Matematica A

Foglio 4

Successioni numeriche 11 Ottobre 2007

Esercizio 1. Verificare per induzione che $\log(n+1) \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:
1) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 3^n + n^2\sin(n) + 1}{n^3 2^n + n^2 + (-1)^n}$; 2) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log^4(n) + n\arctan(n)}{n^2 + \log n}$;

3) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2^n}{2^n+1}\right)^{\frac{n2^n}{n+1}}$; 4) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^n + n!}{2^n + (n+1)^n}$; 5) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2\log n + 1/n}$.

Esercizio 3. Consideriamo la successione

$$a_n = \binom{2n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Verificare che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente;
ii) Verificare (per induzione) che $a_n \geq 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iii) Dedurre dal punto ii) che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Esercizio 4. Determinare tutte le coppie di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ tali che risulti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x^{2n} + y^{4n}} = x^2.$$

Risposta: $|x| \geq y^2$.

Esercizio 5. Determinare il parametro $\beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che il limite

$$L = \lim_{n\to+\infty} n^\beta \left(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}\right)$$

esista finito e risulti $L \neq 0$.

Esercizio 6. Dimostrare che la successione numerica

$$a_n = \frac{n^2\cos(n\pi)}{n+1}\log\left(\frac{n}{n+1}\right), \quad n \geq 1,$$

non ha limite per $n \to +\infty$.

Esercizio 7. Il gioco della torre di Hanoi è formato da tre asticelle: nella prima sono infilati n dischetti, $n \in \mathbb{N}$, in ordine di diametro strettamente decrescente (dal basso verso l'alto).

Il gioco consiste nello spostare i dischetti nella terza asticella in modo tale che un dischetto di diametro maggiore non si trovi mai sopra uno di diametro minore. Calcolare, in funzione di $n \in \mathbb{N}$, il numero minimo di mosse necessario per risolvere il gioco.

Suggerimento. Detto $a_n \in \mathbb{N}$ il numero minimo di mosse, provare preliminarmente che $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

Date degli appelli d'esame invernali:

Primo Appello: 11 Dicembre Scritto, 18 Dicembre Orale

Secondo Appello: 7 Gennaio Scritto, 9 (oppure 10) Gennaio Orale

Soluzioni dei temi d'esame:

1) Stefani, Matematica A. Soluzioni di Temi d'esame. Cortina 2006.

2) http://www.math.unipd.it/∼marson/didattica/mateA.html♯temi

3) http://www.math.unipd.it/∼monti/