Matematica A — Foglio 5

Serie numeriche — 18 Ottobre 2007

Esercizio 1. La rappresentazione decimale di un numero reale $x \in [0,1]$ è un espressione del tipo

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 ... a_n a_{n+1} ...$$

dove $a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ è l'n-esima cifra decimale dopo la virgola, $n \geq 1$. Per definizione, il numero x è dato da

$$(*) \qquad x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

i) Verificare che la serie in $(*)$ converge;

ii) Verificare che $0 \leq x \leq 1$.

iii) Verificare che $0,999... = 0,\overline{9} = 1$.

iv) Calcolare il numero (razionale) $x = 0,456456456... = 0,\overline{456}$.

Esercizio 2. Studiare la convergenza delle serie numeriche

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+e^n}{(n+1)!}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}; \quad \text{iv)} \sum_{n=1}^{+\infty} (\sin(\sin n))^n.$$

Risposte: i) converge (Criterio del rapporto); ii) converge (Criterio della radice oppure confronto con la serie geometrica di ragione 4/5); iii) converge (Criterio del rapporto); iv) converge assolutamente (confronto con un'appropriata serie geometrica).

Esercizio 3. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{3^n}\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^{n+1}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n2^n(\sin(2x))^n}{n^2+1}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{x^{2n}+|2x|^n}.$$

Risposte: i) converge assolutamente e semplicemente per $x \in (-\infty,-3/2) \cup (-3/4,+\infty)$, non converge (nè semplicemente nè assolutamente) per $x \in [-3/2,-3/4]$; ii) discutere i casi $|\sin 2x| < 1/2$, $|\sin 2x| > 1/2$, $\sin 2x = 1/2$, $\sin 2x = -1/2$. Nell'ultimo caso c'è convergenza semplice (Leibniz) ma non assoluta (Criterio del confronto). iii) converge per $|x| < 1/2$, diverge altrimenti.

Esercizio 4. Studiare la convergenza (semplice e assoluta, se è il caso) delle seguenti serie

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2+1}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}$; iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-\log n}$.

Risposte: i) converge (Criterio del confronto, usare $\log n \leq \sqrt{n}$ per $n \geq \bar{n}$); ii) diverge (confronto); iii) converge semplicemente (Leibniz) ma non assolutamente (Confronto con la serie armonica).

Esercizio 5. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}(\sqrt{1+n^4}-n^2)$$

converga. Risposta: $\alpha > -1$ (Criterio del confronto).

Esercizio 6. Determinare tutti i valori dei parametri $k, d \in \mathbb{R}$ tali che la seguente serie converga

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-|n-k|/d}.$$

Esercizio 7. Verificare che le seguenti serie convergono assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$; ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$; iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$.

Osservazione: La somma delle tre serie è rispettivamente e^x, $\sin x$, $\cos x$.