TEORIA DELLE FUNZIONI 2 - Roberto Monti - 2012

Richiami di Teoria della misura

DEF. Una funzione $\mu : P(X) \longrightarrow [0,\infty]$ è una misura esterna su un insieme X se:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(A) \leq \sum_{K=1}^{\infty} \mu(A_K)$ se $A \subset \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K$, con $A, A_K \subset X$.

DEF. Una famiglia di insiemi $\mathcal{A} \subset P(X)$ si dice σ-algebra se:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(iii) $A_K \in \mathcal{A}$ con $K \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K \in \mathcal{A}$.

DEF. Una funzione $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ si dice misura su una σ-algebra $\mathcal{A} \subset P(X)$ se:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(A) = \sum_{K=1}^{\infty} \mu(A_K)$ se $A = \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K$ con $A_K \in \mathcal{A}$ e unione disgiunta.

Ad ogni misura esterna è associata una σ-algebra su cui è una misura.

TEOREMA 1 (Costruzione di Carathéodory) Sia $\mu : P(X) \longrightarrow [0,\infty]$ una misura esterna su un insieme X. Allora la famiglia di insiemi

$$\mathcal{A} = \{ A \subset X : \mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) \text{ per ogni } E \subset X \}$$

è una σ-algebra e $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ è una misura completa.

La dimostrazione è omessa. Cfr [EG] pp. 2-3.

Ricordiamo che una misura $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ è completa se:

$$\mu(A) = 0 \quad e \quad B \subset A \in \mathcal{A} \Rightarrow B \in \mathcal{A} \quad (e\ \mu(B) = 0).$$

DEF. Sia $\mu : P(X) \longrightarrow [0,\infty]$ una misura esterna. Un insieme $A \subset X$ si dice <u>μ-misurabile</u> se $A \in \mathcal{A}$, la σ-algebra di μ.

Sia ora $X = \mathbb{R}^n$ con la topologia standard, $n \geq 1$.

DEF. La σ-algebra di Borel di $\mathbb{R}^n$ è la più piccola σ-algebra di $\mathbb{R}^n$ che contiene gli aperti.

Indicheremo con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la σ-algebra di Borel di $\mathbb{R}^n$.

DEF.

(i) Una misura esterna $\mu : P(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0,\infty]$ si dice <u>di Borel</u> se $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$;

(ii) Una misura esterna $\mu : P(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0,\infty]$ si dice <u>di Borel regolare</u> se è di Borel e per ogni $A \subset X$ esiste $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tale che $A \subset B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.

(iii) Una misura esterna $\mu : P(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0,\infty]$ si dice <u>di Radon</u> se è di Borel regolare e $\mu(K) < \infty$ per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$.

<u>DEF.</u> Sia μ una misura esterna su un insieme X e sia $A \subset X$ un insieme. La misura esterna $\mu \llcorner A : P(X) \longrightarrow [0,\infty]$

$$\mu \llcorner A \, (B) = \mu(A \cap B)$$

si dice <u>misura (esterna) restrizione</u> di μ ad A.

<u>TEOREMA</u> 2 Sia μ una misura esterna di Borel regolare su $\mathbb{R}^n$ e sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme μ-misurabile tale che $\mu(A) < \infty$. Allora $\mu \llcorner A$ è una misura di Radon.

PROVA. Se $K \subset \mathbb{R}^n$ è un compatto, $\mu \llcorner A \, (K) = \mu(K \cap A) \leq \mu(A) < \infty$.

Siccome μ è di Borel regolare esiste $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tale che $A \subset B$ e $\mu(A) = \mu(B)$. Allora per ogni $C \subset \mathbb{R}^n$ si ha

$$\mu \llcorner B \, (C) = \mu(B \cap C) = \mu(B \cap C \cap A) + \mu((B \cap C) \setminus A)$$

perché A è μ-misurabile. Dunque

$$\mu \llcorner B \, (C) \leq \mu(C \cap A) + \mu(B \setminus A) =$$

$$\overset{(*)}{=} \mu(C \cap A) + \mu(B) - \mu(A) = \mu(C \cap A)$$

$$= \mu \llcorner A \, (C) \leq \mu \llcorner B \, (C).$$

Abbiamo usato in (*) il fatto che A è μ-misurabile.

Deduciamo che $\mu \llcorner A = \mu \llcorner B$. Possiamo dunque supporre che $A = B$ sia di Borel. In particolare, $\mu \llcorner A$ è di Borel.

Proviamo che $\mu \llcorner A$ è di Borel regolare. Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ e cerchiamo $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tale che $C \subset D$ e $\mu \llcorner A(C) = \mu \llcorner A(D)$.

Esiste $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tale che $C \subset E$ e $\mu(C) = \mu(E)$.

L'insieme

$$D = (C \cap A) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$$

è Boreliano e

$$C = (C \cap A) \cup (C \setminus A) \subset (C \cap A) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) = D.$$

Inoltre si ha

$$\mu \llcorner A(D) = \mu(A \cap D) = \mu(A \cap C) = \mu \llcorner A(C).$$

$\square$

<u>TEOREMA 3</u> (Approssimazione da dentro con chiusi, da fuori con aperti)

(1) Sia μ una misura (esterna) di Borel su $\mathbb{R}^n$ e sia $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ con $\mu(B) < \infty$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subset B$ tale che $\mu(B \setminus C) < \varepsilon$.

(2) Sia μ una misura (esterna) di Radon e sia $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che $B \subset A$ e $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$.

PROVA. (1) La misura $\nu = \mu \llcorner B$ è di Borel in quanto $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre è finita.

Definiamo

$$\mathcal{F} = \left\{ A \subset \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} A \text{ è } \mu\text{-misurabile e } \forall \varepsilon > 0 \text{ esiste} \\ C \subset A \text{ chiuso con } \nu(A \setminus C) < \varepsilon \end{array} \right\}.$$

$\mathcal{F}$ contiene tutti i chiusi.

- $\mathcal{F}$ è chiusa per intersezioni numerabili:

$$A_k \in \mathcal{F} \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow A := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}.$$

Infatti per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C_k \subset A_k$ chiuso tale che $\nu(A_k \setminus C_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Quindi con $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$, che è chiuso,

$$\nu(A \setminus C) = \nu(A \cap (\mathbb{R}^n \setminus C)) =$$

$$= \nu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus C_k\right)\right) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A \setminus C_k\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \setminus C_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k \setminus C_k) <$$

$$< \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

- $\mathcal{F}$ è chiusa per unioni numerabili:

$$A_k \in \mathcal{F} \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}.$$

Siano C_k come sopra. Siccome $\nu(A) < \infty$:

$$\lim_{h \to \infty} \nu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{h} C_k\right) = \nu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) =$$

$$= \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus C_k)\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k \setminus C_k) < \varepsilon$$

Quindi esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $\nu(A \setminus \underbrace{\bigcup_{k=1}^{h} C_k}_{\text{chiuso}}) < \varepsilon$.

Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è unione numerabile di chiusi.
Segue che $\mathcal{F}$ contiene gli aperti.

Dunque, la famiglia

$$\mathcal{G} = \{ A \in \mathcal{F} : \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{F} \}$$

contiene gli aperti.

Proviamo che $\mathcal{G}$ è una σ-algebra. Siano $A_K \in \mathcal{G}$, con $K \in \mathbb{N}$. Allora $\bigcup_{K=1}^{\infty} A_K \in \mathcal{F}$ e inoltre

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K = \bigcap_{K=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus A_K}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}.$$

Abbiamo provato che $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{G}$ e quindi $B \in \mathcal{G} \subsetneq \mathcal{F}$.
Questo prova (1). Infatti $\forall \varepsilon > 0$ esiste $C \subset B$ chiuso con

$$\mu(B \setminus C) = \nu(B \setminus C) < \varepsilon$$

(2) Per $K \in \mathbb{N}$ sia $A_K = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < K \}$ aperto.
Siccome $\mu(A_K \setminus B) \le \mu(\bar{A}_K) < \infty$ essendo μ di Radon, per il punto (1) esiste un chiuso $C_K \subset A_K \setminus B$ tale che

$$\mu((A_K \setminus C_K) \setminus B) = \mu((A_K \setminus B) \setminus C_K) < \frac{\varepsilon}{2^K}$$

L'insieme $A = \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K \setminus C_K$ è aperto e inoltre

$$C_K \subset A_K \setminus B \implies A_K \setminus C_K \supset A_K \setminus (A_K \setminus B) = A_K \cap B$$

e quindi

$$B = \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K \cap B \subset \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K \setminus C_K = A.$$

Inoltre

$$\mu(A \setminus B) = \mu\Big(\big(\bigcup_{K=1}^{\infty} A_K \setminus C_K\big) \setminus B\Big) = \mu\Big(\bigcup_{K=1}^{\infty} (A_K \setminus C_K) \setminus B\Big)$$
$$\le \sum_{K=1}^{\infty} \mu((A_K \setminus C_K) \setminus B) < \varepsilon.$$

$\square$

TEOREMA 4 Sia μ una misura esterna di Radon su $\mathbb{R}^n$. Allora:

(1) Per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A) \;;\; A \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto con } E \subset A\};$$

(2) Per ogni insieme μ-misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \;;\; K \subset \mathbb{R}^n \text{ compatto con } K \subset E\}.$$

PROVA. (1) Si può assumere $\mu(E) < \infty$. Se $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ esiste $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto con $E \subset A$ e $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$. Inoltre

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \setminus E) + \mu(A \cap E) \\ &< \varepsilon + \mu(E) \end{aligned}$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Questo prova la tesi.

In generale, siccome μ è di Borel regolare esiste $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tale che $E \subset B$ e $\mu(E) = \mu(B)$. Allora

$$\begin{aligned} \mu(E) = \mu(B) &= \inf\{\mu(A) \;;\; A \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto con } B \subset A\} \\ &\geq \inf\{\mu(A) \;;\; A \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto con } E \subset A\} \\ &\geq \mu(E) \end{aligned}$$

e dunque si hanno tutti "$=$".

(2) Diamo la prova nel caso $\mu(E) < \infty$. Siccome E è misurabile, $\nu = \mu \llcorner E$ è una misura di Radon (finita). Siccome $\nu(\mathbb{R}^n \setminus E) = 0$ esiste $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto tale che

$$\mathbb{R}^n \setminus E \subset A \quad \text{e} \quad \nu(A) < \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Qui abbiamo usato (1).

L'insieme $C = \mathbb{R}^n \setminus A$ è chiuso e $C \subset E$. Inoltre

$$\mu(E\setminus C) = \nu(\mathbb{R}^n \setminus C) = \nu(A) < \varepsilon .$$

Siccome E è μ-misurabile e $\mu(E) < \infty$

$$\mu(E) - \mu(C) = \mu(E \setminus C) < \varepsilon \Rightarrow \mu(C) > \mu(E) - \varepsilon$$

Questo prova che

$$\mu(E) = \sup\{\mu(C) ; C \subset E , C \text{ chiuso}\}.$$

D'altra parte, per ogni chiuso $C \subset \mathbb{R}^n$ gli insiemi

$$C_K = C \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le K\}, \quad K \in \mathbb{N},$$

sono compatti e

$$\lim_{K\to\infty} \mu(C_K) = \mu\left(\bigcup_{K=1}^{\infty} C_K\right) = \mu(C)$$

Questo prova che

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) ; K \subset \mathbb{R}^n , K \subset E \text{ compatto}\}.$$

La prova nel caso $\mu(E) = \infty$ è lasciata come esercizio.

$\square$

<u>TEOREMA 5 (Costruzione di Carathéodory II)</u> Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\operatorname{dist}(A,B) > 0 \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Allora μ è una misura di Borel.

Ricordiamo che $\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{|x-y| \, ; \, x \in A \text{ e } y \in B\}$.

PROVA. Proviamo che i chiusi sono μ-misurabili.
Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso. Vogliamo provare che

$$\mu(E) \geq \mu(E \cap C) + \mu(E \setminus C)$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$. La disug. "$\leq$" è sempre vera.

Per $k \in \mathbb{N}$ definiamo

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, \operatorname{dist}(x, C) \leq \tfrac{1}{k}\}.$$

Allora

$$\operatorname{dist}(E \setminus C_k, E \cap C) > \frac{1}{k} \Rightarrow \mu(E \setminus C_k) + \mu(E \cap C) = \mu(E \setminus C_k \cup E \cap C) \leq \mu(E)$$

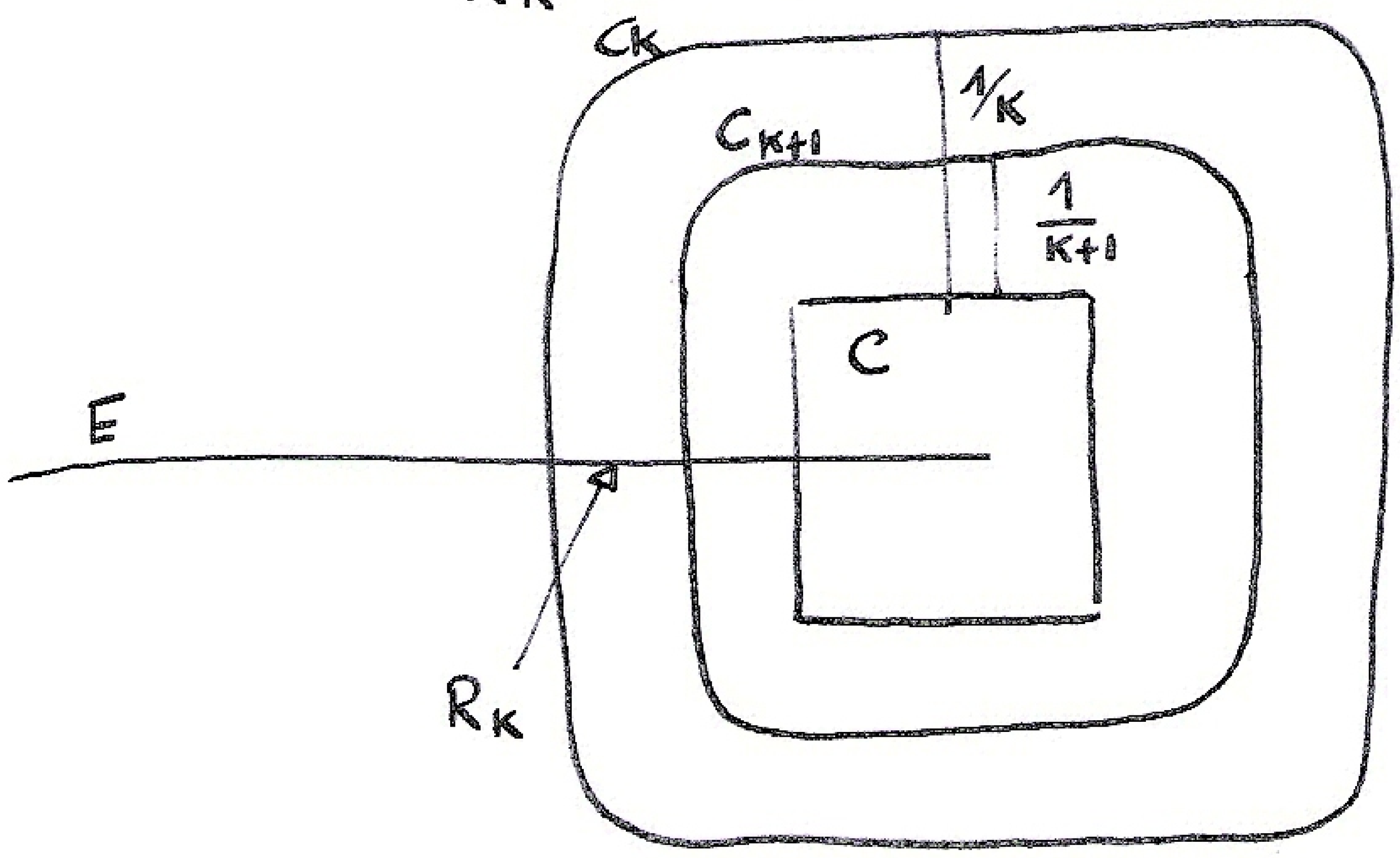
Se proviamo che

$$\lim_{k \to \infty} \mu(E \setminus C_k) = \mu(E \setminus C)$$

abbiamo finito.

Definiamo

$$R_k = E \cap (C_k \setminus C_{k+1})$$



Siccome C è chiuso, per ogni $K \in \mathbb{N}$ si ha

$$C = \bigcap_{h=K}^{\infty} C_h$$

e quindi

$$E \setminus C = E \setminus \bigcap_{h=K}^{\infty} C_h = (E \setminus C_K) \cup \bigcup_{h=K}^{\infty} R_h .$$

Passando alle misure:

$$\mu(E \setminus C_K) \leq \mu(E \setminus C) \leq \mu(E \setminus C_K) + \sum_{h=K}^{\infty} \mu(R_h)$$

Se proviamo che $\lim_{K \to \infty} \sum_{h=K}^{\infty} \mu(R_h) = 0$ abbiamo finito.
É sufficiente provare che

$$\sum_{K=1}^{\infty} \mu(R_K) < \infty .$$

Se $h \neq K$ allora $\operatorname{dist}(R_{2h}, R_{2K}) > 0$. Dunque $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{K=1}^{N} \mu(R_{2K}) = \mu\left(\bigcup_{K=1}^{N} R_{2K}\right) \leq \mu(E) < \infty$$

In modo analogo

$$\sum_{K=0}^{N} \mu(R_{2K+1}) \leq \mu(E) < \infty$$

Segue

$$\sum_{K=1}^{\infty} \mu(R_K) \leq 2\mu(E) < \infty .$$

□