

Esercizio 1. Usando la definizione, calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

nei punti $x \neq -1$.

Esercizio 2. Usando la regola per la derivata della funzione composta, calcolare la derivata delle funzioni $f(x) = \arcsin(\log |\cos x|)$, $g(x) = x^x$.

Risposta: $g'(x) = x^x \log x + x^x$.

Esercizio 3. Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, \pi/2)$ la funzione $f(x) = \arctan(x2^x)$.

i) Verificare che f è invertibile su $[0, +\infty)$.

ii) Detta $f^{-1} : [0, \pi/2) \rightarrow [0, +\infty)$ la funzione inversa, calcolare la derivata di f^{-1} nel punto $y_0 = \arctan(2)$.

Risposta: $Df^{-1}(y_0) = \frac{5}{2+\log 4}$.

Esercizio 4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

i) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia continua in $x = 0$;

ii) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia derivabile in $x = 0$.

Risposte: i) $\alpha > 0$; ii) $\alpha > 1$.

Esercizio 5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) \arctan(|x|^\alpha) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia derivabile nel punto $x = 0$ e calcolare $f'(0)$ in funzione di α .

Esercizio 6. Si consideri la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x) \log(x(1-x)), & x \in (0, 1) \\ 0 & x = 0, 1. \end{cases}$$

- 1) Stabilire se f è continua su $[0, 1]$;
- 2) Determinare per quali $y \in \mathbb{R}$ esistono soluzioni dell'equazione $f(x) = y$ e dire quante sono.

Esercizio 7. i) Calcolare i punti di minimo e di massimo e i valori massimo e minimo (relativo e assoluto) della funzione $f(x) = \arctan x - \log(1 + x^2)$ sull'intervallo $[0, 1]$.

ii) Calcolare i punti di minimo e di massimo e i valori massimo e minimo (relativo e assoluto) della funzione $g(x) = x^2 - 4|x| + 4$ sull'intervallo $[-3, 3]$.

Esercizio 8. i) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la disequazione

$$\alpha x^2 - \log(1 + x^2) \geq 0$$

sia verificata per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.

ii) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la disequazione

$$\frac{1}{2}x^2 - \log(1 + x^2) \geq \alpha$$

sia verificata per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.

Risposte: i) $\alpha \geq 1$; ii) $\alpha \leq \frac{1}{2} - \log 2$.