# Matematica A — Foglio 8

Sviluppi infinitesimali — 31 Ottobre 2007

---

**Esercizio 1.** Sviluppare le seguenti funzioni per $x \to 0$ con una precisione fino al terzo ordine:
1) $f(x) = e^{\sinh x} - \sqrt{1+x^2}$;
2) $g(x) = \cosh\sqrt{x} + \sin^3 x - e^{x/2}$, $x \geq 0$.
Risposte: 1) $f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$; 2) $g(x) = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{353}{360}x^3 + o(x^3)$.

**Esercizio 2.** Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
1) $f(x) = \log(1+x)^2 - \sin(2x) + \sin(x^2)$;
2) $g(x) = \cos x + \cosh x - \frac{1}{12}\sin(x^4) - 2$.
Risposte: 1) L'ordine di $f$ è 3; 2) L'ordine di $g$ è 8.

**Esercizio 3.** Usando sviluppi infinitesimali, calcolare i seguenti limiti:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{x^2} + 4\sqrt{x}\log(1+x)}{\cos(x^3) - 1 + \tan(x)\sin(\sqrt{x})};\quad 2)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\sqrt{x^5})^{1/3} - 1}{x^2(\cos(x^{1/4}) - 1)};\quad 3)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - \cos x}{\sin(x\log x)}.$$

Risposte: 1) 4; 2) $-2/3$; 3) 1.

**Esercizio 4.** Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza delle serie numeriche:

$$1)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n\sin(1/n^\alpha)\log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}\arctan(n)};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha\left(\sqrt[3]{1+1/n^2} - \cos(1/n)\right).$$

Risposte: 1) Converge se e solo se $\alpha > 1/2$ (Confronto asintotico); 2) Converge se e solo se $\alpha < 1$.

**Esercizio 5.** Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{3/2}\left(\sqrt{1-1/n^2} - \cos(1/n^\alpha)\right).$$

Risposta: La serie converge se e solo se $\alpha = 1$. Si ricordi lo sviluppo $(1+x)^\beta = 1 + \beta x + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$, dove $\beta \in \mathbb{R}$ è un esponente assegnato.

**Esercizio 6.** Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(\alpha x) - x^2}{\sin^2(x) - \alpha x^2}.$$

Risposta. Per $\alpha = 1$ il limite vale 1. Per $\alpha \neq 1$ il limite vale $-1-\alpha$.