Matematica A

Soluzione del Tema 4P del 11 Dicembre 2007

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{9\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)^2-\sin(x^2)}{x-x\cos(x)}.$$

Si ricordi che $\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^2)$ e quindi $(\sqrt[3]{1+x}-1)^2=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^2)\right)^2$.

Svolgimento. Ricordiamo che per $\alpha\in\mathbb{R}$ e per $x\to 0$ si ha lo sviluppo $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2+o(x^2)$ e dunque con $\alpha=\frac{1}{3}$ si ottiene $\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^2)$. Sviluppando il quadrato

$$(\sqrt[3]{1+x}-1)^2=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^2)\right)^2=\frac{x^2}{9}-\frac{2}{27}x^3+o(x^3).$$

Dallo sviluppo $\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$ si trova per $x\to 0$

$$\sin(x^2)=x^2-\frac{1}{6}x^6+o(x^8).$$

E infine, sempre per $x\to 0$, si ha

$$x(1-\cos x)=x\left(\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)=x^3\left(\frac{1}{2}+o(x)\right).$$

Dunque, il limite si può calcolare nel seguente modo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{9\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)^2-\sin(x^2)}{x-x\cos(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)-x^2+\frac{1}{6}x^6+o(x^8)}{x^3\left(\frac{1}{2}+o(x)\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{x^3\left(\frac{1}{2}+o(x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}+o(1)}{\frac{1}{2}+o(x)}=-\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x)=\arccos\sqrt{2\log x-\log^2 x}.$$

i) Determinare il dominio di f, calcolare limiti significativi ed eventuali asintoti.

ii) Discutere la continuità e la derivabilità di f.

iii) Calcolare $f'(x)$ e limiti di $f'(x)$. Eventuali punti di angolo e/o cuspide.

iv) Studiare gli intervalli di monotonia. Punti di massimo e minimo, relativi e assoluti.

v) Tracciare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio di f''.

Soluzione.

Dominio. L'argomento di log deve essere strettamente positivo. L'argomento della radice quadrata deve essere maggiore o uguale a 0. L'argomento di arccos deve essere compreso fra -1 e 1. Quindi, il dominio di f è dato dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2\log x - \log^2 x \geq 0 \\ \sqrt{2\log - \log^2 x} \leq 1. \end{cases}$$

Poniamo $t = \log x \in \mathbb{R}$. Allora abbiamo

$$2\log x - \log^2 x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t - t^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq t \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x \leq e^2.$$

Inoltre, la disequazione $\sqrt{2\log x - \log^2 x} \leq 1$ è equivalente a

$$2\log x - \log^2 x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\log x - 1)^2 \geq 0,$$

che è sempre verificata. In conclusione, il dominio di f è

$$D(f) = [1, e^2] = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq e^2\}.$$

Segno. È chiaramente $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D(f)$.

Limiti. Non ci sono limiti da calcolare.

Asintoti. Non ci sono asintoti.

Continuità. La funzione f è continua nel dominio, perchè composizione di funzioni continue.

Derivabilità. La radice quadrata non è derivabile quando l'argomento si annulla. Dunque, nei punti tali che $2\log x - \log^2 x = 0$ ovvero $x = 1$ oppure $x = e^2$, la funzione potrebbe non essere derivabile. La funzione arccos non è derivabile quando l'argomento è 1. Quindi, nei punti tali che $\sqrt{2\log x - \log^2 x} = 1$ ovvero $x = e$, la funzione potrebbe non essere derivabile.
Nell'insieme $(1, e) \cup (e, e^2)$ la funzione è derivabile in quanto composizione di funzioni derivabili.

Derivata prima. Il calcolo della derivatà prima di f fornisce

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-2\log x+\log^2 x}}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x}\log x\right)}{\sqrt{2\log-\log^2 x}} = \frac{\log x - 1}{x|\log x-1|\sqrt{2\log x-\log^2 x}}.$$

Limiti di f'. Calcoliamo i limiti di $f'(x)$ nei punti $x = 1, e, e^2$. Si trova

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to (e^2)^-} f'(x) = +\infty.$$

Dunque, la funzione si "attacca" nei punti $x = 1$ e $x = e^2$ con tangente verticale. Inoltre

$$\lim_{x\to e^-} f'(x) = -\frac{1}{e}, \qquad \lim_{x\to e^+} f'(x) = +\frac{1}{e}.$$

In particolare, deduciamo che nei punti $x = 1, e, e^2$ la funzione non è derivabile.

Punti di angolo e/o di cuspide. Il punto $x = e$ è un punto di angolo perchè i limiti destro e sinistro della derivata prima per $x \to e$ esistono finiti ma sono diversi.

Monotonia. Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq e.$$

Abbiamo la seguente tabella:

	1	e	e^2
$f'(x)$	$- - -$	$+ + +$	
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$	

Punti di max-min. Il punto $x = e$ è il punto di minimo assoluto della funzione e il valore minimo è $f(e) = \arccos(1) = 0$. I punti $x = 1$ e $x = e^2$ sono punti di massimo assoluti della funzione e il valore massimo è $f(1) = f(e^2) = \arccos(0) = \pi/2$.

Esercizio 3. Si consideri l'equazione nella variabile complessa $z \in \mathbb{C}$

$$P(z) = z^5 - 6z^4 + 10z^3 - z^2 + 6z - 10 = 0.$$

1) Verificare che $z_0 = 3 + i$ è una soluzione dell'equazione.

2) Calcolare tutte le altre radici esprimendole in forma algebrica.

Soluzione. In conformità col Teorema fondamentale dell'algebra, dobbiamo trovare 5 radici.

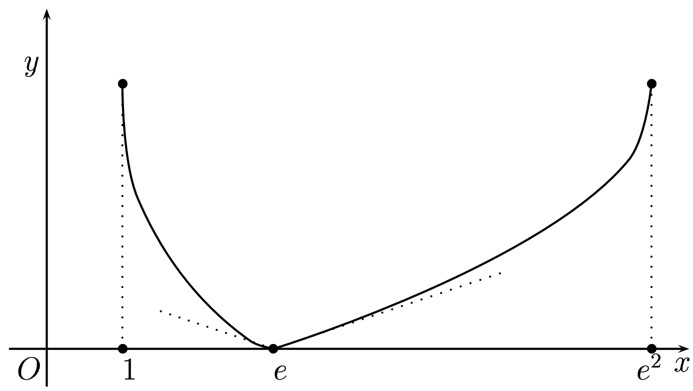

Grafico di $f(x)$

Premettiamo la seguente osservazione. Raccogliendo z^3 nei primi tre addendi si trova la fattorizzazione

$$\begin{aligned} P(z) &= z^5 - 6z^4 + 10z^3 - z^2 + 6z - 10 \\ &= z^3(z^2 - 6z + 10) - (z^2 - 6z + 10) \\ &= (z^3 - 1)(z^2 - 6z + 10). \end{aligned}$$

Quindi le radici di $P(z)$ sono le radici di $z^3 - 1 = 0$ unite alle radici di $z^2 - 6z + 10 = 0$. Le radici di quest'ultima equazione sono

$$z = 3 \pm \sqrt{9 - 10} = 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i.$$

Abbiamo trovato la radice $z_0 = 3 + i$ indicata nel testo dell'esercizio. Una seconda radice è la coniugata della precedente $\bar{z}_0 = 3 - i$.
Le radici di $z^3 = 1$ sono

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Queste radici si calcolano facilmente. Si noti che $z_3 = \bar{z}_2$.

Altra soluzione. Il polinomio P ha coefficenti reali. Siccome $z_0 = 3 + i$ è una radice, allora anche $\bar{z}_0 = 3 - i$ è una radice di P. Dunque, $P(z)$ è divisibile per il polinomio di secondo grado

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - 6z + 10.$$

Eseguendo una divisione di polinomi si trova $P(z) = (z^3 - 1)(z^2 - 6z + 10)$ e si conclude come nella prima soluzione.