Matematica A — Foglio 3

Numeri complessi $\mathbb{C}$ — 8 Ottobre 2007

Esercizio 1. Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z_0 = -1$ sia radice del polinomio complesso

$$P(z) = z^3 + \lambda z^2 + (2 - i)z + 2.$$

Per tale λ, calcolare le altre radici di P. Risposta: $\lambda = 1 - i$, $z_1 = 2i$, $z_2 = -i$.

Esercizio 2. Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z_0 = i$ sia radice del polinomio complesso

$$P(z) = z^5 + \lambda z^4 + iz^2 + z.$$

Per tale λ, calcolare le altre radici di P. Risposta: $\lambda = -i$, $z_1 = 0$, $z_2 = i$ (quindi doppia), $z_3 = -\sqrt{3}/2 - i/2$, $z_4 = \sqrt{3}/2 - i/2$.

Esercizio 3. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ delle seguenti equazioni in campo complesso:
1) $z^2 + 5 = |z - 3i|^2$. Risposta: $z_1 = i$, $z_2 = 2i$.
2) $z^4 = |z|^2 + 2$.
3) $iz^2 - 2\bar{z} = 2 + i$. Risposta: $z_0 = -1$, $z_1 = (1 + \sqrt{2}) - i\sqrt{2}$, $z_2 = (1 - \sqrt{2}) + i\sqrt{2}$.
4) $(z + 1)^4 = (2z - 1)^4$.

Esercizio 4. 1) Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ soluzioni della disequazione $\mathrm{Re}(z + i\bar{z})\mathrm{Re}(z) \leq z\bar{z}$ e disegnarne l'insieme nel piano di Gauss.
2) Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ soluzioni della equazione $||z| - 4| = |z - 4i|$ e disegnarne l'insieme nel piano di Gauss.
3) Determinare l'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che risolvono la disequazione

$$|z - 2i| + |z + 1| \leq 2.$$

Esercizio 5. Sia f la funzione della variabile complessa $z \in \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = \frac{i - z}{3i - \bar{z}}.$$

i) Si determini il dominio $D \subset \mathbb{C}$ di f.
ii) Determinare l'insieme degli $z \in D$ tali che $|f(z)| \leq 1$.
iii) Esprimere in forma algebrica le radici terze del numero complesso $w = (f(2i))^3$.

Esercizio 6. Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ il disco complesso chiuso e sia $f : D \to \mathbb{C}$ la funzione complessa

$$f(z) = \frac{1 - 2z}{z - 2}.$$

i) Verificare che $|z| \leq 1$ se e solo se $|f(z)| \leq 1$.
ii) Verificare che $|z| = 1$ se e solo se $|f(z)| = 1$.