Teoria delle funzioni 2

Esame del 22 giugno 2012

Domanda 1 Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e dati $x_0, x_1 \in K$ supponiamo che esista una curva Lipschitz $\gamma : [0,1] \to K$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Provare che esiste una curva Lipschitz contenuta in K che ha lunghezza minima e che congiunge i punti x_0 e x_1.

Domanda 2 Illustrare in modo coinciso i fatti che si ritengono più significativi sulla teoria degli insiemi di perimetro (localmente) finito in $\mathbb{R}^n$. (max. 1 facciata).

Domanda 3 Sia μ una misura di Borel su $\mathbb{R}$ con queste proprietà: i) $\mu(B + x) = \mu(B)$ per ogni insieme $B \subset \mathbb{R}$ di Borel e per ogni $x \in \mathbb{R}$; ii) $\mu([0,1]) = 1$.

Sia poi $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un nucleo di regolarizzazione standard su $\mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e la misura μ_ε nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
f_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y)\,d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}, \\
\mu_\varepsilon(B) &= \int_B f_\varepsilon(x)\,dx, \quad B \subset \mathbb{R} \text{ di Borel.}
\end{aligned}
$$

i) Provare che $\mu_\varepsilon = \mu$ per ogni $\varepsilon > 0$.
ii) Provare che esiste $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tale che $\mu = f\mathcal{L}^1$.
iii) Provare che $\mu = \mathcal{L}^1$.

2.30 ore a disposizione