Matematica A

Foglio 9

Funzioni continue

14 Novembre 2007

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)-\log(1+x)}{\sin x+\log(1-x)+1-\cos x}$.

Risposta: 1/3.

Esercizio 2. Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente sia continua

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+x)}{x} & \text{per } x>0\\ \alpha & \text{per } x=0\\ \dfrac{\sin(\beta x)}{x} & \text{per } x<0.\end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente sia continua

$$f(x)=\begin{cases}-2\sin x & \text{per } x\le -\frac{\pi}{2}\\ \alpha+\beta\sin x & \text{per } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\ \cos x & \text{per } x\ge \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente sia continua

$$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin(1/x) & \text{per } x>0\\ 0 & \text{per } x=0\\ |x|^{-2\alpha}\arctan(x) & \text{per } x<0.\end{cases}$$

Risposta: $0<\alpha<1/2$.

Esercizio 5. i) Dimostrare che l'equazione $1-x^4=\log(1+x^2)$ ha esattamente due soluzioni $x\in\mathbb{R}$. ii) Sia $f(x)=x^7+x^5+e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni fissato $y\in\mathbb{R}$ l'equazione $f(x)=y$ ha una ed una sola soluzione $x\in\mathbb{R}$.

Esercizio 6. Un fiume (rettilineo) di larghezza $L>0$ scorre in una regione piana. Dobbiamo collegare due città A e B che si trovano da parti opposte del fiume con una strada e con un ponte (ortogonale al fiume). Determinare la collocazione ottimale del ponte e la forma della strada in modo tale che sia minima la lunghezza totale del percorso.