ESERCIZIO. Sia μ una misura di Borel in $\mathbb{R}$ tale che:

(i) $\mu(B+x) = \mu(B)$ per ogni insieme $B \subset \mathbb{R}$ di Borel e per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\mu([0,1]) = 1$.

Sia poi $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ un nucleo di regolarizzazione standard su $\mathbb{R}$ e definiamo per ogni $\varepsilon>0$ la funzione $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e la misura di Borel μ_ε su $\mathbb{R}$:

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y)\, d\mu(y), \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\mu_\varepsilon(B) = \int_B f_\varepsilon(x)\, dx, \qquad B \subset \mathbb{R} \text{ di Borel}.$$

(1) Provare che $\mu_\varepsilon = \mu$ per ogni $\varepsilon>0$.

(2) Provare che esiste $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che $\mu = f\mathcal{L}^1$.

(3) Provare che $\mu = \mathcal{L}^1$.

SOLUZIONE.

(1) Osserviamo che μ è di Radon.
Ricordiamo che

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{con} \quad \varphi \in C_c^\infty(-1,1), \ \varphi \geq 0$$

$$\text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = 1.$$

Sia $B \subset \mathbb{R}$ un insieme di Borel :

$$\mu_\varepsilon(B) = \int_B f_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_B(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y)\,d\mu(y)$$

Se B è limitato possiamo usare il Teorema di Fubini-Tonelli :

$$\mu_\varepsilon(B) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_B(x)\, \varphi_\varepsilon(x-y)\,dx\,d\mu(y) \qquad x-y = \xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_B(\xi+y)\, \varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi\,d\mu(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{B-y}(\xi)\, \varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi\,d\mu(y).$$

Ancora con Fubini-Tonelli :

$$\mu_\varepsilon(B) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(\xi) \int_{\mathbb{R}} \chi_{B-y}(\xi)\,d\mu(y)\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(\xi) \int_{\mathbb{R}} \chi_{B-\xi}(y)\,d\mu(y)\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(\xi)\, \mu(B-\xi)\,d\xi$$

Usiamo (i)

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(\xi)\, \mu(B)\,d\xi$$

$$= \mu(B) \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi = \mu(B)$$

Dunque, $\mu_\varepsilon(B) = \mu(B)$ per ogni $B \subset \mathbb{R}$ di Borel limitato. Questo implica che $\mu_\varepsilon = \mu$.

(2) Se $\mathcal{L}^1(B) = 0$ allora $\mu_\varepsilon(B) = \int_B \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 0$.

Quindi $\mu_\varepsilon << \mathcal{L}^1$ e per il punto (1): $\mu << \mathcal{L}^1$.

Dal Teorema di Radon-Nykodim segue l'esistenza di $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che

$$\mu(B) = \int_B f(x)\,dx \quad , \text{ per ogni } B \subset \mathbb{R} \text{ di Borel.}$$

(3) Da $\mu_\varepsilon(B) = \mu(B)$ segue che per ogni $B \subset \mathbb{R}$ di Borel si ha

$$\int_B \big(f(x) - f_\varepsilon(x)\big)\,dx = 0 .$$

Da questo segue che $f(x) = f_\varepsilon(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$.

É facile verificare che $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$.

A meno di ridefinire f su un insieme di misura nulla abbiamo allora $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

La (i) $\mu(B+x) = \mu(B)$ implica che

$$\int_{B+x} f(y)\,dy = \int_B f(y)\,dy \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

ovvero

$$\int_B f(y+x)\,dy = \int_B f(y)\,dy .$$

Questo di nuovo implica che $f(y+x) = f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (usata la continuità di f).

Dunque f è costante $f(x) = K \in \mathbb{R}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Dall'ipotesi (ii):

$$1 = \mu([0,1]) = \int_{[0,1]} f(x)\,dx = K\,\mathcal{L}^1([0,1]) = K.$$

Questo prova che $\mu = \mathcal{L}^1$.

$\square$

<u>COMMENTO</u> Nei gruppi topologici (finito dimensionali) esiste un'unica misura invariante per l'operazione di gruppo (a meno di un fattore moltiplicativo). Tale misura è detta misura di Haar del gruppo.

Dunque: $\mathcal{L}^n$ è la misura di Haar di $\mathbb{R}^n$.

<u>COMMENTO</u> Per rispondere al punto ✱ (2) basta in effetti osservare che $\mu = f_\varepsilon \mathcal{L}^1$ con $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$.