

## Teorema di Brenier, Knott-Smith

Inolchiamo con  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  le misure di Borel su  $\mathbb{R}^n$   $\mu$   
con  $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$  (misure di probabilità, misure unitarie).

Inolchiamo con  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$  le misure  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  tali che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 d\mu < \infty,$$

"secondo momento finito".

Fissiamo la funzione di costo quadratico

$$c(x, y) = \frac{1}{2} |x - y|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Se  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$  e  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ , allora

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x - y|^2 d\pi \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (|x|^2 + |y|^2) d\pi =$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 d\mu(x) + 2 \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 d\nu(y) < \infty;$$

il funzionale costo è sempre finito.

Teorema (Brenier, Knott-Smith) Siano  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$

e supponiamo che  $\mu \ll \mathcal{L}^n$ .

1) Il problema di Monge

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |x - T(x)|^2 d\mu(x) : T \in \mathcal{T}(\mu, \nu) \right\}$$

ha una soluzione unica ed è della forma

$T = \nabla \varphi$  dove  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$  è una funzione  
convessa  $\downarrow$  e sci che è differenziabile  $\mu$ -q.o.

- 2) Sia  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$  una funzione convessa, semi continua inferiormente tale che sia differenziabile  $\mu$ -q.o. con  $|\nabla \varphi| \in L^2(\mathbb{R}^2; \mu)$ . Allora  $T = \nabla \varphi$  è soluzione del problema di Monge fra  $\mu$  e  $\nu = T\# \mu$ .
- 3) Sia anche  $\nu \ll \mathcal{L}^n$  e sia  $S \in \mathcal{T}(\nu, \mu)$  la soluzione del problema di Monge. Allora  $S \circ T = \text{Id}$   $\mu$ -q.o. e  $T \circ S = \text{Id}$   $\nu$ -q.o..

Dim 1) Il problema di Kantorovic

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x-y|^2 d\pi : \pi \in \Pi(\mu, \nu) \right\}$$

ha una soluzione  $\pi$  (Teorema generale di esistenza).

Per le condizioni necessarie di ottimalità  $\pi$  è concentrata su  $\Gamma \subset \text{gr}(\partial^c \varphi)$  dove  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty)$  è una funzione c-concava,  $\varphi \not\equiv -\infty$ . Sappiamo che

$$(x, y) \in \text{gr}(\partial^c \varphi) \Leftrightarrow \varphi(x) + \varphi^c(y) = c(x, y) = \frac{1}{2} |x-y|^2$$

dove  $\varphi^c$  è la c-coniugata di  $\varphi$ . Inoltre, posto

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} |x|^2 - f(x), \text{ sappiamo che}$$

$$\varphi \text{ c-concava } \Leftrightarrow \varphi \text{ convessa.}$$

$$\varphi \not\equiv -\infty \quad \varphi \not\equiv +\infty$$

Il dominio  $\text{dom}(\varphi) \subset \mathbb{R}^n$  è convesso e  $\mu(\partial \text{dom}(\varphi)) = 0$  perché  $\mu \ll \mathcal{L}^n$ . Anche  $A = \text{int}(\text{dom}(\varphi))$  è convesso e  $\varphi$  è differenziabile q.o. in  $A$  (Teorema di Rademacher).

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \varphi^c(y) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} c(x, y) - \varphi(x) \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} |x|^2 + \frac{1}{2} |y|^2 - \langle x, y \rangle - \frac{1}{2} |x|^2 + \varphi(x) \\ &= \frac{1}{2} |y|^2 - \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle - \varphi(x) = \frac{1}{2} |y|^2 - \varphi^*(y) \end{aligned}$$

Dunque  $(x, y) \in \text{gr}(\partial f) \Leftrightarrow \varphi(x) + \varphi^*(y) = \langle x, y \rangle \Leftrightarrow y \in \partial \varphi(x)$ .  
 Ma  $\mu \ll \nu$ , si ha  $\partial \varphi(x) = \{\nabla \varphi(x)\}$  e dunque  $y = \nabla \varphi(x) := T(x)$ .

Proviamo l'unicità. Sia  $\bar{T} \in \mathcal{T}(\mu, \nu)$  una seconda soluzione (minimo di Monge). Allora  $\bar{\pi} = (\text{Id} \times \bar{T}) \# \mu$  è un minimo di Kantorovic. La combinazione convessa

$$\bar{\bar{\pi}} = \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \bar{\pi} \in \mathcal{T}(\mu, \nu)$$

è ancora un minimo. Quindi è indotta da una mappa di trasporto  $\bar{T} \in \mathcal{T}(\mu, \nu)$  ( $\bar{\pi}$  è concentrata nel grafico di  $\bar{T}$ ). Questo implica che  $T = \bar{T} \mu \ll \nu$ .

2) Sia  $\nu = (\nabla \varphi) \# \mu = T \# \mu$ . Per la formula di cambio di variabile  $(\pi = (\text{Id} \times T) \# \mu)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 d\nu = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |y|^2 d\pi = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi(x)|^2 d\mu < \infty.$$

Quindi  $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ . La misura  $\pi$  è concentrata in  $\text{gr}(\partial \varphi)$ , che è  $c$ -clicamente monotono. Inoltre per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$  si ha

$$c(x, y) \leq 2|x|^2 + 2|y|^2$$

$$\text{con } |x|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n; \mu)$$

$$\text{e } |y|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n; \nu).$$

L'ottimalità segue dal teorema sulle evoluzioni sufficienti.

3) Esercizio.

□

Esempio di non esistenza di trasporto ottimo

In  $\mathbb{R}^2$  consideriamo gli insiemi  $A = \{0\} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ ,  $B = \{1\} \times [0,1]$  e  $C = \{-1\} \times [0,1]$ . Definiamo le misure

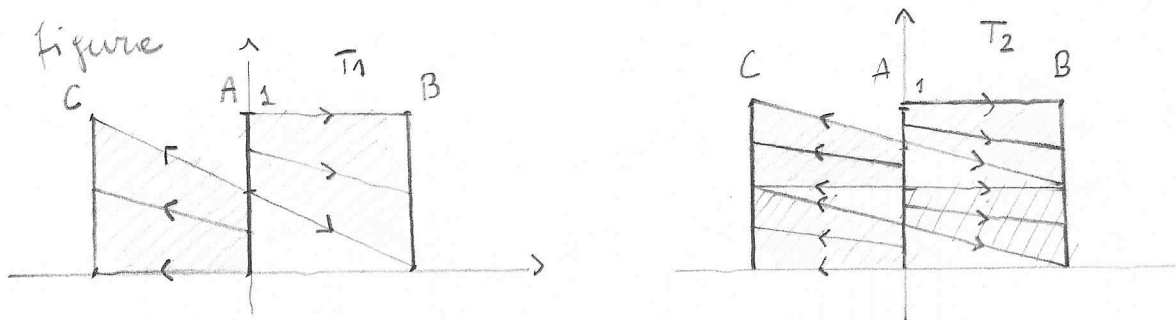
$$\mu = H^1 \llcorner A \quad \text{e} \quad \nu = \frac{1}{2} (H^1 \llcorner B + H^1 \llcorner C).$$

Vogliamo vedere che il problema di Monge

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |Tx - x|^2 d\mu \mid T \in \mathcal{T}(\mu, \nu) \right\}$$

non ha soluzione. Consideriamo le mappe  $T_1, T_2 : A \rightarrow B \cup C$

in figure



Per  $n \in \mathbb{N}$  la costruzione di  $T_n : A \rightarrow B \cup C$  è naturale e chiaramente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T_n x - x|^2 = 1 \quad \text{per } x \in A.$$

Decidiamo che, essendo  $T_n \in \mathcal{T}(\mu, \nu)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |Tx - x|^2 d\mu \mid T \in \mathcal{T}(\mu, \nu) \right\} = \frac{1}{2}.$$

Se  $T \in \mathcal{T}(\mu, \nu)$  fosse un minimo si dovrebbe avere  $|Tx - x| = 1$  per  $\mu$ -q.o.  $x \in A$ . Il vincolo  $T \in \mathcal{T}(\mu, \nu)$  non può essere rispettato.

Esercizio Descrivere il minimo di Kantorovic.



Esercizio Siano  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  gli insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$$

e consideriamo le misure

$$\mu = \frac{1}{\pi} \mathcal{L}^2 \llcorner A \quad \text{e} \quad \nu = \frac{1}{3\pi} \mathcal{L}^2 \llcorner B,$$

Calcolare la soluzione del problema di Monge

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_A |\tau x - x|^2 d\mu : \tau \in \mathcal{T}(\mu, \nu) \right\}.$$

## Funzioni convesse in $\mathbb{R}^n$

Vogliamo capire le proprietà differenziali delle funzioni convesse in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ .

Sia dunque  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ \forall t \in [0, 1].$$

Siano  $B_r \subset B_R$  due palle concentriche di raggio  $0 < r < R$ .

Primo esercizio: per  $x, y \in B_r$  si ha:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \frac{\max_{B_R} f - \min_{B_R} f}{R - r}.$$

Quindi  $f$  è localmente Lipschitziana.

Per il Teorema di Rademacher  $f$  è Fréchet-differenziabile  $\mathcal{L}^n$ -q.o.

Teorema Se  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è Lipschitz allora è differenziabile quasi ovunque.

È una conseguenza del Teorema di Lebesgue.

Teorema Se  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è monotona ( $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$ ) allora  $\varphi'(x)$  esiste  $\mathcal{L}^1$ -q.o. (ad es.)

Idea: l'insieme delle  $x \in (0, 1)$

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} \neq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \dots$$

oppure

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \dots \neq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \dots$$

oppure i limiti esistono, sono  $=$ , ma valgono  $\pm \infty$  ha misura nulla. Si usa: "Teorema di ricoprimento"

Poi si usa il Teorema di Jordan:  $\varphi \in BV([a, b]) \Rightarrow$

$\varphi =$  differenza di funzioni monotone.

Ma  $Lip([a, b]) \subset BV([a, b])$ , di più:  $\varphi \in Lip([a, b]) \Rightarrow$

$\varphi =$  differenza di Lipschitz monotone.

Passiamo ad  $\mathbb{R}^n$ , Dato  $N \subset \mathbb{R}^n$  con coordinate  $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  e sezioni

$$N_{x'} = \{x_n \in \mathbb{R} \mid (x', x_n) \in N\}.$$

Per Fubini-Tonelli:

$$\mathcal{L}^n(N) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}^1(N_{x'}) = 0 \text{ per } \mathcal{L}^{n-1}\text{-q.o. } x' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Corollario Se  $f: \mathbb{R}^n \xrightarrow{Lip} \mathbb{R}$  allora le derivate parziali

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

esistono per ogni  $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$  con  $\mathcal{L}^n(N) = 0$ .

Poi si mostra che, fissato  $v \in \mathbb{R}^n$ , le derivate direzionali

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

esistono per  $\mathcal{L}^n$ -q.o.  $x \in \mathbb{R}^n$  (l'insieme eccezionale  $N$  cambia),

e inoltre  $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$ .

Preso  $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \theta(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\theta(x-tv) - \theta(x)}{t} dx$$

Con  $t \rightarrow 0$  e convergenza dominata:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial v}(x) \theta(x) dx &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \theta}{\partial v}(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \langle \nabla \theta(x), v \rangle dx \\ &= - \sum_{i=1}^n v_i \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \theta(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(x), v \rangle \theta(x) dx. \end{aligned}$$

Il che si segue.

Si prende ora  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , con  $|v_k| = 1$ , densa nella sfera unitaria. Esiste  $N \subset \mathbb{R}^n$  di misura nulla tale che

$$\frac{\partial f}{\partial v_k}(x) = \langle \nabla f(x), v_k \rangle \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^n \setminus N, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ora useremo in modo cruciale il fatto che la sfera unitaria è compatta. Fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $v_1, \dots, v_m$  sono  $\varepsilon$ -densi nella sfera.

Ora

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y-x \rangle}{|x-y|} &= \frac{f(x+v_k|x-y|) - f(x) - \langle \nabla f(x), v_k \rangle |x-y|}{|x-y|} + \\ &+ \frac{f(y) - f(x+v_k|x-y|)}{|x-y|} \\ &+ \langle \nabla f(x), v_k - \frac{y-x}{|y-x|} \rangle \\ &= \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \end{aligned}$$

Dove ;

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \textcircled{1} &= \frac{\partial f}{\partial v_k}(x) - \langle \nabla f(x), v_k \rangle = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{uniformemente} \\ \text{in } k \in \{1, \dots, m\} \end{array} \right) \\ |\textcircled{2}| &\leq \overset{\text{Lip}(f)}{L} \left| \frac{y-x}{|y-x|} - v_k \right| < \varepsilon \quad \text{su scelta di } k \in \{1, \dots, m\} \\ |\textcircled{3}| &\leq |\nabla f(x)| \left| v_k - \frac{y-x}{|y-x|} \right| \leq C_n \text{Lip}(f) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Passiamo ora alle derivate seconde. Ripartiamo da qui:  
se  $f$  è convessa, allora esiste  $\nabla^2 f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ .

Ora facciamo questa premessa, sia  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compatto limitato  
e sia  $T: C^1(K) \rightarrow \mathbb{R}$  lineare e positivo:

$$\varphi \geq 0 \quad \Rightarrow \quad T(\varphi) \geq 0,$$

Allora per ogni  $\varphi \in C^1(K)$  si ha  $T(\|\varphi\|_{\infty} - \varphi) \geq 0$   
e quindi

$$|T(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{\infty} T(1),$$

ovvero  $T$  è limitato in  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Per densità si ottiene



$T: C(K) \rightarrow \mathbb{R}$  lineare e limitato. Dunque esiste una misura di Borel finita  $\mu \geq 0$  tale che

$$T(\varphi) = \int_{\substack{\mathbb{R}^n \\ (K)}} \varphi(x) d\mu.$$

Sia  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convessa e regolarizziamola:

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y) f(y) d\mu, \quad \varepsilon > 0$$

con  $\chi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  nucleo di regolarizzazione etc.

Allora  $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  è ancora convessa.

Sia  $v \in \mathbb{R}^n$  fisso e consideriamo  $T_{v,\varepsilon}: C_c^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T_{v,\varepsilon}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle H(f_\varepsilon) v, v \rangle \varphi dx \geq 0 \quad \forall \varphi \geq 0 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} v_i v_j \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \varphi dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} v_i v_j \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \end{aligned}$$

Passando al limite con  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  e usando  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  riesco a vedere che  $T_v: C_c^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $T_v$  definito

$$T_v(\varphi) = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx$$

verifica  $\varphi \geq 0 \Rightarrow T_v(\varphi) \geq 0$ , quindi esiste una

misura di Radon  $\mu_\nu$  su  $\mathbb{R}^n$  tale che

$$T_\nu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu_\nu.$$

Con la scelta (prima  $\nu = e_i$  e poi  $\nu = e_i + e_j$ ) mi accorgo che

$$\mu_\nu = \sum_{i,j=1}^n \nu_i \nu_j \mu_{ij}$$

con  $\mu_{ij}$  misure di Radon. Siccome  $\frac{\partial^2 f \in \mathbb{R}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f \in \mathbb{R}}{\partial x_j \partial x_i}$  deduco che  $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ .

Teorema Se  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa allora esistono misure di Radon  $\mu_{ij}$  con  $\mu_{ij} = \mu_{ji}$  tali che

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu_{ij}$$

per  $i, j = 1, \dots, n$ .

Ora ricordiamo che una misura di Borel  $\mu$  su  $\mathbb{R}^n$  (loc. finita) si può decomporre come

$$\mu = \mu^{ac} + \mu^\perp$$

con  $\mu^{ac} \ll \mathcal{L}^n$  e  $\mu^\perp$  concentrata su  $N \subset \mathbb{R}^n$  con  $\mathcal{L}^n(N) = 0$ .

Inoltre il limite

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_n r^n} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu^{ac}(B_r(x))}{\omega_n r^n}$$

esiste  $\mathcal{L}^n$ -q.o., ed inoltre  $\mu^{ac} = f \mathcal{L}^n$  con  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  (Teorema di Radon-Nikodym).

Ritornando alle misure  $\mu_{ij}$  avremo

$$\mu_{ij} = f_{ij} \mathcal{L}^m + \mu_{ij}^{\perp} \quad \text{con } f_{ij} = f_{ji} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$$

Si possono definire le derivate seconde di  $f$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := f_{ij}, \quad Hf = (f_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \quad \text{matrice Hessiana}$$

Teorema (Alexandrov) Sia  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convessa.

Allora per  $\mathcal{L}^n$ -q.o.  $x \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x)(y-x), y-x \rangle + o(|x-y|^2)$$

dove  $Hf = (f_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  è la matrice Hessiana di  $f$ .

Prova omessa, vedi ad es. Evans-Gariepy.



## Disuguaglianza isoperimetrica

(centrata in 0)

Sia  $B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , una palla Euclidea aperta di raggio 1 e misura

$\mathcal{L}^n(B) = \omega_n$ . Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  un insieme aperto tale che

$\mathcal{L}^n(A) = \omega_n$  e  $\partial A$  è di classe  $C^1$ .

Poniamo  $\mu = \frac{\mathcal{L}^n \llcorner A}{\omega_n}$  e  $\nu = \frac{\mathcal{L}^n \llcorner B}{\omega_n}$ , il problema di

Mostrarci

$$i) \quad \min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |x - Tx|^2 d\mu ; T \in \mathcal{T}(\mu, \nu) \right\}$$

ha una soluzione (unica) della forma  $T = \nabla \varphi$  con  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  convessa. In particolare  $B \subset \text{dom}(\varphi)$  e  $T(A) = B$ , a meno di misura nulla. Supponiamo che

i)  $T \in C^1(A; B)$ ; Noi sappiamo solo che le derivate seconde  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$  esistono  $\mathcal{L}^n$ -q.o. su  $A$  nel senso di Alexandrov.

ii)  $T \in C(\bar{A}; \bar{B})$  con  $T: \partial A \rightarrow \partial B$ . Noi sappiamo solo che  $T \in L^{\infty}_2(A; \mathbb{R}^n)$ .

Per entrare dentro 1) e 2) serve la teoria della regolarità di Caffarelli.

Si come  $T = \nabla \varphi \in \mathcal{T}(\mu; \nu)$  avremo:

$$2) \quad \det(JT(x)) = \det(H(\varphi)(x)) = 1 \quad \forall x \in A$$

con  $H(\varphi) =$  matrice Hessiana di  $\varphi$ .



Abbiamo "provato" questo:

$$6) \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{L}^m(A) = \mathcal{L}^m(B) \\ B \text{ palla} \end{array} \right\} \Rightarrow H^{n-1}(\partial B) \leq H^{n-1}(\partial A).$$

È la proprietà isoperimetrica della palla in  $\mathbb{R}^m$ .

Supponiamo che in 6) valga:  $H^{n-1}(\partial B) = H^{n-1}(\partial A)$ ,

Allora abbiamo = in 4) sia nelle disuguaglianze

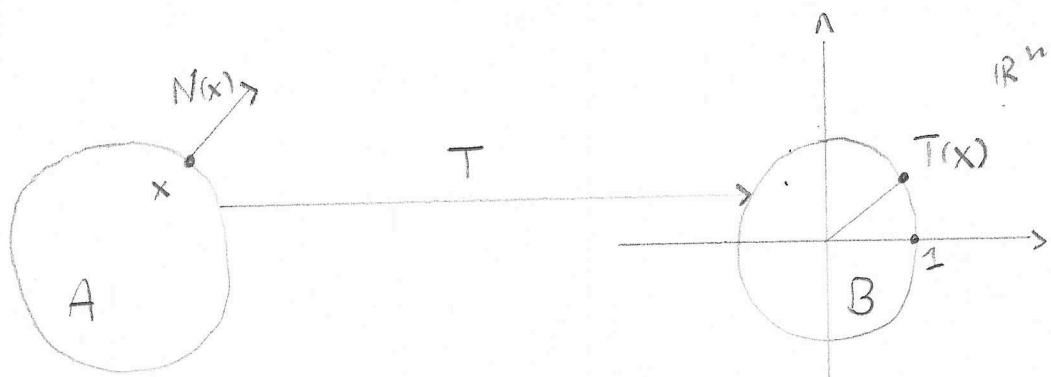
di Cauchy-Schwarz sia nella disuguaglianza

determinante-<sup>traccia</sup> (per ogni punto  $x$ ). Dunque:

$T(x) = N(x)$  per ogni  $x \in \partial A$  e  $JT(x)$  è una

matrice diagonale costante per ogni  $x \in A$ . Dunque

$T$  è una traslazione e  $A$  deve essere una palla.



L'idea di questa dimostrazione è dovuta a Levy-Gromov

che al posto della mappa di Brenier  $T$  usavano

un'altra trasformazione speciale  $T: A \rightarrow B$

nota come "mappa di Knothe".

Mappe di Knothe Sia  $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ ,  $n \geq 2$ , la

palla unitaria e sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  un insieme  $\mathcal{L}^n$ -misurabile tale che  $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(B)$ .

Vogliamo costruire una trasformazione  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $T(A) = B$ , a meno di un insieme di misura nulla.

Consideriamo le due misure  $\mu = \mathcal{L}^n \llcorner A$  e  $\nu = \mathcal{L}^n \llcorner B$ .

Sia  $\text{pr}^1(x) = x_1$  la proiezione sulla prima coordinata e definiamo

$$\mu_1 = \text{pr}_\#^1 \mu \quad \text{e} \quad \nu_1 = \text{pr}_\#^1 \nu.$$

Si come  $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(B)$ , avremo  $\mu_1(\mathbb{R}) = \nu_1(\mathbb{R}) < \infty$ .

In particolare

$$\begin{aligned} \mu_1([t, t+\delta]) &= \text{pr}_\#^1 \mu([t, t+\delta]) \\ &= \mu([t, t+\delta] \times \mathbb{R}^{n-1}) \\ &= \mathcal{L}^2([t, t+\delta] \times \mathbb{R}^{n-1} \cap A) \\ &= \int_{[t, t+\delta] \times \mathbb{R}^{n-1}} \chi_A(x) dx \\ &= \int_t^{t+\delta} \int_{A_{x_1}} d\hat{x}_1 dx_1 \\ &= \int_t^{t+\delta} \mathcal{L}^{n-1}(A_{x_1}) dx_1 \end{aligned}$$

con  $A_{x_1} = \{\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-1} : x = (x_1, \hat{x}_1) \in A\}$  sono le sezioni.

Per  $q, 0, t \in \mathbb{R}$  esiste

$$\frac{d\mu_1}{dx_1}(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\mu_1([t, t+\delta])}{\delta} = \mathcal{L}^{n-1}(A_t).$$

Inoltre  $\mu_1(\{t\}) = \int^m(\{t\} \times A_t) = 0$ , ovvero

$\mu_1$  non ha atomi.

Sappiamo allora che esiste una funzione monotona  $T_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che (il "riarrangiamento monotono")

$$(T_1)_\# \mu_1 = \nu_1.$$

In particolare  $T_1(\text{spt } \mu_1) = \text{spt } \nu_1 = [-1, 1]$ .

Per definizione di push-forward, preso  $[d, \beta] \subset \mathbb{R}$  si ha

$$\nu_1([d, \beta]) = (T_1)_\# \mu_1([d, \beta])$$

$$= \mu_1(T_1^{-1}[d, \beta])$$

$$= \mu_1\left(\left[\underbrace{T_1^{-1}(d)}_a, \underbrace{T_1^{-1}(\beta)}_b\right]\right)$$

supponendo

$T_1$  si può invertire

e quindi

$$\nu_1\left(\left[T_1^{-1}(a), T_1^{-1}(b)\right]\right) = \mu_1([a, b])$$

$$= \int_a^b \int^m(A_{x_1}) dx_1.$$

D'altro canto:

$$\nu_1([T_1 a, T_1 b]) = \nu([T_1 a \times T_1 b \times \mathbb{R}^{n-1}])$$

$$= \int_{T_1 a}^{T_1 b} \int^m(B_{x_1}) dx_1$$

Troviamo la relazione

$$\int_a^b \int^m(A_{x_1}) dx_1 = \int_{T_1 a}^{T_1 b} \int^m(B_{x_1}) dx_1$$

che è in effetti la definizione di  $T_1$ . Derivando, per ogni  $x_1 \in \mathbb{R}$  si trova

$$\mathcal{L}^{n-1}(Ax_1) = \mathcal{L}^{n-1}(B_{x_1}) \frac{dT_1(x_1)}{dx_1}$$

e per  $\mathcal{L}^{n-1}(B_{x_1}) \neq 0$  si trova

$$\frac{dT_1(x_1)}{dx_1} = \frac{\mathcal{L}^{n-1}(Ax_1)}{\mathcal{L}^{n-1}(B_{x_1})}$$

Adesso integriamo la misura  $\mu$  in questo modo:

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_E d\theta_{x_1} \right) d\mu_1$$

per  $E \subset \mathbb{R}^n$  di Borel, dove  $\theta_{x_1}$  è una misura di Borel unitaria su  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Sappiamo che  $d\mu_1 = \mathcal{L}^{n-1}(Ax_1) dx_1$ . Portando de Fubini-Tonelli si trova:

$$\mu(E) = \mathcal{L}^n(E \cap A) = \int_A \chi_E dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{Ax_1} \chi_E d\hat{x}_1 dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{Ax_1} \chi_E d\hat{x}_1 \mathcal{L}^{n-1}(Ax_1) dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_E(x_1, \hat{x}_1) d\theta_{x_1}(\hat{x}_1) \right) d\mu_1(x_1)$$

dove

$$\Theta_{x_1} = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{A_{x_1}}}$$

è una misura di Borel unitaria per ogni  $x_1 \in \mathbb{R}$ .

Facendo la stessa d'integrazione con  $\nu$ , troveremo

$$\nu(E) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_E(x_1, \hat{x}_1) d\zeta_{x_1}(\hat{x}_1) \right) d\nu_1(x_1)$$

dove

$$\zeta_{x_1} = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{B_{x_1}}}$$

Delta  $\text{pr}_2^2 : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{pr}_2^2(x_2 \dots x_n) = x_2$ , si considerano

$$\mu_2 = \text{pr}_2^2 \# \Theta_{x_1} \quad e \quad \nu_2 = \text{pr}_2^2 \# \zeta_{x_1}$$

Sono misure che dipendono dal punto  $x_1$ .

Esiste una funzione  $T_2(x_1, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\left( T_2(x_1, \cdot) \right) \# \mu_2 = \nu_2 \quad T_2(x_1, \cdot) \equiv T_{2, x_1}$$

ovvero

$$\nu_2([a, b]) = \mu_2 \left( \left[ T_{2, x_1}^{-1}(a), T_{2, x_1}^{-1}(b) \right] \right)$$

ovvero (potendo invertire)

$$\begin{aligned} \nu_2 \left( \left[ T_2(x_1, a), T_2(x_1, b) \right] \right) &= \mu_2([a, b]) = \\ &= \Theta_{x_1}([a, b] \times \mathbb{R}^{n-2}) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{A_{x_1}} \cap A_{x_1}} \end{aligned}$$



D'altro canto

$$\nu_2([T_2(x_1, a), T_2(x_1, b)]) = \int_{x_1} ([T_2(x_1, a), T_2(x_1, b)]) \times \mathbb{R}^{n-2}$$

$$= \frac{1}{h^{n-1}(B_{x_1})} \int_{x_1} [T_2(x_1, a), T_2(x_1, b)] \times \mathbb{R}^{n-2} \cap B_{x_1}$$

e si ottiene la relazione

$$\frac{1}{h^{n-1}(A_{x_1})} \int_a^b \int_{x_2} h^{n-2}(A_{(x_1, x_2)}) dx_2 = \frac{1}{h^{n-1}(B_{x_1})} \int_{T_2(x_1, a)}^{T_2(x_1, b)} \int_{x_2} h^{n-2}(B_{(x_1, x_2)}) dx_2$$

e derivando

$$\frac{\int_{x_2} h^{n-2}(A_{(x_1, x_2)}) dx_2}{h^{n-1}(A_{x_1})} = \frac{\int_{x_2} h^{n-2}(B_{(x_1, x_2)}) dx_2}{h^{n-1}(B_{x_1})} \frac{\partial T_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

Per semplicità, supponiamo  $n=2$  e concludiamo qui la costruzione. Si è definita una mappa  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T = (T_1, T_2)$  con  $T_1 = T_1(x_1)$  e  $T_2 = T_2(x_1, x_2)$  tale che  $T(A) = B$ .

Se ben definita, la matrice Jacobiana di  $T$  ha una struttura triangolare

$$JT(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

con  $\frac{\partial T_1}{\partial x_1} \geq 0$  e  $\frac{\partial T_2}{\partial x_2} \geq 0$ .

Questa mappa lavora bene nella dimostrazione della  
 omonuguaglianza isoperimetrica -

