Università degli Studi di Padova
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

# Problema Isodiametrico

Relatore: Roberto Monti

Laureando: Alessandro Pirrello

Padova, Settembre 2011

# Indice

# Introduzione

Ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ verifica la *disuguaglianza isodiametrica*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n)\Big(\frac{\text{diam } A}{2}\Big)^n, \tag{1}$$

dove $\mathcal{L}^n$ è la misura di Lebesgue $n$-dimensionale, $\alpha(n)$ è la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$, $\text{diam}(A) = \sup\{||x - y|| : x, y \in A\}$ è il diametro di $A$ e $||x||$ è la norma euclidea di $x \in \mathbb{R}^n$.

Tale risultato prende anche il nome di *disuguaglianza di Bieberbach*. Una delle possibili formulazioni del *problema isodiametrico* in $\mathbb{R}^n$ è la seguente: per quali insiemi $A \subseteq \mathbb{R}^n$ la (1) vale come uguaglianza? Gli insiemi con tale proprietà sono esattamente tutte e sole le palle. In termini variazionali, con un vincolo sulla misura degli insiemi, le palle sono gli insiemi con diametro minimo.

Il presente lavoro ha avuto inizio con lo studio della disuguaglianza isodiametrica in $\mathbb{R}^n$ dimostrata in [3] tramite la simmetrizzazione di Steiner (Capitolo 2). Servendoci unicamente delle nozioni lì introdotte, abbiamo cercato di dimostrare per via elementare che gli unici insiemi isodiametrici in $\mathbb{R}^n$ sono le palle. Purtroppo questo tentativo è rimasto inconcluso. Un insieme isodiametrico $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che il suo simmetrizzato di Steiner è una palla è necessariamente convesso e con spessore costante (Capitolo 3). Si vorrebbe concludere che allora $A$ è una palla. Questo passaggio è rimasto per noi aperto. Si segnala il lavoro [7], in cui R. Howard caratterizza i corpi convessi di $\mathbb{R}^n$ che abbiano spessore costante. Ci siamo quindi dedicati allo studio di una teoria classica, la *disuguaglianza di Brunn-Minkowski* per la misura di Lebesgue (Capitolo 1). Abbiamo seguito una dimostrazione di carattere analitico nella quale sono coinvolte le funzioni di supporto degli insiemi. I testi di riferimento sono stati [2], [5] e [10]. L'attenzione è stata rivolta in particolare alla prova del caso dell'uguaglianza. Esiste una seconda dimostrazione della disuguaglianza di Brunn-Minkowski ed è basata su tecniche di simmetrizzazione degli insiemi. Per una trattazione di questo argomento si rimanda al testo di W. Blaschke [1]. Con la teoria di Brunn-Minkowski è possibile dimostrare la disuguaglianza isodiametrica, caratterizzando gli insiemi che la verificano come uguaglianza. È recente l'articolo [8] di F. Maggi, M. Ponsiglione e A. Pratelli nel quale si fornisce un collegamento tra problema isodiametrico e problema isoperimetrico in $\mathbb{R}^n$ e si dimostrano stime di stabilità per la disuguaglianza isodiametrica.

I Capitoli 4 e 5 sono frutto di un lavoro in collaborazione con il relatore Roberto Monti. Nel Capitolo 4 si affronta in maniera astratta il problema isodiametrico in spazi metrici. Tramite il *Teorema di compattezza* di Blaschke si prova l'esistenza di insiemi isodiametrici in spazi metrici muniti di misure con opportune proprietà. Nel Capitolo 5 si considera lo spazio metrico compatto $\mathbb{S}^{n-1}$ con la distanza euclidea $d$ e la misura di Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}$. Le ipotesi per l'esistenza di insiemi isodiametrici in $(\mathbb{S}^{n-1}, d, \mathcal{H}^{n-1})$ sono soddisfatte. Si dimostra che le palle in $(\mathbb{S}^{n-1}, d, \mathcal{H}^{n-1})$ sono insiemi isodiametrici. Non sappiamo se ci siano insiemi isodiametrici diversi dalle palle.

# Capitolo 1

# Disuguaglianza di Brunn-Minkowski classica in $\mathbb{R}^n$

Dati due insiemi $A, B \subset \mathbb{R}^n$ e due numeri $r, s > 0$, la combinazione $rA + sB$ è l'insieme definito da

$$rA + sB = \{rx + sy : x \in A,\ y \in B\}.$$

La disuguaglianza di Brunn-Minkowski descrive una relazione di concavità tra le misure degli insiemi $A, B$ e $rA + sB$. Indicheremo con $V_n$ la misura di Lebesgue $n$-dimensionale.

## 1.1 La disuguaglianza di Brunn-Minkowski

Diremo che $E \subset \mathbb{R}^n$ è un *insieme elementare* o *plurirettangolo* se esso è costituito da un numero finito $N_E$ di parallelepipedi chiusi non-degeneri con spigoli paralleli agli assi coordinati. Tali parallelepipedi possono avere intersezione non-vuota solo in punti della loro frontiera.

**Teorema 1.1** (Brunn-Minkowski)**.** *Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi misurabili limitati e non-vuoti tali che $A + B$ è misurabile. Allora*

$$V_n^{1/n}(A + B) \geq V_n^{1/n}(A) + V_n^{1/n}(B). \tag{1.1}$$

*L'uguaglianza in* (1.1) *vale solo nei seguenti tre casi: i) $V_n(A + B) = 0$; ii) $V_n(A) > 0$ e $V_n(B) = 0$ con $B = \{x_0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$; iii) $A$ e $B$ sono due insiemi convessi con interno non-vuoto, l'uno il traslato e il dilatato dell'altro.*

La dimostrazione del Teorema 1.1 ricalca quella del Teorema 8.1.1 di [2] e del Teorema 4.1 di [5]. Per il caso dell'uguaglianza *iii*) si segue la trattazione svolta nel Teorema 6.1.1 di [10]. Il passo base per dimostrare la disuguaglianza è il caso in cui $A$ e $B$ sono plurirettangoli. Il caso generale discende per approssimazione. Ogni aperto si può approssimare tramite plurirettangoli, ogni compatto si può approssimare con aperti, e ogni misurabile si può approssimare con compatti. Infatti, poiché la misura di Lebesgue $V_n$ è regolare, per ogni insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ si ha che $V_n(E) = \sup\{V_n(C) : C \subset \mathbb{R}^n \text{ compatto}, C \subset E\}$.

*Osservazione* 1.1. Se gli insiemi $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sono misurabili, in generale l'insieme $A+B$ non è misurabile. Si veda [11] per una dimostrazione di questo risultato.

*Osservazione* 1.2. La misura $V_n^{1/n}$ è positivamente omogenea di grado uno, ovvero $V_n^{1/n}(rA) = rV_n^{1/n}(A)$ per ogni $r > 0$ e ogni misurabile $A$. Siano $r, s > 0$. Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi misurabili limitati e non-vuoti tali che la loro combinazione $rA+sB$ è misurabile. La disuguaglianza (1.1) è equivalente a

$$V_n^{1/n}\big(rA + sB\big) \geq rV_n^{1/n}(A) + sV_n^{1/n}(B).$$

In particolare per ogni $t \in (0,1)$, posto $r = (1-t)$ e $s = t$, si ha che

$$V_n^{1/n}\big((1-t)A + tB\big) \geq (1-t)V_n^{1/n}(A) + tV_n^{1/n}(B). \tag{1.2}$$

La funzione che ad un insieme misurabile $A$ associa la sua misura $V_n^{1/n}(A)$ è concava.

## 1.2 Dimostrazione del Teorema 1.1: il caso della disuguaglianza

a) Siano $A$ e $B$ due singoli parallelepipedi di rispettivi spigoli $a_i, b_i > 0$ con $i = 1, \ldots, n$. La disuguaglianza (1.1) diventa

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{1/n} \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{1/n} + \prod_{i=1}^{n} b_i^{1/n}. \tag{1.3}$$

La (1.3) segue dalla disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica:

$$\Big(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i}\Big)^{1/n} + \Big(\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}\Big)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i} = 1.$$

b) Siano $A, B$ due insiemi elementari e sia $N = N_A + N_B$. La dimostrazione procede per induzione su $N$. Per convenzione $N_E$ indica il minimo numero di parallelepipedi necessari per descrivere l'insieme elementare $E$. Il passo base $N = 2$ è stato mostrato nel punto precedente. Supponiamo che la tesi sia vera per $N \leq (k-1)$ e dimostriamo che vale per $N = k$. Sia $N_A \geq 2$. Poiché la misura di Lebesgue $V_n$ è invariante per traslazioni, non è restrittivo traslare gli insiemi $A$ e $B$. Possiamo supporre che, a meno di traslare $A$ lungo un asse coordinato, un iperpiano coordinato $P$ separi due dei parallelepipedi che costituiscono $A$. Ad esempio, sia $P = \{x_n = 0\}$. Denotiamo $A^+ = A \cap \{x_n \geq 0\}$ e $A^- = A \cap \{x_n \leq 0\}$. Sia $\lambda > 0$ tale che $V_n(A^+) = \lambda V_n(A)$. Trasliamo opportunamente $B$ affinché lo stesso iperpiano $\{x_n = 0\}$ separi $B$ in $B^+, B^-$ e che valga la relazione $V_n(B^+) = \lambda V_n(B)$. Notiamo che $A^+, A^-, B^+, B^-$ sono ancora insiemi elementari e che

$N_{A^+} + N_{B^+} \leq (k-1)$, $N_{A^-} + N_{B^-} \leq (k-1)$. Per essi vale l'ipotesi induttiva. Si ha che

$$\begin{aligned} V_n(A+B) &\geq V_n(A^+ + B^+) + V_n(A^- + B^-) \\ &\geq \big[V_n^{1/n}(A^+) + V_n^{1/n}(B^+)\big]^n + \big[V_n^{1/n}(A^-) + V_n^{1/n}(B^-)\big]^n \\ &= \lambda\big[V_n^{1/n}(A) + V_n^{1/n}(B)\big]^n + (1-\lambda)\big[V_n^{1/n}(A) + V_n^{1/n}(B)\big]^n \\ &= \big[V_n^{1/n}(A) + V_n^{1/n}(B)\big]^n. \end{aligned}$$

Questo prova la disuguaglianza del Teorema 1.1 per insiemi elementari.

c) Siano $A, B$ due aperti limitati. Siano $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset A$ e $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset B$ due successioni di insiemi elementari tali che $V_n(A \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e $V_n(B \setminus B_\varepsilon) \leq \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Vale l'inclusione $A_\varepsilon + B_\varepsilon \subset A + B$. Per il punto b) gli insiemi elementari soddisfano la tesi. Pertanto si ha che

$$\begin{aligned} V_n^{1/n}(A+B) &\geq V_n^{1/n}(A_\varepsilon + B_\varepsilon) \\ &\geq V_n^{1/n}(A_\varepsilon) + V_n^{1/n}(B_\varepsilon) \\ &\geq \big(V_n(A) - \varepsilon\big)^{1/n} + \big(V_n(B) - \varepsilon\big)^{1/n} \end{aligned}$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Mandando $\varepsilon$ a zero si conclude la dimostrazione per il caso di insiemi aperti.

d) Siano $A, B$ due insiemi compatti. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ definiamo $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, A) < \frac{1}{j}\}$ e $B_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, B) < \frac{1}{j}\}$. $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sono successioni decrescenti di aperti tali che $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = A$ e $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j = B$. Anche $\{A_j + B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescenti di aperti, con $\bigcap_{j\in\mathbb{N}}(A_j + B_j) = A + B$. Dalla la continuità dall'alto della misura di Lebesgue segue che $\lim_{j\to\infty} V_n^{1/n}(A_j) = V_n^{1/n}(A)$, $\lim_{j\to\infty} V_n^{1/n}(B_j) = V_n^{1/n}(B)$ e $\lim_{j\to\infty} V_n^{1/n}(A_j + B_j) = V_n^{1/n}(A+B)$. Poiché per il punto *c*) sappiamo che per ogni $j \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$V_n^{1/n}(A_j + B_j) \geq V_n^{1/n}(A_j) + V_n^{1/n}(B_j),$$

facendo tendere $j$ a infinito si ha la tesi.

## 1.3 Risultati preliminari per il caso dell'uguaglianza nel Teorema 1.1

**Definizione 1.1** (Punti di densità di un insieme)**.** Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile. Si definisce *insieme dei punti di densità* di $A$ l'insieme

$$A' = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{V_n\big(A \cap B(x,\varepsilon)\big)}{V_n\big(B(x,\varepsilon)\big)} = 1\Big\},$$

dove $B(x,\varepsilon)$ è la palla di centro $x$ e raggio $\varepsilon$.

Indicheremo con $A_0$ la chiusura di $A'$. Ricordiamo che $V_n(A_0) = V_n(A)$, e che se $A$ è chiuso vale l'inclusione $A_0 \subset A$.

**Definizione 1.2** (Cilindro)**.** Si dice che $Q \subset \mathbb{R}^n$ è un cilindro di dimensione $k$, con $1 \leq k \leq n$, se ogni sua sezione perpendicolare di $V_n$-misura finita è un cubo di dimensione $k-1$.

**Lemma 1.1.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto non-convesso tale che $V_n(A) > 0$. Allora esiste un cilindro infinito $Q$ di dimensione $n$ e due iperpiani che dividono $Q$ in tre parti $Q_1, Q_2, Q_3$ in modo tale che $V_n(Q_2) < \infty$, $A \cap Q_2 = \emptyset$, $V_n(A \cap Q_3) > 0$ e $A \cap Q_1 \neq \emptyset$. Se $A = A_0$ allora si ha anche $V_n(A \cap Q_1) > 0$.*

*Dimostrazione.* Ci sono due possibilità: $A \setminus A_0 \neq \emptyset$ oppure $A = A_0$.

1) Sia $A \setminus A_0 \neq \emptyset$ e sia $a \in A \setminus A_0$. Per ogni $b \in A_0$ consideriamo il segmento $l_b$ di estremi $a, b$. Esiste $\bar{b} \in A_0$ tale che il segmento $l_{\bar{b}}$ contiene un punto $p \notin A$. Se per assurdo non esistesse un tale $\bar{b}$ allora $A$ sarebbe un insieme stellato rispetto ad $a$. Per ogni $\varepsilon > 0$ si avrebbe che $V_n\big(A \cap B(a, \varepsilon)\big) > 0$ ovvero che $a \in A_0$, contro l'ipotesi. L'insieme $\mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto, quindi esiste $r > 0$ tale che $B(p, r) \cap A = \emptyset$. Sia $Q$ un cilindro infinito di asse $l_{\bar{b}}$ tale che $Q_2 \subset B(p, r)$, $a \in Q_1$ e $\bar{b} \in Q_3$. Poiché $\bar{b} \in A_0$ si ha che $V_n(A \cap Q_3) > 0$ e il cilindro $Q$ soddisfa le proprietà richieste.

2) Se $A = A_0$ si scelga un segmento $l$ di estremi $a, b \in A$ tale che $l$ contenga un punto $p \notin A$. La costruzione del cilindro $Q$ avviene come nel caso 1) con $b = \bar{b}$. Poiché $a, b \in A = A_0$, si ha che $V_n(A \cap Q_1) > 0$ e $V_n(A \cap Q_3) > 0$.

□

**Teorema 1.2.** *Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi compatti di $V_n$-misura positiva, con $A$ non-convesso. Allora*

$$V_n(A + B) > \left[V_n^{1/n}(A) + V_n^{1/n}(B)\right]^n. \tag{1.4}$$

*Inoltre, se $A = A_0$ allora esiste $\bar{h} > 0$ tale che per ogni $0 < h \leq \bar{h}$ vale la stima*

$$V_n(A + hB) \geq \left[V_n^{1/n}(A) + hV_n^{1/n}(B)\right]^n + ch, \tag{1.5}$$

*dove la costante $c > 0$ dipende solo dagli insiemi $A, B$ e non da $h$.*

*Dimostrazione.*

1) Per l'ipotesi di non-convessità dell'insieme $A$ è possibile costruire un cilindro $Q$ come mostrato nel Lemma 1.1. Sia $P_1$ un iperpiano che contiene una faccia del cilindro $Q$. $A$ è separato da $P_1$ nelle due porzioni $A_1', A_1''$ tali che $A = A_1' \cup A_1''$ e $A_1' \cap A_1'' \subset P_1$. Assumiamo che $A_1''$ e $Q$ appartengano al medesimo semispazio individuato da $P_1$. Sia $\lambda_1 > 0$ tale che $V_n(A_1') = \lambda_1 V_n(A)$. Sia $P_2$ un iperpiano parallelo a $P_1$ che separa l'insieme $B$ nelle due porzioni $B_1', B_1''$ con lo stesso rapporto di proporzionalità $\lambda_1$ rispetto a $B$, ovvero tali che $V_n(B_1') = \lambda_1 V_n(B)$. Vale la stima

$$\begin{aligned} V_n(A+B) &\geq V_n(A_1'+B_1') + V_n(A_1''+B_1'') \\ &\geq \lambda_1 \big[V_n^{1/n}(A) + V_n^{1/n}(B)\big]^n + V_n(A_1''+B_1''). \end{aligned}$$

Separiamo $A_1''$ con un iperpiano $P_3$ che contenga la faccia di $Q$ parallela a $P_1$. Siano $A_2', A_2''$ le due porzioni di $A_1''$ così ottenute e assumiamo che $A_2''$ e $Q$ appartengano al medesimo semispazio individuato da $P_3$. Sia $\lambda_2 > 0$ tale che $V_n(A_2') = \lambda_2 V_n(A)$. Sia $P_4$ un iperpiano parallelo a $P_3$ che separa $B_1''$ nelle parti $B_2', B_2''$ in modo tale che $V_n(B_2') = \lambda_2 V_n(B)$. Allora si ha che

$$V_n(A+B) \geq (\lambda_1+\lambda_2)\big[V_n^{1/n}(A) + V_n^{1/n}(B)\big]^n + V_n(A_2''+B_2'').$$

Denotiamo $a = A_2''$, $b = B_2''$ e sia $\lambda > 0$ tale che $V_n(a) = \lambda V_n(A)$, $V_n(b) = \lambda V_n(B)$. In particolare $V_n(A \setminus a) = (1-\lambda)V_n(A)$ e $V_n(B \setminus b) = (1-\lambda)V_n(B)$. Vale la stima

$$V_n(A+B) \geq (1-\lambda)\big[V_n^{1/n}(A) + V_n^{1/n}(B)\big]^n + V_n(a+b). \tag{1.6}$$

2) Siano $Q_1, Q_2, Q_3$ le porzioni di $Q$ definite come nel Lemma 1.1. Siano $\pi$ e $\sigma$ gli iperpiani che separano rispettivamente $Q_1, Q_2$ e $Q_2, Q_3$. Supponiamo che l'origine degli assi coordinati sia il centro di $Q_2$ e che l'asse $x_1$ coincida con l'asse del cilindro $Q$. L'insieme $a$ è l'unione di $a' = \big(A \cap Q_1\big) \subset \{x_1 \leq 0\}$ e $a'' = \big(A \cap Q_3\big) \subset \{x_1 \geq 0\}$, entrambi non-vuoti e con $V_n(a'') > 0$. Assumiamo che $\pi \cap a' \neq \emptyset$, $\sigma \cap a'' \neq \emptyset$. Trasliamo $b$ lungo la direzione dell'asse $x_1$ in modo che l'iperpiano $\{x_1 = 0\}$ separi $b$ in $b' = b \cap \{x_1 \leq 0\}$ e $b'' = b \cap \{x_1 \geq 0\}$ tali che

$$\frac{V_n(b'')}{V_n(b)} = \frac{V_n(a'')}{V_n(a)} =: \lambda_3.$$

Per determinare univocamente una tale traslazione di $b$ richiediamo che $b$ sia traslato il più possibile verso il semispazio $\{x_1 \leq 0\}$ e che la porzione $\beta = b'' \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq \{\sigma \cap \{\text{asse } x_1\}\big\}$ abbia $V_n$-misura positiva. Per ogni $p \in \pi \cap a'$ si ha che

$$\begin{aligned} V_n(a+b) &\geq V_n(a'+b') + V_n(a''+b'') + V_n(p+\beta) \\ &\geq (1-\lambda_3)\big[V_n^{1/n}(a) + V_n^{1/n}(b)\big]^n + \lambda_3\big[V_n^{1/n}(a) + V_n^{1/n}(b)\big]^n + V_n(\beta) \\ &= \big[V_n^{1/n}(a) + V_n^{1/n}(b)\big]^n + V_n(\beta) \\ &= \lambda\big[V_n^{1/n}(A) + V_n^{1/n}(B)\big]^n + V_n(\beta). \end{aligned}$$

Dalla stima (1.6) si ha che

$$V_n(A+B) \geq \big[V_n^{1/n}(A) + V_n^{1/n}(B)\big]^n + V_n(\beta).$$

Questo dimostra la disuguaglianza (1.4).

3) Il punto (1.5) è un raffinamento della disuguaglianza di Brunn-Minkowski. Assumiamo che $A = A_0$. Per il Lemma 1.1 si ha che $V_n(a') > 0$ e $V_n(a'') > 0$. Se si riscala l'insieme $B$ con il fattore $h > 0$, l'insieme $b$ viene trasformato in $hb$. Si scelga $0 < \bar{h} < 1$ definito da

$$\bar{h} = \sup \big\{ 0 < h < 1 : (a' + hb) \cap (a'' + hb) = \emptyset \big\}.$$

Per ogni $0 < h \leq \bar{h}$ si ha che

$$V_n(a + hb) = V_n(a' + hb) + V_n(a'' + hb).$$

Sostituendo $B$ con $hB$ nella disuguaglianza (1.6) si ha che

$$\begin{aligned} V_n(A + hB) &\geq \big[V_n^{1/n}(A) + hV_n^{1/n}(B)\big]^n - \lambda\big[V_n^{1/n}(A) + hV_n^{1/n}(B)\big]^n + V_n(a + hb) \\ &= \big[V_n^{1/n}(A) + hV_n^{1/n}(B)\big]^n - \big[V_n^{1/n}(a) + hV_n^{1/n}(b)\big]^n + V_n(a + hb) \\ &= \big[V_n^{1/n}(A) + hV_n^{1/n}(B)\big]^n + R, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} R &= V_n(a + hb) - \big[V_n^{1/n}(a) + hV_n^{1/n}(b)\big]^n \\ &= V_n(a' + hb) + V_n(a'' + hb) - \big[V_n^{1/n}(a) + hV_n^{1/n}(b)\big]^n \\ &\geq \big[V_n^{1/n}(a') + hV_n^{1/n}(b)\big]^n + \big[V_n^{1/n}(a'') + hV_n^{1/n}(b)\big]^n - \big[\big(V_n(a') + V_n(a'')\big)^{1/n} + hV_n^{1/n}(b)\big]^n \\ &= hnV_n^{1/n}\Big\{V_n^{\frac{n-1}{n}}(a') - V_n^{\frac{n-1}{n}}(a'') + \big[V_n(a') + V_n(a'')\big]^{\frac{n-1}{n}}\Big\} + \mathcal{O}(h^2). \qquad (1.7) \end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo sviluppato i binomi secondo la regola di Newton. Poiché $h < 1$ si ha infatti che

$$\begin{aligned} \big[V_n^{1/n}(a') + hV_n^{1/n}(b)\big]^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \big[V_n^{1/n}(a')\big]^{n-i}\big[hV_n^{1/n}(b)\big]^i \\ &= \binom{n}{1} \big[V_n^{1/n}(a')\big]^{n-1}\big[hV_n^{1/n}(b)\big] + \mathcal{O}(h^2) \\ &= nh\big[V_n^{1/n}(a')\big]^{n-1}V_n^{1/n}(b) + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned}$$

e in modo analogo per gli altri binomi. Consideriamo la funzione $f(t) = t^{\frac{n-1}{n}} + 1 - (t+1)^{\frac{n-1}{n}}$ definita per $t \geq 0$. Essa è continua e strettamente crescente su $[0, +\infty)$. Si ha che $f(0) = 0$ e dunque $f(t) > 0$ per ogni $t > 0$.

Poiché $V_n(a') > 0$ e $V_n(a'') > 0$, valutando la funzione $f$ in $t = \frac{V_n(a')}{V_n(a'')}$ si ottiene che

$$R_1 := \Big\{V_n^{\frac{n-1}{n}}(a') - V_n^{\frac{n-1}{n}}(a'') + \big[V_n(a') + V_n(a'')\big]^{\frac{n-1}{n}}\Big\} > 0.$$

Quindi per $0 < h \leq \bar{h}$ vale la disuguaglianza

$$R \geq ch,$$

dove $c := nV_n^{1/n}(b)R_1 > 0$ non dipende da $h$. □

## Funzione di supporto

**Definizione 1.3** (Funzione di supporto)**.** Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e convesso. La funzione di supporto di $K$ è la funzione $u_K : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$

$$u_K(\xi) = \sup_{x \in K} \langle \xi, x \rangle, \qquad \xi \in \mathbb{S}^{n-1},$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.

Estenderemo la funzione $u_K$ su $\mathbb{R}^n$ in modo 1-omogeneo:

$$u_K(r\xi) = r u_K(\xi) \quad \text{ con } r \geq 0,\ \xi \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Ricordiamo che per una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ positivamente 1-omogenea le nozioni di convessità e di subadditività sono equivalenti. Infatti, se $f$ è subadditiva, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in (0,1)$ si ha $f\big(tx + (1-t)y\big) \leq f(tx) + f\big((1-t)y\big) = tf(x) + (1-t)f(y)$. Viceversa, assumendo $f$ convessa e ponendo $\bar{x} = x/(1-t)$, $\bar{y} = y/t$ si ha che $f(x+y) = f\big((1-t)\bar{x} + t\bar{y}\big) \leq f(x) + f(y)$.

La corrispondenza biunivoca tra un insieme e la sua funzione di supporto è dimostrata nel Teorema 4.3.2 di [6] che qui riportiamo.

**Teorema 1.3.** *Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

i) *$u = u_K$, dove $K$ è l'unico insieme convesso compatto e non-vuoto tale che*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle \leq u(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

ii) *La funzione $u$ è:*

   a) *subadditiva: $u(x+y) \leq u(x) + u(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$;*

   b) *positivamente 1-omogenea: $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \geq 0$.*

*Dimostrazione.* Proviamo che i) implica ii).

Per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} u_K(\xi + \eta) &= \sup_{x \in K} \langle x, \xi + \eta \rangle = \sup_{x \in K} \big( \langle x, \xi \rangle + \langle x, \eta \rangle \big) \\ &\leq \sup_{x \in K} \langle x, \xi \rangle + \sup_{x \in K} \langle x, \eta \rangle = u_K(\xi) + u_k(\eta). \end{aligned}$$

Proviamo che ii) implica i).

*Unicità.* Siano $K$ un compatto convesso e $u = u_K$ la sua funzione di supporto. Se $y \notin K$, per il Teorema di Hahn-Banach esistono $r \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ tali che l'iperpiano $\langle x, \xi \rangle = r$ separa $y$ da $K$. A meno di rotazioni, $\langle y, \xi \rangle > r$ e $\langle x, \xi \rangle < r$ per ogni $x \in K$. Per quanto detto, se $y \notin K$ esiste $\xi \in \mathbb{R}^n$ tale che $\langle y, \xi \rangle > u_K(\xi)$. Dunque $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle \leq u_K(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n\}$.

*Esistenza.* Sia $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle \leq u(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n\}$. Mostriamo che allora $u = u_K$. La disuguaglianza $u_K \leq u$ segue dalla definizione di $K$. Rimane da provare che $u_K \geq u$. L'insieme

$$G = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau \geq u(\xi)\}$$

è chiuso e convesso in quanto epigrafico di $u$. Per ogni $\eta \in \mathbb{R}^n$ esistono allora $(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0)\}$ e $a \in \mathbb{R}$ tali che a meno di rotazioni si ha

$$\langle y, \xi \rangle + t\tau \geq a \quad \text{per ogni } (\xi, \tau) \in G, \tag{1.8}$$

$$\langle y, \eta \rangle + tu(\eta) = a. \tag{1.9}$$

Per definizione di $G$, la (1.8) rimane vera se si sostituisce $\tau$ con $\tau_1 \geq \tau$. Di conseguenza $t \geq 0$. Se fosse $t = 0$ si avrebbe $\langle y, \xi \rangle \geq a$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, relazione soddisfatta solo se $y = 0$ e $a \leq 0$. Ma $(y,t) = (0,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ non è un vettore ammissibile per descrivere un iperpiano in $\mathbb{R}^{n+1}$. Quindi $t > 0$.
Per la positiva omogeneità di $u$ vale l'uguaglianza $G = sG = \{s(\xi,\tau) : (\xi,\tau) \in G\}$ per ogni $s > 0$. Se fosse $a > 0$, preso $s > a$, dalla (1.9) si avrebbe $\langle y, \eta \rangle + tu(\eta) = \frac{a}{s} < a$, contro la scelta di $(y,t)$ e di $a \in \mathbb{R}$. Dunque $a \leq 0$.
Inoltre, poiché $\big(\xi, u(\xi)\big) \in G$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, dalla (1.8) si ha che

$$\langle y, \xi \rangle + tu(\xi) \geq \frac{a}{s} \quad \text{per ogni } s > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

da cui segue che

$$\left\langle \frac{y}{t}, \xi \right\rangle + u(\xi) \geq 0 \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Posto $x := -\frac{y}{t}$ si ha che $x \in K$ e

$$u_K(\eta) \geq \langle x, \eta \rangle = u(\eta) - \frac{a}{t} \geq u(\eta).$$

Per l'arbitrarietà di $\eta \in \mathbb{R}^n$ si ha la tesi. □

## 1.4 Dimostrazione del Teorema 1.1: il caso dell'uguaglianza

Trattiamo separatamente i tre casi enunciati nel Teorema 1.1. Non è restrittivo supporre subito $A$ e $B$ compatti.

*i)* Se $V_n(A+B) = 0$ allora si ha anche che $V_n(A) = V_n(B) = 0$ e l'uguaglianza è soddisfatta.

*ii)* Se $V_n(A) > 0$ e $V_n(B) = 0$ allora $V_n(A+B) = V_n(A) > 0$ se e solo se $B$ è costituito da un singolo punto.

*Prova.* Se $B = \{x_0\}$ allora $A + B = A + x_0$ e $V_n(A + x_0) = V_n(A)$ poiché la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni. Supponiamo che $B = \{x_0, y_0\}$ con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$. Definiamo il versore $u = (x_0 - y_0)/||x_0 - y_0||$. Non è restrittivo richiedere che l'insieme $A$ e il versore $u$ siano nel quadrante $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\, i = 1, \ldots n\}$. Fissato $t > 0$, consideriamo il semispazio chiuso $S_t$ definito da

$$S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle \leq t\}.$$

Sia $\bar{t} = \inf\big\{t > 0 : V_n(S_t \cap A) = V_n(A)\big\}$. Per tale scelta di $\bar{t}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$V_n\big[(A + \varepsilon u) \cap S_{\bar{t}}\big] = V_n\big(A \cap S_{\bar{t}-\varepsilon}\big) < V_n(A).$$

Ne segue che se $x_0 \neq y_0$ allora

$$V_n(A + B) = V_n\big((A + x_0) \cup (A + y_0)\big) > V_n(A).$$

□

**Lemma 1.2.** *Siano $x, y, p > 0$ e $t \in (0, 1)$. Allora*

$$\big((1 - t)x^p + ty^p\big)^{1/p}\Big(\frac{1 - t}{x} + \frac{t}{y}\Big) \geq 1. \tag{1.10}$$

*In (1.10) vale l'uguaglianza se e solo se $x = y$.*

*Dimostrazione.* Prendendo il logaritmo di entrambi i membri in (1.10) si ha

$$M := \frac{1}{p}\log\big((1 - t)x^p + ty^p\big) + \log\Big(\frac{1 - t}{x} + \frac{t}{y}\Big) \geq 0.$$

Quest'ultima relazione è vera poiché il logaritmo è una funzione crescente e concava. Si ha

$$M \geq \frac{1}{p}\big((1 - t)p\log x + tp\log y\big) + (1 - t)\log\frac{1}{x} + t\log\frac{1}{y} = 0.$$

In particolare, il logaritmo è strettamente concavo. Ne segue che in (1.10) vale l'uguaglianza se e solo se $x = y$. □

Per l'equivalenza tra (1.1) e (1.2) (Osservazione 1.2) discutiamo il caso *iii*) dell'uguaglianza per (1.2).

*iii*) Resta il caso in cui $V_n(A), V_n(B) > 0$. Sappiamo dal Teorema 1.2 che una condizione necessaria affinché la (1.2) valga come uguaglianza è che gli insiemi $A, B$ siano entrambi convessi. Proviamo il caso *iii*) con $V_n(A) = V_n(B) = 1$. Il caso generale discende considerando gli insiemi $\hat{A} = A/V_n^{1/n}(A)$, $\hat{B} = B/V_n^{1/n}(B)$ in luogo di $A, B$ e con $\hat{t} = tV_n^{1/n}(B)/\big((1 - t)V_n^{1/n}(A) + tV_n^{1/n}(B)\big)$ in luogo di $t \in (0, 1)$. Dall'uguaglianza $V_n^{1/n}\big((1-t)\hat{A}+t\hat{B}\big) = 1$ segue la tesi. Denotiamo $K_0 = A$, $K_1 = B$ e $K_t = (1-t)K_0+tK_1$

con $t \in [0,1]$. La dimostrazione procede per induzione sulla dimensione $N$ dello spazio. Per $N=1$ gli insiemi convessi sono esattamente gli intervalli. Necessariamente due intervalli di lunghezza 1 differiscono per una traslazione in $\mathbb{R}$. Supponiamo che il Teorema sia vero per $N=n-1$ e verifichiamolo per $N=n$. Proviamo che se esiste $t \in (0,1)$ tale che $V_n(K_t)=1$ allora gli insiemi $K_0, K_1$ differiscono per una traslazione e una dilatazione.

Fissato $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, per $\alpha \in \mathbb{R}$ si considerino l'iperpiano $H(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi\rangle = \alpha\}$ e il semispazio chiuso $H^-(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi\rangle \leq \alpha\}$. Definiamo $\alpha_t = -u_{K_t}(-\xi)$ e $\beta_t = u_{K_t}(\xi)$. Per $\zeta \in \mathbb{R}$ e $i=0,1$ siano

$$\begin{aligned} v_i(\zeta) &= V_{n-1}\big(K_i \cap H(\zeta)\big), \\ w_i(\zeta) &= V_n\big(K_i \cap H^-(\zeta)\big). \end{aligned}$$

Poiché vale la relazione

$$w_i(\zeta) = \int_{\alpha_i}^{\zeta} v_i(s)\, ds$$

e la funzione $v_i$ è continua sull'intervallo $(\alpha_i, \beta_i)$, allora $w_i$ è ivi differenziabile. In particolare $w_i'(\zeta) = v_i(\zeta) > 0$ per ogni $\zeta \in (\alpha_i, \beta_i)$. Sia $z_i$ la funzione inversa di $w_i$. Allora

$$z_i'(\tau) = \frac{1}{v_i\big(z_i(\tau)\big)}, \qquad \tau \in (0,1).$$

Denotiamo

$$\begin{aligned} k_i(\tau) &= K_i \cap H\big(z_i(\tau)\big) \subset \mathbb{R}^{n-1}, \\ z_t(\tau) &= (1-t)z_0(\tau) + t z_1(\tau). \end{aligned}$$

Dall'inclusione insiemistica

$$K_t \cap H\big(z_t(\tau)\big) \supset (1-t)k_0(\tau) + t k_1(\tau),$$

dall'ipotesi $V_n(K_t)=1$ e dall'ipotesi induttiva per $N=n-1$ si ottiene

$$\begin{aligned} 1 = V_n(K_t) &= \int_{\alpha_t}^{\beta_t} V_{n-1}\big(K_t \cap H(\zeta)\big)\, d\zeta = \int_0^1 V_{n-1}\big(K_t \cap H(z_t(\tau))\big) z_t'(\tau)\, d\tau \\ &\geq \int_0^1 V_{n-1}\big((1-t)k_0(\tau) + t k_1(\tau)\big)\Big(\frac{1-t}{v_0\big(z_0(\tau)\big)} + \frac{t}{v_1\big(z_1(\tau)\big)}\Big)\, d\tau \\ &= \int_0^1 \big[(1-t)v_0^{\frac{1}{n-1}} + t v_1^{\frac{1}{n-1}}\big]^{n-1}\Big(\frac{1-t}{v_0} + \frac{t}{v_1}\Big)\, d\tau \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Abbiamo omesso gli argomenti di $v_0, v_1$. L'ultimo passaggio segue dal Lemma 1.2 con $x = v_0$, $y = v_1$ e $p = 1/(n-1)$. Si ha allora che

$$\big[(1-t)v_0^{\frac{1}{n-1}} + tv_1^{\frac{1}{n-1}}\big]^{n-1}\Big(\frac{1-t}{v_0} + \frac{t}{v_1}\Big) = 1,$$

da cui, per il Lemma 1.2, $v_0\big(z_0(\tau)\big) = v_1\big(z_1(\tau)\big)$ e $z_0'(\tau) = z_1'(\tau)$ per $0 \le \tau \le 1$. Esiste dunque $C \in \mathbb{R}$ tale che $z_1(\tau) - z_0(\tau) = C$ per ogni $\tau \in [0,1]$. A meno di traslazioni possiamo supporre che $K_0$ e $K_1$ abbiano il baricentro nell'origine di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che il baricentro $x^G$ di un insieme compatto $E \subset \mathbb{R}^n$ è il vettore

$$x^G = (x_1^G, \dots, x_n^G) = \frac{1}{V_n(E)}\Big(\int_E x_1\,dx, \dots, \int_E x_n\,dx\Big).$$

Per $i = 0, 1$ si ha che

$$0 = \int_{K_i} \langle x, \xi\rangle\; dx = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} V_{n-1}\big(K_i \cap H(\zeta)\big)\zeta\,d\zeta = \int_0^1 z_i(\tau)\,d\tau.$$

Quindi $0 = \int_0^1 \big(z_1(\tau) - z_0(\tau)\big)\,d\tau = C$, da cui $z_0(\tau) = z_1(\tau)$ per ogni $\tau \in [0,1]$. Ne segue che $\beta_0 = z_0(1) = z_1(1) = \beta_1$, ovvero che

$$u_{K_0}(\xi) = u_{K_1}(\xi).$$

Per l'arbitrarietà di $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ e per il Teorema 1.3 si ha che $K_0 = K_1$. Questo conclude la dimostrazione del Teorema 1.1.

## 1.5 Prima dimostrazione della disuguaglianza isodiametrica in $\mathbb{R}^n$

Il risultato che viene esposto è il Teorema 11.2.1 di [2].

**Teorema 1.4** (Disuguaglianza di Bieberbach)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $V_n$-misurabile. Allora vale la disuguaglianza*

$$V_n(\text{conv } A) \le \frac{v_n}{2^n}(\text{diam } A)^n, \tag{1.11}$$

*dove conv $A$ è l'inviluppo convesso di $A$ e $v_n$ è la misura di $B(0,1)$, la palla unitaria in $\mathbb{R}^n$. In* (1.11) *vale il segno di uguaglianza se e solo se $A$ è una palla, eventualmente priva di un insieme di $V_n$-misura nulla.*

*Dimostrazione.* Sia $A$ un insieme compatto con interno non-vuoto. Poiché $V_n(A) \le V_n(\text{conv } A)$ e $\text{diam}(A) = \text{diam}(\text{conv } A)$, assumiamo che $A$ sia convesso. Eventualmente riscalando $A$ con il fattore $1/\text{diam}(A)$, possiamo supporre $\text{diam}(A) \le 1$. Sia $A'$ il simmetrico di $A$ rispetto all'origine di $\mathbb{R}^n$. Definiamo l'insieme $B := (A + A')/2$. Per la disuguaglianza di Brunn-Minkowski si ha che

$$V_n^{1/n}\big(tA + (1-t)A'\big) \geq tV_n^{1/n}(A) + (1-t)V_n^{1/n}(A'),$$

per ogni $t \in [0,1]$. In particolare, con $t = \frac{1}{2}$ si ha

$$\begin{aligned} V_n^{1/n}(B) &\geq \frac{1}{2}V_n^{1/n}(A) + \frac{1}{2}V_n^{1/n}(A') \\ &= V_n^{1/n}(A), \end{aligned} \tag{1.12}$$

da cui $V_n(B) \geq V_n(A)$. In (1.12) vale l'uguaglianza se e solo se gli insiemi $A$ e $A'$ sono l'uno il traslato e il dilatato dell'altro, ovvero se e solo se $A$ ha un centro di simmetria.
Siano $x, y \in B$ tali che $\mathrm{diam}(B) = ||x-y||$. Siano $x', y' \in A$ e $x'', y'' \in A'$ tali che $x = (x'+x'')/2$ e $y = (y'+y'')/2$. Allora

$$\begin{aligned} ||x-y|| &= \frac{1}{2}||x'+x''-y'-y''|| \leq \frac{1}{2}\big(||x'-y'|| + ||x''-y''||\big) \\ &\leq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(A) + \frac{1}{2}\mathrm{diam}(A') \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Ne segue che $\mathrm{diam}(B) \leq 1$. Per costruzione l'insieme $B$ è simmetrico rispetto all'origine. Non è quindi restrittivo supporre che $A$ abbia un centro di simmetria nell'origine e che $\mathrm{diam}(A) \leq 1$. Ma allora $A \subset B(0, \frac{1}{2})$, da cui

$$V_n(A) \leq V_n\big(B(0, \frac{1}{2})\big) = V_n\big(\frac{1}{2}B(0,1)\big) = \frac{1}{2^n}v_n. \tag{1.13}$$

Ci siamo ridotti al caso $A \subset B(0, \frac{1}{2})$. Se in (1.13) vale la condizione di uguaglianza allora $V_n\big(B(0,\frac{1}{2})\big) = V_n\big(A \cup \big(B(0,\frac{1}{2}) \setminus A\big)\big) = V_n(A) + V_n\big(B(0,\frac{1}{2}) \setminus A\big)$. Ne segue che $V_n\big(B(0,\frac{1}{2}) \setminus A\big) = 0$ e in tal caso, ricordando che $A$ è chiuso, si ha che $A = B(0, \frac{1}{2})$. $\square$

# Capitolo 2

# Disuguaglianza isodiametrica e simmetrizzazione di Steiner in $\mathbb{R}^n$

In questo capitolo presentiamo la disuguaglianza isodiametrica seguendo [3] (si vedano il Lemma 2 e il Teorema 1 del Capitolo 2 di [3]). Viene ripreso anche il Teorema 1.4 di questa tesi.

## 2.1 Simmetrizzazione di Steiner

Sia $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ un versore fissato. Denotiamo con

$$L_b^a = \{b + ta : t \in \mathbb{R}\}$$

la retta parallela ad $a$ passante per $b \in \mathbb{R}^n$, e con

$$P_a = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot a = 0\}$$

il piano perpendicolare ad $a$ passante per l'origine.

**Definizione 2.1** (Simmetrizzazione di Steiner)**.** Siano $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $A \subset \mathbb{R}^n$. Si definisce *simmetrizzazione di Steiner* di $A$ rispetto al piano $P_a$ l'insieme

$$S_a(A) = \bigcup_{\substack{b \in P_a \\ A \cap L_b^a \neq \emptyset}} \Big\{ b + ta : |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a) \Big\}$$

**Proposizione 2.1** (Proprietà di $S_a(A)$)**.** *L'insieme $S_a(A)$ ha le seguenti proprietà:*

*i)* diam $S_a(A) \leq$ diam $A$,

*ii) se $A$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile allora anche $S_a(A)$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile. In tal caso $\mathcal{L}^n\big(S_a(A)\big) = \mathcal{L}^n(A)$.*

*Dimostrazione.* i) Se $\operatorname{diam}(A) = \infty$, allora $\operatorname{diam}\big(S_a(A)\big) \leq \infty$ e la tesi è vera. Sia $\operatorname{diam}(A) < \infty$. Poiché $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\bar{A})$, possiamo assumere che $A$ sia chiuso. Per definizione di diametro di un insieme, fissato $\varepsilon > 0$ esistono $x, y \in S_a(A)$ tali che $\operatorname{diam}(S_a(A)) \leq |x - y| + \varepsilon$. Consideriamo $b, c \in P_a$ definiti come $b = x - (x \cdot a)a$, $c = y - (y \cdot a)a$. Poniamo

$$\begin{aligned}
r &= \inf\{t : b + ta \in A\} \\
s &= \sup\{t : b + ta \in A\} \\
u &= \inf\{t : c + ta \in A\} \\
v &= \sup\{t : c + ta \in A\}.
\end{aligned}$$

A meno di scambiare tra loro i punti $b$ e $c$, possiamo supporre che $v - r \geq s - u$. Si ha che

$$\begin{aligned}
v - r &= \frac{1}{2}(v - r) + \frac{1}{2}(v - r) \\
&\geq \frac{1}{2}(v - r) + \frac{1}{2}(s - u) \\
&= \frac{1}{2}(s - r) + \frac{1}{2}(v - u) \\
&\geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a) + \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_c^a).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Per costruzione di $S_a(A)$, $|x \cdot a| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)$ e $|y \cdot a| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_c^a)$. Ne segue che

$$v - r \geq |x \cdot a| + |y \cdot a| \geq |x \cdot a - y \cdot a|,$$

da cui

$$\begin{aligned}
\big(\operatorname{diam}\ S_a(A) - \varepsilon\big)^2 &\leq |x - y|^2 \\
&= |b - c|^2 + |x \cdot a - y \cdot a|^2 \\
&\leq |b - c|^2 + (v - r)^2 \\
&= |(b + ra) - (c + va)|^2 \\
&\leq (\operatorname{diam}\ A)^2.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Infatti $b + ra, c + va \in \bar{A} = A$. Quindi

$$\operatorname{diam}\ S_a(A) - \varepsilon \leq \operatorname{diam}\ A,$$

e per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ottiene l'asserto in *i*).

ii) Siccome $\mathcal{L}^n$ è invariante per rotazioni, possiamo supporre che $a = e_n = (0, \dots, 0, 1)$. In questo modo identifichiamo $P_a = P_{e_n} = \mathbb{R}^{n-1}$. In $\mathbb{R}^1$ si ha $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$, e quindi per il Teorema di Fubini la funzione $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$

$$b \mapsto f(b) = \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)$$

è $\mathcal{L}^{n-1}$-misurabile e $\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)\,db$. Inoltre, l'insieme

$$S_a(A) = \Big\{(b,y) : \frac{-f(b)}{2} \leq y \leq \frac{f(b)}{2}\Big\} \setminus \{(b,0) : L_b^a \cap A = \emptyset\}$$

è $\mathcal{L}^n$-misurabile e

$$\mathcal{L}^n\big(S_a(A)\big) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)\,db = \mathcal{L}^n(A).$$

□

## 2.2 Seconda dimostrazione della disuguaglianza isodiametrica in $\mathbb{R}^n$

**Teorema 2.1** (Disuguaglianza isodiametrica)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathcal{L}^n$-misurabile. Allora*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n)\Big(\frac{\text{diam } A}{2}\Big)^n, \tag{2.3}$$

*dove $\alpha(n)$ è la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$.*

*Dimostrazione.* Se $\text{diam}(A) = \infty$ la tesi è vera. Supponiamo che $\text{diam}(A) < \infty$. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Definiamo iterativamente $A_1 := S_{e_1}(A)$, $A_2 := S_{e_2}(A_1)$, ..., $A_n := S_{e_n}(A_{n-1})$, e denotiamo $A^* := A_n$. Suddividiamo la dimostrazione in tre passi.

1) *Affermiamo che $A^*$ è simmetrico rispetto all'origine, ovvero che se $x \in A^*$ allora $-x \in A^*$.*

   $A_1$ è simmetrico rispetto al piano $P_{e_1}$. Preso $1 \leq k < n$, supponiamo che $A_k$ sia simmetrico rispetto ai piani $P_{e_1}, \dots, P_{e_k}$. Si ha che $A_{k+1}$ è simmetrico rispetto a $P_{e_{k+1}}$. Fissato $1 \leq j \leq k$, sia $S_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la riflessione rispetto a $P_{e_j}$. Poiché $S_j(A_k) = A_k$, per ogni $b \in P_{e_{k+1}}$ si ha

   $$\mathcal{H}^1(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \mathcal{H}^1(A_k \cap L_{S_j b}^{e_{k+1}}),$$

   da cui

   $$\{t : b + te_{k+1} \in A_{k+1}\} = \{t : S_j b + te_{k+1} \in A_{k+1}\}.$$

   Ciò significa che $S_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$, ovvero che $A_{k+1}$ è simmetrico rispetto al piano $P_{e_j}$. Quindi $A^*$ è simmetrico rispetto a $P_{e_1}, \dots, P_{e_n}$, ed in particolare lo è rispetto all'origine $\{0\} = \bigcap_{i=1}^n P_{e_i}$.

2) *Vale la disuguaglianza $\mathcal{L}^n(A^*) \leq \alpha(n)\Big(\dfrac{\text{diam } A^*}{2}\Big)^n$.*

   Se $x \in A^*$, anche $-x \in A^*$ per il passo precedente, da cui $\text{diam}(A^*) \geq 2|x|$. Quindi $A^* \subset B\big(0, \frac{\text{diam } A^*}{2}\big)$, e

   $$\mathcal{L}^n(A^*) \leq \mathcal{L}^n\Big(B\Big(0, \frac{\text{diam } A^*}{2}\Big)\Big) = \alpha(n)\Big(\frac{\text{diam } A^*}{2}\Big)^n.$$

3) *Vale la tesi:* $\mathcal{L}^n(A) \le \alpha(n)\Big(\dfrac{\text{diam } A}{2}\Big)^n$.

Poiché $\bar{A}$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile, dalla Proposizione 2.1 si ha che $\mathcal{L}^n\big((\bar{A})^*\big) = \mathcal{L}^n(\bar{A})$ e diam $(\bar{A})^* \le$ diam $\bar{A}$. Dunque si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A) &\le \mathcal{L}^n(\bar{A}) = \mathcal{L}^n\big((\bar{A})^*\big)\\ &\le \alpha(n)\Big(\frac{\text{diam } (\bar{A})^*}{2}\Big)^n\\ &\le \alpha(n)\Big(\frac{\text{diam } \bar{A}}{2}\Big)^n\\ &= \alpha(n)\Big(\frac{\text{diam } A}{2}\Big)^n.\end{aligned}$$

□

## 2.3 Gli insiemi isodiametrici in $\mathbb{R}^n$

**Definizione 2.2** (Insieme isodiametrico)**.** Un insieme $\mathcal{L}^n$-misurabile $A \subset \mathbb{R}^n$ con $\text{diam}(A) < \infty$ tale che

$$\mathcal{L}^n(A) = \alpha(n)\Big(\frac{\text{diam } A}{2}\Big)^n$$

si dice isodiametrico.

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è una palla, la disuguaglianza (2.3) vale come uguaglianza. Gli insiemi sferici di $\mathbb{R}^n$ sono dunque isodiametrici. Usando la stessa idea che compare nel Teorema 1.4, mostriamo che vale anche il viceversa.

**Teorema 2.2.** *Siano $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ ed $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme isodiametrico tale che $S_a(A)$ è una palla. Allora $A$ è una palla a meno di insiemi di $\mathcal{L}^n$-misura nulla.*

*Dimostrazione.* Per ipotesi si ha che $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n\big(S_a(A)\big)$ e che diam $A =$ diam $S_a(A)$. Possiamo supporre che $A$ sia compatto con diam $A \le 1$ e che $S_a(A) = \overline{B(0, \frac{1}{2})}$. Sia $A'$ il simmetrico di $A$ rispetto al centro di $S_a(A)$, ovvero rispetto all'origine di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo l'insieme $C$ definito da

$$C = \frac{A + A'}{2},$$

somma di Minkowski di $A$ e $A'$. L'insieme $C$ è compatto e ha centro di simmetria nell'origine. Inoltre è noto che se diam $A \le 1$ allora diam $C \le 1$. Dunque $C \subset \overline{B(0, \frac{1}{2})}$ e $\mathcal{L}^n(C) \le \mathcal{L}^n\big(B(0, \frac{1}{2})\big)$. Per la disuguaglianza di Brunn-Minkowski si ha che

$$\mathcal{L}^n(C) \ge \mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n\big(B(0, 1/2)\big). \tag{2.4}$$

Ne segue che in (2.4) vale l'uguaglianza. Gli insiemi $A, A'$, compatti con interno non-vuoto, sono pertanto convessi e uguali a meno di traslazioni e dilatazioni. Questo è possibile solo se $A$ ha un centro di simmetria. Sia $c_A$ tale centro. Sappiamo che $A \subset \overline{B(c_A, \frac{1}{2})}$ e che $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n\big(B(c_A, \frac{1}{2})\big)$. Quindi $A = \overline{B(c_A, \frac{1}{2})}$. □

Come nel Teorema 2.1, se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, definiamo $A_1 := S_{e_1}(A)$, $A_2 := S_{e_2}(A_1)$, $\ldots$, $A_n := S_{e_n}(A_{n-1})$, e denotiamo $A^* := A_n$.

**Teorema 2.3.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme isodiametrico. Allora $A$ è una palla a meno di insiemi di $\mathcal{L}^n$-misura nulla.*

*Dimostrazione.* a) Se $\mathcal{L}^n(A) = \alpha(n)\big(\frac{\text{diam } A}{2}\big)^n$, le disuguaglianze nel passo 3) del Teorema 2.1 diventano uguaglianze. Quindi

$$\text{diam } (\bar{A})^* = \text{diam } A,$$
$$\mathcal{L}^n(\bar{A}) = \mathcal{L}^n\big((\bar{A})^*\big) = \alpha(n)\Big(\frac{\text{diam } (\bar{A})^*}{2}\Big)^n.$$

Sappiamo che $A^* \subset B\big(0, \frac{\text{diam } A^*}{2}\big)$ e inoltre

$$\mathcal{L}^n(A^*) = \mathcal{L}^n\Big(B\Big(0, \frac{\text{diam } A^*}{2}\Big)\Big).$$

Dunque $A^*$ è una palla centrata nell'origine, a meno di insiemi di $\mathcal{L}^n$-misura nulla.

Di passaggio osserviamo che per la Proposizione 2.1 si ha

$$\text{diam } A^* \leq \text{diam } A_{n-1} \leq \cdots \leq \text{diam } A_1 \leq \text{diam } A = \text{diam } A^*,$$

e quindi

$$\text{diam } A^* = \text{diam } A_{n-1} = \cdots = \text{diam } A_1 = \text{diam } A. \tag{2.5}$$

b) Il fatto che $A$ sia equivalente ad una palla segue dal Teorema 2.2. Si procede a ritroso da $A^*$ fino all'insieme $A$.

□

# Capitolo 3

# Tentativo di dimostrazione elementare

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è una palla, la disuguaglianza (2.3) è un' uguaglianza. In altri termini, le palle di $\mathbb{R}^n$ sono insiemi isodiametrici nel senso della Definizione 2.2. Nei Capitoli 1 e 2 si è dimostrato che vale anche il viceversa. La prova lì fornita si basa sulla disuguaglianza di Brunn-Minkowski. In questo capitolo vogliamo descrivere gli insiemi isodiametrici senza adoperare la teoria di Brunn-Minkowski. Nella prima sezione vengono presentate alcune condizioni soddifatte dagli insiemi isodiametrici. Nella seconda sezione viene fornito il resoconto di un tentativo di dimostrazione elementare per la disuguaglianza isodiametrica ottimale in $\mathbb{R}^n$. Purtroppo questa ricerca non ha avuto successo. Ne daremo una descrizione, sottolineando in particolare i passaggi rimasti irrisolti.

## 3.1 Condizioni necessarie sugli insiemi isodiametrici in $\mathbb{R}^n$

Facendo uso solo della simmetrizzazione di Steiner, in questa sezione elenchiamo alcune condizioni necessarie per gli insiemi isodiametrici in $\mathbb{R}^n$.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che $\Omega$ ammette un *piano di supporto* nel punto $x \in \partial\Omega$ se esiste un piano $\pi$ passante per $x$ tale che $\Omega$ è contenuto in uno dei due semispazi chiusi individuati da $\pi$.

**Proposizione 3.1.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto che ammette un piano di supporto in ogni $x \in \partial\Omega$. Allora $\Omega$ è convesso.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione procede per induzione sulla dimensione $n$ dello spazio. Se $n = 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}$ è tale che $\Omega \subset [x, +\infty)$ oppure $\Omega \subset (-\infty, x]$ per ogni $x \in \partial\Omega$ allora $\Omega$ è necessariamente un intervallo. Se così non fosse, siano $r, s \in \Omega$ e sia $t \notin \Omega$ tale che $r < t < s$. Sia $B$ la componente connessa massimale tale che $t \in B$ e $B \subset (\mathbb{R} \setminus \Omega)$. Si ha che $\partial B \subset \partial\Omega$ e per ogni $x \in \partial B$ entrambe le intersezioni $\{r, s\} \cap [x, +\infty)$, $\{r, s\} \cap (-\infty, x]$ sono non-vuote.

Se $n = 2$, sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto che ammette una retta di supporto in ogni $x \in \partial\Omega$. Sia $\xi \in \mathbb{S}^1$ e sia $\sigma_\Omega$ una $\xi$-sezione di $\Omega$. Poiché $\partial\sigma_\Omega \subset \partial\Omega$, dall'ipotesi su $\Omega$ si ha che se $\sigma_\Omega \neq \emptyset$ allora $\sigma_\Omega \subset \mathbb{R}$ è un aperto tale che $\sigma_\Omega \subset [x, +\infty)$ oppure $\sigma_\Omega \subset (-\infty, x]$ per ogni $x \in \partial\sigma_\Omega$ e quindi $\sigma_\Omega$ è convesso per il caso $n = 1$. Per l'arbitrarietà di $\xi \in \mathbb{S}^1$, $\Omega$ è convesso.

Assumiamo che la tesi valga in dimensione $(n-1)$ e proviamo che allora vale in dimensione $n$. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto che ammette un piano di supporto in ogni $x \in \partial\Omega$. Sia $\pi \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un iperpiano tale che $\pi_\Omega = \pi \cap \Omega$ sia una sezione $(n-1)$-dimensionale non-vuota di $\Omega$. Si ha che $\pi_\Omega \subset \Omega$ e $\partial\pi_\Omega \subset \partial\Omega$. Per ogni $x \in \partial\pi_\Omega$ esiste un piano di supporto $P_x \subset \mathbb{R}^{n-1}$ per $\Omega$. Necessariamente $P_x$ e $\pi_\Omega$ non sono paralleli, poiché $\pi_\Omega$ è aperto. Dunque $\pi_\Omega \cap P_x \subset \mathbb{R}^{n-2}$ è un piano si supporto per $\pi_\Omega$, così che $\pi_\Omega$ è convesso per l'ipotesi induttiva. Per l'arbitrarietà dell'iperpiano $\pi$ si ha che ogni sezione $(n-1)$-dimensionale di $\Omega$ è convessa o, equivalentemente, che $\Omega$ è convesso. □

Fissato $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, siano $T_v^+$ e $T_v^-$ due iperpiani perpendicolari a $v$ tali che $\operatorname{dist}(T_v^+, T_v^-) = d$ con $d > 0$. I punti compresi tra $T_v^+$ e $T_v^-$ formano una striscia $T_v$ di spessore $d$. Sia $\mathcal{T}_v(d) = \{T_v : T_v \text{ ha spessore } d > 0\}$ l'insieme di tutte le strisce di spessore $d$ perpendicolari a $v \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Diciamo che un insieme chiuso $A \subset \mathbb{R}^n$ ha la *proprietà della striscia con spessore* $d$ se esiste $d > 0$ tale che per ogni $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ esiste una striscia $T_v \in \mathcal{T}_v(d)$ tale che $T_v^+$ e $T_v^-$ sono piani di supporto per $A$.

*Osservazione* 3.1. Se $A$ soddisfa la proprietà della striscia con spessore $d$ allora $\operatorname{diam}(A) = d$. Infatti in tal caso l'insieme $A$ ha spessore $d$ lungo ogni direzione, e il diametro è lo spessore di $A$ lungo una particolare direzione.

Siano $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $A \subset \mathbb{R}^n$. L'insieme dei punti $A \cap L_c^a$ con $c \in P_a$ è detto *$a$-sezione* dell'insieme $A$. Due insiemi $A$, $B \subset \mathbb{R}^n$ sono *equimisurabili per $a$-sezioni* se $\mathcal{H}^1(A \cap L_c^a) = \mathcal{H}^1(B \cap L_c^a)$ per ogni $c \in P_a$. Per costruzione, un insieme $A$ e il suo simmetrizzato $S_a(A)$ sono equimisurabili per $a$-sezioni.

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *normale* rispetto alla direzione $a$ se tutte le sue $a$-sezioni sono intervalli.

**Teorema 3.1.** *Per $n \geq 2$ siano $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ ed $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme isodiametrico chiuso con interno non-vuoto tale che $S_a(A)$ è una palla. Allora $A$ è convesso.*

*Dimostrazione.* Fissiamo $a = e_n$ e usiamo la notazione $S(A) = S_{e_n}(A)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo che $S(A) = B(0,1)$, dove $B(0,1)$ è la palla di raggio 1 centrata nell'origine. $S(A)$ è chiuso poiché $A$ è chiuso.

a) *$A$ è normale rispetto a $e_n$.*

Sappiamo da (2.5) che $\operatorname{diam} S(A) = \operatorname{diam} A$. Da (2.2) si trova che $(v-r) = |x \cdot e_n - y \cdot e_n|$, e da (2.1)

$$(v-r) = (s-u), \tag{3.1}$$

$$(s-r) = \mathcal{H}^1(A \cap L_b^{e_n}), \tag{3.2}$$

$$(v-u) = \mathcal{H}^1(A \cap L_c^{e_n}), \tag{3.3}$$

dove $r, s, u, v$ sono definiti tramite $x, y \in S(A)$ tali che $||x-y||_n = \operatorname{diam}\big(S(A)\big)$. L'insieme $S(A) = B(0,1)$ è normale rispetto ad ogni direzione. Inoltre $\mathcal{H}^1(A \cap L_b^{e_n}) = \mathcal{H}^1\big(S(A) \cap L_b^{e_n}\big)$ per ogni $b \in P_{e_n}$. La (3.2) e l'ipotesi che $A$ sia chiuso implicano che $A$ è normale rispetto ad $e_n$.

b) *Le* $e_n$*-sezioni di* $A$ *corrispondenti alla coppia di punti* $x, y \in S(A)$ *che realizzano* $\operatorname{diam}\big(S(A)\big)$ *hanno uguale lunghezza e il medesimo punto medio.*

Traslando nella direzione di $e_n$ le $e_n$-sezioni di $S(A)$

$$S(A) \cap L_{x_1}^{e_n}$$

al variare di $x_1 \in P_{e_n}$ tale che l'intersezione sia non-vuota, si ottiene una famiglia $S$ di segmenti paralleli in $\mathbb{R}^n$. Per la condizione (3.1)

$$\frac{v+u}{2} = \frac{s+r}{2}. \tag{3.4}$$

L'uguaglianza delle lunghezze $(s-r) = (v-u)$ segue dalla particolare simmetria di $S(A)$.

c) *A soddisfa la proprietà della striscia con spessore* $d = \operatorname{diam}(A)$.

Da (2.5) segue che $A \subseteq B\big(x, \operatorname{diam} A\big)$ per ogni $x \in \partial A$. In particolare, per ogni $x, y \in \partial A$ con $v := x - y$ tale che $\operatorname{diam}(A) = ||v||_n$, $A$ è contenuto nella striscia $T_v$ perpendicolare a $v$ tale che $x, y \in \partial T_v$.

d) *A è convesso.*

Per quanto detto nel punto c), $A$ ammette un piano di supporto per ogni $x \in \partial A$. Inoltre $A$ ha interno non-vuoto per ipotesi. Quindi $A$ è convesso per la Proposizione 3.1.

□

*Osservazione* 3.2. Poiché l'insieme $A$ della proposizione precedente è convesso, per ogni $x, y \in \partial B(0,1)$ tali che il vettore $v = x - y$ soddisfa $||v|| = \operatorname{diam}\big(B(0,1)\big) = 2$ esistono $\hat{x}, \hat{y} \in \partial A$ tali che: $||\hat{x} - \hat{y}|| = 2$, il segmento di estremi $\hat{x}, \hat{y}$ è contenuto in $A$ e $\hat{x} - \hat{y} = v$.

## 3.2 Ricerca di una dimostrazione elementare per la disuguaglianza isodiametrica ottimale in $\mathbb{R}^n$

In quanto segue usiamo la notazione $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

*Osservazione* 3.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso limitato di classe $\mathcal{C}^1$. Dato $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ esiste $x_0 \in \partial\Omega$ tale che $\nu(x_0) = \xi$, dove $\nu(x_0)$ è la normale esterna ad $\Omega$ in $x_0$. Inoltre si ha

$$u_\Omega(\xi) = \langle \xi, x_0 \rangle \,.$$

Senza ulteriori ipotesi su $\Omega$, il punto $x_0 \in \partial\Omega$ non è unico. Se $\Omega$ verifica anche l'ipotesi di stretta convessità allora il punto $x_0$ è unico.

*Prova.* Non è restrittivo supporre $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n\}$. Poiché $\Omega$ è convesso, esso ammette un piano di supporto in ogni punto del bordo. Dato $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, le ipotesi su $\Omega$ assicurano l'esistenza di un punto $x_0 \in \partial\Omega$ tale che $\nu(x_0) = \xi$. Sia $\pi_{x_0}$ il piano di supporto a $\partial\Omega$ in $x_0$. Il piano $\pi_{x_0}$ individua due semispazi chiusi $\pi_{x_0}^+$ e $\pi_{x_0}^-$. Assumiamo che $\Omega \subset \pi_{x_0}^+$. Il prodotto scalare $\langle \xi, x_0 \rangle$ è la distanza con segno di $\pi_{x_0}$ dall'origine degli assi coordinati. Quindi $\langle \xi, x \rangle \leq \langle \xi, x_0 \rangle$ per ogni $x \in \Omega$, ovvero $u_\Omega(\xi) = \langle \xi, x_0 \rangle$. □

**Proposizione 3.2.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso con* $\operatorname{diam}(A) = 2$ *e sia $u$ la funzione di supporto di $A$. Allora $A$ soddisfa la proprietà della striscia con spessore 2 se e solo se $u(\xi) + u(-\xi) = 2$ per ogni $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$.*

*Dimostrazione.* Fissiamo $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$. Siano $T_\xi^+$ e $T_\xi^-$ gli iperpiani di supporto di $A$ in $\xi$ e $-\xi$. $A$ soddisfa le proprietà della striscia rispetto a $\xi$ se e solo se $\operatorname{dist}(T_\xi^-, T_\xi^+) = 2$, se e solo se

$$2 = \sup_{x \in A} \langle x, \xi \rangle - \inf_{x \in A} \langle x, \xi \rangle = u(\xi) + u(-\xi).$$

□

Cercando di esprimere l'equimisurabilità per sezioni tra due insiemi usando la loro funzione di supporto, in un primo tempo ci sembrava di aver trovato il seguente risultato: se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso con $\operatorname{diam}(A) = 2$ e $u$ è la funzione di supporto di $A$, allora $A$ è equimisurabile per $e_n$-sezioni con $B(0,1)$ se e solo se $u(\xi) + u(\hat{\xi}) = 2$ per ogni $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, dove $\hat{\xi} = (\xi', -\xi_n)$. La dimostrazione a cui avevamo pensato iniziava fissando $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ e considerando due punti di $\partial A$, $x^+ = (x', x_n^+)$ e $x^- = (x', x_n^-)$ con $x' = \xi'$, tali che $\nu(x^+) = \xi$, $\nu(x^-) = \hat{\xi}$. Il passaggio cardine della dimostrazione era proprio il fatto che $\nu(x^+) = \xi$, $\nu(x^-) = \hat{\xi}$. Tuttavia questa situazione è in generale falsa.

*Osservazione* 3.4. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

i) $u(x) + u(-x) = 2\,||x||$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;

ii) $u(x) + u(\hat{x}) = 2\,||x||$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, con $\hat{x} = (x', -x_n)$.

Sia $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e_n \rangle = 0\}$. Allora

1. da i) e ii) si ha che

$$u(x) = u(-\hat{x}) \tag{3.5}$$
$$u(-x) = u(\hat{x}) \tag{3.6}$$

   per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, ovvero $u$ è simmetrica rispetto all'asse $x_n$;

2. da ii) con $x = (x', 0) = \hat{x}$ segue che $u(x) = ||x||$ per ogni $x \in \pi$.

**Proposizione 3.3.** *Sia $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} ||x||\,\varphi\big(\frac{x}{||x||}\big), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

*Allora $f$ è convessa in $\mathbb{R}^2$ se e solo se*

$$\varphi(x) + \varphi''(x) \geq 0 \tag{3.7}$$

*per ogni $x \in \mathbb{S}^1$, dove si indentifica $\mathbb{S}^1 \equiv [0, 2\pi]$ e $\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}$ con $x \in [0, 2\pi]$.*

*Dimostrazione.* $f$ è un'estensione positivamente 1-omogenea di $\varphi$ a $\mathbb{R}^2$. Poiché per ogni rotazione $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si ha che $f$ è convessa se e solo se $f \circ R$ è convessa, è sufficiente trattare il caso $x_1 > 0$.

Nel semispazio $X_1^+ := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ la funzione argomento $\arg : X_1^+ \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è definita da

$$\arg x = \arctan\Big(\frac{x_2}{x_1}\Big).$$

Sia $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ periodica e di classe $\mathcal{C}^2$ che coincide con $\varphi$ dopo aver identificato $\mathbb{S}^1 \equiv [0, 2\pi]$. La funzione $f$ si riscrive come

$$f(x) = ||x||\, \phi(\arg x) = ||x||\, \phi\Big( \arctan\big(\frac{x_2}{x_1}\big)\Big).$$

Calcoliamo la matrice hessiana $\mathrm{Hess}(f)$ di $f$ su $X_1^+$. Le derivate parziali di $f$ verranno indicate con $f_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ per $i = 1, 2$. L'argomento della funzione $\phi$ verrà omesso.

Le derivate prime di $f$ sono

$$f_1 = \frac{1}{||x||}[x_1\phi - x_2\phi'].$$
$$f_2 = \frac{1}{||x||}[x_2\phi + x_1\phi'].$$

Le derivate seconde di $f$ sono

$$f_{11} = \frac{x_2^2}{||x||^3}(\phi + \phi'').$$
$$f_{22} = \frac{x_1^2}{||x||^3}(\phi + \phi'').$$
$$f_{12} = \frac{-x_1x_2}{||x||^3}(\phi + \phi'') = f_{21}.$$

La matrice hessiana di $f$ è

$$\mathrm{Hess}(f) = (\phi + \phi'')H,$$

con

$$H = \begin{pmatrix} \frac{x_2^2}{||x||^3} & -\frac{x_1x_2}{||x||^3} \\ -\frac{x_1x_2}{||x||^3} & \frac{x_1^2}{||x||^3} \end{pmatrix}.$$

Hess$(f)$ è semidefinita positiva se e solo se il suo minimo autovalore è non-negativo. In $\mathbb{R}^2$ ciò equivale richiedere che tr $\big(\text{Hess}(f)\big) \geq 0$ e det $\big(\text{Hess}(f)\big) \geq 0$. Si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} H &= \frac{1}{||x||} > 0 \\ \det H &= \frac{x_1^2 x_2^2}{||x||^6} - \frac{x_1^2 x_2^2}{||x||^6} = 0.\end{aligned}$$

Dunque Hess$(f) \geq 0$ se e solo se $\phi + \phi'' \geq 0$, e poiché $\varphi$ è una rappresentante di $\phi$ in coordinate cartesiane, l'ultima condizione equivale a $\varphi(x) + \varphi''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{S}^1$. $\square$

**Teorema 3.2.** *Sia $r \in \mathbb{R}$ e sia $\phi_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la funzione di classe $\mathcal{C}^2$ così definita:*

$$\phi_r(\theta) := \begin{cases} 1 + r\sin^4(\theta) & \theta \in [0, \pi] \\ 1 - r\sin^4(-\theta), & \theta \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

*Sia $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e_n \rangle = 0\}$. Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ la funzione $u_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} ||x||\, \phi_\varepsilon\big(\arg x\big), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

*è convessa, positivamente 1-omogenea, simmetrica rispetto all'asse coordinato $x_n$ e tale che $u_\varepsilon(x) = ||x||$ per ogni $x \in \pi$.*

*Dimostrazione.* Le derivate prime e seconde di $\phi_\varepsilon$ sono

$$\phi_\varepsilon'(\theta) = \begin{cases} 4\varepsilon \sin^3(\theta)\cos(\theta), & \theta \in [0, \pi] \\ 4\varepsilon \sin^3(-\theta)\cos(-\theta), & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$\phi_\varepsilon''(\theta) = \begin{cases} 4\varepsilon\,[3\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) - \sin^4(\theta)], & \theta \in [0, \pi] \\ 4\varepsilon\,[-3\sin^2(-\theta)\cos^2(-\theta) + \sin^4(-\theta)], & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Le funzioni $\phi_\varepsilon$, $\phi_\varepsilon'$ e $\phi_\varepsilon''$ sono continue. Dunque $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}^2\big([0, 2\pi]\big)$. Per costruzione, $\phi_\varepsilon$ soddisfa le ipotesi della Proposizione 3.3 e le proprietà

1. $\phi_\varepsilon(\theta) + \phi_\varepsilon(\theta + \pi) = 2$
2. $\phi_\varepsilon(\theta) + \phi_\varepsilon(-\theta) = 2$
3. $\phi_\varepsilon(\theta) = \phi_\varepsilon(\pi - \theta)$
4. $\phi_\varepsilon(0) = \phi_\varepsilon(\pi) = 1$.

Inoltre, se $\theta \in [0, \pi]$ si ha che

$$\phi_\varepsilon(\theta) + \phi_\varepsilon''(\theta) = 1 + \varepsilon \sin^4(\theta) + 4\varepsilon[3\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) - \sin^4(\theta)].$$

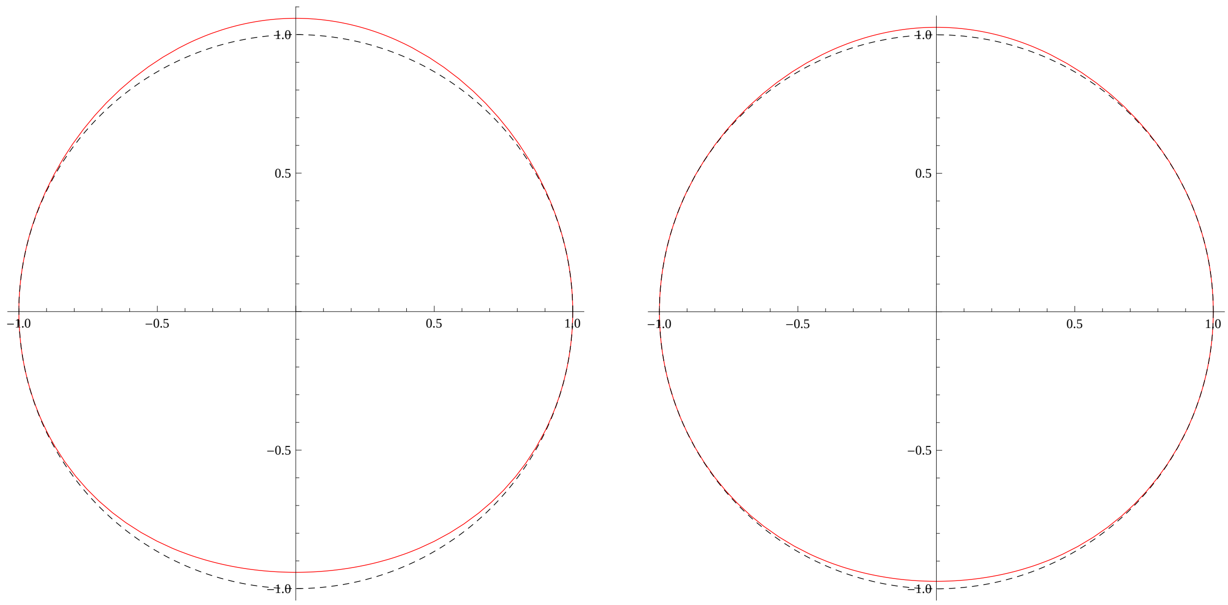
Poiché $\varepsilon \sin^4(\theta) \leq \varepsilon$ e $\phi''(\theta) \leq 16\,\varepsilon$, per la disuguaglianza triangolare si ha la stima $\phi_\varepsilon + \phi_\varepsilon'' \geq 1 - 17\,\varepsilon \geq 0$ se e solo se $\varepsilon \leq \frac{1}{17}$. Le medesime stime valgono per $\theta \in [\pi, 2\pi]$.

Per ogni $\varepsilon \leq \varepsilon_0 := \frac{1}{17}$, la funzione convessa e positivamente 1-omogenea $u_\varepsilon$ estende $\phi_\varepsilon$ a $\mathbb{R}^2$. $\square$

Una notazione alternativa per un compatto convesso $K \subset \mathbb{R}^n$ definito tramite la sua funzione di supporto $u$ è $K_u$.

*Osservazione* 3.5. Il Teorema 3.2 tratta esplicitamente il caso di $\phi_{\varepsilon,k}(\theta) = 1 + \sin^{2k}(\theta)$ con $k = 2$. La tesi rimane valida per ogni naturale $k \geq 2$ prendendo $\varepsilon_0 = 1/(1 + 4k^2)$. Se $k = 0$ o $k = 1$ si perde la regolarità di $\phi_{\varepsilon,k}$.

Chiaramente gli insiemi $K_{u_{\varepsilon,k}}$ non sono isodiametrici. Rimane aperta la questione su come esprimere tramite la funzione di supporto $u$ le condizioni sufficienti affinché un insieme sia isodiametrico. Raggiunta questa caratterizzazione, l'obbiettivo è mostrare che allora la funzione $u$ coincide con l'identità.




(a) k=2 (b) k=3

Figura 3.1: $\mathbb{S}^1$ e il bordo di $K_{u_{\varepsilon,k}}$ con $\varepsilon = 1/(1 + 4k^2)$.

# Capitolo 4

# Insiemi isodiametrici in spazi metrici

## 4.1 Teorema di Blaschke

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico e $A \subset X$ un suo sottoinsieme. Ricordiamo che per ogni $x \in X$ si definisce la distanza dall'insieme $A$ come

$$\mathrm{dist}(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

Dato un numero $\delta > 0$, si dice $\delta$-*intorno* di $A$ l'insieme

$$A_\delta = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) < \delta\}.$$

Osserviamo che per ogni $\delta, \eta > 0$ si ha l'inclusione

$$(A_\delta)_\eta \subset A_{\delta+\eta}.$$

Infatti $(A_\delta)_\eta = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A_\delta) < \eta\}$ e se $x \in (A_\delta)_\eta$ allora per ogni $y \in A_\delta$ si ha $d(x, y) < \eta$. D'altra parte $\mathrm{dist}(y, A)$ per ogni $y \in A_\delta$. Per la disuguaglianza triangolare si ha che $d(x, A) \le d(x, y) + \mathrm{dist}(y, A) < \eta + \delta$. La prova è conclusa.

*Osservazione* 4.1. In generale non vale l'inclusione $A_{\delta+\eta} \subset (A_\delta)_\eta$. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ gli insiemi definiti da $A = (-\infty, 0]$, $B = [2, +\infty)$. Consideriamo lo spazio $X := A \cup B$ munito della metrica euclidea. Per ogni $0 < \delta \le 2$ si ha che $A_\delta = A$, $B_\delta = B$. Se $1 < \delta \le 2$ allora $(A_\delta)_\delta = (A)_\delta = A$, ma, poiché $\delta + \delta = 2 + (2\delta - 2) > 2$, si ha anche che $(A)_{\delta+\delta} \cap B \neq \emptyset$ e quindi $(A)_{\delta+\delta} \supsetneqq A = (A_\delta)_\delta$.

Osserviamo anche che se $C \subset X$ è chiuso, allora

$$C = \bigcap_{\delta > 0} C_\delta.$$

Infatti se $x \in C$ allora $x \in C_\delta$ per ogni $\delta > 0$. Viceversa, se $x \notin C$ allora, poiché $X \setminus C$ è aperto si ha che $B(x, r) \subset X \setminus C$ per ogni $0 < r < \mathrm{dist}(x, C)$. In particolare $x \notin C_\delta$ per ogni $0 < \delta < \mathrm{dist}(x, C)$ e dunque $x \notin \bigcap_{\delta > 0} C_\delta$.

**Definizione 4.1** (Metrica di Hausdorff)**.** Sia $\mathcal{K} = \{K \subset X : K \neq \emptyset \text{ compatto}\}$. Si dice *metrica di Hausdorff* la funzione $\delta : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to [0, +\infty)$, $(E, F) \mapsto \delta(E, F)$ così definita

$$\delta(E, F) = \inf\{\delta > 0 : E \subset F_\delta,\ F \subset E_\delta\}.$$

**Proposizione 4.1.** *$(\mathcal{K}, \delta)$ è uno spazio metrico.*

*Dimostrazione.* La funzione $\delta$ soddisfa le tre proprietà di una metrica per ogni $E, F, G \in \mathcal{K}$.

1. Non-degenerazione: $\delta(E, F) = 0$ se e solo se $E \subset F_\delta$ e $F \subset E_\delta$ per ogni $\delta > 0$. Inoltre gli insiemi $E, F$ sono chiusi. Quindi $E \subset \bigcap_{\delta>0} F_\delta = F$ e $F \subset \bigcap_{\delta>0} E_\delta = E$, e dunque $E = F$.

2. La simmetria $\delta(E, F) = \delta(F, E)$ discende dalla definizione di $\delta$.

3. Disuguaglianza triangolare: $\delta(E, F) \leq \delta(E, G) + \delta(G, F)$. Siano $\delta_1 = \delta(E, G)$, $\delta_2 = \delta(G, F)$. Se $E \subset G_{\delta_1}$ e $G \subset E_{\delta_1}$, $G \subset F_{\delta_2}$ e $F \subset G_{\delta_2}$, allora

$$E \subset G_{\delta_1} \text{ e } G \subset F_{\delta_2} \tag{4.1}$$
$$F \subset G_{\delta_2} \text{ e } G \subset E_{\delta_1}. \tag{4.2}$$

   Da (4.1) segue che $E \subset (F_{\delta_2})_{\delta_1} \subset F_{\delta_1+\delta_2}$. Da (4.2) segue che $F \subset (E_{\delta_2})_{\delta_1} \subset E_{\delta_1+\delta_2}$. Quindi

$$\delta(E, F) \leq \delta_1 + \delta_2 = \delta(E, G) + \delta(G, F).$$

□

Come dimostrato in [4] (Teorema 3.16) e in [1] (§18), proviamo il seguente

**Teorema 4.1** (Teorema di compattezza, Blaschke)**.** *Siano $(X, d)$ completo e $K \subset X$ compatto. Sia $\mathscr{C} = \{H \in \mathcal{K} : H \subset K\}$ una famiglia infinita di insiemi compatti. Allora ogni successione in $\mathscr{C}$ ha una sottosuccessione che converge ad un elemento di $\mathscr{C}$ nella distanza $\delta$.*

*Dimostrazione.* Sia $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{C}$ di elementi distinti. Vogliamo estrarne una sottosuccessione convergente in $\mathscr{C}$.

1. *Selezione della sottosuccessione.*

   a) *Passo base.* Consideriamo la successione $\{E_{1,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ definita da

$$E_{1,i} = E_i$$

   per ogni $i \in \mathbb{N}$. La famiglia di palle unitarie aperte $\{B(x, 1) : x \in K\}$ forma un ricoprimento aperto di $K$. Per compattezza esistono $n_1 \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_{n_1} \in K$ tali che

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n_1} B(x_j, 1).$$

Sia $\mathscr{B}_1 = \{B_j^1 := B(x_j, 1) : j = 1, \dots, n_1\}$. Per ogni $i \in \mathbb{N}$ definiamo la famiglia

$$\mathscr{F}_{1,i} = \{B_j^1 \in \mathscr{B}_1 : B_j^1 \cap E_{1,i} \neq \emptyset,\ j = 1, \dots, n_1\}.$$

Per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathscr{F}_{1,i} \subset \mathscr{B}_1$, e poiché $\mathscr{B}_1$ è finita allora anche $\mathscr{F}_{1,i}$ lo è. Quindi esiste al più un numero finito di famiglie $\mathscr{F}_{1,i}$ distinte, al variare di $i \in \mathbb{N}$. Esistono allora una selezione di indici $\{i_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e un numero $N_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\mathscr{F}_{1,i_k} = \mathscr{F}_{1,N_1} =: \mathscr{F}_1$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

b) *Secondo passo.* Consideriamo la sottosuccessione $\{E_{2,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{E_{1,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ definita da

$$E_{2,k} = E_{1,i_k}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Come nel passo base, esistono $n_2 \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_{n_2} \in K$ tali che

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n_2} B\big(x_j, \frac{1}{2}\big).$$

In maniera analoga, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si definiscono le famiglie

$$\mathscr{B}_2 = \{B_j^2 := B\big(x_j, \frac{1}{2}\big) : j = 1, \dots, n_2\},$$
$$\mathscr{F}_{2,i} = \{B_j^2 \in \mathscr{B}_2 : B_j^2 \cap E_{2,k} \neq \emptyset,\ j = 1, \dots, n_2\} \subset \mathscr{B}_2.$$

Esistono una selezione di indici $\{k_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ e un numero $N_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\mathscr{F}_{2,k_s} = \mathscr{F}_{2,N_2} =: \mathscr{F}_2$$

per ogni $s \in \mathbb{N}$. Il terzo passo inizia considerando la sottosuccessione $\{E_{3,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ di $\{E_{2,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ definita da

$$E_{3,s} = E_{2,k_s}$$

per ogni $s \in \mathbb{N}$.

c) *Passo induttivo.* Seguendo il medesimo procedimento dei passi a), b), per ogni $k > 1$ definiamo una sottosuccessione $\{E_{k,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ di $\{E_{k-1,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Per compattezza dell'insieme $K$ esistono $n_k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_{n_k} \in K$ tali che

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n_k} B\big(x_j, \frac{1}{k}\big).$$

Per ogni $i \in \mathbb{N}$ si definiscono le famiglie

$$\mathscr{B}_k = \{B_j^k := B\big(x_j, \frac{1}{k}\big) : j = 1, \dots, n_k\},$$
$$\mathscr{F}_{k,i} = \{B_j^k \in \mathscr{B}_k : B_j^k \cap E_{k-1,i} \neq \emptyset,\ j = 1, \dots, n_k\} \subset \mathscr{B}_k.$$

Poiché $\mathscr{B}_k$ e $\mathscr{F}_{k,i}$ sono finite per ogni $i \in \mathbb{N}$, allora c'è al più un numero finito di famiglie $\mathscr{F}_{k,i}$ distinte, al variare di $i \in \mathbb{N}$. Da cui l'esistenza di una selezione di indici $\{i_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ e di un numero $N_k \in \mathbb{N}$ tali che

$$\mathscr{F}_{k,i_s} = \mathscr{F}_{k,N_k} =: \mathscr{F}_k$$

per ogni $s \in \mathbb{N}$. La sottosuccessione cercata è quella definita da

$$E_{k,s} = E_{k-1,i_s}$$

per ogni $s \in \mathbb{N}$.

d) Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia

$$F^k = \bigcup_{B\in\mathscr{F}_k} B.$$

Per costruzione valgono le inclusioni $E_{k,i} \subset F^k \subset [E_{k-1,i}]_{\frac{1}{k}}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Ne segue che

$$\delta(E_{k,i}, F^k) \leq \frac{1}{k}$$

e

$$\delta(E_{k,i}, E_{k,j}) \leq \delta(E_{k,i}, F^k) + \delta(F^k, E_{k,j}) \leq \frac{2}{k}$$

per ogni $i, j \in \mathbb{N}$.

e) *Selezione diagonale di Cantor*. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato abbiamo la sottosuccessione $\{E_{k,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ di $\{E_{k-1,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Consideriamo la successione $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ definita per ogni $i \in \mathbb{N}$ da

$$F_i = E_{i,i}.$$

Per il punto d) si ha che

$$\delta(F_i, F_j) \leq \frac{2}{\min\{i,j\}} \tag{4.3}$$

per ogni $i, j \in \mathbb{N}$. Dunque $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di Cauchy di $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

2. *Costruzione dell'insieme limite.*
Definiamo l'insieme $K_m = \overline{\bigcup_{i=m}^{\infty} F_i}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. $K_m$ è non-vuoto per costruzione ed è compatto poiché sottoinsieme chiuso del compatto $K$. Dunque $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una famiglia di compatti non-vuoti tali che $K_{j+1} \subset K_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Poiché $X$ è completo, l'insieme

$$C = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$$

è un compatto non-vuoto.

3. *Prova della convergenza.*
   Da (4.3) si ha che $K_j \subset [F_j]_{\frac{2}{j}}$ e, in particolare,

$$C \subset [F_j]_{\frac{2}{j}} \tag{4.4}$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$. Viceversa, fissato $j \in \mathbb{N}$, sia $x \in F_j$. Da (4.3) si ha che $x \in [F_i]_{\frac{2}{j}}$ per ogni $i \geq j$, da cui $x \in [K_m]_{\frac{2}{j}}$ per ogni $m \geq j$. Sia $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una successione in $C$ tale che $y_m \in K_m$ e che $d(x, y_m) \leq \frac{2}{j}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Per la compattezza di $C$ esiste una sottosuccessione $\{y_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergente ad un punto $y \in C$ con $d(x, y) \leq \frac{2}{j}$. Ne segue che $x \in [C]_{\frac{2}{j}}$. Analogo discorso per ogni $x \in F_j$. Dunque

$$F_j \subset [C]_{\frac{2}{j}} \tag{4.5}$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$. Da (4.4) e (4.5) si ha che

$$\delta(C, F_j) \leq \frac{2}{j}$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$. La dimostrazione è conclusa.

□

**Teorema 4.2.** *Se $(X, d)$ è compatto allora $(\mathcal{K}, \delta)$ è compatto.*

*Dimostrazione.* Si procede come nel Teorema 4.1 con $K = X$. □

## 4.2 Esistenza di insiemi isodiametrici in spazi metrici

Diciamo che una misura $\mu$ su uno spazio $X$ è *superiormente regolare* o *regolare dall'alto* se per ogni $C \subset X$ compatto si ha

$$\mu(C) = \inf_{\substack{C\subset\Omega \\ \Omega\subset X \text{ aperto}}} \mu(\Omega).$$

**Proposizione 4.2.** *Sia $(X, d)$ uno spazio metrico e sia $\mu$ una misura boreliana su $X$ superiormente regolare. Siano $K \subset X$ un compatto e $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di compatti di $X$ tali che $\lim_{j\to\infty} \delta(K_j, K) = 0$. Allora*

$$\mu(K) \geq \limsup_{j\to\infty} \mu(K_j). \tag{4.6}$$

*Dimostrazione.* Poiché $\mu$ è superiormente regolare, per una proprietà dell'estremo inferiore si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $\Omega \subset X$ con $K \subset \Omega$ tale che $\mu(K) + \varepsilon \geq \mu(\Omega)$. Per la convergenza di $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ a $K$ esiste $j_\Omega \in \mathbb{N}$ tale che $K_j \subset \Omega$ per ogni $j \geq j_\Omega$. Per inclusione si ha che $\mu(K_j) \leq \mu(\Omega)$ per ogni $j \geq j_\Omega$. Quindi

$$\limsup_{j\to\infty} \mu(K_j) \leq \mu(\Omega) \leq \mu(K) + \varepsilon.$$

Mandando $\varepsilon$ a zero si ottiene la tesi. □

*Osservazione* 4.2. In uno spazio metrico le misure boreliane regolari dall'alto sono dunque superiormente semicontinue sui compatti rispetto alla distanza $\delta$. Il seguente esempio mostra che la tesi della Proposizione 4.2 non si può estendere alla semicontinuità inferiore. Sia $X = \mathbb{R}^2$ e sia $\mu = \mathcal{L}^2$ la misura di Lebesgue bidimensionale. Si consideri la successione $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di compatti di $\mathbb{R}^2$ definita da

$$\begin{aligned}
K_1 &= \big\{(i,j) : i,j \in \{0,1\}\big\},\\
K_2 &= \Big\{\Big(\frac{i}{2},\frac{j}{2}\Big) : i,j \in \{0,1,2\}\Big\},\\
K_3 &= \Big\{\Big(\frac{i}{2^2},\frac{j}{2^2}\Big) : i,j \in \{0,1,\dots,2^2\}\Big\},\\
K_n &= \Big\{\Big(\frac{i}{2^{n-1}},\frac{j}{2^{n-1}}\Big) : i,j \in \{0,1,\dots,2^{n-1}\}\Big\}.
\end{aligned}$$

Sia $K = [0,1] \times [0,1]$ il quadrato unitario chiuso. Si ha che $\mathcal{L}^2(K_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}^2(K) = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \delta(K_n, K) = 0$. In particolare, la relazione $\mathcal{L}^2(K) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{L}^2(K_n)$ è falsa.

**Lemma 4.1.** *Sia $\mathcal{K} = \{C \subset X : C \neq \emptyset$ compatto$\}$. Siano $K \in \mathcal{K}$ e $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{K}$ tali che $\lim_{j\to\infty} \delta(K_j, K) = 0$. Allora $\lim_{j\to\infty} \operatorname{diam}(K_j) = \operatorname{diam}(K)$.*

*Dimostrazione.*

1. Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $A \subset X$ si ha che

$$\operatorname{diam}(A_\varepsilon) \leq \operatorname{diam}(A) + 2\varepsilon.$$

Infatti se $x, y \in A_\varepsilon$ allora $\operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon$, $\operatorname{dist}(y, A) < \varepsilon$. Siano $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in \overline{A}$ tali che $d(x, x_\varepsilon) = \operatorname{dist}(x, A)$, $d(y, y_\varepsilon) = \operatorname{dist}(y, A)$. Per la disuguaglianza triangolare si ha che

$$d(x, y) \leq d(x, x_\varepsilon) + d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) + d(y_\varepsilon, y) \leq \operatorname{diam}(A) + 2\varepsilon.$$

2. Mostriamo che la funzione diametro è continua nella topologia indotta da $\delta$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\delta(K_j, K) \leq \varepsilon$ per ogni $j \geq j_\varepsilon$. Si ha dunque

$$K_j \subset K_\varepsilon \tag{4.7}$$
$$K \subset [K_j]_\varepsilon \tag{4.8}$$

per ogni $j \geq j_\varepsilon$. Da (4.7) e (4.8) si ottiene che

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(K_j) &\leq \operatorname{diam}(K_\varepsilon) \leq \operatorname{diam}(K) + 2\varepsilon,\\
\operatorname{diam}(K) &\leq \operatorname{diam}([K_j]_\varepsilon) \leq \operatorname{diam}(K_j) + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$|\operatorname{diam}(K) - \operatorname{diam}(K_j)| \leq 2\varepsilon$$

per ogni $j \geq j_\varepsilon$. Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ e prendendo il limite per $j \to \infty$ si ha la tesi.

$\square$

**Definizione 4.2** (Insieme isodiametrico)**.** Siano $(X, d)$ uno spazio metrico e $\mu$ una misura boreliana su $X$. L'insieme $K \in \mathcal{K}$ si dice *isodiametrico* in $(X, d, \mu)$ se esiste $\lambda > 0$ tale che $\mu(K) \geq \lambda$ e $\operatorname{diam}(K) \leq \operatorname{diam}(H)$ per ogni $H \in \mathcal{K}$ con $\mu(H) \geq \lambda$.

**Teorema 4.3.** *Siano $(X, d)$ uno spazio metrico compatto e $\mu$ una misura boreliana su $X$ superiormente regolare. Supponiamo che per $\lambda > 0$ la famiglia $\mathscr{G} = \{H \in \mathcal{K} : \mu(H) \geq \lambda\}$ sia non-vuota. Allora esiste un insieme $K \in \mathscr{G}$ tale che* $\operatorname{diam}(K) \leq \operatorname{diam}(H)$ *per ogni $H \in \mathscr{G}$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo una successione $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{G}$ di elementi distinti tali che

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{diam}(K_j) = \inf\{\operatorname{diam}(H) : H \in \mathscr{G}\}.$$

Per il Teorema 4.2 di Blaschke esistono una sottosuccessione $\{K_{j_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ di $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e un insieme $K \in \mathcal{K}$ tali che $\lim_{l\to\infty} \delta(K_{j_l}, K) = 0$. Per la Proposizione 4.2 si ha

$$\mu(K) \geq \limsup_{l\to\infty} \mu(K_{j_l}) \geq \lambda.$$

Per il Lemma 4.1

$$\inf\{\operatorname{diam}(H) : H \in \mathscr{G}\} = \lim_{l\to\infty} \operatorname{diam}(K_{j_l}) = \operatorname{diam}(K).$$

□

Sia $(X, d, \mu)$ uno spazio metrico munito di una misura boreliana $\mu$. Supponiamo che

1) le isometrie di $X$ agiscano in modo transitivo su $X$, ovvero per ogni $x, y \in X$ esiste un'isometria $T$ di $X$ tale che $T(x) = y$;

2) per ogni $K \subset X$ compatto e per ogni isometria $T$ di $X$ si abbia

$$\mu\big(T(K)\big) = \mu(K).$$

Lo spazio metrico $(X, d)$ si dice *proprio* se le palle chiuse sono compatte. Se $X$ è *proprio* allora $X$ è completo. Infatti ogni successione di Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$ è limitata e dunque esiste $R > 0$ tale che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B(0, R)}$. Poiché $\overline{B(0, R)}$ è compatta, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente in $\overline{B(0, R)}$. Ma allora anche l'intera successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $X$.

**Teorema 4.4.** *Sia $(X, d, \mu)$ uno spazio metrico munito di una misura boreliana $\mu$ superiormente regolare. Supponiamo che lo spazio $X$ sia proprio e che, relativamente a $\mu$, verifichi le condizioni* 1), 2)*. Se per $\lambda > 0$ la famiglia $\mathscr{G} = \{H \in \mathcal{K} : \mu(H) \geq \lambda\}$ è non-vuota, allora esiste un insieme $K \in \mathscr{G}$ tale che* $\operatorname{diam}(K) \leq \operatorname{diam}(H)$ *per ogni $H \in \mathscr{G}$.*

*Dimostrazione.* Indichiamo con $\mathcal{I}$ il gruppo delle isometrie di $X$. Proviamo l'esistenza del minimo tramite il Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni. Sia $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{G}$ di elementi distinti tali che

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{diam}(K_j) = \inf\{\operatorname{diam}(H) : H \in \mathscr{G}\}.$$

Fissati $x_0 \in K$ e $x_j \in K_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, per la proprietà 1) esiste per ogni $j \in \mathbb{N}$ un'isometria $T_j \in \mathcal{I}$ tale che $T_j(x_j) = x_0$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia $\widehat{K_j} = T_j(K_j)$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha che $\mu(\widehat{K_j}) = \mu(K_j) \geq \lambda$ per la proprietà 2), e inoltre che $\mathrm{diam}(\widehat{K_j}) = \mathrm{diam}(K_j)$. A meno di sottosuccessioni si può assumere che $\{\mathrm{diam}(K_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ sia decrescente. Quindi è lecito supporre che esista $0 < M < +\infty$ tale che $\mathrm{diam}(K_j) \leq M$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Poiché $x_0 \in \widehat{K_j}$ e $\mathrm{diam}(\widehat{K_j}) \leq M$, allora

$$\widehat{K_j} \subset \overline{B(x_0, M)}$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$. Per le ipotesi su $X$, l'insieme $\widehat{K_j} \subset \overline{B(x_0, M)}$ è compatto. Per il Teorema 4.2 di Blaschke esistono una sottosuccessione $\{K_{j_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ di $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e un insieme $K \in \mathcal{K}$ tali che $\lim_{l\to\infty} \delta(K_{j_l}, K) = 0$. Si conclude come nel Teorema 4.3. □

*Osservazione* 4.3. Affinché la famiglia $\mathscr{G}$ dei Teoremi 4.3 e 4.4 sia chiusa per il passaggio al limite nella metrica $\delta$ è stato necessario vincolare la misura $\mu$ con una disuguaglianza larga. Infatti $\mu$ è in generale solo superiormente semicontinua rispetto a $\delta$. Sia $B_s(y) := \{x \in X : d(x, y) \leq s\}$ la palla chiusa in $(X, d)$ di centro $y \in X$ e raggio $s > 0$. Se la funzione $s \mapsto \mu\big(B_s(x)\big)$ è continua per ogni $x \in X$, allora i Teoremi 4.3 e 4.4 rimangono validi sostituendo $\mathscr{G}$ con la famiglia $\mathscr{G}_{ug} = \{H \in \mathcal{K} : \mu(H) = \lambda\}$. Per la dimostrazione si prosegue da quelle già svolte. Poiché in generale $K \notin \mathscr{G}_{ug}$ e per ogni $x \in X$ esiste un unico $r > 0$ tale che $\mu\big(B_r(x) \cap K\big) = \lambda$, la tesi è raggiunta fissando $x \in X$ e considerando $B_r(x) \cap K \in \mathscr{G}_{ug}$ in luogo di $K$. Il Teorema 5.1 verrà dimostrato con la medesima idea.

*Osservazione* 4.4. La Definizione 4.2 e i Teoremi 4.3 e 4.4 si possono riformulare in termini di problema di massimo per la misura di insiemi compatti che soddisfano un vincolo sul diametro. Le dimostrazioni sono analoghe. È ancora applicabile il Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni. Infatti, per la Proposizione 4.2 la misura $\mu$ è superiormente semicontinua rispetto alla topologia generata da $\delta$. Inoltre, poiché per il Lemma 4.1 la funzione diametro è continua rispetto a $\delta$, il vincolo può essere richiesto come uguaglianza anziché come disuguaglianza larga.

Enunciamo l'analogo del Teorema 4.3 come problema di massimo per la misura $\mu$.

**Teorema 4.5.** *Siano $(X, d)$ uno spazio metrico compatto e $\mu$ una misura boreliana su $X$ superiormente regolare. Supponiamo che per $\lambda > 0$ la famiglia $\mathscr{E} = \{H \in \mathcal{K} : \mathrm{diam}(H) = \lambda\}$ sia non-vuota. Allora esiste un insieme $K \in \mathscr{E}$ tale che $\mu(K) \geq \mu(H)$ per ogni $H \in \mathscr{E}$.*

# Capitolo 5

# Disuguaglianza isodiametrica sulla sfera $\mathbb{S}^{n-1}$

Sia $X = \mathbb{S}^{n-1}$ con $d$ la distanza euclidea e $\mu = \mathcal{H}^{n-1}$ la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale. È noto che $\mathcal{H}^{n-1}$ è una misura boreliana regolare e che $\mathcal{H}^{n-1}$ è invariante per le isometrie di $\mathbb{S}^{n-1}$. Si rimanda al Capitolo 2 di [3] per la dimostrazione di questi risultati e per ulteriori proprietà di $\mathcal{H}^{n-1}$. Inoltre, se $s > 0$ e $B_s(x)$ è la palla chiusa di raggio $s$ e centro $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, la funzione $s \mapsto \mathcal{H}^{n-1}\big(B_s(x)\big)$ è continua e strettamente crescente. Posto $\mathcal{K} = \{C \subset \mathbb{S}^{n-1} : C \neq \emptyset \text{ compatto}\}$, si ha dunque che per ogni $\lambda \in [0, \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})]$ la famiglia $\mathscr{G} = \{H \in \mathcal{K} : \mu(H) \geq \lambda\}$ è non-vuota. Il Teorema 4.3 prova l'esistenza di insiemi isodiametrici in $(\mathbb{S}^{n-1}, d, \mu)$. Ci proponiamo di mostrare che gli insiemi su $\mathbb{S}^{n-1}$ della forma $B_R(y) = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : d(x,y) \leq R\}$ con $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $R > 0$, ovvero le palle in $(\mathbb{S}^{n-1}, d, \mu)$, sono isodiametrici.

**Teorema 5.1.** *Sia $N \in \mathbb{S}^{n-1}$ un punto sulla sfera. Sia $A \in \mathcal{K}$ e sia $B_r(N) \subset \mathbb{S}^{n-1}$ la palla chiusa di raggio $r > 0$ e centro $N$ tale che*

$$\mu\big(B_r(N)\big) = \mu(A). \tag{5.1}$$

*Allora*

$$\operatorname{diam}\big(B_r(N)\big) \leq \operatorname{diam}(A).$$

Osserviamo che il raggio $r > 0$ del Teorema 5.1 esiste ed è unico poiché la funzione $s \mapsto \mathcal{H}^{n-1}\big(B_s(N)\big)$ è continua e strettamente crescente da $[0, 2]$ in $[0, \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})]$.

Nel seguito denoteremo $B_r = B_r(N)$.

## 5.1 Richiami sulla misura $\mathcal{H}^{n-1}$

Ricordiamo la definizione della misura e della dimensione di Hausdorff, rinviando a [3] per una trattazione completa.

**Definizione 5.1.** Siano $0 \leq s < \infty$ e $0 < \delta \leq \infty$. Per $A \subset \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\Big(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2}\Big)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ \operatorname{diam}(C_j) \leq \delta\Big\},$$

dove $\alpha(s) = \pi^{\frac{s}{2}}/\Gamma(\frac{s}{2}+1)$ con $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$.

La *misura di Hausdorff* $s$-dimensionale di $A \subset \mathbb{R}^n$ è definita come

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

La *dimensione di Hausdorff* $\mathcal{H}_{dim}$ di $A \subset \mathbb{R}^n$ è definita da

$$\mathcal{H}_{dim}(A) = \inf\{0 \leq s < \infty : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Siamo interessati al caso $s = (n-1)$ e alla restrizione di $\mathcal{H}^{n-1}$ su $\mathbb{S}^{n-1}$, che indicheremo ancora con $\mathcal{H}^{n-1}$.

*Osservazione* 5.1. La funzione $r \mapsto \mathcal{H}^{n-1}(B_r)$ è continua. Infatti $\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r) = 0$ poiché $\mathcal{H}_{dim}(\partial B_r) = (n-2)$ implica che $\mathcal{H}^s(\partial B_r) = 0$ per ogni $s > (n-2)$ (si veda il Lemma 2 a p. 65 di [3]). Inoltre sia $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente in $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{j\to\infty} r_j = r$. Si ha che $\{B_{r_j} \setminus B_r\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una famiglia decrescente di sottoinsiemi di $\mathbb{S}^{n-1}$ e che $\bigcap_{j=1}^\infty (B_{r_j} \setminus B_r) = \partial B_r$. Per la continuià dall'alto della misura $\mathcal{H}^{n-1}$ si ha

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{H}^{n-1}(B_{r_j} \setminus B_r) = \mathcal{H}^{n-1}\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}(B_{r_j} \setminus B_r)\Big) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r) = 0.$$

Dunque si ottiene

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{H}^{n-1}(B_{r_j}) = \lim_{j\to\infty} \big(\mathcal{H}^{n-1}(B_r) + \mathcal{H}^{n-1}(B_{r_j} \setminus B_r)\big) = \mathcal{H}^{n-1}(B_r).$$

Ciò prova la continuità a destra. In maniera analoga si prova la continuità a sinistra. La continuità di $r \mapsto \mathcal{H}^{n-1}\big(B_r(N)\big)$ è dimostrata.

## 5.2 Polarizzazione

Dato uno spazio metrico $(X, d)$, si dice che $\mathcal{R} = \{H^-, H, H^+, \rho\}$ è un *sistema di riflessione* se $\{H^-, H, H^+\}$ è una partizione di $X$ con $H^-, H^+ \subset X$ aperti, e $\rho : X \to X$ è una funzione tale che

i) $\rho$ è un'isometria di $X$ tale che $\rho^2 = \mathrm{Id}$ e $\rho H^+ = H^-$;

ii) per ogni $x, y \in H \cup H^+$ si ha che $d(x, y) \leq d(x, \rho y)$.

Per brevità scriveremo $\rho x = \rho(x)$ e $\rho E = \rho(E)$ per ogni $x \in X$, $E \subset X$.

**Definizione 5.2** (Polarizzazione)**.** Sia $\mathcal{R}$ un sistema di riflessione di $X$ e sia $E \subset X$ un insieme. L'insieme

$$E_{\mathcal{R}} = (E \cap \rho E \cap H^-) \cup (E \cap H) \cup \big((E \cup \rho E) \cap H^+\big) \tag{5.2}$$

è detto *polarizzazione* di $E$ rispetto a $\mathcal{R}$.

**Proposizione 5.1.** *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di riflessione di $X$ e sia $E \subset X$ un insieme. Allora*

$$\operatorname{diam}(E_{\mathcal{R}}) \leq \operatorname{diam}(E).$$

*Dimostrazione.* Definiamo gli insiemi $A := E \cap \rho E \cap H^-$, $B := E \cap H$, $C_1 := E \cap H^+$ e $C_2 := \rho E \cap H^+$. Allora $E_{\mathcal{R}} = A \cup B \cup C_1 \cup C_2$. Consideriamo tutte le coppie non ordinate di punti $(x, y) \in E_{\mathcal{R}} \times E_{\mathcal{R}}$. Ci sono dieci possibili casi: 1) $x, y \in A$; 2) $x, y \in B$; 3) $x, y \in C_1$; 4) $x, y \in C_2$; 5) $x \in A$, $y \in B$; 6) $x \in A$, $y \in C_1$; 7) $x \in A$, $y \in C_2$; 8) $x \in A$, $y \in C_1$; 9) $x \in A$, $y \in C_2$; 10) $x \in C_1$, $y \in C_2$. Tra questi, i casi distinti sono tre:

i) $x, y \in E \Rightarrow d(x, y) \leq \operatorname{diam}(E)$ $\big($casi $1), 2), 3), 5), 6), 8)\big)$;

ii) $x, y \in \rho E \Rightarrow \rho x, \rho y \in E \Rightarrow d(x, y) = d(\rho x, \rho y) \leq \operatorname{diam}(E)$ $\big($caso $4)\big)$;

iii) $x \in E$, $\rho y \in E \cap H^- \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, \rho y) \leq \operatorname{diam}(E)$ $\big($casi $7), 9), 10)\big)$.

□

**Proposizione 5.2.** *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di riflessione di $X$ e sia $E \subset X$ un insieme compatto. Allora $E_{\mathcal{R}}$ è compatto.*

*Dimostrazione.* Mostriamo che $E_{\mathcal{R}}$ è sequenzialmente compatto. Definiamo gli insiemi $E^- := \big(E \cap \rho E \cap (H^- \cup H)\big)$, $E^+ := \big(E \cup \rho E \cap (H^+ \cup H)\big)$. Si ha che $E_{\mathcal{R}} = E^- \cup E^+$. Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $E_{\mathcal{R}}$. Se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è costituita da un numero finito di elementi, la tesi è raggiunta. Supponiamo che $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia infinita. In particolare esiste una sottosuccessione infinita $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ di $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenuta in $E^-$, oppure in $E^+$. Ma gli insiemi $E^-, E^+$ sono sequenzialmente compatti. Infatti $\rho$ è un'isometria e gli spazi $(H^- \cup H)$ e $(H^+ \cup H)$ sono chiusi. Quindi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente in $E_{\mathcal{R}}$. □

*Esempio* 5.1. Sia $X = \mathbb{S}^{n-1}$, con $d$ la distanza euclidea sulla sfera e $\mu = \mathcal{H}^{n-1}$ la misura di superficie standard. Sia $H \subset \mathbb{S}^{n-1}$ un cerchio massimo sulla sfera, ovvero $H = \mathbb{S}^{n-1} \cap \pi_0$ dove $\pi_0$ è un iperpiano di $\mathbb{R}^n$ che passa per l'origine. Siano $H^+$ e $H^-$ le due calotte aperte di $\mathbb{S}^{n-1}$ tali che $H^+ \cap H^- = \emptyset$ e $\partial H^+ = H = \partial H^-$. Sia $\rho_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la riflessione rispetto al piano $\pi_0$. Si ha che $\rho_0$ soddisfa su tutto $\mathbb{R}^n$, e quindi su $\mathbb{S}^{n-1}$, le proprietà *i)* e *ii)* richieste per la funzione $\rho$. Dunque $\mathcal{R}_0 = \{H^-, H, H^+, \rho_0\}$ è un *sistema di riflessione* su $\mathbb{S}^{n-1}$.

## 5.3 Dimostrazione del Teorema 5.1

Sia $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$ un insieme compatto fissato. Sia $A^* = B_r \subset \mathbb{S}^{n-1}$ la palla chiusa di raggio $r > 0$ e centro $N \in \mathbb{S}^{n-1}$ che soddisfa la proprietà (5.1). Consideriamo la famiglia $\mathscr{A}$ degli insiemi $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ tali che

1. $C$ è compatto;
2. $\mu(C) = \mu(A)$;
3. $\operatorname{diam}(C) \leq \operatorname{diam}(A)$.

Sia $J : \mathscr{A} \to [0, +\infty)$ il funzionale definito da

$$J(C) = 2\,\mu(A^* \setminus C). \tag{5.3}$$

**Proposizione 5.3.** *Il funzionale $J : \mathscr{A} \to [0, +\infty)$ è inferiormente semicontinuo nella topologia generata dalla metrica $\delta$, ovvero*

$$\liminf_{m\to\infty} J(K_m) \geq J(K)$$

*per ogni $K \in \mathscr{A}$ e ogni successione $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{A}$ tale che $\lim_{m\to\infty} \delta(K_m, K) = 0$.*

*Dimostrazione.* Per ogni insieme $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ sia $C' = \mathbb{S}^{n-1} \setminus C$ il complementare di $C$. Si ha l'uguaglianza insiemistica

$$\mathbb{S}^{n-1} \setminus (A^* \setminus C) = \mathbb{S}^{n-1} \cap (A^* \cap C')' = \mathbb{S}^{n-1} \cap \big((A^*)' \cup C\big) = (A^*)' \cup C. \tag{5.4}$$

Sia $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{A}$ che converge al compatto non-vuoto $K \in \mathscr{A}$ nella distanza $\delta$. Allora la successione $\{\overline{(A^*)'} \cup K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge al compatto non-vuoto $\overline{(A^*)'} \cup K$ nella metrica $\delta$.

Poiché $\mu$ è una misura regolare, dalla Proposizione 4.2 $\mu$ è superiormente semicontinua. In particolare, poiché $\mu(\partial G) = 0$ per ogni insieme $G \subset \mathbb{S}^{n-1}$, si ha

$$\limsup_{m\to\infty} \mu\big((A^*)' \cup K_m\big) = \limsup_{m\to\infty} \mu\big(\overline{(A^*)'} \cup K_m\big) \leq \mu\big(\overline{(A^*)'} \cup K\big) = \mu\big((A^*)' \cup K\big). \tag{5.5}$$

Da (5.5) e (5.4) segue che

$$\mu(\mathbb{S}^{n-1}) - \limsup_{m\to\infty} \mu\big((A^*)' \cup K_m\big) \geq \mu(\mathbb{S}^{n-1}) - \mu\big((A^*)' \cup K\big) = \mu(A^* \setminus K).$$

Poiché si ha che

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{S}^{n-1}) - \limsup_{m\to\infty} \mu\big((A^*)' \cup K_m\big) &= \mu(\mathbb{S}^{n-1}) + \liminf_{m\to\infty} \big\{ -\mu\big((A^*)' \cup K_m\big)\big\} \\ &= \liminf_{m\to\infty} \mu(A^* \setminus K_m),\end{aligned} \tag{5.6}$$

si ottiene la tesi

$$\liminf_{m\to\infty} \mu(A^* \setminus K_m) \geq \mu(A^* \setminus K).$$

L'uguaglianza in (5.6) discende da (5.4). □

Poniamo

$$m := \inf\{J(C) : C \in \mathscr{A}\} \geq 0. \tag{5.7}$$

Esiste una successione $\{K_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ tale che $\lim_{l\to\infty} J(K_l) = m$. A meno di sottosuccessioni, per il Teorema 4.2 esiste $K \subset \mathbb{S}^{n-1}$ compatto non-vuoto tale che $\lim_{l\to\infty} \delta(K_l, K) = 0$. Per il Lemma 4.1 si ha che

$$\mathrm{diam}(K) = \lim_{l\to\infty} \mathrm{diam}(K_l) \leq \mathrm{diam}(A).$$

Per la Proposizione 4.2 si ha che

$$\mu(K) \geq \limsup_{l\to\infty} \mu(K_l) = \mu(A).$$

Sia $s > 0$ tale che l'insieme $\widehat{K} = K \cap B_s$ verifichi $\mu(\widehat{K}) = \mu(A)$.

Si osserva che

i) per la continuità di $t \mapsto \mathcal{H}^{n-1}(K \cap B_t)$, tale $s > 0$ esiste e sarà $s \geq r$. Se fosse $s < r$, dalle inclusioni $\widehat{K} \subset B_s$ e $B_s \subsetneqq B_r$ si avrebbe che $\mu(\widehat{K}) < \mu(B_r) = \mu(A)$;

ii) per l'inclusione $\widehat{K} \subset K$ si ha $\operatorname{diam}(\widehat{K}) \leq \operatorname{diam}(K) \leq \operatorname{diam}(A)$;

iii) $\widehat{K} \in \mathscr{A}$ poiché $\widehat{K}$ soddisfa le proprietà 1., 2. e 3. che definiscono la famiglia $\mathscr{A}$;

iv) poiché $s \geq r$ allora $B_r \cap B'_s = \emptyset$ e

$$\begin{aligned}
\mu(A^* \setminus \widehat{K}) &= \mu\big(B_r \setminus (K \cap B_s)\big) = \mu\big(B_r \cap (K' \cup B'_s)\big) \\
&= \mu\big((B_r \cap K') \cup (B_r \cap B'_s)\big) = \mu(B_r \cap K') = \mu(B_r \setminus K) \\
&= \mu(A^* \setminus K).
\end{aligned}$$

Quindi $J(\widehat{K}) = J(K)$, dove $J$ è il funzionale definito in (5.3).

Abbiamo mostrato che

$$J(\widehat{K}) = m = \inf\{J(C) : C \in \mathscr{A}\},$$

ovvero che $\widehat{K}$ è un minimo per $J$ su $\mathscr{A}$. Senza perdita di generalità, d'ora in avanti supponiamo che $K = \widehat{K}$.

Riguardo ad $m \geq 0$ definito in (5.7) ci sono due casi: 1) $m = 0$; 2) $m > 0$.

## Il caso $m = 0$

Se $m = 0$, poiché $\mu(A^* \setminus K) = 0$ e $\mu(A^*) = \mu(K)$, si ha che $\mu(A^* \triangle K) = 0$, da cui $A^* = K$. Quindi $\operatorname{diam}(A^*) = \operatorname{diam}(K) \leq \operatorname{diam}(A)$ e il Teorema 5.1 è provato.

## Il caso $m > 0$

Mostriamo con un argomento per assurdo che il caso $m > 0$ non può accadere.

Per ogni insieme $G \subset X$ dello spazio metrico $X$ indichiamo con $\chi_G$ la funzione caratteristica di $G$, ovvero la funzione definita da $X$ in $\{0, 1\}$ tale che $\chi_G(x) = 1$ se $x \in G$ e $\chi_G(x) = 0$ se $x \notin G$.

Richiamiamo l'enunciato del seguente Teorema (si veda il Teorema 2.11 di [9]):

**Teorema 5.2.** *Sia $X = H^- \cup H \cup H^+$ una partizione boreliana dello spazio metrico $X$. Sia $\rho : X \to X$ una funzione boreliana tale che $\rho^2 = Id$ e $\rho H^+ = H^-$, e sia $\mu$ una misura boreliana su $X$ tale che $\mu$ è $\rho$-invariante e $\mu(H) = 0$. Sia $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione convessa e strettamente crescente. Allora per ogni coppia di boreliani $G, F \subset X$ si ha che*

$$\int_X \phi\big(|\chi_{G_{\mathcal{R}}}(x) - \chi_{F_{\mathcal{R}}}(x)|\big)\, d\mu \leq \int_X \phi\big(|\chi_G(x) - \chi_F(x)|\big)\, d\mu. \tag{5.8}$$

*Se inoltre $\phi$ è strettamente convessa e*

$$\mu\{x \in H^+ : \chi_G(x) > \chi_G(\rho x) \text{ e } \chi_F(x) < \chi_F(\rho x)\} > 0 \tag{5.9}$$

*allora la disuguaglianza in* (5.8) *è stretta ogni volta che il secondo integrale in* (5.8) *è finito.*

Nel caso 2), poiché $m > 0$ e $\mu(A^*) = \mu(K)$, si ha che

$$\mu(A^* \setminus K) = \mu(K \setminus A^*) > 0, \tag{5.10}$$

che equivale a $\mu(A^* \triangle K) > 0$, a sua volta equivalente a $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\chi_{A^*} - \chi_K|^2\, d\mu > 0$.

### Scelta di un sistema di riflessione

La misura $\mu = \mathcal{H}^{n-1}$ ha la *proprietà di Lebesgue*, ovvero per ogni boreliano $G \subset \mathbb{S}^{n-1}$ si ha che $\mu$-quasi ogni punto di $G$ è *di densità* per $G$. Ciò significa per $\mu$-quasi ogni $x \in G$ si ha che

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mu\big(G \cap B_t(x)\big)}{\mu\big(B_t(x)\big)} = 1. \tag{5.11}$$

Se indichiamo con $D(G)$ l'insieme dei punti di densità di $G$, si ha che $\mu\big(D(G)\big) = \mu(G)$.

Per la condizione (5.10) esistono due punti $x^+ \in A^* \setminus K$, $x^- \in K \setminus A^*$ di densità rispettivamente per $A^* \setminus K$ e $K \setminus A^*$. Per la (5.11) esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\mu\big(B_\varepsilon(x^+) \cap (A^* \setminus K)\big) > \frac{3}{4}\mu\big(B_\varepsilon(x^+)\big), \qquad \mu\big(B_\varepsilon(x^-) \cap (K \setminus A^*)\big) > \frac{3}{4}\mu\big(B_\varepsilon(x^-)\big). \tag{5.12}$$

Indichiamo $B^+ = B_\varepsilon(x^+)$, $B^- = B_\varepsilon(x^-)$. Sia $\Gamma \subset \mathbb{S}^{n-1}$ un arco di cerchio massimo che unisce $x^+$ e $x^-$. Per trovare la curva $\Gamma$ si consideri l'iperpiano $\pi$ passante per i tre punti non allineati $0, x^+, x^- \in \mathbb{R}^n$. Il cerchio massimo $\pi \cap \mathbb{S}^{n-1}$ è l'unione di due curve entrambe di estremi $x^+$ e $x^-$. Chiamiamo $\Gamma$ una delle due. Sia $x_0$ il punto medio di $\Gamma$ e sia $v \in \mathbb{R}^n$ un versore tangente a $\Gamma$ in $x_0$. Sia $\pi_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ l'iperpiano ortogonale a $v$ e passante per l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$. Sia $H = \pi_0 \cap \mathbb{S}^{n-1}$. Ricordiamo che $A^* = B_r(N)$ con $N \in \mathbb{S}^{n-1}$. Il cerchio $H_0$ separa $\mathbb{S}^{n-1}$ nelle due calotte aperte $H^+$ e $H^-$. Se $N \notin H$, si scelga $H^+$ in modo tale che $N \in H^+$. Se $N \in H$, la scelta di $H^+$ è arbitraria. A meno di rimpicciolire il raggio $\varepsilon > 0$, possiamo supporre che $B^+ \subset H^+$ e $B^- \subset H^-$. Sia $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ la riflessione rispetto ad $H$. In particolare si ha che $\rho(B^+) = B^-$. La quaterna $\mathcal{R} = \{H^-, H, H^+, \rho\}$ forma un sistema di riflessione per $\mathbb{S}^{n-1}$.

**Conclusione per assurdo**

Usando le stime (5.12) mostriamo che è soddisfatta la condizione (5.9) con $G = A^*$, $F = K$ e il sistema di riflessione $\mathcal{R}$ scelto.

Sia $L := \{x \in H^+ : \chi_{A^*}(x) > \chi_{A^*}(\rho x) \text{ e } \chi_K(x) < \chi_K(\rho x)\}$. Si ha che

$$\begin{aligned} L &= H^+ \cap (A^* \setminus \rho A^*) \cap (\rho K \setminus K) = H^+ \cap (A^* \setminus K) \cap \rho(K \setminus A^*) \\ &\supseteq B^+ \cap H^+ \cap (A^* \setminus K) \cap \rho(K \setminus A^*) = B^+ \cap (A^* \setminus K) \cap \rho(K \setminus A^*). \end{aligned}$$

Dall'invarianza di $\mu$ rispetto alle isometrie di $\mathbb{S}^{n-1}$ si ha che

$$\mu\big(B^- \cap (K \setminus A^*)\big) = \mu\Big(\rho\big(B^- \cap (K \setminus A^*)\big)\Big) = \mu\big(B^+ \cap \rho(K \setminus A^*)\big). \tag{5.13}$$

Per l'additività della misura $\mu$ si ha che

$$\mu(B^+) = \mu\big(B^+ \cap (A^* \setminus K) \cap \rho(K \setminus A^*)\big) + \mu\Big(B^+ \setminus \big((A^* \setminus K) \cap \rho(K \setminus A^*)\big)\Big). \tag{5.14}$$

Da (5.12) e (5.13) segue che

$$\begin{aligned} \mu\big(B^+ \setminus (A^* \setminus K) \cap \rho(K \setminus A^*)\big) &= \mu\Big(\big(B^+ \setminus (A^* \setminus K)\big) \cup \big(B^+ \setminus \rho(K \setminus A^*)\big)\Big) \\ &\leq \mu\big(B^+ \setminus (A^* \setminus K)\big) + \mu\big(B^+ \setminus \rho(K \setminus A^*)\big) \\ &< \frac{1}{4}\mu(B^+) + \frac{1}{4}\mu(B^+) \\ &= \frac{1}{2}\mu(B^+). \end{aligned}$$

Da (5.14) si ottiene che

$$\begin{aligned} \mu\big(B^+ \cap (A^* \setminus K) \cap \rho(K \setminus A^*)\big) &= \mu(B^+) - \mu\Big(B^+ \setminus \big((A^* \setminus K) \cap \rho(K \setminus A^*)\big)\Big) \\ &> \mu(B^+) - \frac{1}{2}\mu(B^+) \\ &= \frac{1}{2}\mu(B^+) \\ &> 0, \end{aligned}$$

e dunque

$$\mu(L) \geq \mu\big(B^+ \cap (A^* \setminus K) \cap \rho(K \setminus A^*)\big) > 0$$

come si voleva.

Consideriamo gli insiemi polarizzati $K_{\mathcal{R}}$ e $A^*_{\mathcal{R}}$. Per la Proposizione 5.2 tali insiemi sono compatti. Per come è stato scelto $H^+$ si ha che $\rho(A^* \cap H^-) \subset (A^* \cap H^+)$ e dunque $A^*_{\mathcal{R}} = A^*$. Per la Proposizione 5.1 si ha che $\operatorname{diam}(K_{\mathcal{R}}) \leq \operatorname{diam}(K) \leq \operatorname{diam}(A)$. Di nuovo per l'invarianza di $\mu = \mathcal{H}^{n-1}$ rispetto a $\rho$ e per il fatto che $\mathcal{H}^{n-1}(H) = 0$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mu(K_{\mathcal{R}}) &= \mu(K \cap \rho K \cap H^-) + \mu\big((K \cup \rho K) \cap H^+\big) \\
&= \mu(K \cap \rho K \cap H^-) + \mu(K \cap H^+) + \mu(\rho K \cap H^+) - \mu(K \cap \rho K \cap H^+) \\
&= \mu(K \cap \rho K \cap H^-) + \mu(K \cap H^+) + \mu\big(\rho(\rho K \cap H^+)\big) - \mu\big(\rho(K \cap \rho K \cap H^+)\big) \\
&= \mu(K \cap \rho K \cap H^-) + \mu(K \cap H^+) + \mu(K \cap H^-) - \mu(K \cap \rho K \cap H^-) \\
&= \mu(K) \\
&= \mu(A)
\end{aligned}$$

Quindi $K_{\mathcal{R}} \in \mathscr{A}$. Dal Teorema 5.2 si ottiene che

$$\begin{aligned}
J(K_{\mathcal{R}}) = \mathcal{H}^{n-1}(A^* \triangle K_{\mathcal{R}}) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\chi_{A^*} - \chi_{K_{\mathcal{R}}}|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\chi_{A^*_{\mathcal{R}}} - \chi_{K_{\mathcal{R}}}|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&< \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\chi_{A^*} - \chi_K|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(A^* \triangle K) = J(K).
\end{aligned}$$

Questo risultato contraddice la minimalità di $K$ per $J$ e conclude la prova che il caso 2) non è possibile. Il Teorema 5.1 è dimostrato.

# Bibliografia


[1] Blaschke W., *Kreis und Kugel*, Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1916.

[2] Burago Yu. D., Zalgaller V. A., *Geometric Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg, 1988.

[3] Evans L.C., Gariepy R.F., *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[4] Falconer K., *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985.

[5] Gardner R. J., *The Brunn-Minkowski Inequality*, Bull. (New Series) Amer. Math. Soc., Vol. 39 no. 3 (2002), 355-405.

[6] Hörmander L., *The analysis of linear partial differential operators, I*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[7] Howard R., *Covex bodies of constant width and constant brightness*, Advances in Mathematics 204 (2006), 241-261.

[8] Maggi F., Ponsiglione M., Pratelli A., *Quantitative stability in the isodiametric inequality via the isoperimetric inequality*, Preprint 2011.

[9] Monti R., *Rearrangements in metric spaces and in the Heisemberg group*, Appunti personali.

[10] Schneider R., *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, 1993.

[11] Sierpiński W., *Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel*, Fund. Math 1 (1920), 105-111.