Mappe di trasporto in dimensione 1

Siano μ e ν due misure di Borel su $\mathbb{R}$ con $\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R}) = 1$.
Vogliamo costruire $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con queste proprietà:

i) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow T(x_1) \leq T(x_2)$ (T monotona);

ii) $T_\# \mu = \nu$.

La funzione di distribuzione di μ è la funzione
$F_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente F_μ è monotona crescente (in generale non strettamente) ed è continua da destra:

$$F_\mu(x_0) = \mu\Big(\bigcap_{x > x_0} (-\infty, x]\Big) = \lim_{x \to x_0^+} \mu((-\infty, x])$$

$$= \lim_{x \to x_0^+} F_\mu(x).$$

Se poi $\mu(\{x_0\}) = 0$ allora

$$F_\mu(x_0) = \mu((-\infty, x_0)) = \mu\Big(\bigcup_{x < x_0} (-\infty, x)\Big)$$

$$= \lim_{x \to x_0^-} \mu((-\infty, x)) = \lim_{x \to x_0^-} F_\mu(x)$$

e quindi F_μ è continua.

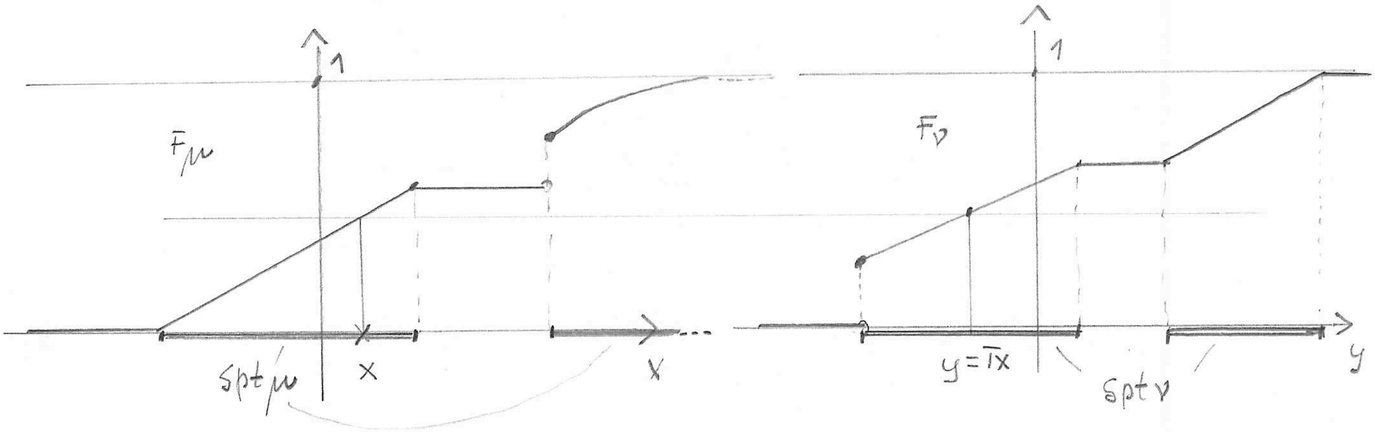
Ricordiamo che

$$\operatorname{spt}(\mu) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, \mu((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) > 0 \ \forall \varepsilon > 0\}.$$

L'insieme $\operatorname{spt}(\mu) \subset \mathbb{R}$ è chiuso. Se $x \notin \operatorname{spt}(\mu)$ allora $\mu((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) = 0$ per un $\varepsilon > 0$ e dunque F_μ è costante in un intorno di x.

Euristicamente, vogliamo trovare una funzione monotona $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$F_\mu(x) = F_\nu(T(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$



Per $x \in \mathbb{R}$ definiamo

(1) $$T(x) = \inf \{ y \in \mathrm{spt}(\nu) \,;\, F_\nu(y) \geq F_\mu(x) \}.$$

In modo naturale, si può definire $\mathrm{spt}(\nu) \subset \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ in modo tale che l'inf è "raggiunto".

In questo modo definiamo $T : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ monotona.

<u>Domanda</u> Supponiamo che $\mu(\{x\}) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e che $\mathrm{spt}(\nu) = \overline{\mathbb{R}}$. É vero che T è continua?

Vogliamo verificare che $T_\# \mu(B) = \nu(B)$ per i Boreliani $B \subset \mathbb{R}$ della forma $B = (-\infty, y]$ con $y \in \mathbb{R}$.

Precisamente:

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} \,;\, T(x) \leq y\}) = \mu(T^{-1}(-\infty, y]) = T_\# \mu((-\infty, y])$$

(2) $$= \nu((-\infty, y]) = F_\nu(y).$$

Vogliamo provare

Siccome T è monotona, l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid T(x) \leq y\}$ è una semiretta del tipo $(-\infty, x_0)$ oppure $(-\infty, x_0]$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $\mu(\{x_0\}) = 0$.
In questo caso si ha

$$\mu((-\infty, x_0)) = \mu((-\infty, x_0]) = F_\mu(x_0)$$

e la (2) è equivalente a

$$(3) \qquad F_\mu(x_0) = F_\nu(y),$$

Proviamo la (3). Dalla definizione (1), per $x < x_0$ $\left(\begin{matrix} x = x_0 \\ \text{OK} \end{matrix}\right)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists y_\varepsilon \in \operatorname{spt}(\nu) \text{ tale che } T(x) < y_\varepsilon < T(x) + \varepsilon \text{ e}$$
$$F_\nu(y_\varepsilon) \geq F_\mu(x).$$

Usando la continuità da destra di F_ν si ottiene

$$F_\nu(T(x)) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_\nu(y_\varepsilon) \geq F_\mu(x).$$

E siccome $T(x) \leq y$, si trova $F_\nu(y) \geq F_\mu(x)$.
Per $x \to x_0^-$, dalla continuità di F_μ in x_0 si ottiene

$$F_\mu(x_0) \leq F_\nu(y).$$

Sia ora $x > x_0$. Avremo in questo caso $T(x) > y$ e dalla definizione (1) si ottiene $F_\nu(y) < F_\mu(x)$
Con $x \to x_0^+$ si trova

$$F_\mu(x_0) \geq F_\nu(y).$$

Questo prova la (3) sotto l'ipotesi $\mu(\{x_0\}) = 0$.

Se $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ allora $T_{\#}\mu(B) = \nu(B)$ per ogni $B = (y_1, y_2] \subset \mathbb{R}$ e quindi per ogni B aperto o chiuso di $\mathbb{R}$.

<u>Osservazione</u> Se due misure di Borel (finite) coincidono sugli aperti coincidono allora anche sui Boreliani, almeno in $\mathbb{R}^n$.

Abbiamo provato il seguente teorema.

<u>Teorema</u> Siano μ, ν due misure di Borel su $\mathbb{R}$ con $\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R}) = 1$. Supponiamo che μ non abbia atomi. Allora esiste $T : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che:

1) T è monotona

2) $T : \operatorname{spt}(\mu) \longrightarrow \operatorname{spt}(\nu)$

3) $T_{\#}\mu = \nu$.

<u>Problema</u> Sia $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona crescente e definiamo (integrale di Riemann) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(*) \qquad \varphi(x) = \int_0^x T(t)\,dt.$$

Provare che φ è convessa.

E il viceversa? Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa allora esiste $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona crescente tale che vale $(*)$.

Esistenza di soluzioni per il problema di Kantorovic. Schema generale della dimostrazione.

Siano $X = Y = \mathbb{R}^n$, $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ continua e μ, ν due misure di probabilità su $\mathbb{R}^n$.

Il problema di Kantorovic è :

$$\min \left\{ I(\pi) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi \ ; \ \pi \in \Pi(\mu,\nu) \right\}.$$

La dimostrazione si basa sul "metodo di Tonelli". Si cerca una topologia su $\mathcal{M} = \{$ misure di Probabilità (Borel) su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \}$ con queste proprietà :

1) $\Pi(\mu,\nu) \subset \mathcal{M}$ è compatto

2) $I : \Pi(\mu,\nu) \to [0,\infty]$ è continuo o almeno semicontinuo inferiormente.

Se una tale topologia esiste allora l'esistenza del minimo segue dal Teorema di Weierstraß.

La topologia che funziona è la topologia debole sullo spazio delle misure (ce ne sono varie). Queste topologie in generale non sono metrizzabili. Ma ristrette su insiemi particolari diventano metrizzabili e potremo ragionare in modo sequenziale ("per successioni").

Quando X è uno spazio metrico ci sono varie definizioni equivalenti di semicontinuità inferiore per una funzione $F : X \to (-\infty, \infty]$:

Diciamo che F è semicontinua inferiormente se:

1) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ gli insiemi di sopralivello

$$\{x \in X : F(x) > \lambda\} \subset X$$

sono aperti.

2) Per ogni $x_0 \in X$ si ha

$$F(x_0) \leq \sup_{\substack{U \text{ intorno} \\ \text{di } x_0}} \inf_{y \in U} F(y).$$

3) Per ogni $x_0 \in X$ si ha

$$F(x_0) \leq \sup_{r>0} \inf_{\substack{x \in B_r(x_0) \\ \text{con } x \neq x_0}} F(x) := \liminf_{x \to x_0} F(x)$$

4) Per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $x_h \xrightarrow[h\to\infty]{(X,d)} x_0$ si ha

$$F(x_0) \leq \liminf_{h \to \infty} F(x_h).$$

Se X è uno SM: 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4).
Se X è uno ST non è detto.

Nel seguito adotteremo il punto di vista 4).
Per quanto riguarda la compattezza ci sono due definizioni:

1) Compattezza per ricoprimenti aperti

2) Compattezza sequenziale: successione limitata ha sottosuccessione convergente.

Nel seguito adotteremo il punto di vista 2).

Topologie deboli negli spazi di misure. Compattezza debole.

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto non vuoto. L'insieme

$$X = C(K;\mathbb{R}) = \{ f : K \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua su } K \}$$

è uno spazio vettoriale, con la norma

$$\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

X diventa uno spazio di Banach (spazio normato completo).

Sia μ una misura di Borel su K finita. L'operatore $T_\mu : X \to \mathbb{R}$

$$T_\mu(f) = \int_K f(x)\, d\mu$$

è lineare e limitato (continuo):

$$|T_\mu(f)| \leq \int_K |f(x)|\, d\mu \leq \mu(K) \cdot \|f\|$$

per ogni $f \in X$. Dunque μ (meglio: T_μ) appartiene al duale di X:

$$X^* = \{ T : X \to \mathbb{R} \mid T \text{ lineare e limitato} \}.$$

<u>Teorema</u> (Riesz) Sia $T \in X^*$. Esistono due misure di Borel finite μ^+ e μ^- su K tali che - posto $\mu = \mu^+ - \mu^-$ - si ha $T(f) = \int_K f(x)\, d\mu$ per ogni $f \in X$.

In altri termini, X^* coincide con lo spazio delle misure di Borel finite con segno su K.

Fissata una funzione $f \in X$, definiamo l'operatore lineare $T_f : X^* \to \mathbb{R}$

$$T_f(\mu) = \int_K f(x)\, d\mu$$

La funzione $\|\cdot\|_* : X^* \to \mathbb{R}$ ("norma operatoriale su X^*")

$$\|\mu\|_* = \|\mu^+ - \mu^-\|_* := \mu^+(K) + \mu^-(K)$$

è una norma e inoltre T_f è limitato rispetto a questa norma. Dunque $X \subset X^{**}$ ma in generale $X \neq X^{**}$.

La più piccola topologia su X^* che rende continui tutti gli operatori del tipo T_f con $f \in X$ si dice topologia debole-$*$ su X^*.

Fissati $\mu \in X^*$, $\varepsilon > 0$ ed $\mathcal{F} \subset X$ finito, definiamo l'"intorno debole"

$$\mathcal{U}(\mu, \varepsilon, \mathcal{F}) = \left\{ \nu \in X^* : \left| \int_K f(x)\, d\nu - \int_K f(x)\, d\mu \right| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F} \right\}$$

Gli insiemi $\mathcal{U}(\mu, \varepsilon, \mathcal{F})$ formano una "base" della topologia debole-$*$.

Esercizio Sia $\mu_k \in X^*$, $k \in \mathbb{N}$, una successione di misure e sia $\mu \in X^*$. Sono equivalenti:

1) $\mu_K \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu$ nella topologia debole-*

2) $\lim_{K\to\infty} \int_K f(x)\, d\mu_k = \int_K f(x)\, d\mu$ per ogni $f \in C(K) = X$.

Teorema (Banach-Alaoglu) Sia X^* il duale di uno spazio di Banach X. Gli insiemi chiusi e limitati di X^* sono compatti per la topologia debole-*.

In questa forma generale, il teorema si basa sul Teorema di Tychonov e quindi sull'assioma della scelta. Diamo una dimostrazione nel caso $X = C(K;\mathbb{R})$ che evita l'assioma della scelta.

Teorema Sia $\mu_k \in X^*$, $k \in \mathbb{N}$, una successione di misure di Borel su K limitate, $\sup_{k\in\mathbb{N}} \mu_k(K) < \infty$.
Esiste una sottosuccessione $(\mu_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ed esiste μ misure di Borel finite su K tale che

$$\lim_{i\to\infty} \int_K f(x)\, d\mu_{k_i} = \int_K f(x)\, d\mu$$

per ogni $f \in C(K)$.

Dim. Lo spazio $C(K)$ è separabile. Esistono dunque $f_j \in C(K)$ tali che

$$\overline{\{f_j ; j \in \mathbb{N}\}} = C(K).$$

La successione

$$\alpha_1^k = \int_K f_1(x)\, d\mu_k \quad \in \mathbb{R}$$

è limitata:

$$|\alpha_1^k| \leq \|f_1\|\, \underbrace{\mu_k(K)}_{\text{convergente}} \leq \underset{\infty}{\hat{C}} \|f_1\|$$

Quindi esiste una sottosuccessione $\alpha_1^{k_i} \xrightarrow[i \to \infty]{} \alpha_1 \in \mathbb{R}$.

La successione

$$\alpha_2^{k_i} = \int_K f_2(x)\, d\mu_{k_i}$$

è limitata e dunque esiste una s.s. che converge ad $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Iterando e con procedimento diagonale si trova una selezione di indici $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{i \to \infty} \int_K f_j(x)\, d\mu_{k_i} = \alpha_j \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

La successione $i \mapsto \int_K f(x)\, d\mu_{k_i}$ è di Cauchy per ogni $f \in C(K)$ e dunque converge in $\mathbb{R}$. Usate qui la densità e la limitatezza.

Si definisce $T : C(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$T(f) = \lim_{i \to \infty} \int_K f(x)\, d\mu_{k_i} \in \mathbb{R}.$$

T è lineare ed è limitato:

$$|T(f)| \leq \underset{\infty}{\overset{\wedge}{\sup_{i \in \mathbb{N}} \mu_{k_i}(K)}} \cdot \|f\|.$$

Per il Teorema di Riesz esiste una misura di Borel finita μ su K tale che

$$T(f) = \int_K f(x)\, d\mu.$$

$\square$

La costruzione fatta finora dipende in modo essenziale dal fatto che K è compatto.
Vogliamo sostituire K con $\mathbb{R}^n$. Ci sono due possibilità:

1) Considerare funzioni $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ continue con supporto compatto.
2) Considerare funzioni $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ continue e limitate

Non costruiamo i duali, ma leghiamo questi spazi con le misure, e precisamente

1) Misure di Radon (misure di Borel su $\mathbb{R}^n$ finite sui compatti)
2) Misure di Borel su $\mathbb{R}^n$ finite.

<u>Definizione 1</u> Siano μ, μ_k, $k \in \mathbb{N}$, misure di Radon in $\mathbb{R}^n$.
Diciamo che $\mu_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ debolmente in dualità con $C_c(\mathbb{R}^n)$
se

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu$$

per ogni $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 2 Siano μ, μ_k, $k \in \mathbb{N}$, misure di Borel finite in $\mathbb{R}^n$. Diciamo che $\mu_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ debolmente in dualità con $C_b(\mathbb{R}^n)$ se

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu$$

per ogni $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$.

Esempio In $\mathbb{R}$ sia $\mu_k = \delta_k$ la delta di Dirac concentrata in $k \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Allora $\mu_k \longrightarrow 0$ in dualità con $C_c(\mathbb{R})$ mentre non ha limite in dualità con $C_b(\mathbb{R})$.

La compattezza debole è diversa nei due casi.

Teorema 1 Sia $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di misure di Radon in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mu_k(K) < +\infty,$$

Allora esistono una sottosuccessione $(\mu_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ed una misura di Radon μ tali che $\mu_{k_i} \longrightarrow \mu$ debolmente in dualità con $C_c(\mathbb{R}^n)$.

La dimostrazione è analoga a quella vista sopra.

Teorema 2 Sia $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di misure di Borel finite in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che:

a) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \mu_k(\mathbb{R}^n) < \infty$ (limitatezza)

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \subset \mathbb{R}^n$ compatto tale che $\sup_{k\in\mathbb{N}} \mu_k(\mathbb{R}^n \setminus K) < \varepsilon$.

Allora esistono una sottosuccessione $(\mu_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ed una misura di Borel finita μ tali che $\mu_{k_i} \to \mu$ debolmente in dualità con $C_b(\mathbb{R}^n)$.

Dim. Sia $K_h \subset \mathbb{R}^n$ una successione di compatti tali che

i) $K_h \subset K_{h+1}$;

ii) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \mu_k(\mathbb{R}^n \setminus K_h) \le \frac{1}{h}$

Le misure μ_k ristrette su K_1 hanno una sottosuccessione che converge debolmente (dualità con $C(K_1)$) ad una misura di Borel finita su K_1.

Con un procedimento diagonale si trova una selezione di indici $i \to k_i$ tale che μ_{k_i} ristretta su K_h converge ad una misura di Borel ν_h finita su K_h.

Chiaramente $\nu_{h+1} \llcorner K_h = \nu_h$ e - con notazione chiara - $\nu_h \le \nu_{h+1}$. Definiamo $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$

$$\nu(B) = \lim_{h\to\infty} \nu_h(B)$$

$$= \lim_{h\to\infty} \nu_h(B \cap K_h).$$

Osserviamo che $\nu_h(K_h) = \lim_{i\to\infty} \int_{K_h} 1 \, d\mu_{k_i} \le C < \infty$ per l'ipotesi a), con C indipendente da h. Quindi ν è finita.

Se $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ con unione disgiunta, $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\nu(B) = \lim_{h \to \infty} \nu_h\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \cap K_h\Big) \qquad (\nu_h \text{ misura})$$

$$= \lim_{h \to \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu_h(B_i \cap K_h) \qquad (\text{conv. monotona})$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \lim_{h \to \infty} \nu_h(B_i \cap K_h)$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(B_i)$$

Dunque ν è σ-additiva.

Proviamo che $\mu_{k_i} \to \nu$ debolmente in dualità con $C_b(\mathbb{R}^n)$. Sia $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_h} f \, d\mu_k \right| < \varepsilon \qquad \forall k \qquad \begin{pmatrix} \text{Usiamo qui:} \\ f \text{ limitata} \end{pmatrix}$$

Vale anche

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_h} f \, d\nu \right| < \varepsilon$$

Esiste $\bar{i} \in \mathbb{N}$ tale che per $i \geq \bar{i}$

$$\left| \int_{K_h} f \, d\mu_{k_i} - \int_{K_h} f \, d\nu \right| < \varepsilon. \qquad \begin{pmatrix} \text{Convergenza debole-*} \\ \text{su } K_h \text{ fissato} \end{pmatrix}$$

Questo prova che $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_{k_i} \xrightarrow[i \to \infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\nu$. $\square$

Semicontinuità inferiore per il funzionale di Kantorovic

La convergenza debole di misure nello spazio (misure Borel prob.) $P(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ha il seguente significato. Diciamo che $\pi_k \in P(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ converge debolmente ad una misura $\pi \in P(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ per $k \to \infty$ se

$$\liminf_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \phi \, d\pi_k \geq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \phi \, d\pi$$

per ogni $\phi \in C_b(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, funzioni continue e limitate. Scriveremo: $\pi_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \pi$.

<u>Teorema</u> Sia $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $[0, \infty)$ una funzione semicontinua inferiormente e siano $\pi_k, \pi \in P(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tali che $\pi_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \pi$. Allora

$$(*) \qquad \liminf_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y) \, d\pi_k \geq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y) \, d\pi .$$

Dim. Per $k \in \mathbb{N}$ definiamo $c_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$c_k(x,y) = \inf_{\xi, \eta \in \mathbb{R}^n} \left\{ \min\{ c(\xi,\eta), k \} + k|x-\xi| + k|y-\eta| \right\}.$$

Proprietà:

i) $c_k(x,y) \leq \min\{ c(x,y), k \} \leq k$

ii) c_k è k-Lipschitz. Questo segue dal fatto che $(x,y) \longmapsto \min\{c(\xi,\eta), k\} + k|x-\xi| + k|y-\eta|$

è k-Lipschitz per ogni $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$ fissati.

L'inf di funzioni k-Lip è ancora k-Lip (Esercizio).

iii) $c_k(x,y) \leq c_{k+1}(x,y) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$.

iv) Dunque esiste il $\lim_{k\to\infty} c_k(x,y)$ e dalla i) segue che

$$\lim_{k\to\infty} c_k(x,y) \leq c(x,y).$$

v) Proviamo che

$$\lim_{k\to\infty} c_k(x,y) \geq c(x,y).$$

Fissato $k \in \mathbb{N}$ ed $x,y \in \mathbb{R}^n$, esistono $\xi_k, \eta_k \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$c_k(x,y) + \frac{1}{k} \geq \min\{c(\xi_k,\eta_k), k\} + k|\xi_k - x| + k|\eta_k - y|$$

Siccome $c_k(x,y) \leq c(x,y) < \infty$, deduciamo che

$$\xi_k \longrightarrow x \quad \text{ed} \quad \eta_k \longrightarrow \eta \quad \text{per } k \to \infty.$$

Di conseguenza

$$\lim_{k\to\infty} c_k(x,y) \geq \underset{k\to\infty}{\overset{(\liminf)}{\lim}} \min\{c(\xi_k,\eta_k), k\}$$

$$\geq \min\{\liminf_{k\to\infty} c(\xi_k,\eta_k), \liminf_{k\to\infty} k\}$$

$$\geq c(x,y)$$

per la semicontinuità inferiore di c.

Concludiamo la dimostrazione di (*). Per $h \in \mathbb{N}$ fissato abbiamo $c_h \in C_b(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, Dunque

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c_h(x,y)\, d\pi_k = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c_h(x,y)\, d\pi.$$

Usando $c_h(x,y) \leq c(x,y)$ deduciamo che

$$\liminf_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi_k \geq \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c_h(x,y)\, d\pi_k$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c_h(x,y)\, d\pi.$$

Con convergenza monotona in $h \to \infty$ si ottiene la tesi.

$\square$

Esistenza del minimo per il problema di Kantorovic

Teorema Siano μ e ν due misure di Borel unitarie su $\mathbb{R}^n$ e sia $c : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$ semicontinua inferiormente, $c \not\equiv +\infty$.
Esiste un piano di trasporto $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ ottimale (minimo) per il problema di Kantorovic

$$\min \left\{ \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi \; ; \; \pi \in \Pi(\mu,\nu) \right\}.$$

Si suppone che esista $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ con $\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi < \infty$.

Dim. Sia $\pi_h \in \Pi(\mu,\nu)$, $h \in \mathbb{N}$, una successione minimizzante:

$$\lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi_h = \inf\{\ \ldots\ \} < \infty .$$

Per ipotesi $\pi_h(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n) = 1 \quad \forall h \in \mathbb{N}$. Proviamo che $\forall \varepsilon>0 \;\exists\; K \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ compatto tale che

$$\pi_h(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \setminus K) < \varepsilon \quad \text{per ogni } h\in\mathbb{N}.$$

Esiste $R>0$ tale che

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \nu(\mathbb{R}^n\setminus \overline{B}_R) < \varepsilon$$

dove $\overline{B}_R = \{|x| \le R\}$ è compatto. Segue dal fatto che μ e ν sono finite.

Sia $K := \overline{B}_R \times \overline{B}_R$. Abbiamo

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus K \subset (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R \times \mathbb{R}^n) \cup (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R)$$

e siccome $\pi_h \in \Pi(\mu, \nu)$:

$$\pi_h(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus K) \leq \pi_h(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R \times \mathbb{R}^n) + \pi_h(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R)$$
$$= \mu(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) + \nu(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) < 2\varepsilon$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$.

Per compattezza debole, esiste una sottosuccessione $(\pi_{h_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\pi_{h_i} \xrightarrow[i \to \infty]{} \pi \quad \text{debolmente in dualità con } C_b(\mathbb{R}^n)$$

con π misura di Borel unitaria su $\mathbb{R}^n$.

Inoltre, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\mu(B) = pr^1_{\#}\pi_{h_i}(B) = \int_{B \times \mathbb{R}^n} 1 \, d\pi_{h_i} \xrightarrow[i \to \infty]{} \int_{B \times \mathbb{R}^n} 1 \, d\pi = pr^1_{\#}\pi(B)$$

e analogamente per $\nu(B)$.

Dunque $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$.

Infine sappiamo che $\pi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y) \, d\pi$ è semicontinua inferiormente per la convergenza debole di misure in dualità con $C_b(\mathbb{R}^n)$. Per il "Metodo Diretto" questo conclude la dimostrazione. $\square$