

Teoria delle Funzioni 2 – 2011-2012
Programma finale

1. Richiami di teoria della misura. Misure esterne, misure, costruzione di Carathéodory, insiemi misurabili, misure di Radon, misura restrizione, Teorema di approssimazione con chiusi e aperti, Teorema di approssimazione per le misure di Radon, Teorema di Carathéodory 2.

2. Teorema di rappresentazione di Riesz. Enunciato e dimostrazione. Applicazione al teorema di struttura delle funzioni BV.

3. Misure di Hausdorff. Le misure \mathcal{H}^s sono Borel regolari. Altre proprietà delle misure \mathcal{H}^s . Dimensione di Hausdorff di un insieme. Analisi dell'insieme di Cantor. Disuguaglianza isodiametrica. Teorema $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$.

4. Teorema di Rademacher. Richiami. Lunghezza di curve in spazi metrici. Differenziabilità di funzioni Lipschitz in spazi metrici: Teorema di Cheeger-Keith.

5. Differenziazione di misure di Radon in \mathbb{R}^n . Teorema di ricoprimento di Besicovitch. Alcuni Lemmi. Teorema di Radon-Nykodim. Misure ortogonali e assolutamente continue. Teorema di decomposizione. Decomposizione della derivata di funzioni BV. Alcuni esempi.

6. Metodo diretto del Calcolo delle Variazioni. Discussione generale del metodo: compattezza e semicontinuità inferiore. Esempio: il problema dell'ostacolo.

7. Misure di Radon. Teorema di caratterizzazione della convergenza debole per le misure di Radon. Teorema sulla compattezza debole per le misure di Radon. Compattezza debole in L^p .

8. Funzioni BV. Semicontinuità inferiore. Teorema di approssimazione. Definizione di De Giorgi di BV. Teorema di compattezza. Disuguaglianza di Poincarè. Teorema di Traccia e Teorema di estensione.

9. Buone proprietà delle funzioni BV. Insieme di discontinuità approssimata. Teorema di struttura. Parte di salto e parte di Cantor della derivata di una funzione BV.

10. Insiemi di perimetro finito. Misura perimetro e vettore normale generalizzato. Alcuni esempi. Minimizzare il perimetro con volume fissato. Problema di Plateau debole: esistenza delle soluzioni.

11. Teorema di immersione di Sobolev. Dimostrazione di Gagliardo. Disuguaglianza isoperimetrica non sharp. Disuguaglianza isoperimetrica relativa.

12. Frontiera ridotta. Alcuni lemmi. Stime di densità. Teorema di Blow-up della frontiera ridotta. Teorema di struttura della frontiera ridotta. Teorema di Federer.

13. Formula dell'area. Teorema di decomposizione polare. Jacobiani. Formula di Cauchy-Binet. Formula dell'Area e sua dimostrazione. Esempi ed applicazioni. Equazione delle superfici minime.

14. Formula di Coarea. Enunciato della Formula di Coarea. Esempi ed applicazioni. Disuguaglianza di Sobolev sharp provata tramite formula di coarea e disuguaglianza isoperimetrica.

15. Disuguaglianza di Brunn-Minkowski. Contenuto di Minkowski. Una dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica con costante esatta. Enunciato e dimostrazione della disuguaglianza di Brunn-Minkowski.

16. Riarrangiamento di Steiner. Teorema di riarrangiamento per il perimetro. Dimostrazione moderna della disuguaglianza isoperimetrica con discussione del caso dell'uguaglianza.

17. Riarrangiamento di Schwarz. Caso delle funzioni Lipschitz. Riarrangiamento in $W^{1,p}$. Applicazione al problema della membrana con frequenza fondamentale minima.

18. Cenni alla disuguaglianza isoperimetrica quantitativa. Enunciato del Teorema di Fusco-Maggi-Pratelli.

Per il programma dettagliato fanno fede gli appunti del corso messi in rete. Parte integrante del programma sono anche i Fogli di esercizi 1-5 messi in rete.

Padova 14 giugno 2012

Roberto Monti