ESERCIZIO

(1) Sia $f \in BV(\mathbb{R})$ una funzione a variazione limitata.
Provare che
$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|Df\|(\mathbb{R}).$$

(2) Costruire una funzione $f \in BV(\mathbb{R}^2)$ tale che $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Soluzione.

(1) Supponiamo dapprima $f \in BV(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$.
Siccome $f \in L^1(\mathbb{R})$ esiste una successione di punti $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{R}$, tali che
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha
$$\left| f(x) - f(x_n) \right| = \left| \int_{x_n}^{x} f'(t)\,dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\,dt = \|Df\|(\mathbb{R})$$

Con $n\to\infty$ si ottiene, per ogni $x \in \mathbb{R}$,
$$|f(x)| \leq \|Df\|(\mathbb{R}),$$
e quindi $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|Df\|(\mathbb{R})$.

Sia ora $f \in BV(\mathbb{R})$ e sia $f_\varepsilon = f * \chi_\varepsilon$ la regolarizzazione standard. Sappiamo che
$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = f(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|Df_\varepsilon\|(\mathbb{R}) = \|Df\|(\mathbb{R}),$$
ed in effetti $\|Df_\varepsilon\|(\mathbb{R}) \leq \|Df\|(\mathbb{R})$.

Passando al limite in $\left| f_\varepsilon(x) \right| \leq \| Df_\varepsilon \| (\mathbb{R}) \leq \| Df \| (\mathbb{R})$
otteniamo $|f(x)| \leq \| Df \| (\mathbb{R})$ e quindi la tesi.

(2) Sia $x_n \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di punti tali che $|x_n - x_m| \geq 1$ per $n \neq m$.

Per $n \geq 1$ definiamo $r_n = \dfrac{1}{2^n}$, $c_n = n$ e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{B_{r_n}(x_n)}(x)$$

dove $B_{r_n}(x_n) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x - x_n| < r_n \}$.

Le palle sono disgiunte. Quindi

$$\| f \|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \pi r_n^2$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} < \infty$$

Inoltre, è facile vedere che

$$\| Df \| (\mathbb{R}^2) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} < \infty .$$

Tuttavia $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$ in quanto su $B_{r_n}(x_n)$ f vale $c_n = n \longrightarrow \infty$.

$\square$