

Teoria delle funzioni 2

Esame del 9 luglio 2012

Domanda 1

(i) Provare che ogni funzione $f \in BV(\mathbb{R})$ verifica

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|Df\|(\mathbb{R}),$$

dove $\|Df\|(\mathbb{R})$ è la variazione totale di f su \mathbb{R} .

(ii) Costruire una funzione $f \in BV(\mathbb{R}^2)$ tale che $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Domanda 2 Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \text{dist}(x; K), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrare che $|Df(x)| = 1$ per \mathcal{L}^n -q.o. $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$.

Domanda 3 Illustrare brevemente i teoremi che si ritengono più significativi sulle misure di Radon in \mathbb{R}^n (max. 1 pagina).