s(f, D_1) \leq s(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_2).$$

4) Dalla proprietà 3) discende che

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D).$$

Definizione 1.3 (Funzione Riemann-integrabile) *Sia $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione limitata $f : A \to \mathbb{R}$ si dice Riemann-integrabile su A e si scrive $f \in \mathcal{R}(A)$ se*

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D).$$

In questo caso, il valore comune

$$\int_a^b f(x)dx := \sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D)$$

si dice integrale di f su $A = [a, b]$.

Nel caso di funzioni positive l'integrale di Riemann ammette un'interpretazione geometrica come area della regione del piano delimitata dal grafico di f e dall'asse delle x.

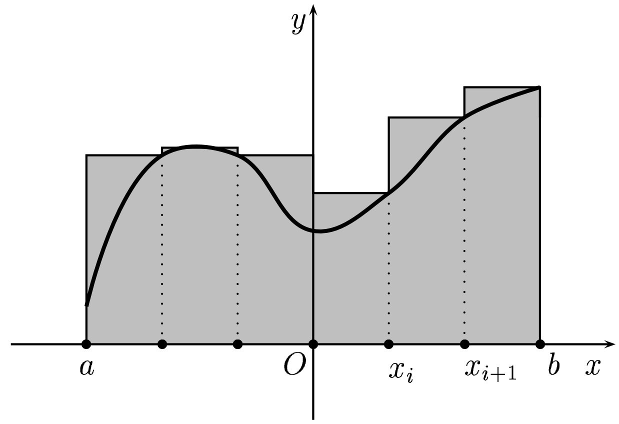

Figura 2.2: Somme superiori

Definizione 1.4 (Funzione uniformemente continua) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice* uniformemente continua *su A se*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Teorema 1.5 (Heine-Cantor) *Sia $A = [a, b]$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua su A. Allora f è uniformemente continua su A.*

Dim. Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua su A. Allora:

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n, y_n \in A \quad \text{tali che} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Le successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono limitate e quindi esistono delle sottosuccessioni convergenti $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$: per qualche $x_0 \in A$ e $y_0 \in A$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = x_0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} y_{k_n} = y_0.$$

Deve essere $x_0 = y_0$, dal momento che $(x_{k_n} - y_{k_n}) \to 0$ per $n \to +\infty$. Essendo f continua, abbiamo

$$0 = |f(x_0) - f(y_0)| = \lim_{n\to+\infty} |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon.$$

Questo è assurdo, perchè $\varepsilon > 0$. $\square$

Teorema 1.6 (Integrabilità delle funzioni continue) *Sia $A = [a, b]$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è Riemann-integrabile in A.*

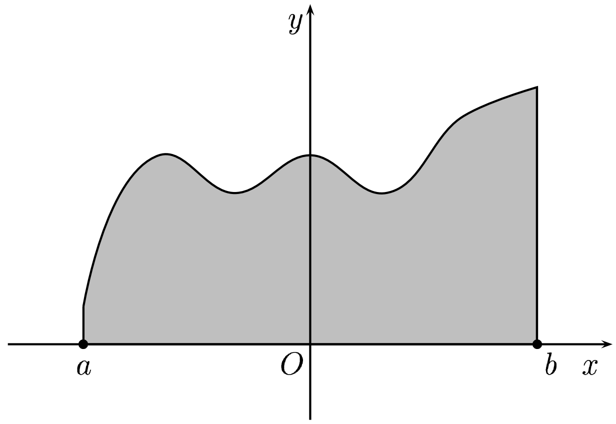

Figura 2.3: Significato geometrico dell'integrale definito

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ proveremo che esiste una suddivisione $D \in \mathcal{D}(A)$ tale che

$$S(f, D) \leq s(f, D) + \varepsilon. \tag{1.1}$$

Da questo fatto segue che

$$\inf_{D\in\mathcal{D}(A)} S(f, D) \leq S(f, D) \leq s(f, D) + \varepsilon \leq \sup_{D\in\mathcal{D}(A)} s(f, D) + \varepsilon.$$

Data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, si conclude che

$$\inf_{D\in\mathcal{D}(A)} S(f, D) \leq \sup_{D\in\mathcal{D}(A)} s(f, D).$$

Da questa disuguaglianza e dalla disuguaglianza oppostache è sempre vera, la proprietà 4) delle somme inferiori e superiori, si deduce che

$$\inf_{D\in\mathcal{D}(A)} S(f, D) = \sup_{D\in\mathcal{D}(A)} s(f, D),$$

ovvero che f è Riemann-integrabile su A.

Dimostriamo la (1.1). Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Dal momento che f è continua su A, allora per il Teorema di Heine-Cantor essa è anche uniformemente continua su A e quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Scegliamo la suddivisione $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ in modo tale che $x_i - x_{i-1} < \delta$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Dunque se $x, y \in A_i = [x_{i-1}, x_i]$ allora

$$f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \quad \text{ovvero} \quad f(x) \leq f(y) + \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Si deduce che

$$M_i = \sup_{x \in A_i} f(x) \leq \inf_{x \in A_i} f(x) + \frac{\varepsilon}{b-a} = m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} S(f,D) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \left\{ m_i + \frac{\varepsilon}{b-a} \right\} (x_i - x_{i-1}) \\ &= s(f,D) + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = s(f,D) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Questo prova la (1.1) e quindi il Teorema. □

Osservazione 1.7 *1) Polinomi, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e iperboliche e loro composizioni sono Riemann-integrabili (su intervalli chiusi e limitati dove sono definite).*

2) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione monotòna, allora f è Riemann integrabile su $[a,b]$ (prova omessa).

3) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è limitata ed è discontinua in al più un numero finito di punti, allora f è Riemann integrabile su $[a,b]$ (prova omessa).

Esempio 1.8 (Funzione di Dirichlet) *Esistono funzioni che* non *sono integrabili nel senso di Riemann. Un esempio classico è la* funzione di Dirichlet. *Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita come segue:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Data una qualsiasi suddivisione $D = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = 1\}$ dell'intervallo $[0,1]$, posto $A_i = [x_{i-1}, x_i]$ risulta sempre

$$\inf_{x \in A_i} f(x) = 0 \quad e \quad \sup_{x \in A_i} f(x) = 1.$$

Infatti in ogni A_i ci sono sia punti razionali che punti reali non razionali. Dunque, $s(f,D) = 0$ e $S(f,D) = 1$ per una qualsiasi suddivisione e quindi

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f,D) = 0 < 1 = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f,D).$$

La funzione di Dirichlet non è Riemann-integrabile.

2.1.1 Proprietà generali dell'integrale di Riemann

L'integrale di Riemann gode delle seguenti proprietà:

1) Linearità. Se $f, g \in \mathcal{R}(A)$ allora $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(A)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e inoltre

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

2) Monotonia. Se $f, g \in \mathcal{R}(A)$ e $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A$ allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3) Scomposizione del dominio. Se $f \in \mathcal{R}(A)$ e $A = [a,b] = [a,c] \cup [c,b]$ allora

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4) Se $f \in \mathcal{R}(A)$ allora $|f| \in \mathcal{R}(A)$ e inoltre

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Convenzione (Integrale con segno). Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Definiamo l'integrale di f fra b ed a (con $b > a$) nel seguente modo

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

2.2 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 2.1 (dei valori intermedi) *Siano $A = [a,b]$ ed $f \in C(A)$. Per ogni numero reale $t \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\min_A f \leq t \leq \max_A f$$

esiste almeno un punto $\xi \in A$ tale che $f(\xi) = t$.

Dim. Per il Teorema di Weierstrass esistono $x_0, x_1 \in A$ tali che

$$f(x_0) = \min_A f \quad \text{e} \quad f(x_1) = \max_A f.$$

La funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - t$ verifica $g(x_0) = f(x_0) - t \leq 0$ e $g(x_1) = f(x_0) - t \geq 0$. Siccome g è continua, per il Teorema degli zeri esiste $\xi \in [x_0, x_1]$ tale che $0 = g(\xi) = f(\xi) - t$. $\square$

Lemma 2.2 (della Media Integrale) *Siano $A = [a,b]$ ed $f \in C(A)$. Allora esiste $\xi \in A$ tale che*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi).$$

Dim. Osserviamo che

$$\min_A f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \max_A f.$$

Quindi l'affermazione è una conseguenza del Teorema dei valori intermedi. □

Definizione 2.3 (Funzione integrale) *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. La funzione* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

si chiama funzione integrale *di* f.

Definizione 2.4 (Primitiva) *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Una funzione* $G \in C^1([a,b])$ *tale che* $G'(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in [a,b]$ *si dice* primitiva *di* f.

Osserviamo che se G è una primitiva di f allora anche $G(x)+k$, $k \in \mathbb{R}$, è una primitiva di f. Quindi una funzione che ammette una primitiva ne ammette infinite.

Lemma 2.5 *Siano* $F, G \in C^1([a,b])$ *e tali che* $G'(x) = F'(x)$ *per ogni* $x \in [a,b]$. *Allora la funzione* $F - G$ *è una funzione costante.*

Dim. La funzione ausiliaria $H = G - F$ è derivabile e verifica $H'(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Siano $x_1, x_2 \in [a,b]$. Per il Teorema di Lagrange esiste un punto ξ compreso fra x_1 e x_2 tale che

$$H(x_1) - H(x_2) = H'(\xi)(x_1 - x_2) = 0.$$

Questo prova che H è costante su $[a,b]$. □

Teorema 2.6 (Fondamentale del calcolo integrale) *Sia* $f \in C([a,b])$ *una funzione continua e sia* F *la sua funzione integrale:*

1) Allora F *è derivabile in* $[a,b]$ *ed* $F'(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in [a,b]$.

2) Inoltre, se G *è una primitiva di* f *si ha* $F(x) = G(x) - G(a)$, *ed in particolare*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = G(b) - G(a).$$

Dim. Fissiamo $x_0 \in [a,b]$ e consideriamo il rapporto incrementale per $x \neq x_0$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left\{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right\} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la proprietà di scomposizione del dominio per l'integrale di Riemann. Per il Lemma della media integrale esiste un punto $\xi = \xi(x)$ compreso fra x e x_0 tale che

$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(\xi(x)).$$

Nel limite $x \to x_0$ si ha anche $\xi(x) \to x_0$ e quindi esiste il limite del rapporto incrementale e vale

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(\xi(x)) = f(x_0).$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la continutà di f. Questo prova la Tesi 1) del Teorema.

Essendo $F'(x) = f(x) = G'(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, dal Lemma 2.5 segue che $F-G$ è costante e quindi $F(x) - G(x) = F(a) - G(a)$. Essendo $F(a) = 0$ si trova

$$F(x) = G(x) - G(a),$$

come volevasi dimostrare. $\square$

Applicazione del Teorema fondamentale del calcolo integrale. Il Teorema 2.6 permette di calcolare gli integrali: data una funzione integranda f si cerca una primitiva G e quindi si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \big[G(x)\big]_a^b = G(b) - G(a).$$

Ad esempio, la funzione $f(x) = 1/x$ ha come primitiva $G(x) = \log|x|$ in quanto $G'(x) = 1/x$, e dunque

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \big[\log|x|\big]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

Analogamente, la funzione $f(x) = \log|x|/x$ ha come primitiva $G(x) = \log^2|x|/2$ e dunque

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}\log^2 x\right]_1^2 = \frac{1}{2}\log^2 2.$$

Definizione 2.7 (Integrale indefinito) *Con l'espressione* integrale indefinito *di una funzione f si indica una generica primitiva di f. L'integrale indefinito di f si indica con il simbolo di integrale senza estremi di integrazione*

$$\int f(x)dx.$$

Integrali indefiniti elementari: (Omessa costante addittiva)

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad \alpha \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$$
$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}, \qquad \alpha \neq 0$$
$$\int \cosh x dx = \sinh x$$
$$\int \sinh x dx = \cosh x$$
$$\int \cos x dx = \sin x$$
$$\int \sin x dx = -\cos x$$
$$\int \mathrm{tg} x dx = -\log|\cos x|$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg}\, x$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \mathrm{settsinh}\, x$$

2.3 Integrazione delle funzioni razionali

Una funzione razionale è una funzione del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove P e Q sono polinomi. La funzione è ben definita nell'insieme dove $Q(x) \neq 0$.

2.3.1 Esempi elementari

Vediamo alcuni esempi di calcolo dell'integrale di funzioni razionali.

Esempio 3.1 *$Q(x) = x + k$ con $k \in \mathbb{R}$.*

$$\int \frac{1}{x+k} dx = \log|x+k|$$
$$\int \frac{x}{x+k} dx = \int \frac{x+k-k}{x+k} dx = \int \left(1 - \frac{k}{x+k}\right) dx = x - k\log|x+k|$$
$$\int \frac{x^2}{x+k} dx = \int \left(\frac{x(x+k)}{x+k} - \frac{kx}{x+k}\right) dx = \frac{x^2}{2} - kx + k^2\log|x+k|.$$

Esempio 3.2 $Q(x) = x^2 + 1$.

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \text{arctg}x$$
$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$
$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \text{arctg}x$$
$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int \frac{x^3+x-x}{x^2+1}dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

Esempio 3.3 *$P(x) = 2ax + b$ e $Q(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \log|ax^2+bx+c|.$$

Esempio 3.4 *$P(x) = 1$ e $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Vogliamo calcolare l'integrale*

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$

con $a \neq 0$. Si considera il discriminate $\Delta = b^2 - 4ac$ del polinomio Q.

Caso 1: $\Delta < 0$. *In questo caso, si può sempre scrivere $Q(x) = \alpha\big((\beta x+\gamma)^2+1\big)$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ da determinare in funzione di a, b, c. Ci si riduce all'integrale*

$$\int \frac{1}{\alpha\big((\beta x+\gamma)^2+1\big)}dx = \frac{1}{\alpha\beta}\text{arctg}(\beta x+\gamma).$$

Caso 2: $\Delta > 0$. *In questo caso, si ha $Q(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$, con $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ radici (distinte) di Q. Ci si riduce all'integrale*

$$\int \frac{1}{a(x-x_0)(x-x_1)}dx = \frac{1}{a(x_0-x_1)}\log\left|\frac{x-x_0}{x-x_1}\right|,$$

che si calcola col metodo dei fratti semplici.

Caso 3: $\Delta = 0$. *In questo caso, si ha $Q(x) = a(x - x_0)^2$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ radice doppia di Q. Ci si riduce all'integrale*

$$\int \frac{1}{a(x-x_0)^2}dx = -\frac{1}{a(x-x_0)}.$$

Esempio 3.5 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}dx.$$

Soluzione. Il polinomio $Q(x) = 1 - x^2$ ha due radici reali distinte. Scomponiamo la funzione integranda come segue:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}$$

con A e B numeri reali da determinare. Osserviamo che

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{(A+B)+(B-A)x}{1-x^2}.$$

Per avere l'uguaglianza si deve avere $1 = (A+B) + (B-A)x$ e quindi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Possiamo allora calcolare l'integrale

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \\ &= \Big[\log|1+x| - \log|1-x|\Big]_{-1/2}^{1/2} = \\ &= \left[\log\frac{|1+x|}{|1-x|}\right]_{-1/2}^{1/2} = \log 3. \end{aligned}$$

Esempio 3.6 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_{-1/2}^{1} \frac{1}{x^2+x+1} dx.$$

Soluzione. Il polinomio al denominatore ha discriminante $\Delta = -3$ e quindi è sempre positivo. Completiamo il quadrato relativamente ai primi due addendi

$$x^2+x+1 = \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right].$$

Quindi

$$I = \frac{4}{3}\int_{-1/2}^{1} \frac{1}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{x=-1/2}^{x=1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.$$

Esempio 3.7 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx.$$

Soluzione. Il polinomio al denominatore ha due radici semplici -1 e -2. Cerchiamo allora di scomporre la funzione integranda nella forma

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

con A e B numeri reali da determinare. Osserviamo che

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(2A+B)+(A+B)x}{x^2+3x+2}.$$

Per avere l'uguaglianza deve essere $1 = (2A+B)+(A+B)x$ e quindi

$$\begin{cases} 2A+B=1 \\ A+B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=+1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Possiamo allora calcolare l'integrale

$$I = \int_{-1/2}^{1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \log \frac{4}{3}$$

dove i conti intermedi sono lasciati al lettore per esercizio.

2.3.2 Decomposizione in fratti semplici

Siano P e Q due polinomi. Il procedimento per calcolare l'integrale

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

si suddivide nei seguenti passi:

Passo 1. Divisione di polinomi. Se P ha grado maggiore o uguale al grado di Q, si esegue una divisione di polinomi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)} + R(x),$$

dove S è un polinomio con grado strettamente minore del grado di Q ed R è il resto della divisione, un polinomio che sappiamo integrare.

Passo 2. Fattorizzazione di Q. Si fattorizza Q in un prodotto $Q(x) = Q_1(x) \cdot \ldots \cdot Q_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, dove ciascun fattore Q_i è un polinomio di uno dei due tipi:

$Q_i(x) = (x-x_0)^m$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, oppure:
$Q_i(x) = (ax^2+bx+c)^m$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ed $m \in \mathbb{N}$.

Vediamo due esempi di fattorizzazione, in entrambi casi ci sono 2 fattori ($k=2$):

$$Q(x) = x^4 - x^3 = x^3(x-1),$$
$$Q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2+1)(x+1)^2.$$

Passo 3. Decomposizione in fratti semplici. Supponiamo che P abbia grado strettamente minore del grado di Q. Decomponiamo il quoziente P/Q nel seguente modo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \ldots + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)},$$

dove ciascun $P_i(x)$ è un polinomio, che è da determinare, con grado uguale al grado di $Q_i(x)$ meno 1. Nei due esempi precedenti si ha la decomposizione:

$$\frac{P(x)}{x^3(x-1)} = \frac{A+Bx+Cx^2}{x^3} + \frac{D}{x-1},$$
$$\frac{P(x)}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2},$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ da determinare in funzione di P.

Passo 4. Integrazione dei fratti semplici. Si integrano i fratti semplici con le tecniche note.

Esempio 3.8 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_2^3 \frac{1}{x^3(x-1)} dx.$$

Soluzione. Abbiamo la decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{x^3(x-1)} = \frac{A+Bx+Cx^2}{x^3} + \frac{D}{x-1}.$$

Le costanti A, B, C e D si determinano nel seguente modo. Eseguendo le somme algebriche si trova l'identità

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3(x-1)} &= \frac{A+Bx+Cx^2}{x^3} + \frac{D}{x-1} \\ &= \frac{(C+D)x^3+(B-C)x^2+(A-B)x-A}{x^3(x-1)}.\end{aligned}$$

Confrontando i numeratori si trova l'equazione

$$1 = (C+D)x^3 + (B-C)x^2 + (A-B)x - A.$$

Quindi, per il principio di identità dei polinomi, si arriva al sistema

$$\begin{cases} C+D=0 \\ B-C=0 \\ A-B=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-1 \\ C=-1 \\ D=1. \end{cases}$$

Usando la decomposizione in fratti semplici, si trova

$$I = \int_2^3 \left(\frac{-1-x-x^2}{x^3} + \frac{1}{x-1}\right) dx = \int_2^3 \left(-x^{-3} - x^{-2} - x^{-1} + \frac{1}{x-1}\right) dx.$$

Il risultato è $I = 17/72 + \log 3/4$ e i calcoli intermedi sono lasciati al lettore per esercizio.

2.4 Integrazione per parti e per sostituzione

2.4.1 Integrazione per parti

Teorema 4.1 (Integrazione per parti) *Siano $f, g \in C^1([a,b])$, allora*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Dim. La regola di derivazione del prodotto ci dà

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

per ogni $x \in (a,b)$. Integrando su $[a,b]$ si ha

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

da cui, riordinando, la tesi. □

Esempio 4.2 *Esempi di integrazione per parti:*

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 xe^x dx = \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \big[e^x\big]_0^1 = 1,\\
&\int_0^{\pi/2} x\sin x dx = \big[-x\cos x\big]_0^{\pi/2} + \int_0^1 \cos x dx = \big[\sin x\big]_0^{\pi/2} = 1,\\
&\int_1^e x\log x dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2+1}{4},\\
&\int_0^1 \mathrm{arctg} x dx = \big[x\mathrm{arctg} x\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}.
\end{aligned}$$

2.4.2 Integrazione per sostituzione

Teorema 4.3 (Integrazione per sostituzione) *Sia $\varphi\colon [y_0, y_1] \to [x_0, x_1]$ una funzione derivabile con derivata continua e tale che $\varphi(y_0) = x_0$ e $\varphi(y_1) = x_1$. Sia poi $f\colon [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{y_0}^{y_1} f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

Formalmente, si pone $x = \varphi(y)$, si cambiano gli estremi di integrazione e si sostituisce $dx = \varphi'(y)dy$.

Dim. Per $y \in [y_0, y_1]$ consideriamo la funzione $H : [y_0, y_1] \to \mathbb{R}$

$$H(y) = \int_{x_0}^{\varphi(y)} f(x)dx = \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} f(x)dx = F(\varphi(y))$$

dove F è la funzione integrale di f, ossia

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Allora, utilizzando il Teorema di derivazione della funzione composta e il Teorema fondamentale del calcolo, si ha

$$H'(y) = F'(\varphi(y))\varphi'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y).$$

Integrando in y questa identità si ottiene

$$\int_{y_0}^{y_1} H'(y)dy = \int_{y_0}^{y_1} f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

Ora si osserva che

$$\int_{y_0}^{y_1} H'(y)dy = H(y_1) - H(y_0) = \int_{x_0}^{\varphi(y_1)} f(x)dx - \int_{x_0}^{\varphi(y_0)} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx,$$

da cui si ha la tesi. □

Esempio 4.4 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_{-2}^{1} \frac{x+3}{x\sqrt{x+2}}dx.$$

Soluzione. Utilizziamo il teorema di integrazione per sostituzione. Conviene porre

$$y = \sqrt{x+2}, \quad x = y^2 - 2, \quad dx = 2ydy.$$

Gli estremi di integrazione di trasformano nel seguente modo: $x = -2 \Rightarrow y = 0$ e $x = -1 \Rightarrow y = 1$. Dunque

$$I = \int_0^1 \frac{y^2+1}{y(y^2-2)} 2ydy = 2\int_0^1 \frac{y^2+1}{y^2-2}dy.$$

Si tratta ora di calcolare l'integrale di una funzione razionale. Il grado del polinomio al numeratore e al denominatore sono uguali e quindi dobbiamo fare una divisione di polinomi. Alternativamente possiamo decomporre la funzione razionale col seguente artificio

$$\frac{y^2+1}{y^2-2} = \frac{y^2-2+3}{y^2-2} = 1 + \frac{3}{y^2-2}.$$

Allora

$$I = 2\int_0^1 \frac{y^2+1}{y^2-2}dy = 2 + 6\int_0^1 \frac{1}{y^2-2}dy.$$

Calcoliamo ora

$$\int_0^1 \frac{1}{y^2-2}dy.$$

Osserviamo che il polinomio al denominatore ammette due radici semplici e quindi cerchiamo una decomposizione del tipo

$$\frac{1}{y^2-2} = \frac{A}{y+\sqrt{2}} + \frac{B}{y-\sqrt{2}} = \frac{y(A+B)+\sqrt{2}(B-A)}{y^2-2}.$$

Per determinare A e B risolviamo il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \sqrt{2}(B-A)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\sqrt{2}/4 \\ B=\sqrt{2}/4. \end{cases}$$

Allora

$$\int_0^1 \frac{1}{y^2-2}dy = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{-1}{y+\sqrt{2}} + \frac{1}{y-\sqrt{2}}\right)dy = \frac{\sqrt{2}}{4}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

In conclusione

$$I = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

Esempio 4.5 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Soluzione. Utilizziamo il teorema di integrazione per sostituzione. Conviene porre

$$x = \sin t, \quad t = \arcsin x, \quad dx = \cos t dt.$$

Gli estremi di integrazione si trasformano nel seguente modo: $x=0 \Rightarrow t=0$, e $x=1 \Rightarrow t=\pi/2$. Dunque

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt.$$

Ora, per le formule di bisezione, si ha

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\big[\sin 2t\big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Non è difficile verificare la correttezza del calcolo se si ricorda che I corrisponde all'area di un quarto di cerchio unitario.

2.4.3 Integrali trigonometrici

Se si pone $t = \mathrm{tg}(x/2)$, le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ si trasformano nel seguente modo:

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{2\mathrm{tg}(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Inoltre, dalla relazione $x = 2\mathrm{arctg}(t)$ si ottiene la regola per trasformare il "differenziale"

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Queste formule sono dette *sostituzioni parametriche.*

Esempio 4.6 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

Soluzione. Usiamo le sostituzioni parametriche. Nell'integrale in esame, gli estremi di integrazione si trasformano nel seguente modo: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, e $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Quindi si trova

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2t}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{2tdt}{1+2t-t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\log(2\sqrt{2}+3) - \log 2.$$

Il calcolo dell'integrale della funzione razionale si lascia per esercizio.

In alcuni integrali trigonometrici conviene fare la sostituzione $t = \mathrm{tg}x$.

Esempio 4.7 *Calcolare l'integrale definito:*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x + 2\cos^2 x}.$$

Soluzione. Possiamo riscrivere l'integrale nella forma

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x(\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}x + 2)}$$

Se ora ricordiamo che $D\mathrm{tg}x = 1/\cos^2 x$ possiamo intuire che l'integrale si può calcolare utilizzando la sostituzione

$$t = \mathrm{tg}x, \quad \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt, \quad t_1 = \mathrm{tg}0 = 0, \quad t_2 = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

che conduce all'integrale di una semplice funzione razionale

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2+2t+2} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \Big[\mathrm{arctg}(t+1)\Big]_0^1 = \mathrm{arctg}2 - \frac{\pi}{4}$$

2.5 Integrali impropri

2.5.1 Integrali impropri su dominio illimitato

Definizione 5.1 *Sia $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $[a,+\infty)$ se esiste finito il limite*

$$\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)dx := \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

In questo caso, chiamiamo l'integrale sulla destra integrale improprio di f su $[a,+\infty)$.

Esempio 5.2 *Calcolare l'integrale improprio*

$$I = \int_4^{+\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)}dx.$$

Soluzione. Calcoliamo innanzitutto

$$\int_4^M \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)}dx.$$

Utilizziamo il teorema di integrazione per sostituzione. Si pone $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$, $dx = 2ydy$. Gli estremi di integrazione si trasformano in questo modo: $x = 4 \Rightarrow y = 2$, $x = M \Rightarrow y = \sqrt{M}$. Dunque

$$\int_4^M \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)}dx = 2\int_2^{\sqrt{M}} \frac{1}{y(y-1)}dy.$$

Decomponendo in fratti semplici si ha

$$2\int_2^{\sqrt{M}} \frac{1}{y(y-1)}dy = -2\int_2^{\sqrt{M}} \frac{dy}{y} + 2\int_2^{\sqrt{M}} \frac{dy}{y-1} = 2\left(\log\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} + \log 2\right).$$

In conclusione

$$I = \lim_{M\to+\infty} 2\left(\log\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} + \log 2\right) = 2\log 2.$$

Esempio 5.3 (Fondamentale) *Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro reale $\alpha > 0$*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx.$$

Nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^M = \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

Da ciò concludiamo che:

a) Se $\alpha > 1$ l'integrale converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

b) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale diverge

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = +\infty.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si ha

$$\int_1^{M} \frac{1}{x} dx = \log M$$

e quindi l'integrale diverge

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M\to+\infty} \log M = +\infty.$$

Riassumendo abbiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Teorema 5.4 (Criterio del confronto) *Siano $f, g \in C([a,+\infty))$ due funzioni tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq M$, per qualche $M > a$. Allora:*

a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty;$

b) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} g(x)dx = +\infty.$

Definizione 5.5 (Ordine di infinitesimo per $x \to +\infty$) *Una funzione $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ si dice infinitesima di ordine $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to +\infty$ se esiste finito il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = L \neq 0.$$

Teorema 5.6 (Criterio del confronto asintotico) *Sia $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, infinitesima di ordine $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to +\infty$. Allora:*

a) *se $\alpha > 1$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge;*

b) *se* $\alpha < 1$ *l'integrale improprio* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge.*

Dim. Dimostriamo la 1). Supponiamo ad esempio che

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = L > 0.$$

Dunque esiste $M > 0$ tale che

$$0 \le f(x) \le \frac{2L}{x^\alpha}$$

per ogni $x \ge M$. Siccome

$$\int_1^{+\infty} \frac{2L}{x^\alpha} dx$$

converge per $\alpha > 1$ il risultato segue dal Teorema del confronto. La dimostrazione del punto 2) si lascia per esercizio. □

Esempio 5.7 *Al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *si consideri l'integrale improprio*

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+1/x} \log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)dx.$$

1) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ *tali che l'integrale improprio è convergente;*

2) Calcolare I_α *per* $\alpha = -2$.

Soluzione. 1) Per rispondere alla prima domanda osserviamo in primo luogo che nel limite $x \to +\infty$ la funzione integranda si scrive come

$$\frac{x^\alpha}{1+1/x} \log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = \frac{x^\alpha}{1+1/x}\Big(\frac{1}{x} + o(1/x)\Big) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}(1+o(1)).$$

Per il *Criterio del confronto asintotico* l'integrale I_α converge se solo se

$$1-\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 0.$$

2) Per rispondere alla seconda domanda osserviamo che

$$D\log^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = 2\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\cdot\frac{-x^{-2}}{1+1/x},$$

da cui

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{-2}}{1+1/x}\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)dx = \lim_{k\to+\infty}\Big[-\frac{1}{2}\log^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big]_1^k = \log 2$$

2.5.2 Integrali impropri di funzioni non limitate

Definizione 5.8 *Sia $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua (non necessariamente limitata intorno all'estremo a). Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $(a,b]$ se esiste finito il limite*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx := \int_a^b f(x)dx.$$

In questo caso, chiamiamo l'integrale sulla destra integrale improprio di f fra a e b.

Esempio 5.9 (Fondamentale) *Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio a variare di $\alpha > 0$*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Da ciò concludiamo che:

a) Se $\alpha > 1$ l'integrale diverge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$$

b) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si ha

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = -\log \varepsilon$$

e quindi l'integrale diverge

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \log \varepsilon = +\infty.$$

Riassumendo abbiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty & \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Definizione 5.10 (Ordine di infinito per $x \to 0^+$) *Una funzione continua $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ si dice un infinito di ordine $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to 0^+$ se esiste finito*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha f(x) = L \neq 0.$$

Teorema 5.11 (Criterio del confronto asintotico) *Sia $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, infinita di ordine $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to 0^+$. Allora*

a) *se $\alpha \geq 1$ l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)dx$ diverge;*

b) *se $0 < \alpha < 1$ l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)dx$ converge.*

Dim. Segue per confronto con $1/x^\alpha$. $\square$

Esempio 5.12 *Studiare la convergenza del seguente integrale improprio*

$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin x}\log\left(\frac{\pi+x}{2\pi}\right)}{(\pi-x)^2}dx.$$

Soluzione. Osserviamo che la funzione integranda non è definita per $x = \pi$ mentre è definita e continua in $[0,\pi)$. Per comodità operiamo il cambiamento di variabile $y = \pi - x, dx = -dy$ ottenendo

$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin x}\log\left(\frac{\pi+x}{2\pi}\right)}{(\pi-x)^2}dx = \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin y}\log\left(1-\frac{y}{2\pi}\right)}{y^2}dy.$$

Nel limite per $y \to 0^+$ si ha

$$\sin y = y + o(y) \qquad\qquad \log\left(1-\frac{y}{2\pi}\right) = -\frac{y}{2\pi} + o(y).$$

Dunque

$$\frac{y\big(-\frac{1}{2\pi}+o(1)\big)\sqrt{y}(1+o(1))}{y^2} = \frac{-\frac{1}{2\pi}+o(1)}{y^{1/2}}.$$

Allora la funzione integranda è un infinito di ordine $1/2$ rispetto ad $1/y$ per $y \to 0^+$. Siccome $1/2 < 1$ l'integrale improprio converge.

2.5.3 Integrali assolutamente convergenti

Definizione 5.13 (Convergenza assoluta) *Una funzione continua $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ ha integrale improprio assolutamente convergente se converge l'integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty.$$

Teorema 5.14 (Criterio della convergenza assoluta) *Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge.}$$

Esempio 5.15 *Verificare che la funzione $f(x) = \sin x \log x / x^2$ ha integrale improprio assolutamente convergente su $[1, +\infty)$.*

Soluzione. Dobbiamo verificare che

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x \log x}{x^2} \right| dx < +\infty.$$

Cerchiamo di utilizzare il Teorema del confronto ricercando una maggiorazione della funzione integranda. Si ha

$$|f(x)| = \left| \frac{\sin x \log x}{x^2} \right| = |\sin x| \left| \frac{\log x}{x^2} \right| \leq \left| \frac{\log x}{x^2} \right|$$

dove si è usato il fatto che $|\sin x| \leq 1$. Cerchiamo di eliminare il logaritmo con una maggiorazione opportuna. Ricordiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0,$$

e dunque esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \geq M$ vale

$$\frac{\log x}{\sqrt{x}} \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \log x \leq \sqrt{x}.$$

Dunque, per $x \geq M$ avremo

$$|f(x)| \leq \frac{\log x}{x^2} \leq \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Siccome $3/2 > 1$

$$\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx < +\infty$$

e da Teorema del Confronto deduciamo che

$$\int_M^{+\infty} |f(x)|dx \leq \int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx < +\infty.$$

2.6 Esercizi svolti

Esercizio 6.1 *Calcolare l'integrale*

$$\int_1^e \frac{\log^3 x}{x\sqrt{1+\log^4 x}}dx.$$

Soluzione. La sostituzione più opportuna per il calcolo dell'integrale è la seguente:

$$z = \log^2 x \quad \frac{2\log x}{x}dx = dz \quad z_1 = \log^2 1 = 0 \quad z_2 = \log^2 e = 1$$

che conduce a

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}dz = \frac{1}{2}\Big[\sqrt{1+z^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Esercizio 6.2 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos x}{1+\sin x}dx.$$

Soluzione. Usando le sostituzioni parametriche si trova

$$I = \int_0^1 \frac{4}{(1+z)^2(1+z^2)}dz.$$

Il polinomio al denominatore $Q(z) = (1+z^2)(1+z)^2$ ammette la radice reale -1 (con molteplicità 2) e la coppia di radici complesse coniugate $\pm i$. Facciamo la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{4}{(1+z)^2(1+z^2)} = \frac{A(z+1)+B}{(z+1)^2} + \frac{Cz+D}{1+z^2}$$

con A, B, C e D opportuni numeri reali. Sviluppando i calcoli ed uguagliando i numeratori si ha

$$(C+A)z^3 + (D+2C+B+A)z^2 + (2D+C+A)z + D+B+A = 4$$

da cui, per il principio di identità dei polinomi, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} C+A=0 \\ D+2C+B+A=0 \\ 2D+C+A=0 \\ D+B+A=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C+A=0 \\ C+B=0 \\ D=0 \\ B+A=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=2 \\ C=-2 \\ D=0 \end{cases}$$

L'integrale da calcolare si riduce allora alla somma di integrali elementari:

$$\int_0^1 \frac{2}{1+z}dz + \int_0^1 \frac{2}{(1+z)^2}dz - \int_0^1 \frac{2z}{1+z^2}dz =$$

$$= 2\Big[\log|1+z|\Big]_0^1 - 2\Big[\frac{1}{1+z}\Big]_0^1 - \Big[\log(1+z^2)\Big]_0^1 = \log 2 + 1.$$

Esercizio 6.3 *Si consideri la funzione*

$$f_{\alpha\beta}(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x^{2\alpha})}{x^\beta\sqrt{x+3}}, \quad x > 0,$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1) *Determinare l'insieme di tutti i numeri* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tali che l'integrale improprio*

$$I_{\alpha\beta} = \int_1^{+\infty} f_{\alpha\beta}(x)dx$$

converga.

2) *Calcolare una primitiva di* $f_{\alpha\beta}$ *per* $\alpha = 0$ *e* $\beta = 1$.

3) *Calcolare* $I_{\alpha\beta}$ *nel caso precedente.*

Soluzione. 1) Articoliamo la soluzione della prima domanda nei seguenti casi:

i) $\alpha > 0$. In questo caso avremo che nel limite $x \to +\infty$

$$\frac{\operatorname{arctg} x^{2\alpha}}{x^\beta\sqrt{x+3}} = \frac{1}{x^{\beta+1/2}}(\pi/2 + o(1)).$$

Per il *Criterio del confronto asintotico*, l'integrale improprio converge se solo se

$$\beta + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \beta > \frac{1}{2}.$$

ii) $\alpha = 0$. Questo caso è identico al precedente e viene lasciato per esercizio.

iii) $\alpha < 0$. Ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione arcotangente, si ha

$$\frac{\operatorname{arctg} x^{2\alpha}}{x^\beta\sqrt{x+3}} = \frac{1}{x^{\beta-2\alpha+1/2}}(1 + o(1))$$

e l'integrale converge se solo se

$$\beta - 2\alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \beta > 2\alpha + \frac{1}{2}.$$

2) Per rispondere alla seconda domanda calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{\operatorname{arctg} 1}{x\sqrt{x+3}}dx = \frac{\pi}{4}\int \frac{dx}{x\sqrt{x+3}}.$$

Procediamo con la sostituzione

$$z = \sqrt{x+3}, \quad dz = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}dx,$$

da cui si ottiene

$$\frac{\pi}{2}\int \frac{dz}{z^2-3} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}\int \frac{dz}{z-\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4\sqrt{3}}\int \frac{dz}{z+\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\log\frac{|z-\sqrt{3}|}{|z+\sqrt{3}|} + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Quindi, ricordata l'espressione di z, una primitiva della funzione data è

$$F(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\log\frac{|\sqrt{x+3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}.$$

3) La risposta alla terza domanda, tenuto conto di quanto appena calcolato, si riduce a:

$$\int_1^{+\infty} f_{\alpha\beta}(x)dx = \lim_{k\to+\infty}[F(k)-F(1)] = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$$

Capitolo 3

Equazioni differenziali ordinarie

3.1 Problema di Cauchy

Definizione 1.1 (Equazione differenziale) *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$ *un insieme aperto e sia* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione. L'equazione*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

si dice equazione differenziale di ordine $n \in \mathbb{N}$. *La variabile è* x, y *è la funzione incognita e* $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ *sono le sue derivate fino all'ordine* n.

Definizione 1.2 (Soluzione di un'equazione differenziale) *Sia* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervallo aperto. Una funzione* $\varphi \in C^n(I)$ *si dice soluzione dell'equazione differenziale* (1.1) *se:*

i) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$ *per ogni* $x \in I$;

ii) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$ *per ogni* $x \in I$.

Definizione 1.3 (Forma normale) *Un'equazione differenziale del primo ordine si dice in forma normale se è della forma*

$$y' = f(x, y) \tag{1.2}$$

con $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *insieme aperto.*

Un problema che spesso si chiede di risolvere è noto come *Problema di Cauchy*:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & \text{“Equazione differenziale”} \\ y(x_0) = y_0 & \text{“Dato iniziale”,} \end{cases} \tag{1.3}$$

dove $(x_0, y_0) \in \Omega$ è un punto assegnato nel dominio di f. Risolvere il problema di Cauchy significa determinare tra tutte le soluzioni dell'equazione differenziale quella (o quelle) che soddisfa(no) il dato iniziale: $\varphi(x_0) = y_0$. In alcuni casi la soluzione è unica. L'esistenza di una soluzione unica o meno dipende dalle proprietà di f.

Teorema 1.4 (Esistenza e unicità) *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un aperto,* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *ed* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione tale che:*

i) $f \in C(\Omega)$*;*

ii) $\partial f / \partial y \in C(\Omega)$.

Allora esiste un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ *con* $x_0 \in I$ *ed esiste* $\varphi \in C^1(I)$ *soluzione del Problema di Cauchy* (1.3)*. Inoltre, la soluzione è unica.*

La dimostrazione di questo Teorema è omessa.

Osservazione. Supponiamo valide le ipotesi del Teorema 1.4. Se due soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ sono uguali in un punto, allora sono identicamente uguali in un intorno di quel punto (e quindi sono uguali).

Esempio 1.5 *Calcolare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. La funzione $f(x, y) = y^2$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e verifica le ipotesi del Teorema di esistenza e unicità. Dunque esiste un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ con $0 \in I$ ed esiste $y \in C^1(I)$ soluzione del Problema di Cauchy. Per trovare questa soluzione si dividono i due membri dell'equazione differenziale per y^2 ottenendo $y^{-2}y' = 1$ e si integra fra 0 e x

$$\int_0^x y(t)^{-2} y'(t)\, dt = \int_0^x dt = x.$$

L'integrale a sinistra è

$$\int_0^x y(t)^{-2} y'(t)\, dt = \int_0^x \frac{d}{dt}\big(- y(t)^{-1}\big)\, dt = [-y(t)^{-1}]_0^x = \frac{1}{y(0)} - \frac{1}{y(x)} = 1 - \frac{1}{y(x)},$$

e quindi si trova

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Questa funzione è in effetti definita per $x \neq 1$, ma è da considerare soluzione del Problema di Cauchy solo sull'intervallo aperto $I = (-\infty, 1)$.

Esempio 1.6 (Non unicità della soluzione del Problema di Cauchy) *Si consideri il seguente Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

La funzione $f(x,y)=\sqrt{|y|}$ *non verifica le ipotesi del Teorema 1.4. In effetti,* f *non è derivabile in* y *per* $y=0$.

Esistono almeno due soluzioni del Problema di Cauchy (1.4) *definite su* $I=\mathbb{R}$. *Una soluzione è la funzione costante* $y=0$. *Una seconda soluzione è la funzione*

$$y(x)=\begin{cases} x^2 & \textit{per } x\geq 0,\\ -x^2 & \textit{per } x<0.\end{cases}$$

Questa funzione verifica $y\in C^1(\mathbb{R})$, *soddisfa il dato iniziale ed anche l'equazione differenziale.*

3.2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sia $I\subset\mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a,b\in C(I)$ due funzioni continue. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=a(x)y+b(x)\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}\tag{2.5}$$

dove $x_0\in I$ ed $y_0\in\mathbb{R}$. Un'equazione differenziale del tipo $y'=a(x)y+b(x)$ si dice *equazione differenziale lineare del primo ordine.*

Metodo risolutivo. Per il Teorema 1.4 di esistenza e unicità, il Problema di Cauchy (2.5) ha un'unica soluzione. La soluzione si può calcolare percorrendo i seguenti passi.

Passo 1 (Equazione omogenea). Si risolve il problema di Cauchy per l'equazione *omogenea associata* (cioè per l'equazione differenziale che si ottiene con $b=0$):

$$\begin{cases} y'=a(x)y\\ y(x_0)=c,\end{cases}\tag{2.6}$$

dove $c\in\mathbb{R}$ è parametro. Supponendo $y\neq 0$ (in questo caso lo si può sempre fare) si trova l'equazione differenziale

$$\frac{y'}{y}=a(x),\tag{2.7}$$

dalla quale, integrando fra x_0 e x, si ottiene

$$\int_{x_0}^{x}\frac{y'(t)}{y(t)}dt=\int_{x_0}^{x}a(t)dt,\tag{2.8}$$

dove

$$\int_{x_0}^{x}\frac{y'(t)}{y(t)}dt=\int_{x_0}^{x}\big(\log|y(t)|\big)'dt=\log\Big|\frac{y(x)}{y(x_0)}\Big|.\tag{2.9}$$

Siccome possiamo supporre $y(x)/y(x_0) > 0$, si trova

$$\log\left(\frac{y(x)}{y(x_0)}\right) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt, \tag{2.10}$$

ed esponenziando e ricordando il dato inziziale $y(x_0) = c$, si ottiene la *soluzione generale dell'equazione omogenea associata*:

$$y(x) = ce^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}. \tag{2.11}$$

Passo 2 (Variazione della costante) Si considera $c = c(x)$ come funzione della variabile x e si cerca una soluzione dell'equazione differenziale in (2.5) della forma

$$y(x) = c(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}. \tag{2.12}$$

Osservato che

$$y'(x) = c'(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + c(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}a(x), \tag{2.13}$$

sostituendo nell'equazione differenziale (2.5) si ottiene

$$c'(x) = b(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}, \tag{2.14}$$

e integrando fra x_0 e x si ha

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds}dt.$$

La *soluzione generale* dell'equazione differenziale è in conclusione

$$y(x) = \left(k + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds}dt\right)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}, \tag{2.15}$$

con $k = c(x_0)$ costante.

Passo 4 (Determinazione di k) Si impone il dato iniziale $y(x_0) = y_0$ per determinare k

$$y_0 = y(x_0) = k. \tag{2.16}$$

Esempio 2.1 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \mathrm{tg}(x)y + x^2 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

dove $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Soluzione. L'equazione omogenea associata è $y' = \mathrm{tg}(x)y$, che può essere riscritta nella forma

$$\frac{y'}{y} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Integrando il membro di destra con integrale indefinito si ottiene

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

e integrando quello di sinistra

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{dy}{y} = \log|y|,$$

dove si è fatto il cambio di variabile $y = y(x)$ con $dy = y'(x)dx$. Osserviamo che $|\cos x| = \cos x > 0$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Dunque,

$$\log|y| = -\log|\cos x| + c_1 = \log\left(\frac{e^{c_1}}{\cos x}\right) \quad \text{e quindi} \quad |y| = \frac{e^{c_1}}{\cos x}.$$

A questo punto possiamo togliere il valore assoluto dalla y e sostituire $e^{c_1} > 0$ con una costante $c \in \mathbb{R}$. Si trova la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$y(x) = \frac{c}{\cos x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione dell'equazione differenziale non omogenea $y' = \mathrm{tg}(x)y + x^2$ con il metodo dela variazione della costante. Cerchiamo una soluzione del tipo

$$y(x) = \frac{c(x)}{\cos x},$$

con $c(x)$ funzione da determinare. Osservato che

$$y' = \frac{c' \cos x + c \sin x}{\cos^2 x},$$

sostituendo nell'equazione differenziale si ha

$$\frac{c' \cos x + c \sin x}{\cos^2 x} = \frac{c \sin x}{\cos^2 x} + x^2$$

da cui $c'(x) = x^2 \cos x$. Integrando con integrale indefinito si ottiene

$$c(x) = \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + k,$$

con $k \in \mathbb{R}$. La soluzione generale dell'equazione differenziale è dunque

$$y(x) = \frac{1}{\cos x}(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + k).$$

Imponendo il dato iniziale $y(0) = 0$ si trova $k = 0$. La soluzione del problema di Cauchy è allora

$$y(x) = \frac{1}{\cos x}(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x) = (x^2 - 2)\mathrm{tg}x + 2x.$$

Questa funzione è soluzione sull'intervallo $I = (-\pi/2, \pi/2)$.

3.3 Equazioni a variabili separabili

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti, $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, e siano $g \in C(I)$ ed $f \in C^1(J)$. Consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = g(x)f(y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Un'equazione differenziale del tipo

$$y' = g(x)f(y) \tag{3.18}$$

si dice *a variabili separabili.*

Metodo risolutivo. Per il Teorema 1.4 di esistenza e unicità, il Problema di Cauchy (3.17) ha un'unica soluzione. La soluzione si può calcolare percorrendo i seguenti passi.

Passo 1 (Soluzioni costanti) Si cercano preliminarmente le soluzioni dell'equazione $f(y) = 0$. Se $y_0 \in \mathbb{R}$ è una soluzione di questa equazione, la funzione costante $y(x) = y_0$ è una soluzione dell'equazione differenziale (3.18).

Passo 2 (Separazione delle variabili) Si suppone $f(y) \neq 0$ e si dividono per $f(y)$ ambo i membri dell'equazione differenziale:

$$\frac{y'}{f(y)} = g(x). \tag{3.19}$$

Poi si integra (ad esempio con integrali indefiniti)

$$\int \frac{y'(x)}{f(y(x))} dx = \int g(x) dx. \tag{3.20}$$

Osserviamo che

$$\int \frac{y'(x)}{f(y(x))} dx = \int \frac{dy}{f(y)} = F(y),$$

dove F è una primitiva di $1/f(y)$ come funzione di y. Allora, una soluzione *in forma implicita* dell'equazione differenziale è data da

$$F(y) = \int g(x) dx + k, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Passo 3 (Soluzione in forma esplicita). Se è possibile invertire la funzione F, si può ottenere la soluzione in forma esplicita

$$y(x) = F^{-1}\Big(\int g(x) dx + k \Big). \tag{3.22}$$

Questo passaggio non sempre è possibile, ed è in generale delicato.

Passo 4 (Determinazione di k). Si determina $k \in \mathbb{R}$ imponendo il dato iniziale $y(x_0) = y_0$. Ciò si può fare anche *prima* del terzo passo.

Esercizio 3.1 *Si consideri l'equazione differenziale*

$$y' = (y-1)(y-4)\frac{\cos x}{\sin x}.$$

i) Trovare tutte le soluzioni costanti.

ii) Calcolare la soluzione generale dell'equazione in forma implicita.

iii) Calcolare in forma esplicita la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(3\pi/2) = 5$.

Soluzione. L'equazione differenziale è a variabili separabili $y' = g(x)f(y)$ con $g(x) = \cos x/\sin x$ e $f(y) = (y-1)(y-4)$. Risulta $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $g \in C^\infty(D)$, dove

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

i) Le soluzioni costanti sono date dalle soluzioni dell'equazione $f(y) = 0$, che sono $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$.

ii) L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$\int \frac{dy}{(y-1)(y-4)} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx + k,$$

dove $k \in \mathbb{R}$. Il secondo integrale è elementare mentre, ricorrendo ad una decomposizione in fratti semplici, possiamo riscrivere il primo nella forma

$$\int \frac{dy}{(y-1)(y-4)} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{(y-4)} - \frac{1}{3}\int \frac{dy}{(y-1)} = \frac{1}{3}\log\frac{|y-4|}{|y-1|}.$$

Dunque, la soluzione generale in *forma implicita* dell'equazione differenziale è

$$\frac{1}{3}\log\frac{|y-4|}{|y-1|} = \log|\sin x| + k.$$

iii) Sostituendo il dato iniziale nella soluzione generale dell'equazione determiniamo il valore della costante k:

$$k = \frac{1}{3}\log\frac{1}{4}.$$

La soluzione del Problema di Cauchy in forma implicita è allora:

$$\frac{1}{3}\log\frac{|y-4|}{|y-1|} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{4} = \log|\sin x| \quad \Leftrightarrow \quad 4\frac{|y-4|}{|y-1|} = |\sin x|^3.$$

Per determinare la soluzione in *forma esplicita* dobbiamo discutere i valori assoluti. Siccome la soluzione y non può intersecare le soluzioni costanti dell'equazione differenziale, dal fatto che $y(3\pi/2) = 5$ deduciamo che $y > 4$. Quindi:

$$\frac{|y-4|}{|y-1|} = \frac{y-4}{y-1}.$$

La soluzione è definita in un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ tale che $3\pi/2 \in I$. Su questo intervallo deve essere $g \in C(I)$. Dunque, tenuto con del dominio di g, risulta $I = (\pi, 2\pi)$ e avremo allora $|\sin x|^3 = -\sin^3 x$. In definitiva, abbiamo

$$4\frac{y-4}{y-1} = -\sin^3 x,$$

da cui si ricava la soluzione *in forma esplicita* del Problema di Cauchy:

$$y - 4 = \frac{1}{4}(1-y)\sin^3 x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{16+\sin^3 x}{4+\sin^3 x}.$$

Questa funzione è in effetti definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma è da considerare soluzione del Problema di Cauchy solo nell'intervallo $I = (\pi, 2\pi)$.

3.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $f \in C(I)$ una funzione continua. Un'equazione differenziale del tipo

$$y'' + by' + cy = f(x), \tag{4.23}$$

con $b, c \in \mathbb{R}$, si dice *del secondo ordine a coefficienti costanti.* Siano $x_0 \in I$ e $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$. Il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = f(x), \quad x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0, \end{cases} \tag{4.24}$$

ha soluzione unica (Teorema di cui è omessa la prova).

3.4.1 Caso omogeneo $f = 0$

Osserviamo che se le funzioni y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + by' + cy = 0, \tag{4.25}$$

allora anche la combinazione lineare

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{4.26}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, è soluzione dell'equazione differenziale.

Si cerca una soluzione dell'equazione (4.25) della forma $y(x) = e^{\lambda x}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ parametro complesso da determinare. Sostituendo nell'equazione differenziale si trova $e^{\lambda x}(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$ e quindi λ risolve l'*equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Si possono presentare tre casi a seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4c$.

Caso 1: $\Delta = 0$. L'equazione caratteristica ha la soluzione reale $\lambda = -b/2$ con molteplicità 2. La soluzione generale di (4.25) è una combinazione lineare delle soluzioni

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^{\lambda x},$$

ovvero

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \tag{4.27}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che y_2 è soluzione dell'equazione differenziale. Sostituendo nell'equazione si trova

$$\begin{aligned} y_2'' + by_2' + cy_2 &= 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} + b\big(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}\big) + cxe^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2 + b\lambda + c)xe^{\lambda x} + (2\lambda + b)e^{\lambda x} = 0. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che λ risolve l'equazione caratteristica e che $\lambda = -b/2$.

Caso 2: $\Delta > 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni reali distinte

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

In questo caso la soluzione generale dell'equazione (4.25) è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{4.29}$$

ossia una combinazione lineare delle soluzioni $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.

Caso 3: $\Delta < 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha - i\beta,$$

dove si è posto $\alpha = -b/2$ e $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$. L'equazione differenziale ammette le seguenti soluzioni complesse:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x), \\ z_2(x) &= e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{+i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Dal momento che l'equazione differenziale è lineare, sono soluzioni anche le combinazioni lineari

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ y_2(x) &= \frac{z_2(x) - z_1(x)}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned} \tag{4.31}$$

La soluzione generale dell'equazione si può allora scrivere in termini di sole funzioni reali

$$y(x) = (c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)e^{\alpha x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.32}$$

Esempio 4.1 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ e le sue soluzioni sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. La soluzione generale dell'equazione differenziale è allora data da

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare il valore delle costanti imponiamo i dati iniziali:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) &= -c_1 + 2c_2 = 1. \end{aligned}$$

Risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{3} \\ c_2 = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

In conclusione la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{3}\left(e^{2x} - e^{-x}\right).$$

3.4.2 Caso non omogeneo $f \neq 0$

Consideriamo un'equazione differenziale del tipo

$$y'' + by' + cy = f(x) \tag{4.33}$$

con $b, c \in \mathbb{R}$ ed f funzione. Per determinare la soluzione generale dell'equazione (4.33) si segue il seguente procedimento.

Passo 1. Si determina, con la tecnica descritta in precedenza, la soluzione generale y_{GO} dell'equazione *omogenea associata* $y'' + by' + cy = 0$. La soluzione y_{GO} dipende da due parametri reali c_1 e c_2.

Passo 2. Si cerca *una* soluzione particolare y_P dell'equazione differenziale non omogenea (4.33). Discutiamo questo punto nel seguito.

Passo 3. La soluzione generale dell'equazione differenziale (4.33) è quindi data da $y_G(x) = y_{GO}(x) + y_P(x)$ e dipende dai due parametri reali c_1 e c_2.

Passo 4. Se abbiamo un Problema di Cauchy si determinano le costanti c_1, c_2 imponendo i dati iniziali.

3.4.3 Metodo delle soluzioni similari

In alcuni casi esiste un metodo semplice per calcolare *una* soluzione particolare y_P dell'equazione differenziale (4.33).

Caso 1. f è un polinomio di grado n. In questo caso: i) Se $c \neq 0$ cerchiamo y_P come polinomio di grado n. ii) Se $c = 0$ cerchiamo y_P come polinomio di grado $n+1$.

Esempio 4.2 *Trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale*

$$4y'' + 12y' + 9y = 9x^2$$

Soluzione. Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y_P(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Per determinare i coefficienti sostituiamo la soluzione particolare e le sue derivate nell'equazione differenziale. Si trova $9ax^2 + 3(3b+8a)x + 8a + 12b + 9c = 9x^2$, e quindi

$$a = 1, \qquad b = -\frac{8}{3}, \qquad c = \frac{8}{3}.$$

Una soluzione particolare è dunque:

$$y_P(x) = x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}.$$

Caso 2. Supponiamo che sia $f(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ con $\alpha, \beta, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Si considerano il numero complesso $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ e l'equazione caratteristica $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Ci sono tre possibilità:

i) $\lambda = \alpha + i\beta$ *non* è una radice dell'equazione caratteristica;
ii) $\lambda = \alpha + i\beta$ è una radice semplice dell'equazione caratteristica;
iii) $\lambda = \alpha + i\beta$ è una radice doppia dell'equazione caratteristica.

Nei tre casi, si cerca una soluzione particolare del tipo, rispettivamente:

i) $y_P = e^{\alpha x}\big(A \cos \beta x + B \sin \beta x\big)$;
ii) $y_P = xe^{\alpha x}\big(A \cos \beta x + B \sin \beta x\big)$;
iii) $y_P = x^2 e^{\alpha x}\big(A \cos \beta x + B \sin \beta x\big)$,

dove $A, B \in \mathbb{R}$ sono da determinare.

Esempio 4.3 *Calcolare una soluzione particolare dell'equazione differenziale*

$$y'' - y = \sin x + 2\cos x.$$

Soluzione. In questo caso $f(x) = \sin x + 2\cos x$ e quindi $\lambda = \alpha + i\beta = i$. Tale λ non è radice dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 1 = 0$. Cerchiamo allora una soluzione particolare nella forma $y = A \sin x + B \cos x$. Si ha

$$y' = A \cos x - B \sin x, \qquad y'' = -A \sin x - B \cos x,$$

da cui, sostituendo,

$$(-A \sin x - B \cos x) - (A \sin x + B \cos x) = \sin x + 2\cos x,$$

ovvero $-2A\sin x - 2B\cos x = \sin x + 2\cos x$. In conclusione, una soluzione particolare è

$$y_P(x) = -\frac{1}{2}\sin x - \cos x.$$

Esempio 4.4 *Calcolare una soluzione particolare dell'equazione differenziale*

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}.$$

Soluzione. In questo caso $\lambda = -2$ è radice doppia dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$. Cerchiamo allora una soluzione particolare nella forma $y = Ax^2e^{-2x}$. Si ha

$$y' = 2Axe^{-2x} - 2Ax^2e^{-2x}, \qquad y'' = Ae^{-2x}(2 - 8x + 4x^2).$$

Sostituendo si ottiene

$$2Axe^{-2x} - 2Ax^2e^{-2x} + 4Ae^{-2x}(2 - 8x + 4x^2) + 4Ax^2e^{-2x} = e^{-2x}$$

da cui, semplificando, si trova $2A = 1$. In conclusione una soluzione particolare è

$$y_P(x) = \frac{x^2}{2}e^{-2x}.$$

Caso 3. Supponiamo che sia $f = f_1 + f_2$ con f_1 ed f_2 funzioni che rientrano nei casi precendenti. In questo caso si determina una soluzione particolare per ciascuna delle due funzioni e la soluzione particolare sarà data dalla loro somma.

3.4.4 Metodo della variazione delle costanti

In generale, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$y'' + by + cy = f(x) \tag{4.34}$$

si può calcolare con il metodo della variazione delle costanti.

Supponiamo di conoscere la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$y_{GO} = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{4.35}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

dove ora $c_1(x)$ e $c_2(x)$ sono funzioni da determinare in modo tale che y sia una soluzione dell'equazione differenziale (4.34). Nei prossimi conti omettiamo la variabile x. Derivando si ottiene

$$y' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'.$$

Imponiamo la condizione di annullamento dei termini che contengono le derivate di c_1, c_2:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0. \tag{4.36}$$

In questo caso, abbiamo

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

Derivando una seconda volta, si ha

$$y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$$

e sostituendo nell'equazione differenziale di partenza, dopo qualche calcolo, si ottiene

$$c_1(y_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(y_2'' + by_2' + cy_2) + c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x).$$

Tenuto conto del fatto che y_1, y_2 risolvono l'equazione omogenea, l'ultima equazione si riduce a

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x). \tag{4.37}$$

Mettendo a sistema le equazioni (4.36) e (4.37)

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

si determinano c_1' e c_2', e integrando si trovano infine c_1 e c_2.

Esempio 4.5 *Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale*

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Soluzione. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 1 = 0$ ha le soluzioni $\lambda = \pm 1$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è quindi

$$y_{GO} = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Per determinare una soluzione particolare utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Cerchiamo una soluzione del tipo

$$y = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{-x}.$$

Derivando si ottiene

$$y' = c_1' e^x + c_1 e^x + c_2' e^{-x} - c_2 e^{-x}$$

e se imponiamo $c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0$ si arriva a $y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$. Sostituendo nell'equazione di partenza si trova

$$e^x(c_1 + c_1') + e^{-x}(c_2 - c_2') - c_1 e^x - c_2' e^{-x} = \frac{e^x}{1 + e^x},$$

da cui

$$c_1' e^x - c_2' e^{-x} = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0 \\ c_1' e^x - c_2' e^{-x} = \frac{e^x}{1+e^x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1' = \frac{1}{2}\frac{1}{1+e^x} \\ c_2' = -\frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{1+e^x}. \end{cases}$$

Per determinare c_1 calcoliamo l'integrale

$$c_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+e^x}.$$

Con la sostituzione $t = e^x$ si ottiene

$$c_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{2}\log\frac{e^x}{1+e^x} + k_1.$$

Per determinare c_2 calcoliamo l'integrale

$$c_2(x) = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx.$$

Sempre con la sostituzione $t = e^x$ si ottiene

$$c_2(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\log(1+e^x) + k_2.$$

In conclusione

$$y_G = y_{GO} + y_P = \left(\frac{1}{2}\log\frac{e^x}{1+e^x} + k_1\right)e^x + \left(-\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\log(1+e^x) + k_2\right)e^{-x}.$$

3.5 Esercizi svolti

Esercizio 5.1 *Data l'equazione differenziale*

$$y'' - 6y' + \lambda y = 16x^2 e^{-2x^2+3x}$$

determinare il valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) = e^{-2x^2+3x}$ si una sua soluzione particolare. Per tale valore di λ determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale.

Soluzione. Osservato che

$$g'(x) = (-4x+3)e^{-2x^2+3x} \quad \text{e} \quad g''(x) = \big(-4 + (-4x+3)^2\big)e^{-2x^2+3x},$$

sostituiamo nell'equazione e semplifichiamo ottenendo $\lambda = 13$.

Cerchiamo ora la soluzione generale dell'equazione omogenea $y'' - 6y' + 13y = 0$. L'equazione caratteristica è $z^2 - 6z + 13 = 0$ e le sue soluzioni sono $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 3 - 2i$, da cui ricaviamo la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$y_{GO}(x) = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)e^{3x}.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)e^{3x} + e^{-2x^2+3x}.$$

Esercizio 5.2 *Trovare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 + 2y - 3}{(x+1)[3\log^2(x+1) + 2]} \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale è a variabili separabili. Il Problema di Cauchy ha una soluzione unica definita in un intervallo aperto I contenente 0. La funzione costante $y = 2$ non è soluzione (le soluzioni costanti sono $y = 1$ e $y = -3$). Possiamo separare le variabili e integrare:

$$\int_2^y \frac{du}{u^2 + 2u - 3} = \int_0^x \frac{dz}{(z+1)[3\log^2(z+1) + 2]}.$$

Il primo integrale si calcola con una decomposizione in fratti semplici:

$$\int_2^y \frac{du}{u^2 + 2u - 3} = \frac{1}{4}\int_2^y \frac{du}{u-1} - \frac{1}{4}\int_2^y \frac{du}{u+3} = \frac{1}{4}\log\left(5\frac{|y-1|}{|y+3|}\right).$$

Per calcolare il secondo integrale conviene ricorrere alla sostituzione seguente:

$$t = \log(z+1), \quad dt = \frac{dz}{z+1}, \quad t_1 = \log 1 = 0, \quad t_2 = \log(x+1),$$

che conduce a

$$\int_0^{\log(x+1)} \frac{dt}{3t^2 + 2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{arctg}\Big(\frac{\sqrt{6}}{2}\log(x+1)\Big).$$

La soluzione in forma implicita del problema di Cauchy di partenza è allora:

$$\frac{1}{4}\log\left(5\frac{|y-1|}{|y+3|}\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{arctg}\Big(\frac{\sqrt{6}}{2}\log(x+1)\Big),$$

ovvero

$$\frac{|y-1|}{|y+3|} = \frac{1}{5}e^{g(x)}, \qquad g(x) = \frac{2\sqrt{6}}{3}\mathrm{arctg}\Big(\frac{\sqrt{6}}{2}\log(x+1)\Big).$$

Discutiamo i valori assoluti. Siccome $y(0) = 2 > 1$, la soluzione y verifica $y(x) > 1$ per ogni $x \in I$. Infatti, la soluzione y non può intersecare la soluzione costante dell'equazione differenziale identicamente uguale a 1. Dunque, avremo

$$\frac{|y-1|}{|y+3|} = \frac{y-1}{y+3},$$

e quindi la soluzione in forma esplicita del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{5 - 3e^{g(x)}}{5 - e^{g(x)}}.$$

Esercizio 5.3 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2x}{x^2+2} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale omogenea associata è

$$y' + \frac{2}{x}y = 0,$$

la cui soluzione generale è

$$y(x) = \frac{c}{x^2}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$y(x) = \frac{c(x)}{x^2}.$$

Sostituendo nell'equazione di partenza avremo:

$$\frac{c'(x)}{x^2} = \frac{2x}{x^2+2} \quad \text{e quindi} \quad c'(x) = \frac{2x^3}{x^2+2}.$$

Integrando, si trova:

$$c(x) = \int \frac{2x^3}{x^2+2}dx = \int 2x dx - \int \frac{4x}{x^2+2}dx = x^2 - 2\log(x^2+2) + k$$

con $k \in \mathbb{R}$. In conclusione:

$$y(x) = 1 - \frac{2}{x^2}\log(x^2+2) + \frac{k}{x^2}.$$

Per determinare il valore della costante k imponiamo il dato iniziale del Problema di Cauchy $0 = y(1) = 1 - 2\log(3) + k$, da cui $k = 2\log 3 - 1 = \log(9e^{-1})$. In definitiva, la soluzione del Problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\log\left(\frac{9e^{-1}}{(x^2+2)^2}\right) + 1, \qquad x > 0.$$

3.6 Esercizi

Esercizio 6.1 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi. \end{cases}$$

Soluzione: $y(x) = \pi - \arcsin(x + x^2)$.

Esercizio 6.2 *Si consideri l'equazione differenziale*

$$y' = (y^2 - y)\log(2 + x).$$

i) Determinare il suo integrale generale.

ii) Risolvere il problema di Cauchy con dato $y(-1) = 1/2$.

Soluzione.

$$y(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{x+1} + (x+2)^{x+2}}, \quad x + 2 > 0.$$

Esercizio 6.3 *Trovare la soluzione del seguente Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sin x}{x^2+4} + y\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Soluzione: $y(x) = \dfrac{\sin x}{2}\left(\text{arctg}\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{\pi}{4}\right)$.