Matematica A

Soluzione del Tema 4M del 11 Dicembre 2007

Esercizio 1. 1) Calcolare l'ordine di infinitisimo rispetto ad x, per $x \to 0^+$, delle due funzioni $f(x) = 1 - e^{\mathrm{tg}^2 x}$ e $g(x) = \log(1 + \mathrm{arctg}^4 x)$.
2) Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3\alpha}\log x - e^{\mathrm{tg}^2 x} + 1}{1 - \cosh x - \log(1 + \mathrm{arctg}^4 x)}.$$

Svolgimento. 1) Ricordiamo che per $x \to 0$ si hanno gli sviluppi $e^x = 1 + x + o(x)$ e $\mathrm{tg}x = x + o(x^2) = x(1 + o(x))$. Dunque, si ha lo sviluppo per f

$$\begin{aligned} f(x) = 1 - e^{\mathrm{tg}^2 x} &= 1 - \big(1 + \mathrm{tg}^2 x + o(\mathrm{tg}^2 x)\big) = -\mathrm{tg}^2 x(1 + o(1)) \\ &= -x^2(1 + o(x))^2(1 + o(1)) = -x^2(1 + o(1)), \end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = -1.$$

Dunque, f ha ordine di infinitesimo 2.

Ricordiamo che si hanno gli sviluppi infinitesimali $\log(1 + x) = x + o(x) = x(1 + o(1))$ e $\mathrm{arctg}(x) = x + o(x^2) = x(1 + o(x))$ per $x \to 0$. Dunque

$$g(x) = \mathrm{arctg}^4(x)(1 + o(1)) = x^4(1 + o(x))^4(1 + o(1)) = x^4(1 + o(1)),$$

da cui si deduce che

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^4} = 1.$$

Dunque, g ha ordine di infinitesimo 4.

2) Rimane da fare lo sviluppo della funzione

$$1 - \cosh x = 1 - \Big(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\Big) = -\frac{1}{2}x^2(1 + o(x)).$$

Sostituendo gli sviluppi all'interno del limite si trova

$$\begin{aligned} L = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3\alpha}\log x - e^{\mathrm{tg}^2 x} + 1}{1 - \cosh x - \log(1 + \mathrm{arctg}^4 x)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3\alpha}\log x - x^2(1 + o(1))}{-\frac{1}{2}x^2(1 + o(x)) - x^4(1 + o(1))} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3\alpha-2}\log x - 1 + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(x)}. \end{aligned}$$

Ora osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} x^{3\alpha-2}\log x = \begin{cases} 0 & \text{se } 3\alpha-2>0 \\ -\infty & \text{se } 3\alpha-2\le 0. \end{cases}$$

Dunque il valore del limite è

$$L = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha > 2/3 \\ +\infty & \text{se } \alpha \le 2/3. \end{cases}$$

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) - \frac{x}{4}.$$

i) Determinare il dominio di f, calcolare limiti significativi ed asintoti.

ii) Studiare continuità e derivabilità di f.

iii) Calcolare $f'(x)$ e studiare gli intervalli di monotonia.

iv) Punti di massimo e minimo, relativi e assoluti.

v) Calcolare $f''(x)$. Studio della convessità, punti di flesso.

vi) Tracciare un grafico qualitativo di f.

Soluzione.
Dominio. Risulta $D(f) = \mathbb{R}$.

Simmetrie (Non richiesto dal testo). La funzione f è dispari: $f(-x) = -f(x)$. Infatti, ricordando che arctg è dispari, si trova:

$$f(-x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\right) + \frac{x}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) + \frac{x}{4} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) + \frac{x}{4} = -f(x).$$

Limiti. Considerando il fatto che arctg è una funzione limitata, si verifica immediatamente che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Asintoti. Non ci sono asintoti verticali. Cerchiamo asintoti obliqui a $\pm\infty$. Si trova

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{4}.$$

Inoltre, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-mx\big)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\Big(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\Big)=\operatorname{arctg}(1)=\frac{\pi}{4},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-mx\big)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\Big(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\Big)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

Quindi, la retta di equazione $y=-\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{4}$ è un asintoto obliquo a $+\infty$, mentre la retta di equazione $y=-\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{4}$ è un asintoto obliquo a $-\infty$.

Continuità. La funzione è continua in tutto il dominio, in quanto composizione e somma di funzioni continue.

Derivabilità. La funzione è derivabile (con continuità) in tutto il dominio, in quanto composizione e somma di funzioni derivabili.

Derivata prima. Dopo alcuni conti si arriva alla seguente espressione per la derivata prima

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{4x}+1}-\frac{1}{4}.$$

Studiamo il segno di $f'(x)$. Per semplicità, conviene porre $t=e^{2x}$. Allora si ha

$$f'(x)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2e^{2x}}{e^{4x}+1}\geq\frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad t^2-8t+1\leq 0.$$

Le radici dell'equazione $t^2-8t+1=0$ sono $t=4\pm\sqrt{15}$ e sono entrambre positive. Dunque, $t^2-8t+1\leq 0$ se e solo se $4-\sqrt{15}\leq t\leq 4+\sqrt{15}$. Conviene porre $x_0=\frac{1}{2}\log(4-\sqrt{15})$ e $x_1=\frac{1}{2}\log(4+\sqrt{15})$. In questo modo, risulta

$$f'(x)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_0\leq x\leq x_1.$$

Osserviamo che $x_0<0$ mentre $x_1>0$. Più precisamente, in accordo con la simmetria, si ha $x_0=-x_1$ perchè $\log(4-\sqrt{15})=-\log(4+\sqrt{15})$. Nei punti x_0, x_1 la derivata si annulla (punti critici).

Intervalli di monotonia. Abbiamo la seguente tabella:

		x_0	x_1
$f'(x)$	$---$	$+++$	$---$
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

Ovvero:

$$f \text{ è decrescente nell'intervallo } (-\infty, x_0],$$
$$f \text{ è crescente nell'intervallo } [x_0, x_1],$$
$$f \text{ è decrescente nell'intervallo } [x_1, +\infty).$$

Il punto x_0 è un punto di minimo locale non assoluto. Il punto x_1 è un punto di massimo locale non assoluto.

Derivata seconda. Dopo un breve conto si trova la seguente espressione per la derivata seconda

$$f''(x) = 4e^{2x}\frac{1-e^{2x}}{(e^{4x}+1)^2}.$$

Studiamo il segno di $f''(x)$:

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-e^{2x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 0.$$

Abbiamo la seguente tabella:

		0
$f''(x)$	$+++$	$---$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

Ovvero, f è convessa nell'intervallo $(-\infty, 0]$ ed è concava nell'intervallo $[0, +\infty)$. Il punto $x = 0$ è un punto di flesso.

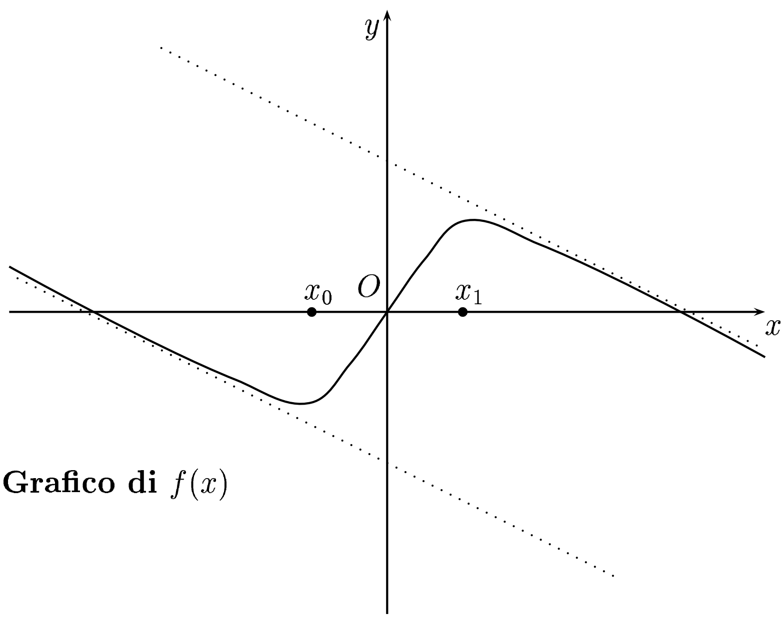

Grafico di $f(x)$

Esercizio 3. Calcolare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $(2z + \bar{z})^4 - 1 = 0$.

Svolgimento. Conviene introdurre la nuova incognita complessa $w = 2z + \bar{z}$. Allora $w \in \mathbb{C}$ risolve l'equazione $w^4 = 1$ e le soluzioni di questa equazione sono $w_1 = 1$, $w_2 = i$, $w_3 = -1$ e $w_4 = -i$.
Se $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$, allora la relazione $2z + \bar{z} = w$ è equivalente alle relazioni

$$x = \frac{1}{3}\xi \quad \text{e} \quad y = \eta.$$

Quindi le soluzioni $w_1, ..., w_4$ forniscono le soluzioni

$$z_1 = \frac{1}{3}, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -\frac{1}{3}, \quad z_4 = -i.$$