Monotonia c-ciclica

Fissiamo una funzione "costo" $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e facciamo un'introduzione euristica al concetto di "insieme c-ciclicamente monotono".

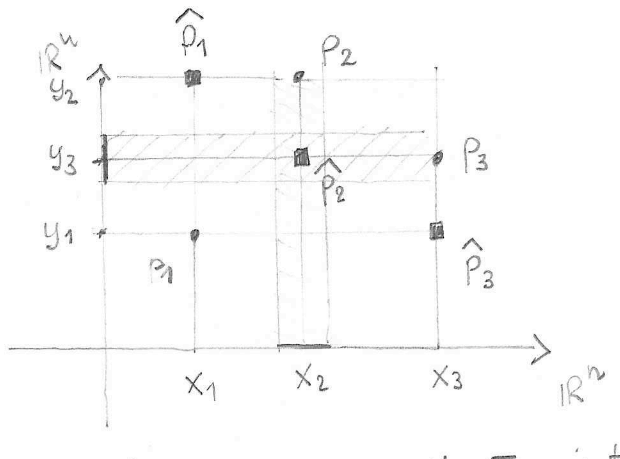
Sia $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e immaginiamo che sia $K = \mathrm{spt}(\pi)$ dove $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ è un piano di trasporto ottimale per il costo c.

Consideriamo dei punti $P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_N = (x_N, y_N) \in K$ con $N \geq 2$. Se π provenisse da una mappa di trasporto $T \in \mathcal{T}(\mu, \nu)$ allora avremmo $y_i = T(x_i)$, $i = 1 \dots N$.

Modifichiamo il trasporto nel seguente modo

trasformiamo
$$\begin{array}{c} x_1 \to y_1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ x_N \to y_N \end{array} \quad \text{in} \quad \begin{array}{l} x_1 \longrightarrow y_2 \\ x_2 \longrightarrow y_3 \\ \vdots \\ x_N \longrightarrow y_{N+1} := y_1 \end{array}$$

Ecco una figura per $N = 3$



Siano
$$\hat{P}_1 = (x_1, y_2)$$
$$\hat{P}_2 = (x_2, y_3)$$
$$\hat{P}_3 = (x_3, y_1)$$

Spostando la misura di π intorno P_i in un intorno di $\hat{P}_i$ costruiamo una nuova misura $\hat{\pi}$ tale che possa verificare $\hat{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$.

Se π è ottimale, i costi totali degli accoppiamenti di punti devono verificare

$$\sum_{i=1}^{N} c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{N} c(x_i, y_{i+1}),$$

altrimenti si avrebbe

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi > \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\hat{\pi}.$$

Questo discorso suggerisce la seguente definizione.

<u>Definizione</u> Diciamo che un insieme $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ è c-ciclicamente monotono se per ogni $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in K$, con $N \in \mathbb{N}$, si verifica

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{N} c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{N} c(x_i, y_{i+1})$$

con $y_{N+1} := y_1$. [Definizione equivalente con permutazioni]

Esaminiamo la definizione nel caso $c(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$.

La $(*)$ diventa

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_{i+1}|^2.$$

Sviluppando i quadrati e riordinando, questa disuguaglianza è equivalente a

$$\sum_{i=1}^{N} \langle x_i, y_{i+1} \rangle \leq \sum_{i=1}^{N} \langle x_i, y_i \rangle$$

ovvero, raggruppando, si trova

$$(**) \qquad \sum_{i=1}^{N} \langle x_i, y_{i+1} - y_i \rangle \leq 0 ,$$

ovvero anche, con $x_0 := x_N$,

$$(\blacksquare) \qquad \sum_{i=1}^{N} \langle x_i - x_{i-1}, y_i \rangle \geq 0 .$$

Con $N = 2$ la $(**)$ diventa

$$\langle x_1, y_2 - y_1 \rangle + \langle x_2, y_1 - y_2 \rangle \leq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \geq 0$$

ovvero "K è un insieme monotono crescente".

<u>Osservazione</u> Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e indichiamo con $\partial\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ il suo sotto-differenziale. Il grafico del sottodifferenziale è

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ ; \ y \in \partial\varphi(x) \} .$$

Prendiamo punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in K$. Dalla convessità troviamo

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_i) + \langle y_i, x - x_i \rangle , \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Con la scelta $x = x_{i-1}$ e sommando su i si trova la (■):

$$\sum_{i=1}^{N} \langle y_i, x_i - x_{i-1} \rangle \geq 0 .$$

Dunque, se φ è convessa allora $K = gr(\partial\varphi)$ è ciclicamente monotono per $c(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$.

Un teorema di analisi convessa inverte questa osservazione.

<u>Teorema (Rockafellar)</u> Sia $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ un insieme ciclicamente monotono per $c(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$. Allora esiste una funzione convessa $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tale che $K \subset gr(\partial\varphi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : x \in dom(\varphi) \text{ e } y \in \partial\varphi(x)\}$.

Dim. Sia $(x_0, y_0) \in K$. Se $K \subset gr(\partial\varphi)$ allora deve essere

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \langle y_0, x - x_0 \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Se poi $(x_1, y_1) \in K$ avremo anche

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\geq \varphi(x_1) + \langle y_1, x - x_1 \rangle \\ &\geq \varphi(x_0) + \langle y_0, x_1 - x_0 \rangle + \langle y_1, x - x_1 \rangle \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Iterando questa procedura, presi comunque $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N) \in K$ si avrà:

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \langle y_N, x - x_N \rangle + \sum_{i=0}^{N-1} \langle y_i, x_{i+1} - x_i \rangle$$

per $x \in \mathbb{R}^n$. Il valore $\varphi(x_0) \in \mathbb{R}$ può essere scelto liberamente. Prendiamo $\varphi(x_0) = 0$. La disuguaglianza precedente suggerisce la definizione

$$\varphi(x) = \sup_{\substack{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N) \\ \text{in } K \\ N \in \mathbb{N}}} \left\{ \langle y_N, x - x_N \rangle + \sum_{i=0}^{N-1} \langle y_i, x_{i+1} - x_i \rangle \right\}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$. In quanto sup di funzioni affini φ è una funzione convessa. Si tratta di verificare che $\varphi \not\equiv \infty$ e che $K \subset \operatorname{gr}(\partial\varphi)$.

Nel punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la definizione restituisce $(x_{N+1} := x_0)$

$$\varphi(x_0) = \sup_{\dots} \left\{ \sum_{i=0}^{N} \langle y_i, x_{i+1} - x_i \rangle \right\}$$

Dalla definizione di ciclica monotonia segue che

$$\sum_{i=0}^{N} \langle y_i, x_{i+1} - x_i \rangle \leq 0$$

e quindi $\varphi(x_0) \leq 0$. D'altra parte con $N = 0$ si trova $\varphi(x) \geq \langle y_0, x - x_0 \rangle$ e dunque $\varphi(x_0) \geq 0$. In conclusione $\varphi(x_0) = 0$, coerentemente con la costruzione.

Proviamo ora che $K \subset gr(\partial\varphi)$. Avremo per $x \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(x) = \sup_{\substack{(x_1,y_1)\dots(x_N,y_N) \\ \text{in } K}} \{ \dots \}$$

$$= \sup_{(x_N,y_N)\in K} \ \sup_{\substack{(x_1,y_1)\dots(x_{N-1},y_{N-1}) \\ \text{in } K}} \left\{ \langle y_N, x-x_N\rangle + \langle y_{N-1}, x_N - x_{N-1}\rangle + \sum_{i=0}^{N-2} \langle y_i, x_{i+1} - x_i\rangle \right\}$$

$$= \sup_{(x_N,y_N)\in K} \langle y_N, x-x_N\rangle + \varphi(x_N)$$

$$\geq \langle y_N, x-x_N\rangle + \varphi(x_N)$$

per ogni $(x_N, y_N) \in K$.

Quindi $y_N \in \partial\varphi(x_N)$.

$\square$

Ora torniamo al caso di un costo c generale e proviamo che il supporto di un piano di trasporto ottimale è necessariamente c-ciclicamente monotono.

<u>Teorema</u> Siano μ e ν due misure di Borel unitarie in $\mathbb{R}^n$. Sia $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione costo continua. Supponiamo che $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ sia un minimo (finito) del problema di Kantorovic

$$\min \left\{ \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi \; ; \quad \pi \in \Pi(\mu,\nu) \right\}.$$

Allora $spt(\pi)$ è c-ciclicamente monotono.

Dim. Per assurdo esistono $(x_1,y_1), \dots, (x_N,y_N) \in spt(\pi)$ tali che

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{N} c(x_i,y_i) > \sum_{i=1}^{N} c(x_{i+1},y_i).$$

Siccome c è continua, esiste $\delta>0$ tale che la $(*)$ continua a valere per tutti i punti $(x_i', y_i') \in B_\delta(x_i) \times B_\delta(y_i) := Q_i$, $i=1,\dots,N$. Posto $q_i = \pi(Q_i) > 0$ (spt), definiamo le misure

$$\pi_i = \frac{1}{q_i}\, \pi \llcorner Q_i$$

e su $(\mathbb{R}^{2n})^N$ consideriamo la misura prodotto

$$\sigma = \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_N .$$

Consideriamo le proiezioni $pr_i^1, pr_i^2 : (\mathbb{R}^{2n})^N \to \mathbb{R}^n$

$$pr_i^1(x_1,y_1,\dots,x_N,y_N) = x_i,$$

$$pr_i^2(x_1,y_1,\dots,x_N,y_N) = y_i,$$

e definiamo le misure di Borel su $\mathbb{R}^{2n}$

$$\theta^+ = \sum_{i=1}^{N} (pr^1_{i+1} \times pr^2_i)_\# \sigma ,$$

$$\theta^- = \sum_{i=1}^{N} (pr^1_i \times pr^2_i)_\# \sigma .$$

Osserviamo che $pr^1_\# \theta^+ = pr^1_\# \theta^-$ e $pr^2_\# \theta^+ = pr^2_\# \theta^-$.

Dato $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n})$ avremo

$$\theta^-(B) = \sum_{i=1}^{N} (pr^1_i \times pr^2_i)_\# \sigma \ (B)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sigma\left((pr^1_i \times pr^2_i)^{-1} (B) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \pi_i (B) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} \pi (B \cap Q_i)$$

$$\leq \frac{1}{\min\{q_1, \dots, q_N\}} \cdot N \ \pi(B).$$

Posto $t = \frac{1}{N} \min\{q_1, \dots, q_N\}$ avremo $t\theta^- \leq \pi$.

Ora osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\theta^+ = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\sum_{i=1}^{N} (pr^1_{i+1} \times pr^2_i)_\# \sigma$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} \int_{B_\delta(x_{i+1}) \times B_\delta(y_i)} c(x,y)\, d\pi$$

ed analogamente

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\theta^- = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} \int_{B_\delta(x_i) \times B_\delta(y_i)} c(x,y)\, d\pi$$

e dalle (*) segue che

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\theta^+ < \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\theta^- .$$

Conclusione:

1) $\hat{\pi} := \pi + t\theta^+ - t\theta^-$ è una misura di Borel (non negativa) ed unitaria.

2) $\hat{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$, in quanto θ^+ e θ^- hanno proiezioni uguali.

3) Si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\hat{\pi} < \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi .$$

Questo contraddice la minimalità di π.

$\square$

Dualità di Kantorovic - Rubinstein

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato con duale $(X^*, \|\cdot\|^*)$. Data una funzione $\Theta : X \to (-\infty, \infty]$, $\Theta \not\equiv +\infty$, definiamo $\Theta^* : X^* \to (-\infty, \infty]$

$$\Theta^*(x^*) = \sup_{x \in X} \underbrace{\langle x^*, x\rangle}_{\text{dualità}} - \Theta(x), \quad x^* \in X^*.$$

È la trasformata di Legendre.

Il dominio di Θ è

$$\mathrm{dom}(\Theta) = \{x \in X : \Theta(x) < \infty\}.$$

Teorema (Fenchel - Rockafeller) Siano $\Theta, \Sigma : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ convesse ed inferiormente semicontinue. Supponiamo esista $x_0 \in \mathrm{dom}(\Theta) \cap \mathrm{dom}(\Sigma)$ tale che Θ sia continua in x_0. Allora

$$(*) \qquad \inf_{x \in X} \{\Theta(x) + \Sigma(x)\} = \sup_{x^* \in X^*} \{-\Theta^*(-x^*) - \Sigma^*(x^*)\}.$$

Commento Osserviamo che (Esercizio)

$$\Sigma(x) = \inf_{y \in X} \sup_{x^* \in X^*} \{\Sigma(y) + \langle x^*, x - y\rangle\}.$$

D'altro canto

$$-\Theta^*(-x^*) = -\sup_{x \in X} \langle -x^*, x\rangle - \Theta(x)$$

$$= \inf_{x \in X} \langle x^*, x\rangle + \Theta(x)$$

e

$$-\Sigma^*(x^*) = -\sup_{y\in X} \langle x^*, y\rangle - \Sigma(y)$$

$$= \inf_{y\in X} \langle x^*, -y\rangle + \Sigma(y).$$

Dunque le (*) si riscrive nel seguente modo

$$\inf_{x,y\in X} \sup_{x^*\in X^*} \left\{ \Theta(x) + \Sigma(y) + \langle x^*, x-y\rangle \right\} =$$

$$= \sup_{x^*\in X^*} \inf_{x,y\in X} \left\{ \Theta(x) + \Sigma(y) + \langle x^*, x-y\rangle \right\}.$$

Dunque il Teorema di Fenchel-Rockafeller è una forma di teorema "min-max". Per la dim. si veda Brezis, Analisi Funzionale.

Useremo il teorema nel caso $X = C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ compatto, e X^* = misure di Borel (con segno) finite su K.

Date μ, ν misure di Borel finite (unitarie) su $\mathbb{R}^n$ e $c: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ semicontinua inferiormente, definiamo

$$\Phi_c = \left\{ (\varphi, \psi) \in L^1(\mathbb{R}^n;\mu) \times L^1(\mathbb{R}^n;\nu) : \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x,y) \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Potremmo richiedere $\varphi, \psi \in \mathrm{Lip}_b(\mathbb{R}^n)$ e sganciare la definizione di Φ_c da μ e ν.

<u>Teorema (Dualità di Rubinstein-Kantorovic)</u> Siano μ, ν e c come sopra. Allora

$$\min\left\{ \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi \; ; \; \pi \in \Pi(\mu,\nu) \right\} =$$

$$= \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\, d\nu \; : \; (\varphi,\psi) \in \Phi_c \right\}.$$

Dim. Presentiamo la dimostrazione nel caso speciale in cui μ e ν abbiano entrambe supporto compatto: esiste $R>0$ tale che

$$\mathrm{spt}\,\mu \subset \overline{B}_R \quad e \quad \mathrm{spt}\,\nu \subset \overline{B}_R .$$

Sia $K = \overline{B}_R \times \overline{B}_R \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e consideriamo

$X = C(K)$ funzioni continue su K

$X^* =$ misure di Borel finite su K.

Definiamo $\Theta, \Sigma : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$

$$\Theta(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \geq -c \\ +\infty & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

$$\Sigma(u) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\, d\nu & \text{se } u(x,y) = \varphi(x)+\psi(y) \text{ per qualche } \varphi,\psi \\ +\infty & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Θ è convessa e semicontinua inferiormente.

Controlliamo che Σ sia ben definita. Se si ha anche $u(x,y) = \overline{\varphi}(x) + \overline{\psi}(y)$ allora $\varphi(x) - \overline{\varphi}(x) = \overline{\psi}(y) - \psi(y)$ e quindi $\varphi(x) = \overline{\varphi}(x) + C_0$ e $\overline{\psi}(y) = \psi(y) + C_0$ con $C_0 \in \mathbb{R}$.

Siccome $\mu(\mathbb{R}^n) = \nu(\mathbb{R}^n)$ la definizione di Σ è ben posta.

Inoltre Σ è convessa e semicontinua inferiormente.
(Esercizio)

Data $\pi \in X^* = \{$ misure di Borel con segno su $K\}$
si calcola

$$\Theta^*(-\pi) = \sup_{u \in X} \left\{ -\Theta(u) - \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} u(x,y)\, d\pi \right\}$$

$$= \sup_{u \in X} \begin{cases} -\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} u(x,y)\, d\pi & \text{se } u(x,y) \geq -c \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi & \text{se } \pi \geq 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e poi

$$\Sigma^*(\pi) = \sup_{u \in X} \left\{ -\Sigma(u) + \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} u(x,y)\, d\pi \right\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \pi \in \Pi(\mu,\nu) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In virtù di Fenchel - Rockafellar:

$$\inf_{u \in X} \left\{ \Theta(u) + \Sigma(u) \right\} = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\, d\nu \ ;\ \varphi + \psi \geq -c \right\}$$

e

$$\sup_{\pi \in X^*} \left\{ -\Theta^*(-\pi) - \Sigma^*(\pi) \right\} = \sup_{\pi \in X^*} - \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi$$

Confrontando le prime righe, con un cambio di segno che inverte inf e sup si ottiene la tesi. $\square$

Per il caso di μ, ν generali si veda Villani, Topics on Optimal Transportation.

Teoria della c-dualità

Fissiamo una funzione $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.
Chiamiamo c-affine una funzione del tipo

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & c(x,y) + \alpha \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

per fissati $y \in \mathbb{R}^n$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$, oppure una funzione da $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}$ del tipo $y \longmapsto c(x,y) + \beta$ per $y \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$ fissati.

<u>Definizione</u> Data $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, \infty)$, definiamo la funzione c-coniugata, $f^c : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, \infty)$,

$$f^c(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} c(x,y) - f(x).$$

Chiaramente $f(x) + f^c(y) \leq c(x,y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Sopra e nel seguito supponiamo $f \not\equiv -\infty$.
Analogamente $g^c(x) := \inf_{y \in \mathbb{R}} c(x,y) - g(y)$.

<u>Definizione</u> Diciamo che una funzione $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty)$ è c-concava se è un inf di funzioni c-affini del tipo $x \longmapsto c(x,y) + \alpha$ con $(y, \alpha) \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

<u>Osservazione</u> $f \not\equiv -\infty$ è c-concava se e solo se è la c-coniugata di una funzione $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty)$

Infatti, sia f c-concava

$$f(x) = \inf_{(y,\alpha)\in \mathcal{A}} c(x,y) + \alpha .$$

Posto $\mathcal{A}_y = \{\alpha \in \mathbb{R} : (y,\alpha) \in \mathcal{A}\}$ definiamo

$$g(y) = \begin{cases} -\inf\{\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_y\} \\ -\infty \quad \text{se} \quad \mathcal{A}_y = \phi . \end{cases}$$

Allora

$$g^c(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} c(x,y) - g(y)$$

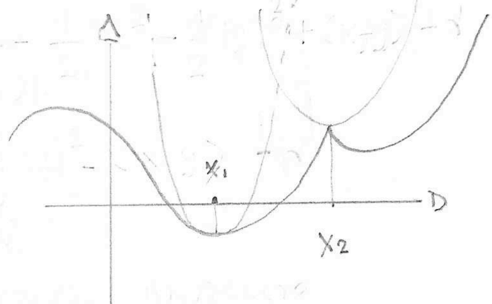
$$= \inf_{(y,\alpha)\in\mathcal{A}} c(x,y) + \alpha \quad = f(x).$$

<u>Osservazione</u> 1) Se $c(x,y) = \langle x,y\rangle$ allora:

f c-concava $\iff f(x) = \inf_{(y,\alpha)\in\mathcal{A}} \langle x,y\rangle + \alpha \iff f$ concava

2) Se $c(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$ allora:

f c-concava $\iff f(x) = \inf_{(y,\alpha)\in\mathcal{A}} \frac{1}{2}|x-y|^2 + \alpha$



3) Se $c(x,y) = |x-y|$ allora:

f c-concava $\iff f(x) = \inf_{(y,\alpha)\in\mathcal{A}} |x-y| + \alpha$

$\iff f$ è 1-Lipschitz.

4) Per altro e il significato di c-concavità è meno evidente.

Data $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty)$, $f \not\equiv -\infty$, è ben definita $f^c : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty)$.
Si definisce allora

$$f^{cc}(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} c(x,y) - f^c(y).$$

<u>Teorema</u> Vale sempre $f^{cc} \geq f$ con "=" se e solo se f è c-concava.

Vedi [ABS] pag. 30.

<u>Definizione</u> Siano $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty)$ e $x \in \mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq -\infty\}$.
Il c-superdifferenziale di f in x è

$$\partial^c f(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n ;\ f(z) \leq f(x) - c(x,y) + c(z,y) \text{ per ogni } z \in \mathbb{R}^n \}.$$

Con $c(x,y) = \langle x, y \rangle$ la disuguaglianza diventa $f(z) \leq f(x) + \langle z - x, y \rangle$.

<u>Esercizio</u> $f(x) + f^c(y) = c(x,y) \iff y \in \partial^c f(x)$

<u>Teorema</u> Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ c-ciclicamente monotono.
Allora esiste una funzione c-concava $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty)$, $f \not\equiv -\infty$, tale che $\Gamma \subset \text{grafico}(\partial^c f)$.

La dimostrazione è identica al caso convesso standard.

Condizioni sufficienti di ottimalità

Teorema Siano μ e ν misure di Borel unitarie su $\mathbb{R}^n$ e sia $c: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ semicontinua inferiormente.

Supponiamo che:

1) $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ è concentrata su un insieme c-ciclicamente monotono $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
2) Esistono $a \in L^1(\mathbb{R}^n;\mu)$ e $b \in L^1(\mathbb{R}^n;\nu)$ tali che $c(x,y) \leq a(x) + b(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Allora π è un minimo per il Problema di Kantorovic.

Dimostrazione. Siccome Γ è c-ciclicamente monotono allora esiste una funzione c-concava $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty)$ con $f \not\equiv -\infty$ tale che $\Gamma \subset \partial^c f$. Inoltre sappiamo che $y \in \partial^c f(x)$ se e solo se $f(x) + f^c(y) = c(x,y)$.

Supponiamo preliminarmente che $f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mu)$ e che $f^c \in L^1(\mathbb{R}^n;\nu)$. In questo caso, per ogni $\bar{\pi} \in \Pi(\mu,\nu)$ si ha

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\bar{\pi} &\overset{\text{def. di } f^c}{\geq} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \left(f(x) + f^c(y)\right) d\bar{\pi} = \\
&\overset{f,\, f^c \in L^1}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} f^c(y)\, d\nu \\
&\overset{\pi \in \Pi(\mu,\nu)}{=} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \left(f(x) + f^c(y)\right) d\pi \\
&\overset{f + f^c = c \ \pi\text{-q.o.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi .
\end{aligned}
$$

L'ultimo conto mostra anche che $\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi < \infty$.

Omettiamo la prova che f è di Borel e che f^c è ν-misurabile.

Fissiamo $y \in \mathbb{R}^n$ tale che $b(y) < \infty$ e $f^c(y) > -\infty$ (vedere che esiste). Integrando

$$\begin{aligned} f(x) &\le c(x,y) - f^c(y) \\ &\le a(x) + b(y) - f^c(y) \end{aligned}$$

prendendo la parte positiva di f:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^+(x)\, d\mu \le \int_{\mathbb{R}^n} |a(x)|\, d\mu + b(y) - f^c(y) < \infty.$$

In modo analogo $(f^c)^+ \in L^1(\mathbb{R}^n; \nu)$. Poi usando $c \ge 0$:

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x,y)\, d\pi = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x) + f^c(y)\, d\pi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} f^c(y)\, d\nu$$

e questo implica anche che $f^- \in L^1(\mathbb{R}^n; \mu)$ ed $(f^c)^- \in L^1(\mathbb{R}^n; \nu)$.

$\square$

Esaminiamo il caso $n = 1$. Sia $c(x,y) = h(y-x)$, dove $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa.

<u>Esercizio</u> Se $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è c-ciclicamente monotono, allora Γ è monotono:

$$\left.\begin{array}{c} (x,y),\ (x',y') \in \Gamma \\ x < x' \end{array}\right\} \Rightarrow y \le y'.$$

Usare la stretta convessità di h.

<u>Esercizio</u> Sia $c : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della forma $c(x,y) = h(y-x)$ dove $h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, e sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Provare che:

i) h convessa e Γ monotono $\Rightarrow$ Γ c-ciclicamente monotono.

ii) h strettamente convessa e Γ c-ciclicamente monotono $\Rightarrow$ Γ monotono.

Proviamo i). É sufficiente provare

$$\sum_{i=1}^{N} h(y_i - x_i) \leq \sum_{i=1}^{N} h(y_{\sigma(i)} - x_i)$$

$$(x_i, y_i) \in \Gamma, \quad x_1 \leq \dots \leq x_N \quad e \quad y_1 \leq \dots \leq y_N$$

quando $N = 2$ e σ è una permutazione che scambia due elementi. Precisamente:

$$h(y_1 - x_1) + h(y_2 - x_2) \leq h(y_2 - x_1) + h(y_1 - x_2)$$

con $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$. Risolviamo in $t \in \mathbb{R}$:

$$y_1 - x_1 = t(y_2 - x_1) + (1-t)(y_1 - x_2).$$

Si trova

$$t = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1 + x_2 - x_1} \in [0,1].$$

Risolviamo in $s \in \mathbb{R}$

$$y_2 - x_2 = s(y_2 - x_1) + (1-s)(y_1 - x_2),$$

Si trova

$$s = \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_1 + x_2 - x_1} = 1 - t \in [0,1].$$

Dalla convessità di h si conclude. $\square$

Teorema Siano μ, ν due misure di Borel unitarie su $\mathbb{R}$ con μ senza atomi. Sia $c : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ della forma $c(x,y) = h(y-x)$ con $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e tale che

$$\inf\left\{ \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} c(x,y)\, d\pi \; ; \; \pi \in \Pi(\mu,\nu) \right\} < \infty .$$

Allora il riarrangiamento monotono $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T_{\#}\mu = \nu$, è una soluzione del problema di Monge

$$\min\left\{ \int_{\mathbb{R}} c(x,Tx)\, d\mu \; ; \; T \in \mathcal{T}(\mu,\nu) \right\}.$$

Se h è strettamente convessa, T è l'unica soluzione.

Dim. $\Gamma = gr(T) \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ è monotono e dunque c-ciclicamente monotono. Dunque $\pi = (Id \times T)_{\#}\mu$ è concentrata su un insieme c-ciclicamente monotono.

Dettagli omessi.

$\square$