Area dell'Ingegneria dell'Informazione

MATEMATICA A

15 Luglio 2008 a.a. 786°

TEMA 4

1. Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = \frac{\log|2-x|}{(2-x)^3} \quad .$$

   i) Determinare il dominio di f, il segno, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

   ii) Stabilire dove f è continua, dove è derivabile, e calcolare $f'(x)$.

   iii) Studiare la monotonia di f, determinando eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.

   iv) Tracciare un grafico qualitativo di f.
   (*Non è richiesta* $f''(x)$.)

2. Disegnare nel piano di Gauss l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$3 \leq \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \leq 4 \quad .$$

3. Dire per quali $\alpha > 0$ converge l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\cos x^{3\alpha}}\, dx \quad .$$

****

Tempo: due ore e mezza .
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

TEMA 4 15 luglio 2008

Es. 1 $$f(x) = \frac{\log|2-x|}{(2-x)^3}$$

Dominio $D(f) = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

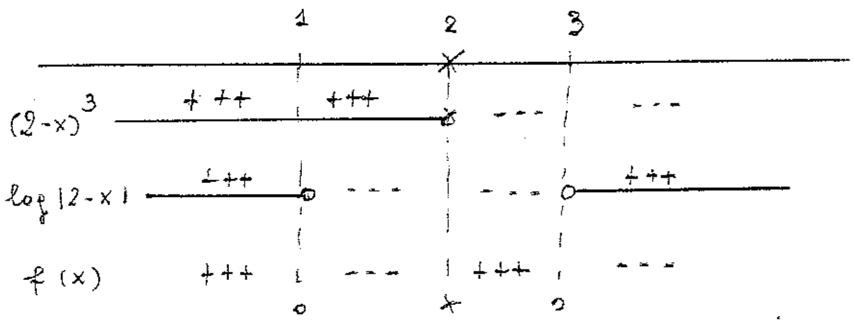
Segno

$$(2-x)^3 > 0 \iff 2-x > 0 \iff x < 2$$

$$\log|2-x| > 0 \iff |2-x| > 1 \iff (2-x)^2 > 1 \iff x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$\iff x \in (-\infty, 1[\cup]3, +\infty)$$

Quindi



$$f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 1[\cup]2, 3[$$

$$f(x) = 0 \iff x = 1 \text{ oppure } x = 3$$

Via Trieste, 63 - I-35121 Padova - Tel. 049.827.1200 - Fax 049.827.1444-049.827.1499 - P.I. 00742430283 - C.F. 80006480281

Amministrazione Tel. 049.827.1401 - Fax 049.827.1499 e-mail: amministrazione@math.unipd.it
Direzione Tel. 049.827.1411 - Fax 049.827.1499 e-mail: dipmath@math.unipd.it
Segreteria Didattica Tel. 049.827.1345 - Fax 049.827.1444 e-mail: didattica@math.unipd.it

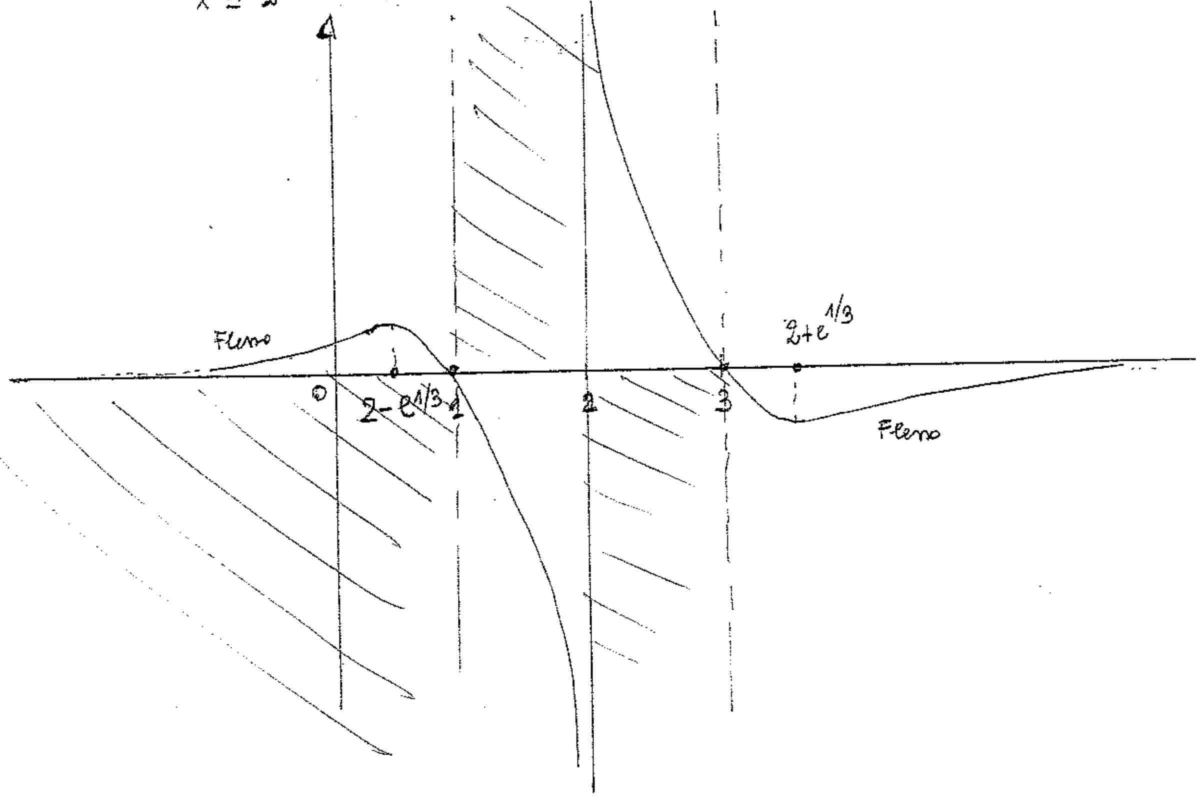
<u>Limiti</u> $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\log|2-x|}{(2-x)^3} \overset{H}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{3(2-x)^3} = 0$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\log|2-x|}{(2-x)^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\log|2-x|}{(2-x)^3} = -\infty$$

<u>Asintoti</u> $y = 0$ Asintoto orizzontale

$x = 2$ Asintoto verticale



<u>Derivabilità \ Continuità</u> f è cont. e deriv. in $D(f)$

è quoziente di funzioni derivabili

<u>Conto di $f'(x)$</u> $f(x) = (2-x)^{-3} \log|2-x|$

$$f'(x) = -3(2-x)^{-4} \cdot (-1) \log|2-x| + (2-x)^{-3} \frac{1}{2-x} (-1)$$

$$= \frac{1}{(2-x)^4} \left\{ 3 \log|2-x| - 1 \right\}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

Segno di $f'(x)$

$$f'(x) > 0 \iff 3\log|2-x| + 1 > 0 \iff \log|2-x| > +\frac{1}{3}$$

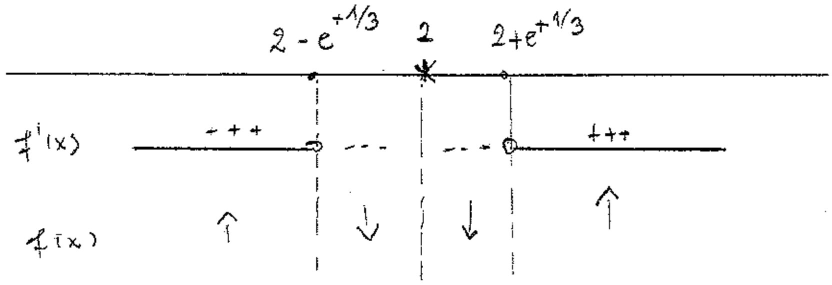
$$\iff |2-x| > e^{+1/3}$$

1° Caso: $2-x>0$, $x<2$:

$$2-x > e^{+1/3} \iff x < 2 - e^{+1/3}$$

2° Caso: $2-x<0$, $x>2$

$$x-2 > e^{+1/3} \iff x > 2 + e^{+1/3}$$



Dunque: $f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 2-e^{+1/3}[\cup [2+e^{+1/3}, +\infty)$

$f'(x) = 0 \iff x = 2 \pm e^{+1/3}$ Esame: $2 > e^{1/3}$

$8 > e$ sì

Monotonia V.S.

Max\Min $x = 2+e^{1/3}$ min loc.

$x = 2-e^{1/3}$ max loc.

Via Trieste, 63 - I-35121 Padova - Tel. 049.827.1200 - Fax 049.827.1444-049.827.1499 - P.I. 00742430283 - C.F. 80006480281

Amministrazione	Tel. 049.827.1401 - Fax 049.827.1499	e-mail: amministrazione@math.unipd.it
Direzione	Tel. 049.827.1411 - Fax 049.827.1499	e-mail: dipmath@math.unipd.it
Segreteria Didattica	Tel. 049.827.1345 - Fax 049.827.1444	e-mail: didattica@math.unipd.it

$\underline{\text{Es. 2}}$ Disegnare $3 \le \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \le 4$, $\boxed{z \neq -1}$

Conti:

$$\mathrm{Re}\,\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z+1} + \frac{\bar z-1}{\bar z+1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{|z|^2 + \cancel{z} - \cancel{\bar z} - 1 + |z|^2 - \cancel{z} + \cancel{\bar z} - 1}{|z+1|^2}$$

$$= \frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2}$$

Dunque abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 3\,|z+1|^2 \le |z|^2 - 1 \\ |z|^2 - 1 \le 4\,|z+1|^2 \end{cases}$$

dove $|z+1|^2 = |\,x+1+iy\,|^2 = (x+1)^2 + y^2$. Dunque

$$\begin{cases} 3\,(x^2+2x+1) + 3y^2 \le x^2+y^2-1 \\ x^2+y^2-1 \le 4\,(x^2+2x+1) + 4y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 6x + 2y^2 + 4 \le 0 \\ 3x^2 + 8x + 3y^2 + 5 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x + y^2 + 2 \le 0 \\ x^2 + \frac{8}{3}x + y^2 + 5/3 \ge 0 \end{cases} \qquad \cancel{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + y^2 + 2 \le 0}$$

$$\begin{cases} \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + y^2 + 2 \le 0 \\ \left(x+\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} + y^2 + 5/3 \ge 0 \end{cases}$$

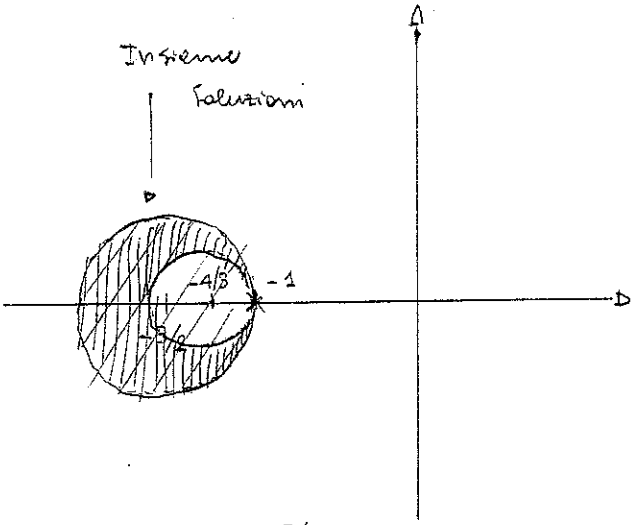
$$\begin{cases} (x+3/2)^2 + y^2 \le \frac{1}{4} \\ (x+4/3)^2 + y^2 \ge \frac{1}{9} \end{cases}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

$-\frac{5}{3} < -\frac{3}{2}$ $\qquad -10 < -9$ sì

Disegno:



Es. 3 Integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos x^{3\alpha}}\,dx$ (con $\alpha > 0$).

Osservo che $\cos x^{3\alpha} = 1 \iff x^{3\alpha} = 0 + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Se suppongo $0 \leq x < \pi/4$ ho solo $x = 0$.

Confronto Asintotico: $\cos x^{3\alpha} = 1 - \frac{1}{2}(x^{3\alpha})^2 + o(x^{6\alpha})$

Dunque

$$\frac{1}{1-\cos x^{3\alpha}} = \frac{1}{\frac{1}{2}x^{6\alpha} + o(x^{6\alpha})} = \frac{1}{x^{6\alpha}}(2 + o(1))$$

Per confronto asintotico con

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{x^{6\alpha}}\,dx < +\infty \iff 6\alpha < 1$$

L'integrale converge se e solo se $\alpha < 1/6$.

#

Via Trieste, 63 - I-35121 Padova - Tel. 049.827.1200 - Fax 049.827.1444-049.827.1499 - P.I. 00742430283 - C.F. 80006480281

Amministrazione Tel. 049.827.1401 - Fax 049.827.1499 e-mail: amministrazione@math.unipd.it
Direzione Tel. 049.827.1411 - Fax 049.827.1499 e-mail: dipmath@math.unipd.it
Segreteria Didattica Tel. 049.827.1345 - Fax 049.827.1444 e-mail: didattica@math.unipd.it