UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Laurea Triennale in Matematica

Caratterizzazione delle sfere metriche nello spazio iperbolico complesso

Autore:
Giacomo Cozzi

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Settembre 2021

Indice

Introduzione

Lo studio e la tassonomia delle ipersuperfici reali a curvature costanti nello spazio iperbolico complesso $\mathbb{CH}^n$ vanno ricondotti in larga parte a sviluppi recenti: si vedano i lavori di Cecil - Ryan [8], Montiel [1] e Berndt [2], che riassumono le conoscenze fin'ora raggiunte in questa area. Il nostro lavoro fornirà una descrizione delle sfere metriche nello spazio iperbolico complesso. Tale risultato, oltre a rappresentare una novità nella letteratura, è interessante poiché consente di tradurre in termini concreti la proprietà per una superficie di "essere sfera", costituendo un analogo dell'equazione $A - N(A) = A_0$ per una sfera immersa in $\mathbb{R}^n$ di centro A_0, con $N(A)$ direzione normale alla superficie.

I nostri sforzi sono giustificati anche dal fatto che superfici come la sfera, ovvero a curvature principali costanti, sono oggetti strettamente correlati alle superfici stabili per il funzionale area in $\mathbb{CH}^n$. La classificazione di tali superfici non è ancora completa e accurata: il nostro auspicio è che la formula qui fornita possa essere d'aiuto negli sviluppi della ricerca in questo settore. Esiste in particolare una congettura, condivisa dalla comunità matematica, secondo la quale le uniche ipersuperfici immerse (embedded) compatte a curvatura media costante (e stabili) in $\mathbb{CH}^n$ sono proprio le sfere metriche. Nel 1988 J. L. Barbosa, M. Do Carmo e J. Eschenburg [7] hanno dimostrato che in $\mathbb{CH}^n$ le sfere metriche sono ipersuperfici stabili. S. Fornari, K. Frensel e J. Ripoll hanno pubblicato nel 1993 un articolo in cui si è tentata una dimostrazione dell'implicazione opposta al teorema: si dimostrava cioè che le uniche ipersuperfici compatte a curvatura media costante e stabili in $\mathbb{CH}^n$ sono le sfere [3]. Tuttavia nel 1995 lo stesso J. Eschenburg ha segnalato un errore contenuto nella loro dimostrazione. In [4] Fornari, Fresnell e Ripoll affermano di non aver trovato una soluzione alternativa al problema che, in effetti, "pare sia un dilemma difficile".

L'interesse verso le superfici stabili a curvature costanti è legato allo studio della celebre classe dei *problemi isoperimetrici*. Noti sin dall'antichità, i problemi isoperimetrici sono stati oggetto di numerose indagini e congetture; innumerevoli versioni del problema isoperimetrico classico, il "problema di Didone", sviluppati per lo più nel corso del Novecento, sono tutt'ora aperte: non è ancora stata trovata una soluzione, ad esempio, al problema isoperimetrico in $\mathbb{RP}^n$ per $n > 3$, in $\mathbb{CP}^n$ (si veda [9]) e in $\mathbb{CH}^n$. Sono stati però dimostrati teoremi utili a definire condizioni necessarie affinché un dato sottoinsieme di una varietà sia isoperimetrico. Ad esempio, se Ω è una regione isoperimetrica in una varietà differenziabile, allora $\Sigma = \partial\Omega$, se regolare, è ipersuperficie a curvatura media costante e stabile per il funzionale area. Gli sviluppi più recenti della ricerca suggeriscono che la soluzione al problema isoperimetrico in $\mathbb{CH}^n$ sia proprio la sola sfera [6].

Il nostro lavoro è suddiviso in 5 sezioni. Nella prima introdurremo lo spazio iperbolico complesso e definiremo l'isometria che lo associa allo spazio delle matrici Hermitiane: tale isometria consentirà di lavorare in un (più comodo) ambiente lineare. La seconda e la terza sezione illustreranno i più rilevanti aspetti geometrici sugli spazi tangenti e normali lo spazio iperbolico complesso. Nella quarta saranno definite le ipersuperfici reali in $\mathbb{CH}^n$, se ne vedranno le principali proprietà, e particolare attenzione sarà rivolta alle superfici di Hopf. Nella sezione 5, infine, enunceremo e dimostreremo il teorema di caratterizzazione delle sfere: sia la formulazione che la dimostrazione di questo risultato derivano dagli appunti inediti del professor Roberto Monti.

1 Lo spazio iperbolico complesso $\mathbb{CH}^n$

1.1 Definizione e prime proprietà

Sia $\mathbb{C}^{n+1}$ lo spazio complesso $n+1$ dimensionale. Denotiamo $(a_0, \dots, a_n)$ un suo elemento e definiamo su questo spazio la metrica di Minkowski come segue:

$$\langle w, z\rangle_M := -z_0\bar{w_0} + z_1\bar{w_1} + \cdots + z_n\bar{w_n}. \tag{1}$$

Elenchiamone alcune proprietà:

- $\langle w, z\rangle_M$ è una forma sesquilineare, cioè per ogni $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}^{n+1}$, si ha $\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle_M = \langle x_1, y_1\rangle_M + \langle x_1, y_2\rangle_M + \langle x_2, y_1\rangle_M + \langle x_2, y_2\rangle_M$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^{n+1}$ si ha $\langle \alpha w, z\rangle_M = \alpha\langle w, z\rangle_M$, e $\langle w, \beta z\rangle_M = \bar{\beta}\langle w, z\rangle_M$ (linearità a sinistra e antilinearità a destra),
- $\langle w, z\rangle_M = \overline{\langle z, w\rangle}_M$ per ogni $w, z \in \mathbb{C}^{n+1}$,
- $\langle w, z\rangle_M$ non è definita positiva: ad esempio $\langle w_0, w_0\rangle_M = -1$, con $w_0 = (-1, 0, \dots, 0)$. In particolare tale forma non è un prodotto Hermitiano, e quindi non è possibile applicare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,
- $\langle w, z\rangle_M$ è degenere: ad esempio $\langle z_0, z_0\rangle_M = 0$, con $z_0 = (1, i, 0, \dots, 0)$.

Sia $\mathbb{CP}^n$ lo spazio proiettivo complesso n-dimensionale, ovvero lo spazio ottenuto quozientando $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ tramite la relazione di equivalenza definita da: $x \sim y$ se esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $y = \alpha x$. Definiamo ora lo spazio iperbolico complesso.

Definizione 1.1. L'insieme

$$\mathbb{CH}^n := \{z \in \mathbb{CP}^n \mid \langle z, z\rangle_M < 0\}.$$

è detto spazio iperbolico complesso n-dimensionale.

Notiamo che tale costruzione si può equivalentemente ottenere quozientando l'iperboloide reale $S := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle z, z\rangle_M = -1\}$ tramite la relazione di equivalenza $\sim$ definita sopra:

$$\mathbb{CH}^n = S/\sim.$$

È noto che $\mathbb{CP}^n$ è una varietà differenziabile. Di conseguenza, essendone un sottoinsieme aperto, anche $\mathbb{CH}^n$ lo è. Possiamo dunque definire per ogni punto di $\mathbb{CH}^n$ (che verrà spesso indicato con la scrittura $[z]$ per ricordare che in realtà stiamo parlando di una classe di elementi per la relazione $\sim$) lo spazio tangente $T_{[z]}\mathbb{CH}^n$:

Definizione 1.2. Definiamo lo spazio tangente a $\mathbb{CH}^n$ nel punto $[z]$ come

$$T_{[z]}\mathbb{CH}^n := \{[w] \in \mathbb{CH}^n \mid \langle [z], [w]\rangle_M = 0\}.$$

Dotiamo ora lo spazio tangente di un prodotto interno, ricavato dal prodotto di Minkowski:

Lemma 1.3. *Sia $[z] \in \mathbb{CH}^n$ e siano $w, \zeta \in T_{[z]}\mathbb{CH}^n$. Il prodotto interno*

$$\langle \omega, \zeta\rangle_R := \Re\langle \omega, \zeta\rangle_M \tag{2}$$

è definito positivo.

$\mathbb{CH}^n$ dotato di tale metrica è lo *spazio iperbolico complesso Riemanniano.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che per ogni $\zeta \in T_{[z]}\mathbb{CH}^n$ si ha $\langle \zeta, \zeta \rangle_R > 0$. Anzitutto osserviamo che se $[z] \in \mathbb{CH}^n$, allora $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ deve essere della forma

$$z = (1, z_1, \dots, z_n),$$

poiché si deve avere $\langle z, z \rangle_M < 0$, e per tutti i vettori del tipo $s = (0, s_1, \dots, s_n)$, si osserva che $\langle s, s \rangle_M$ è una somma di quadrati reali non nulli, dunque strettamente positiva.

Sia $[z] \in \mathbb{CH}^n$. Allora $\langle z, z \rangle_M < 0$, per definizione 1.1. Notiamo inoltre che

$$\langle \zeta, \zeta \rangle_R = \langle \zeta, \zeta \rangle_M \qquad \forall \zeta \in T_{[z]}\mathbb{CH}^n.$$

Dunque basta verificare che, se $\langle z, z \rangle_M < 0$ e $\langle \zeta, z \rangle_M = 0$, allora $\langle \zeta, \zeta \rangle_M > 0$. Se avessi $\langle \zeta, \zeta \rangle_M < 0$, seguirebbe che $\zeta = (1, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ e quindi si avrebbe

$$\langle \zeta, \zeta \rangle_M = -1 + |\zeta_1|^2 + \dots + |\zeta_n|^2 < 0,$$

cioè

$$|\zeta_1|^2 + \dots + |\zeta_n|^2 < 1.$$

Analogamente si ha $|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1$. Denotiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ il prodotto Hermitiano in $\mathbb{C}^n$. Osserviamo che

$$0 = \langle \zeta, z \rangle_M = -1 + \langle \eta, w \rangle_H,$$

dove $\eta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ e $w = (z_1, \dots, z_n)$.

Dunque, se $\langle \eta, w \rangle_H = 1$ segue che

$$\langle \eta, \eta \rangle_H \langle w, w \rangle_H \geq 1$$

per la disuguaglianza di Cauchy - Schwarz. Infine si ha

$$0 < \langle w, w \rangle_H < 1,$$

e quindi

$$\langle \eta, \eta \rangle_H \geq \frac{1}{\langle w, w \rangle_H} > 1.$$

Ma ciò implicherebbe $-1 + \langle \eta, \eta \rangle_H > 0$, cioè $\langle \zeta, \zeta \rangle_M > 0$, mentre si stava supponendo $\langle \zeta, \zeta \rangle_M < 0$. □

1.2 Gli operatori auotoaggiunti per la metrica di Minkowski sono Hermitiani

In questa sottosezione studieremo lo spazio degli operatori Hermitiani su $\mathbb{C}^{n+1}$. Da qui in poi useremo la seguente notazione:

$$A_M := MA, \qquad \text{ove} \qquad M := \left(\begin{smallmatrix} -1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{smallmatrix}\right)$$

La matrice M è detta *matrice di Minkowski.*

Cerchiamo di rispondere alla seguente domanda: dato un operatore $\mathbb{C}$-lineare $A \in \mathbb{C}^{n+1}$, in quali casi si ha $\langle A(z), w \rangle_M = \langle z, A(w) \rangle_M$? Ovvero: quando A è autoaggiunto per la metrica di Minkowski? Indichiamo con A^* la matrice aggiunta di A. Sia $A_{jk} \in GL^{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice associata all'operatore A tramite $A_{jk} = \langle A(e_k), e_j \rangle_M$, dove $(e_i)_{i=0,\dots,n}$ è la base canonica di $\mathbb{C}^{n+1}$. Notiamo anzitutto che si ha la relazione

$$A(z) = A_M z^t. \tag{3}$$

Osserviamo che A è autoaggiunto se e solo se $A_{jk} = \bar{A}_{kj}$, ovvero se e solo se A_{jk} coincide con la sua trasposta coniugata, cioè se A_{jk} è una matrice Hermitiana. Infatti, per la linearità di A e del prodotto Hermitiano, abbiamo che $A = A^*$ se e solo se per ogni $i, j \in \{0, \dots, n\}$ si ha $\langle A(e_i), e_j\rangle_M = \langle e_i, A(e_j)\rangle_M$, e ciò vale se e solo se $\langle A(e_i), e_j\rangle_M = \overline{\langle A(e_j), e_i\rangle}_M$ per ogni $i, j \in \{0, \dots, n\}$. Infine l'ultima identità è vera se e solo se $A_{ji} = \bar{A}_{ij}$ per ogni $i, j \in \{0, \dots, n\}$.

Quanto visto finora ci spinge ad approfondire il nostro interesse verso gli operatori Hermitiani: nel prossimo capitolo mostreremo lo stretto rapporto che intercorre tra $H^{n+1} = \{A \in GL^{n+1}(\mathbb{C}) \mid \bar{A} = A^t\}$ e $\mathbb{CH}^n$.

1.3 $\mathbb{CH}^n$ è isometrico a un sottoinsieme di H^{n+1}

In questa sezione mostreremo come $\mathbb{CH}^n$, inteso come varietà Riemanniana complessa dotata della metrica (2), sia isometricamente isomorfo a un sottoinsieme di H^{n+1}, spazio delle matrici Hermitiane $(n+1) \times (n+1)$. Dotiamo anzitutto H^{n+1} della seguente metrica: per ogni $A, B \in H^{n+1}$ definiamo

$$\langle A, B\rangle := -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_M B_M). \tag{4}$$

Introduciamo ora la funzione $\mathscr{F}$, *immersione isometrica* di $\mathbb{CH}^n$ in H^{n+1}.

Definizione 1.4. Sia $S = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle z, z\rangle_M = -1\}$ l'iperboloide reale. Definiamo

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \colon S &\to H^{n+1} \\ z &\mapsto A \end{aligned}$$

dove A è la matrice associata all'operatore di Minkowski tale che $A(w) = -\langle w, z\rangle_M z$ per ogni $w \in \mathbb{C}^{n+1}$

Notiamo che l'azione compiuta da questa matrice è quella di proiettare ogni vettore in $\mathbb{C}^{n+1}$ nella retta complessa $[z]$. Con un abuso di notazione indichiamo ancora con $\mathscr{F}$ la mappa ottenuta dalla precedente tramite il passaggio a quoziente in S:

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \colon \mathbb{CH}^n &\to H^{n+1} \\ [z] &\mapsto A \end{aligned}$$

Prima di arrivare al lemma chiave di questa sezione cerchiamo di determinare $\mathscr{F}(\mathbb{CH}^n)$. Chiamiamo $U(1, n)$ il gruppo degli operatori $Q \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})$ tali che $\langle Q(z), Q(w)\rangle_M = \langle z, w\rangle_M$ per ogni $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$. Per quanto visto nella sezione precedente si deve avere $Q \circ Q^* = Q^* \circ Q = \mathrm{Id}$, dove Id è l'operatore identità. Dunque, scrivendo le matrici associate all'operatore Q, si deve avere che $Q_M Q_M^* = Q_M^* Q_M = \mathbb{I}$.

Ora osserviamo che il gruppo $U(1, n)$ agisce transitivamente su S, l'iperboloide reale. Siano $x, y \in S$: proviamo che esiste $Q \in U(1, n)$ tale che $y = Q(x)$. Poniamo

$$X = x \quad \text{ e } \quad Y = -\frac{\langle x, y\rangle_M}{|\langle x, y\rangle_M|}y.$$

Denotiamo poi con $L = X + Y$. Definiamo l'operatore $\rho \colon S \to S$

$$\rho(Z) = -Z + 2\frac{\langle Z, L\rangle_M}{\langle L, L\rangle_M}L.$$

Notiamo che $\rho \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1})$ per la linearità a sinistra del prodotto di Minkowski. Poniamo infine

$$Q(z) = -\frac{\langle y, x\rangle_M}{|\langle x, y\rangle_M|}\rho(z).$$

Osserviamo che $Q(X) = Y$ e $Q(Y) = X$ e $Q \in U(1,n)$.

Dunque ogni operatore di proiezione A, ovvero ogni operatore che è immagine di un punto in $\mathbb{CH}^n$ tramite $\mathscr{F}$, è della forma $A = QA_0Q^*$ dove A_0 è la proiezione sulla retta complessa $[z_0]$, la cui matrice associata è $\left(\begin{smallmatrix} -1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{smallmatrix}\right)$, e Q $\in U(1,n)$. Si ottiene quindi che

$$\mathscr{F}(\mathbb{CH}^n) = \{A \in H^{n+1} \mid A = QA_0Q^* \text{ con } Q \in U(1,n)\}.$$

Lemma 1.5. *La mappa* $\mathscr{F}\colon \mathbb{CH}^n \to \mathscr{F}(\mathbb{CH}^n) \subseteq H^{n+1}$ *è un'isometria se dotiamo* $\mathbb{CH}^n$ *della metrica* (2) *e* H^{n+1} *della metrica* (4).

Dimostrazione. Vogliamo provare il seguente fatto: $\langle d_z\mathscr{F}(\zeta_1), d_z\mathscr{F}(\zeta_2)\rangle = \langle \zeta_1, \zeta_2\rangle_R$, per ogni $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}T_zS$, dove $d_z\mathscr{F}(\zeta) = \frac{d}{dt}\mathscr{F}(\gamma(t))\big|_{t=0}$ e $\gamma(t)$ è un cammino in S tale che $\gamma(0) = z$ e $\dot\gamma(0) = \zeta \in \mathbb{C}T_zS$. Successivamente, il passaggio a quoziente della mappa $\mathscr{F}$ definirà l'isometria tra $\mathbb{CH}^n$ e H^{n+1}.

$$\begin{aligned}
&\langle d_z\mathscr{F}(\zeta_1), d_z\mathscr{F}(\zeta_2)\rangle = \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(d_z\mathscr{F}(\zeta_1)d_z\mathscr{F}(\zeta_2)) \\
&= -\frac{1}{2}(e_0^t \cdot d_z\mathscr{F}(\zeta_1)_M d_z\mathscr{F}(\zeta_2)_M \cdot e_0) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i^t \cdot d_z\mathscr{F}(\zeta_1)_M d_z\mathscr{F}(\zeta_2)_M \cdot e_i
\end{aligned} \tag{5}$$

Chiamiamo γ_1, γ_2 due cammini in S tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z$ e $\dot\gamma_1(0) = \zeta_1$, $\dot\gamma_2(0) = \zeta_2$. Usando (3) e ricordando che $\langle z, \zeta_1\rangle_M = \langle z, \zeta_2\rangle_M = 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
&e_0^t \cdot d_z\mathscr{F}(\zeta_1)_M d_z\mathscr{F}(\zeta_2)_M \cdot e_0 = \\
&= e_0^t \cdot d_z\mathscr{F}(\zeta_1)_M \ \frac{d}{dt}(-\langle e_0, \gamma_2\rangle_M \gamma_2)\Big|_{t=0} \\
&= -e_0^t \cdot d_z\mathscr{F}(\zeta_1)_M \ (\langle e_0, \dot\gamma_2\rangle_M \gamma_2 + \langle e_0, \gamma_2\rangle_M \dot\gamma_2)|_{t=0} \\
&= -e_0^t \cdot d_z\mathscr{F}(\zeta_1)_M (\langle e_0, \zeta_2\rangle_M z + \langle e_0, z\rangle_M \zeta_2) \\
&= -e_0^t \cdot d_z\mathscr{F}(\zeta_1)_M (-\bar\zeta_{2,0} z - \bar z_0 \zeta_2) \\
&= \bar\zeta_{2,0} \ \frac{d}{dt}(-e_0^t \cdot \langle z, \gamma_1\rangle_M \gamma_1)\Big|_{t=0} + \bar z_0 \ \frac{d}{dt}(-e_0^t \cdot \langle \zeta_2, \gamma_1\rangle_M \gamma_1)\Big|_{t=0} \\
&= -\bar\zeta_{2,0} e_0^t \cdot \langle z, z\rangle_M \zeta_1 - \bar z_0 e_0^t \cdot \langle \zeta_2, \zeta_1\rangle_M z \\
&= -\bar\zeta_{2,0}\zeta_{1,0}\langle z, z\rangle_M - |z_0|^2 \langle \zeta_2, \zeta_1\rangle_M.
\end{aligned} \tag{6}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
&e_i^t \cdot d_z\mathscr{F}(\zeta_1)_M d_z\mathscr{F}(\zeta_2)_M \cdot e_i = \\
&= e_i^t \cdot d_z\mathscr{F}(\zeta_1)_M \ \frac{d}{dt}(-\langle e_i, \gamma_2\rangle_M \gamma_2)\Big|_{t=0} \\
&= -e_i^t \cdot d_z\mathscr{F}(\zeta_1)_M (\bar\zeta_{2,i} z + \bar z_i \zeta_2) \\
&= -e_i^t \cdot \ \frac{d}{dt}(\mathscr{F}(\gamma_1)_M \bar\zeta_{2,i} z)\Big|_{t=0} - e_i^t \cdot \ \frac{d}{dt}(\mathscr{F}(\gamma_1)_M \bar z_i \zeta_2)\Big|_{t=0} \\
&= -e_i^t \cdot \bar\zeta_{2,i} \ \frac{d}{dt}(-\langle z, \gamma_1\rangle_M \gamma_1)\Big|_{t=0} - e_i^t \cdot \bar z_i \ \frac{d}{dt}(-\langle \zeta_2, \gamma_1\rangle_M \gamma_1)\Big|_{t=0} \\
&= \bar\zeta_{2,i} e_i^t \cdot \langle z, z\rangle_M \zeta_1 + \bar z_i e_i^t \cdot \langle \zeta_2, \zeta_1\rangle_M z \\
&= \bar\zeta_{2,i}\zeta_{1,i}\langle z, z\rangle_M + \langle \zeta_2, \zeta_1\rangle_M |z_i|^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Mettendo assieme i risultati in (6) e (7):

$$\begin{aligned}
&\langle d\mathscr{F}(\zeta_1), d\mathscr{F}(\zeta_2)\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\langle z,z\rangle_M(\bar{\zeta}_{2,0}\zeta_{1,0} - \sum_{i=1}^{n}\bar{\zeta}_{2,i}\zeta_{1,i}) \\
&= -\frac{1}{2}\langle z,z\rangle_M\langle\zeta_1,\zeta_2\rangle_M + \frac{1}{2}\langle\zeta_2,\zeta_1\rangle_M(|z_0|^2 - \sum|z_i|^2) \\
&= -\frac{1}{2}\langle z,z\rangle_M\langle\zeta_1,\zeta_2\rangle_M - \frac{1}{2}\langle\zeta_2,\zeta_1\rangle_M\langle z,z\rangle_M \\
&= -\frac{1}{2}\langle z,z\rangle_M(\langle\zeta_1,\zeta_2\rangle_M + \langle\zeta_2,\zeta_1\rangle_M) \\
&= -\langle z,z\rangle_M\Re\langle\zeta_1,\zeta_2\rangle_M \\
&= \langle\zeta_1,\zeta_2\rangle_R.
\end{aligned} \tag{8}$$

□

D'ora in avanti, con un piccolo abuso di notazione, useremo la scrittura A per indicare indistintamente matrici Hermitiane in $\mathscr{F}(\mathbb{CH}^n)$ oppure elementi di $\mathbb{CH}^n$.

Ogni matrice $A \in \mathbb{CH}^n$ è caratterizzata dalle proprietà enunciate nella seguente

Proposizione 1.6. *Sia $A \in \mathbb{CH}^n$. Allora si ha:*

1. $A_M A_M = A_M$,
2. $\mathrm{tr}(A_M) = 1$,
3. *Se $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ risolve l'equazione $A_M z^t = z$, allora $\langle z,z\rangle_M < 0$.*

Dimostrazione. Dimostriamo le tre affermazioni:

1. La matrice $A_M \in \mathbb{CH}^n$ è sempre una matrice di proiezione su una retta complessa. Dunque $A_M \circ A_M = A_M$,
2. Si ha $\mathrm{tr}(A_M) = \mathrm{tr}(Q_M(A_0)_M Q_M^*) = \mathrm{tr}(MA_0) = 1$,
3. $A_M z^t = A(z) = -\langle z,z\rangle_M z = z$ se e solo se $\langle z,z\rangle_M = -1$. Questa informazione ci dice che l'operatore A proietta z su una retta complessa negativa.

□

2 Spazi tangenti e normali a $\mathbb{CH}^n$

2.1 Caratterizzazione degli spazi $T_A\mathbb{CH}^n$ e $T_A^{\perp}\mathbb{CH}^n$

Iniziamo definendo un operatore differenziale utile per gli sviluppi del lavoro:

Definizione 2.1 (Connessione standard)**.** Siano $X = \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ campi vettoriali su $\mathbb{R}^n$. Allora definiamo

$$\nabla_X Y := \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{j=1,\dots,n},$$

la derivata del campo Y lungo X.

Osserviamo che se $Y = (x_1, \dots, x_n)$ è un punto di $\mathbb{R}^n$, allora esiste un'identificazione canonica con il campo vettoriale $\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$. Chiamando Y il campo appena descritto, notiamo che $\nabla_X Y = X$ (poiché $b_j(x) = x_j$ per ogni $j = 1, \cdots, n$). Essendo poi $H^{n+1} \cong \mathbb{R}^N$ per un certo $N \in \mathbb{N}$, possiamo estendere la definizione precedente allo spazio delle matrici Hermitiane, e osservare che per ogni campo vettoriale X su H^{n+1} e per ogni $A \in H^{n+1}$ si ha

$$\nabla_X A = X. \tag{9}$$

D'ora in avanti, per non appesantire la notazione, confonderemo sempre la scrittura per punti o campi vettoriali su $\mathbb{R}^n$ (e quindi su H^{n+1}). Notiamo infine che per l'operatore ∇ vale la regola di Leibniz: $\nabla_X(AB) = (\nabla_X A)B + A(\nabla_X B)$.

Consideriamo $A \in \mathbb{CH}^n$. Per 1.6.1 sappiamo che

$$A_M A_M = A_M, \tag{10}$$

applicando ambo i membri ∇_X otteniamo

$$X_M A_M + A_M X_M = X_M. \tag{11}$$

Tale equazione, come vedremo, caratterizza i punti appartenenti allo spazio tangente $T_A\mathbb{CH}^n$ di $\mathbb{CH}^n$. Diamo la seguente

Definizione 2.2. Denotiamo con $T_A^{\perp}\mathbb{CH}^n$ lo spazio normale a $\mathbb{CH}^n$ in A, definito come lo spazio ortogonale a $T_A\mathbb{CH}^n$ in H^{n+1} rispetto alla metrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$T_A^{\perp}\mathbb{CH}^n := \{X \in \mathbb{CH}^n \mid \langle Y, X\rangle = 0 \quad \forall Y \in T_A\mathbb{CH}^n\}.$$

Caratterizziamo $T_A\mathbb{CH}^n$ e $T_A^{\perp}\mathbb{CH}^n$ con il seguente

Lemma 2.3. *Gli spazi normali e tangenti a $\mathbb{CH}^n$ in A sono dati da*

$$T_A\mathbb{CH}^n = \{X \in H^{n+1} \mid X_M = A_M X_M + X_M A_M\}, \tag{12}$$

$$T_A^{\perp}\mathbb{CH}^n = \{Z \in H^{n+1} \mid A_M Z_M = Z_M A_M\}. \tag{13}$$

Dimostrazione. Per ogni $A = \mathscr{F}(z) \in H^{n+1}$ abbiamo

$$T_A\mathbb{CH}^n = \{d_z\mathscr{F}(w) \in H^{n+1} \mid w \in \mathbb{C}T_zS\},$$

dove $w \in \mathbb{C}T_zS$ se e solo se $\langle z, w\rangle_M = 0$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, sia $A_t \in \mathbb{C}^{n+1}$ la proiezione sulla retta complessa $[z+tw]$, ovvero l'operatore definito dalla formula $A_t(v) = -\langle v, z+tw\rangle_M(z+tw)$ per ogni $w \in \mathbb{C}^{n+1}$. Sia poi $X \in \mathbb{C}^{n+1}$ l'operatore Hermitiano definito come segue:

$$X(v) := \frac{d}{dt} A_t(v)\Big|_{t=0} = -\langle v, w\rangle_M z - \langle v, z\rangle_M w \qquad \forall v \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Supponiamo ora che $A = A_0 = \mathscr{F}(z_0)$. Allora il vettore w è della forma $(0, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. In questo caso, la matrice associata a X è data da

$$X := \begin{pmatrix} 0 & \bar{w} \\ w^t & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

dove con un abuso di notazione, $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$. Definiamo ora, per ogni $j = 1, \dots, n$

$$X_j := \begin{pmatrix} 0 & e_j \\ e_j^t & \mathbb{O} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{X}_j := \begin{pmatrix} 0 & -ie_j \\ ie_j^t & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Infine poniamo $X_{n+j} := \hat{X}_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$.

Le matrici $X_1, \dots, X_{2n} \in H^{n+1}$ sono linearmente indipendenti e formano una base reale ortonormale di $T_{A_0}\mathbb{CH}^n$. Si può mostrare, con un facile conto diretto, che ogni matrice X_j risolve l'equazione $X_M = (A_0)_M X_M + X_M (A_0)_M$: con ciò il lemma è dimostrato quando $A = A_0$. Sia allora $z = Q(z_0)$ e sia $w = Q(w_0)$, con $w_0 \in \mathbb{C}T_{z_0}S$. Differenziando l'identità operatoriale $A_{z+tw} = Q \circ A_{z_0+tw} \circ Q^*$ in $t = 0$, otteniamo l'equazione $X = Q \circ X_0 \circ Q^*$, dove le matrici associate agli operatori X e X_0 sono, rispettivamente

$$X = \frac{d}{dt} A_{z+tw}\Big|_{t=0} \in T_A\mathbb{CH}^n \qquad \text{e} \qquad X_0 = \frac{d}{dt} A_{z_0+tw}\Big|_{t=0} \in T_{A_0}\mathbb{CH}^n,$$

e soddisfano l'equazione

$$X_M = Q_M X_{0M} Q_M^*.$$

Ora basta osservare che la matrice X_M soddisfa l'equazione $X_M = A_M X_M + X_M A_M$ se e solo se X_{0M} soddisfa l'equazione $X_M = A_{0M} X_{0M} + X_{0M} A_{0M}$. La dimostrazione per la caratterizzazione dello spazio tangente è conclusa. Per dimostrare l'altra uguaglianza insiemistica basta osservare che, se si avesse che $A_M Z_M = Z_M A_M$ e $Z \in T_A\mathbb{CH}^n$ allora, per la 1.6.1 e per quanto appena dimostrato, $Z_M = \mathbb{O}$ e quindi $A_M Z_M = Z_M A_M$ se e solo se $Z \in T_A^\perp\mathbb{CH}^n$, dal momento che $\mathbb{CH}^n = T_A\mathbb{CH}^n \oplus T_A^\perp\mathbb{CH}^n$. □

2.2 Struttura complessa di $T_A\mathbb{CH}^n$ e identità utili

Siano A, $B \in \mathbb{CH}^n$ due matrici tali che esiste $Q \in U(1, n)$ per cui $A = QBQ^*$. Definiamo la mappa $T_Q\colon H^{n+1} \to H^{n+1}$

$$(T_Q(X))_M := Q_M X_M Q_M^*.$$

Osserviamo che questa mappa preserva il prodotto (4), infatti

$$\langle T_Q(A), T_Q(B)\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(T_Q(A)_M T_Q(B)_M) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(Q_M A_M B_M Q_M^*)$$

e si ha che

$$-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(Q_M A_M B_M Q_M^*) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_M B_M) = \langle A, B\rangle.$$

La funzione T_Q, dunque, mappa isometricamente $T_A\mathbb{CH}^n$ in $T_B\mathbb{CH}^n$. Questa proprietà ci consente, scegliendo $B = A_0 = \mathscr{F}(z_0)$, di lavorare sullo spazio tangente ad A_0, più facile da maneggiare dal punto di vista computazionale, e di trasferire le informazioni ottenute sulle proprietà metriche a qualsiasi altro punto di $\mathbb{CH}^n$.

Introduciamo ora una notazione che risulterà utile nel seguito: per ogni $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, sia la matrice $E_{ij} = \delta_{ij}$. Allora, ricordando la (14), abbiamo che

$$X_j = E_{j0} + E_{0j} \quad \text{ e } \quad \hat{X}_j = iE_{j0} - iE_{0j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Come abbiamo già osservato tali matrici formano una base per $T_{A_0}\mathbb{CH}^n$. Ora, usando $\mathscr{F}$, possiamo trasferire la struttura complessa di $\mathbb{C}^{n+1}$ a $T\mathbb{CH}^n$.

Definizione 2.4. Sia $A = \mathscr{F}(z) \in \mathbb{CH}^n$, con $z \in S \subset \mathbb{C}^{n+1}$. La mappa $J_A : T_A\mathbb{CH}^n \to T_A\mathbb{CH}^n$ definita da

$$J_A(d_z\mathscr{F}(w)) = d_z\mathscr{F}(iw)$$

per ogni $w \in \mathbb{C}T_zS$ sarà detta *struttura complessa.*

Notiamo che J commuta con T_Q, ovvero:

$$J_A(T_Q(X)) = T_Q(J_B(X)) \qquad \forall A, B \in \mathbb{CH}^n, X \in T_B\mathbb{CH}^n \ \text{ t.c. } \ A = T_QB \ \ \exists Q \in U(1, n)$$

Infatti, detti $z, y \in S$ tali che $\mathscr{F}(z) = A$ e $\mathscr{F}(y) = B$, e detti $w_x \in T_A\mathbb{CH}^n$, $w_y \in T_B\mathbb{CH}^n$, abbiamo

$$\begin{aligned} J_A(T_Q(X)) &= J_A(Q_M d_y\mathscr{F}(w_y)_M Q_M^*) \\ &= J_A(d_z\mathscr{F}(w_z)_M) \\ &= d_z\mathscr{F}(iw_z)_M \\ &= Q_M d_y J_B(\mathscr{F}(w_y)_M) Q_M^* \\ &= T_Q(J_B(X)). \end{aligned} \tag{15}$$

Enunciamo ora un risultato che ci consente di tradurre in termini puramente algebrici l'azione della struttura complessa:

Lemma 2.5. *Per ogni $A \in \mathbb{CH}^n$ la struttura complessa J_A è data da*

$$J_A(X) = i(M - 2A)X_M, \qquad X \in T_A\mathbb{CH}^n.$$

Dimostrazione. Verifichiamo la formula per il punto $A = A_0$. Il risultato sarà poi valido per ogni $A \in \mathbb{CH}^n$ grazie alla commutatività della struttura complessa con l'operatore T_Q. Sappiamo che una base reale di $T_{A_0}\mathbb{CH}^n$ è data dalle matrici X_j per $j = 1, \cdots, 2n$. Verifichiamo la formula per queste matrici, e avremo la tesi:

$$J_{A_0}(X_j)[w] = X_j[iw] = X_{j\,M}[iw] = i\mathbb{I}X_{j\,M}[w] = i(M - 2A_0)X_{j\,M}[w].$$

$\square$

Notiamo dunque che, se $A = A_0$, $J(X_j) = \hat{X}_j$ per ogni $j = 1, \ldots, n$.
Illustriamo ora alcune identità che saranno utili per svolgere con più facilità i calcoli che ci condurranno alla dimostrazione del teorema principale.

Lemma 2.6. *Per ogni $A \in \mathbb{CH}^n$ e per ogni $X, Y \in T_A\mathbb{CH}^n$ Valgono le seguenti:*

1. $A_M X_M Y_M = X_M Y_M A_M$,
2. $A_M X_M A_M = 0$,
3. $X_M(\mathbb{I} - 2A_M) = -(\mathbb{I} - 2A_M)X_M$,
4. $(\mathbb{I} - 2A_M)^2 = \mathbb{I}$,
5. $(\mathbb{I} - 2A_M)X_M Y_M = X_M Y_M(\mathbb{I} - 2A_M)$

Dimostrazione. Usando le proprietà enunciate in 1.6 e il lemma 2.3:

1. Per ogni $Z \in T_A\mathbb{CH}^n$ si ha
$$A_M Z_M = Z_M(\mathbb{I} - A_M) \quad \text{e} \quad Z_M A_M = (\mathbb{I} - A_M)Z_M.$$
Quindi
$$A_M X_M Y_M = X(\mathbb{I} - A_M)Y_M = X_M Y_M A_M,$$

2. $A_M X_M A_M = X_M(\mathbb{I} - A_M)A_M = X_M(A_M - A_M)$,

3. Si ha che
$$X_M(\mathbb{I} - 2A_M) = X_M - 2X_M A_M = A_M X_M - X_M A_M.$$
Poi
$$\begin{aligned} -(\mathbb{I} - 2A_M)X_M &= -X_M + 2A_M X_M \\ &= -A_M X_M - X_M A_M + 2A_M X_M \\ &= -X_M A_M + A_M X_M, \end{aligned}$$

4. $(\mathbb{I} - 2A_M) = \mathbb{I} + 4A_M - 4A_M = \mathbb{I}$,

5. Per la terza proprietà di questo lemma si ha
$$(\mathbb{I} - 2A_M)X_M Y_M = -X_M(\mathbb{I} - 2A_M)Y_M = X_M Y_M(\mathbb{I} - 2A_M).$$

□

3 Geometria dell'immersione $\mathscr{F}$

Nel lavoro sin qui svolto abbiamo evidenziato come lo spazio $\mathbb{CH}^n$ si immerga isometricamente in H^{n+1}. Abbiamo inoltre fornito la descrizione esplicita degli spazi normali e tangenti di $\mathbb{CH}^n$ intesi come sottoinsiemi di tale spazio. Nei paragrafi seguenti daremo delle definizioni necessarie per enunciare il Teorema 5.2 e ancora una volta caratterizzeremo in termini matriciali queste nozioni, di carattere geometrico.

3.1 Connessioni tangente e normale

Recuperando la definizione di connessione standard su H^{n+1} definita nella sezione precedente, ne definiamo ora le componenti tangente e normale a $\mathbb{CH}^n$. Chiamiamo

$$\pi_A^{\top}\colon H^{n+1} \to T_A\mathbb{CH}^n \quad \text{e} \quad \pi_A^{\perp}\colon H^{n+1} \to T_A\mathbb{CH}^n$$

le proiezioni ortogonali relative alla decomposizione

$$H^{n+1} = T_A\mathbb{CH}^n \oplus T_A^{\perp}\mathbb{CH}^n.$$

Sia $\Gamma(T\mathbb{CH}^n)$ il fibrato tangente della varietà $\mathbb{CH}^n$. Per ogni $A \in \mathbb{CH}^n$ definiamo:

$$\nabla_X^{\top}Y(A) \coloneqq \pi_A^{\top}(\nabla_X Y) \quad \text{e} \quad \nabla_X^{\perp}Y(A) \coloneqq \pi_A^{\perp}(\nabla_X Y). \tag{16}$$

Introduciamo ora una nuova funzione che faciliterà la scrittura delle formule algebriche inerenti le connessioni appena scritte: sia $\pi\colon H^{n+1} \times H^{n+1} \to H^{n+1}$ data da

$$\pi(X, Y) \coloneqq XMY + YMX. \tag{17}$$

Notiamo in primo luogo che, se $X, Y \in T_A\mathbb{CH}^n$, allora $\pi(X, Y) \in T_A^{\perp}\mathbb{CH}^n$. Infatti, grazie alla proprietà 2.6.1, si ha

$$A_M\pi(X,Y)_M = A_M(X_MY_M + Y_MX_M) = X_MY_MA_M + Y_MX_MA_M = \pi(X,Y)_MA_M$$

e si conclude grazie alla (13).

Proseguiamo con un lemma che mette in relazione la mappa π e le mappe $\pi^{\perp}$, $\pi^{\top}$:

Lemma 3.1. *Siano $A \in \mathbb{CH}^n$ e $X \in H^{n+1}$. Si ha:*

$$\pi_A^{\perp}(X) = \pi(A, X) - 2AX_MA_M,$$
$$\pi_A^{\top}(X) = X - \pi(A, X) + 2AX_MA_M.$$

Dimostrazione. Per ogni $A \in \mathbb{CH}^n$ si ha che $H^{n+1} \cong T_AH^{n+1}$, infatti H^{n+1} è isomorfo a $\mathbb{R}^N$ per $N \in \mathbb{N}$ e sappiamo che lo spazio tangente a un punto di $\mathbb{R}^N$ è ancora uno spazio lineare di dimensione N. Poi $T_AH^{n+1} = T_A\mathbb{CH}^n \oplus T_A^{\perp}\mathbb{CH}^n$, e quindi $X = \pi_A^{\top}(X) + \pi_A^{\perp}(X)$ per ogni $X \in H^{n+1}$. Di conseguenza, basterà provare la prima delle due identità enunciate nel lemma, e la seconda ne sarà una conseguenza. Proviamo allora la prima: se $X \in T_A\mathbb{CH}^n$, allora $\pi_A^{\top}(X) = X$ e dunque, usando la 1.6.1, otteniamo

$$\pi_A^{\top}(X)_M = X_M = A_MX_M + X_MA_M = M(\pi(A,X) - 2AX_MA_M),$$

Resta da provare che $\pi(A,X) - 2AX_MA_M \in T_A\mathbb{CH}^n$ e avremo concluso. Ma questo è vero poiché si ha

$$(\pi(A,X) - 2AX_MA_M)_MA_M + A_M(\pi(A,X) - 2AX_MA_M)_M =$$
$$= X_MA_M - 2A_MX_MA_M + A_MX_M = (\pi(A,X) - 2AX_MA_M)_M.$$

□

Le formule che descrivono la connessione normale e tangente, dunque, risultano essere:

$$\nabla_X^{\top}Y(A) = \pi(A, \nabla_XY) - 2A(\nabla_XY)A_M,$$
$$\nabla_X^{\perp}Y(A) = \nabla_XY(A) - \pi(A, \nabla_XY) + 2A(\nabla_XY)_MA_M.$$

3.2 Seconda forma fondamentale e curvatura media di $\mathscr{F}$

La prossima definizione introduce la forma σ, che chiameremo *seconda forma fondamentale dell'immersione* $\mathscr{F}$ e comparirà nel Teorema 5.2.

Indichiamo ancora con $\Gamma(T\mathbb{CH}^n)$ il fibrato tangente della varietà iperbolica complessa, e con $\Gamma(T^\perp\mathbb{CH}^n)$ il fibrato normale.

Definizione 3.2. La mappa $\sigma\colon \Gamma(T\mathbb{CH}^n) \times \Gamma(T\mathbb{CH}^n) \to \Gamma(T^\perp\mathbb{CH}^n)$ definita da

$$\sigma_A = \nabla_X^\perp Y(A) \qquad \forall A \in \mathbb{CH}^n. \tag{18}$$

è detta *seconda forma fondamentale dell'immersione* $\mathscr{F}$ di $\mathbb{CH}^n$ in H^{n+1} è l

Diamo anche la seguente

Definizione 3.3. La *curvatura media* di $\mathscr{F}$ è la mappa $\mathscr{H}\colon \mathbb{CH}^n \to \Gamma(T^\perp\mathbb{CH}^n)$ definita da

$$\mathscr{H}(A) = \sum_{i=1}^{2n} \sigma_A(X_i, X_i), \tag{19}$$

dove $X_1, \dots, X_{2n}$ è una base ortonormale di $T_A\mathbb{CH}^n$.

Per semplificare la notazione, d'ora in avanti scriveremo semplicemente σ e $\mathscr{H}$ per indicare σ_A e $\mathscr{H}(A)$ rispettivamente. Si noti che la definizione di curvatura media che abbiamo dato differisce dalla più comune nella letteratura per un fattore moltiplicativo dipendente dal solo valore n, dimensione dello spazio ambiente. Tale costante è omessa per comodità.

Caratterizziamo le mappe σ e $\mathscr{H}$ in termini di operatori tra matrici Hermitiane

Proposizione 3.4. *Sia $A \in \mathbb{CH}^n$. Allora per ogni $X, Y \in T_A\mathbb{CH}^n$ si ha*

$$\sigma(X, Y) = \pi(X, Y)(\mathbb{I} - 2A_M).$$

Inoltre, il vettore curvatura media $\mathscr{H}$ dell'immersione $\mathscr{F}$ in $A \in \mathbb{CH}^n$ è dato da

$$\mathscr{H} = 4((n+1)A - M), \qquad A \in \mathbb{CH}^n.$$

Dimostrazione. Partiamo dalla prima identità; dobbiamo mostrare che il secondo membro gode delle due seguenti proprietà (che caratterizzano la seconda forma fondamentale):

1. $\pi(X, Y)(\mathbb{I} - 2A_M)A_M = A_M\pi(X, Y)(\mathbb{I} - 2A_M)$
2. $\nabla_X Y = \nabla_X^\top Y + \pi(X, Y)(\mathbb{I} - 2A_M)$.

La prima equazione ci assicura che $\pi(X, Y)(\mathbb{I} - 2A_M) \in T_A^\perp\mathbb{CH}^n$, mentre la seconda assicura che $\sigma(X, Y)$ e $\pi(X, Y)(\mathbb{I} - 2A_M)$ coincidano. Partiamo dall'ultima delle due equazioni appena scritte: utilizzando le proprietà 2.6.1 e 2.6.2 otteniamo:

$$(\nabla_X^\top Y)_M + \pi(X, Y)(\mathbb{I} - 2A_M) = (\nabla_X \pi(A, Y))_M = (\nabla_X Y)_M.$$

Proviamo ora la seconda identità enunciata nella proposizione. Usando le proprietà 2.6.1 e 2.6.5 otteniamo:

$$\sigma(X, Y)_M A_M = (X_M Y_M + Y_M X_M)(\mathbb{I} - 2A_M)A_M = A_M\sigma(X, Y)_M.$$

La prima parte della dimostrazione è così conclusa. Controlliamo ora che la formula

$$\mathscr{H} = 4((n+1)A - M), \qquad A \in \mathbb{CH}^n.$$

sia corretta per $A = A_0$. Consideriamo la base ortonormale di $T_{A_0}\mathbb{CH}^n$ $X_1, \dots, X_n, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n$. La curvatura media dell'immersione è

$$\mathscr{H} = \sum_{j=1}^{n} \sigma(X_j, X_j) + \sum_{j=1}^{n} \sigma(\hat{X}_j, \hat{X}_j).$$

Per quanto appena dimostrato, si ha

$$\sigma(X_j, X_j) = 2X_jMX_j(\mathbb{I} - 2MA_0) = 2X_jMX_jM = 2(A_0 - E_{jj}), \qquad j = 1, \dots, n,$$

dove E_{ij} è la matrice avente tutte le entrate nulle eccetto (i, j). Notiamo poi che

$$\sigma(\hat{X}_j, \hat{X}_j) = \sigma(X_j, X_j), \qquad j = 1, \dots, n.$$

Infatti $\pi(\hat{X}_j, \hat{X}_j) = \pi(X_j, X_j)$ e si conclude per la prima parte della proposizione. Ne deduciamo dunque che

$$\mathscr{H} = 4\sum_{j=1}^{n}(A_0 - E_{jj}) = 4((n+1)A_0 - M).$$

Infine, se l'uguaglianza vale per $A = A_0$, allora vale per ogni punto di $\mathbb{CH}^n$ grazie alle proprietà della funzione T_Q. $\square$

4 Sfere metriche in $\mathbb{CH}^n$

Questa sezione è suddivisa in tre paragrafi: nel primo paragrafo introdurremo il concetto di sfera metrica in $\mathbb{CH}^n$, il paragrafo 4.2 fornisce le definizioni di seconda forma fondamentale, di curvature principali e curvatura media e spazio tangente complesso per un'ipersuperficie Σ. Il paragrafo 4.3, infine, propone una panoramica sulle ipersuperfici di Hopf in $\mathbb{CH}^n$: di particolare rilievo per i nostri scopi sarà il Teorema 4.7.

4.1 Introduzione

Cominciamo dalla definizione di sfera nella varietà $(\mathbb{CH}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_R)$:

Definizione 4.1. Sia A_0 un punto fissato di $\mathbb{CH}^n$. La sfera di raggio $r > 0$ con centro A_0 è

$$\Sigma_r(A_0) := \{A \in \mathbb{CH}^n \mid \langle A, A_0\rangle = -\frac{1}{2}\cosh^2 r =: \varphi(r)\}. \tag{20}$$

La funzione φ è ricavata da [5] infatti, se lo spazio $\mathbb{CH}^n$ è definito con curvatura sezionale -1 si ha:

$$\cosh^2\left(\frac{d([z],[w])}{2}\right) = |\langle z, w\rangle_M|^2,$$

dove d è la distanza metrica su $\mathbb{CH}^n$, ovvero la distanza tra z e w pensati come punti della varietà Riemanniana $\mathbb{CH}^n$ sul cui spazio tangente sia stata definita la metrica $\langle\cdot,\cdot\rangle_R$. Ovviamente possiamo trasferire la stessa metrica su $\mathscr{F}(\mathbb{CH}^n)$ tramite l'isometria $\mathscr{F}$. Indichiamo sempre con la lettera d questa metrica. Affermiamo che:

$$\cosh^2\left(\frac{d(A,A_0)}{2}\right) = \cosh^2\left(\frac{d([z],[w])}{2}\right) = |\langle z, w\rangle_M|^2 = |z_0|^2 = -2\langle A, A_0\rangle$$

ove $\mathscr{F}(z) = A$ e $\mathscr{F}(w) = A_0$: si deve dunque avere $w = (-1, 0, \cdots, 0)$. In effetti abbiamo

$$\langle A, A_0\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} -|z_0|^2 & * \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{2}|z_0|^2,$$

dove per ottenere la prima matrice si è usato il fatto che, se $z = (z_0, \cdots, z_n)$ allora l'entrata A_{00} (prima riga prima colonna della matrice A) risulta essere $\langle A(e_0), e_0\rangle_M = \langle -\langle e_0, z\rangle_M z, e_0\rangle_M = \langle \bar{z_0} z, e_0\rangle_M = -|z_0|^2$.

Quindi se $A \in \Sigma_r(A_0)$, si ha:

$$\langle A, A_0\rangle_M = -\frac{1}{2}\cosh^2\left(\frac{r}{2}\right),$$

e normalizzando la curvatura di $\mathbb{CH}^n$ in conformità alle nostre definizioni si ottiene la (20).

4.2 Ipersuperfici reali in $\mathbb{CH}^n$

Sia Σ un'ipersuperficie reale di $\mathbb{CH}^n$. Si ha che $\dim_{\mathbb{R}} T_A\Sigma = 2n - 1$. Sia $A \in \Sigma$, chiameremo N_A^Σ la direzione tale che

$$N_A^\Sigma \boxplus T_A\Sigma = T_A\mathbb{CH}^n,$$

dove $\boxplus$ indica la somma diretta ortogonale. Abbiamo definito in 3.2 la seconda forma fondamentale dell'immersione $\mathscr{F}$. Ora, data una superficie Σ definiamo la seconda forma fondamentale associata a tale superficie.

Definizione 4.2. Sia $A \in \Sigma$. La forma bilineare $h_\Sigma \colon T_A\Sigma \times T_A\Sigma \to \mathbb{R}$

$$h_\Sigma(X,Y) = \langle \nabla_X N_A^\Sigma, Y\rangle \tag{21}$$

è detta *seconda forma fondamentale* di Σ

Dal momento che coinvolge la nozione di vettore normale a un'ipersuperficie, la definizione di h_Σ ha senso globalmente solo se la varietà è orientabile, altrimenti la definizione può essere posta solo localmente. Inoltre per ogni $A \in \Sigma$, abbiamo che $\nabla_X N_A^\Sigma \in T_A\Sigma$ poiché, scrivendo N in luogo di N_A^Σ,

$$1 = \langle N, N\rangle,$$

e derivando lungo X si ha

$$0 = \langle \nabla_X N, N\rangle + \langle N, \nabla_X N\rangle = 2\langle N, \nabla_X N\rangle$$

Quindi

$$\nabla_X N_A^\Sigma \perp N_A^\Sigma,$$

e chiaramente $\nabla_X N_A^\Sigma \in T_A\mathbb{CH}^n$.

Si noti che, per la simmetria del prodotto definito in (4), h_Σ è una forma bilineare simmetrica e dunque diagonalizzabile.

Diamo la definizione di *curvature principali* e *curvatura media* per un'ipersuperficie.

Definizione 4.3. Sia $\Sigma \subset \mathbb{CH}^n$ un'ipersuperficie. Gli autovalori $\bar{\lambda}_j$ di h_Σ sono detti curvature principali di Σ. Il valore $H = \mathrm{tr}(h_\Sigma)$ è detto curvatura media di Σ.

Ricordiamo che la dimensione reale di $T_A\Sigma$ è $2n-1$, poiché Σ è ipersuperficie reale di uno spazio di dimensione complessa n: dunque $T_A\Sigma$ non può possedere una struttura di spazio complesso. Sia $N^\Sigma \in T_A\mathbb{CH}^n$, $N^\Sigma \perp \Sigma$. Consideriamo la struttura complessa J introdotta in 2.4: notiamo che $J(N^\Sigma) \perp P$, dove $P \perp T_A\mathbb{CH}^n$ è la direzione normale a $\mathbb{CH}^n$ (e dunque a Σ) in A, poiché la struttura complessa mappa elementi di $T_A\mathbb{CH}^n$ in $T_A\mathbb{CH}^n$. Tuttavia si ha anche che $J(N^\Sigma) \in T_A\Sigma$. Infatti basta verificarlo per $A = A_0$ dove, ponendo senza perdita di generalità $N^\Sigma = X_n$, vale

$$J(N^\Sigma) = iN_M^\Sigma,$$

e poi

$$\langle J(N^\Sigma), N^\Sigma\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(MiN_M^\Sigma MN^\Sigma) = -\frac{i}{2}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -e_n \\ e_n^t & \mathbb{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e_n \\ e_n^t & \mathbb{O}\end{pmatrix}\right) = 0.$$

Chiameremo la direzione $J(N_A^\Sigma)$ *direzione caratteristica* o *direzione di Hopf* di Σ in A e il vettore $J(N_A^\Sigma$ sarà detto *vettore di Hopf*. Sia infine $\mathbb{C}T_A\Sigma \subset T_A\Sigma$ il sottospazio di $T_A\Sigma$ complementare alla direzione di Hopf in A. Tale spazio ha dimensione $2n-2$ e siccome $J(J(N_A^\Sigma)) = -N_A^\Sigma$, si ha che la struttura complessa preserva questo sottospazio. Riassumiamo quanto appena detto nella seguente

Definizione 4.4. Definiamo lo *spazio tangente complesso* a Σ in A

$$\mathbb{C}T_A\Sigma := T_A\Sigma \cap J_A(T_A\Sigma).$$

$\mathbb{C}T_A\Sigma$ è la parte invariante di $T_A\Sigma$ per l'azione di J in A. Tali direzioni sono dette *direzioni tangenti complesse (o olomorfe) di* $T_A\Sigma$. Infine poniamo $\hat{h} := h_{|\mathbb{C}T\Sigma}$.

4.3 Ipersuperfici di Hopf

Nel seguito faremo riferimento al testo di T. E. Cecil, P. J. Ryan [8].

Definizione 4.5. Sia Σ un'ipersuperficie in una varietà differenziabile complessa M. Si dice che Σ è di Hopf di se, per ogni punto $A \in \Sigma$, il vettore di Hopf in A è autovettore per la forma h_Σ.

Focalizziamo la nostra attenzione sulle superfici di Hopf aventi tutte le curvature principali costanti: nel 1985 S. Montiel [1] fornisce degli esempi di superficie di Hopf in $\mathbb{CH}^n$ aventi tutte le curvature costanti. Per ciascun "tipo" di ipersuperficie individuato, egli fornisce la descrizione delle sue curvature principali.

Per poter comprendere meglio la classificazione che segue, diamo la seguente

Definizione 4.6. Sia M una varietà differenziabile e sia $\gamma\colon \mathbb{R} \to$ una curva. Un *intorno tubolare* di raggio r di γ è l'insieme dei punti di M che distano r dal supporto di γ.

Ecco la lista fornita da Montiel:

Tipo A_2
Sia $1 \leq k \leq n-2$. L'intorno tubolare A_2 di raggio r ha le seguenti curvature principali:

1. $\alpha = 2\coth 2r$ di molteplicità 1;
2. $\lambda = \coth r$ di molteplicità $2l$;
3. $\mu = \tanh r$ di molteplicità $2k$,

   ove $k + l = n - 1$;

Tipo A_1
Sia $k = n - 1$. L'intorno tubolare A_1 di raggio r ha le seguenti curvature principali:

1. $\alpha = 2\coth 2r$ di molteplicità 1;
2. $\mu = \tanh r$ di molteplicità $2k = 2n - 2$;

Sia $n \geq 2$. La "sfera metrica" di raggio r ha le seguenti curvature principali:

1. $\alpha = 2\coth 2r$ di molteplicità 1;
2. $\lambda = \coth r$ di molteplicità $2n - 2$

Tipo A_0
Sia $n \geq 2$. La orosfera di raggio r ha le seguenti curvature principali:

1. $\alpha = \frac{2}{r}$ di molteplicità 1;
2. $\lambda = \frac{1}{r}$ di molteplicità $2n - 2$;

Tipo B
Queste ipersuperficie sono intorni tubolari in

$$M := \pi(\{z \in S \mid \Im z = 0\}) \subset \mathbb{CH}^n,$$

dove π è la proiezione dell'iperboloide S in $\mathbb{CH}^n$ tramite il passaggio allo spazio quoziente. Le curvature principali dei "tubi su M" di raggio r sono:

1. $\alpha = 2\tanh 2r$ di molteplicità 1 (tranne nel caso in cui $\coth r = 2\tanh 2r$);

2. $\lambda = \coth r$ di molteplicità $n-1$ (tranne nel caso in cui $\coth r = 2 \tanh 2r$);

3. $\mu = \tanh r$ di molteplicità $n-1$.

Poniamo la nostra attenzione sull'ipersuperificie di tipo $A_1.2$: la sfera metrica in $\mathbb{CH}^n$ è un esempio di ipersuperficie di Hopf avente tutte le curvature principali costanti. Si noti come a differenza dei modelli geometrici più semplici (geometria euclidea, iperbolica reale etc.), nello spazio iperbolico complesso le curvature principali della sfera non sono tutte uguali fra loro.

Nel 1989, in [2], Berndt fornisce una classificazione delle ipersuperficie di Hopf a curvature costanti nello spazio iperbolico complesso. Il risultato dei suoi studi si riassume affermando che la lista stilata da Montiel, e sopra riportata, è in verità esaustiva. Vale cioè il seguente

Teorema 4.7. *Sia M una ipersuperficie di Hopf in $\mathbb{CH}^n$, con $n \geq 2$, aventi curvature principali costanti. Allora M è (un sottoinsieme aperto di) una ipersuperficie nella lista di Montiel. In particolare, il numero g di curvature principali distinte è 2 o 3.*

5 Caratterizzazione della sfera

Questa sezione è dedicata al Teorema 5.2 sulla caratterizzazione delle sfere , la cui dimostrazione costituisce l'obiettivo ultimo del nostro lavoro. Il teorema di caratterizzazione consentirà di descrivere una sfera come l'insieme su cui una data funzione è costante. Iniziamo dunque con la seguente:

Definizione 5.1. Sia $\Sigma \subset \mathbb{CH}^n$ una superficie orientata e consideriamo, per $r > 0$, la mappa $\mathscr{W}_r^\Sigma \colon \Sigma \to H^{n+1}$

$$\mathscr{W}_r^\Sigma(A) = A - \frac{1}{2}\sinh(2r)N_A^\Sigma + \frac{1}{2}\sinh^2(r)\sigma_A(N_A^\Sigma, N_A^\Sigma), \tag{22}$$

dove $N_A^\Sigma \in T_A\mathbb{CH}^n$ è la direzione normale a Σ nel punto A.

D'ora in poi adotteremo le notazioni:

$$\beta = -\frac{1}{2}\sinh(2r), \qquad \gamma = \frac{1}{2}\sinh^2(r).$$

Enunciamo e dimostriamo il teorema di caratterizzazione delle sfere.

Teorema 5.2. *Sia $\Sigma \subset \mathbb{CH}^n$ una ipersuperficie orientata, e sia $r > 0$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\mathscr{W}_r^\Sigma$ è costante*
2. *Σ è (un sottoinsieme di) una sfera di raggio r.*

Inoltre si ha che $\mathscr{W}_r^\Sigma = A_0 \in \mathbb{CH}^n$, dove A_0 è il centro della sfera.

Dimostrazione. Iniziamo definendo una base ortonormale per $\mathbb{C}T\Sigma$.

Sia $X_1, \ldots, X_n, \hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_{n-1}$ un insieme di elementi ortonormali in $T_A\mathbb{CH}^n$ tali che:

1. $X_{j+1} \coloneqq \hat{X}_j = J(X_j)$ per $j = 1, \ldots, n-1$ ed $N^\Sigma = J(X_n)$,
2. $X_1, \ldots, X_{n-1}, \hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_{n-1}$ diagonalizzano $\hat{h} = h_{|\mathbb{C}T\Sigma}$.

Con queste notazioni $\mathbb{C}T\Sigma = \langle X_1, \ldots, X_n, \hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_{n-1}\rangle$ e $\langle J(N^\Sigma)\rangle = \langle J(J(X_n))\rangle = \langle -X_n\rangle = \langle X_n\rangle$ sarà la direzione di Hopf. La scelta di una base che diagonalizza $\hat{h}$ può sempre essere fatta siccome $\hat{h}$ è sottomatrice di h e dunque ancora simmetrica. Cerchiamo di capire che informazioni otteniamo dall'identità $\nabla_{X_j}\mathscr{W}_r^\Sigma = 0$, che equivale ad affermare che $\mathscr{W}_r^\Sigma$ è costante su Σ. Calcoliamo cioè nell'ordine $\nabla_{X_j}A$, $\nabla_{X_j}N_A^\Sigma$ e $\nabla_{X_j}\sigma_A(N_A^\Sigma, N_A^\Sigma)$.

D'ora in poi scriveremo $X_j\mathscr{W}_r^\Sigma$ per indicare ∇_{X_j}, useremo N per N_A^Σ e σ_N per $\sigma(N, N)$.

Calcoliamo $\nabla_{X_j}A$: essendo A un punto di Σ, abbiamo che $X_jA = X_j$, si veda (9). Ora cerchiamo di determinare $\nabla_{X_j}N_A^\Sigma$. Per $j \neq n$:

$$\begin{aligned} X_jN &= \nabla_{X_j}^\perp N + \nabla_{X_j}^\top N \\ &= \sum_{i=1}^{2n-1} h_{ij}X_i + \sigma(X_j, N) \\ &= \sum_{i=1, i\neq n}^{2n-1} \hat{h}(X_i, X_j)X_i + h(X_n, X_j)X_n + \sigma(X_j, N) \\ &= \bar{\lambda}_jX_j + h(X_n, X_j)X_n + \sigma(X_j, N), \end{aligned} \tag{23}$$

dove $\bar{\lambda}_j$ è l'autovalore di $\hat{h}$ rispetto a X_j.

Per $j = n$ si trova invece

$$\sigma(X_n, N) = \nabla^{\perp}_{X_n} N = 0, \tag{24}$$

quindi

$$X_n N = \nabla^{\top}_{X_n} N. \tag{25}$$

Infatti $\sigma(X_n, N) = \sigma(X_n, J(X_n))$, e il risultato $\sigma(X_n, J(X_n)) = 0$ si può ottenere con dei semplici conti matriciali utilizzando la proprietà 2.5 e la prima delle due identità in 3.4. Introduciamo la notazione

$$\nabla^{\top}_{X_n} N = \kappa X_n - h_N,$$

dove $\kappa := h(X_n, X_n)$ sarà la *curvatura caratteristica* di Σ, cioè la curvatura principale associata al vettore di Hopf, mentre

$$h_N := \sum_{i \neq n} h(J(N), X_i) X_i = -\sum_{i \neq n} h(X_n, X_i) X_i.$$

Vogliamo adesso calcolare $X_j \sigma_N := X_j \sigma(N, N)$. Usando la proprietà 3.4, la regola di Leibniz dell'operatore ∇ e l'identità (9) si osserva che

$$X_j \sigma_N = 2\pi(\nabla_{Xj} N, N)(\mathbb{I} - 2MA) - 2\pi(N, N) M X_j. \tag{26}$$

Ora vogliamo dimostrare che

$$X_j \sigma_N = 2(\bar{\lambda}_j \sigma(X_j, N) + X_j), \qquad j \neq n. \tag{27}$$

Siccome

$$\nabla_{X_j} N = \nabla^{\top}_{X_j} N + \nabla^{\perp}_{X_j} N,$$

partendo dalla (26) e usando le identità (23) e (24) si ha:

$$X_j \sigma_N = 2\{\bar{\lambda}_j \sigma(X_j, N) + \sigma(\sigma(X_j, N), N) - \pi(N, N) M X_j\}. \tag{28}$$

Senza perdita di generalità possiamo calcolare $\sigma(X_j, N)$ in A_0 e considerare vero il risultato per un punto qualsiasi. Possiamo dunque supporre che $X_j = E_{j0} + E_{0j}$ per $j = 1, \ldots, n$ e $N = \hat{X}_n = i(E_{n0} - E_{0n})$. Si ha che

$$\mathbb{I} - 2MA_0 = M \qquad \text{e} \qquad E_{kh} E_{pq} = \delta_{hp} E_{kq},$$

e con dei semplici conti algebrici (sfruttando ancora la proprietà 3.4) si mostra che

$$\sigma(X_j, N) = i(E_{jn} - E_{nj}), \tag{29}$$

$$\sigma(\sigma(X_j, N), N) = E_{j0} - E_{0j} + \delta_{jn}(E_{0n} - E_{n0}), \tag{30}$$

$$-\pi(N, N) M X_j = 2(E_{n0} \delta_{jn} + E_{0j}), \tag{31}$$

Dove δ è la funzione delta di Kronecker. Se poi $j = n$, troviamo

$$-\pi(N, N) M X_n = 2(E_{n0} + E_{0n}) = 2X_n. \tag{32}$$

Partendo dalla (28) e sostituendo con le identità appena trovate, si ha

$$X_j \sigma(N, N) = 2\{\bar{\lambda}_j \sigma(X_j, N) + X_j + \delta_{jn} X_n\}.$$

Questa equazione, che vale solo per $j \neq n$, dimostra la (27). Se invece $j = n$, partendo dalla (26), si ha:

$$X_n\sigma_N = 2\pi(\nabla_{X n}N, N)(\mathbb{I} - 2MA) - 2\pi(N, N)MX_n.$$

Un conto algebrico diretto mostra che

$$-2\pi(N, N)MX_n = 4X_n.$$

Utilizzando questa identità e (24) si ha:

$$\pi(\nabla_{X_n}N, N))(\mathbb{I} - 2MA) = \sigma(\nabla^{\top}_{X_n}N + \nabla^{\perp}_{X_n}N, N) = \sigma(\nabla^{\top}_{X_n}N, N)$$

$$= \sigma(\kappa X_n - h_N, N) = -\sigma(h_N, N) = \sum_{i\neq n} h(X_n, X_i)\sigma(X_i, N).$$

Quindi

$$X_n\sigma_N = 2\sum_{i\neq n} h(X_n, X_i)\sigma(X_i, N) + 4X_n. \tag{33}$$

Alla luce di quanto sin qui visto, riscriviamo (22), in cui adotteremo con la notazione $\mathscr{W}^{\Sigma}_r = A + \beta N + \gamma\sigma_N$, per $j \neq n$ si ha:

$$X_j\mathscr{W}^{\Sigma}_r = X_j + \beta(\bar{\lambda}_j X_j + h(X_n, X_j)X_n + \sigma(X_j, N)) + 2\gamma(\bar{\lambda}_j\sigma(X_j, N) + X_j) =$$

$$= (1 + \beta\bar{\lambda}_j + 2\gamma)X_j + \beta h(X_n, X_j)X_n + (\beta + 2\gamma\bar{\lambda}_j)\sigma(X_j, N).$$

Siccome X_j, X_n e $\sigma(X_j, N)$ sono tutti vettori ortogonali fra loro, imponendo $X_j\mathscr{W}^{\Sigma}_r = 0$ si ottiene:

$$1 + \beta\bar{\lambda}_j + 2\gamma = 0 \tag{34}$$

$$\beta h(X_n, X_j) = 0 \tag{35}$$

$$\beta + 2\gamma\bar{\lambda}_j = 0 \tag{36}$$

La (34) e la (36) forniscono

$$\bar{\lambda}_j = -\frac{1 + 2\gamma}{\beta} \quad \text{e} \quad \bar{\lambda}_j = -\frac{\beta}{2\gamma},$$

da cui otteniamo l'*equazione di compatibilità*

$$2\gamma(1 + 2\gamma) = \beta^2$$

che, ricordando le definizioni di β e γ, è equivalente a $1 + \sinh^2 r = \cosh^2 r$ come scelte di β e γ. Notiamo dunque che $\bar{\lambda}_j$ è una costante su Σ e non dipende da j.

Più precisamente

$$\bar{\lambda}_j = \frac{\sinh(2r)}{2\sinh^2 r} = \coth r. \tag{37}$$

La (35) per $\beta \neq 0$ dice che Σ è una superficie di Hopf ($X_n = JN^{\Sigma}$ è autovettore di h). Di conseguenza i $\bar{\lambda}_j$ sono curvature di Σ.

Passiamo ora a $j = n$. Abbiamo che

$$X_n\mathscr{W}^{\Sigma}_r = X_n + \beta(\kappa X_n + \sum_{i\neq n} h(X_n, X_i)X_i) + \gamma(4X_n + 2\sum_{i\neq n} h(X_n, X_j)\sigma(X_n, X_j)) =$$

$$= (1 + \kappa\beta + 4\gamma)X_n + \beta\sum_{i\neq n} h(X_n, X_i)X_i + 2\gamma\sum_{i\neq n} h(X_n, X_i)\sigma(X_n, X_i).$$

Per lo stesso argomento sull'ortogonalità di X_n, X_i e $\sigma(X_n, X_j)$ utilizzato precedentemente, l'equazione $X_n \mathscr{W}_r^\Sigma = 0$ implica che $h_{ni} = 0$ e inoltre

$$1 + \kappa\beta + 4\gamma = 0,$$

che significa

$$\kappa = -\frac{1 + 4\gamma}{\beta} = 2\frac{1 + 2\sinh^2(r)}{\sinh(2r)} = \tanh(r) + \coth(r),$$

ovvero

$$\kappa = 2\coth(2r). \tag{38}$$

Ne deduciamo che se $\mathscr{W}_r^\Sigma$ è costante, allora Σ è un'ipersuperficie di Hopf avente esattamente due curvature costanti. Recuperando la lista di Montiel dalla sezione 4.3 deduciamo che Σ deve essere una sfera. Viceversa, se Σ è una sfera, allora le identità (34), (36) e (38) sono immediate e si ottengono sostituendo a $\bar{\lambda}_j$ i corretti valori delle curvature di una sfera, mentre le identità (35) e le analoghe per il caso $j = n$ seguono dal fatto che la sfera metrica è un'ipersuperficie di Hopf.

La prima parte del teorema è così dimostrata. Ora vogliamo provare che, se Σ è una sfera, ovvero se (22) è costante in H^{n+1}, il valore assunto da tale espressione è il centro della sfera.

Sia Σ la sfera di centro A_0 e raggio r. Scriveremo $\mathscr{W}_r^\Sigma \equiv C(r, A_0)$ dove con $C(r, A_0)$ indichiamo una costante in H^{n+1} che dipende solo dal raggio e dal centro della sfera Σ, dominio della funzione $\mathscr{W}_r^\Sigma$. Il nostro scopo è mostrare che $C(r, A_0) = A_0$. Per farlo, proviamo che $C(r, A_0)$ e A_0 sono punti aventi la stessa proiezione su una base di $\mathbb{CH}^n$.

Sia $A \in \Sigma$ e $X \in T\Sigma_r(A_0)$. Ricordando che $\varphi(r) \coloneqq -\frac{1}{2}\cosh^2(r)$, abbiamo

$$0 = X\varphi(r) = X\langle A, A_0\rangle = \langle X, A_0\rangle.$$

D'altra parte si ha che

$$\langle X, C(r, A_0)\rangle = \langle X, \mathscr{W}_r^\Sigma\rangle = 0$$

perché $X \in T\Sigma_r(A_0)$ è ortogonale a tutti gli addendi di $\mathscr{W}_r^\Sigma$ (ovvero a A, N_A e $\sigma_A(N_A, N_A)$). Dunque A_0 e $C(r, A_0)$ danno le stesse proiezioni sullo spazio tangente Σ.

Calcoliamo le proiezioni lungo N. Il raggio della sfera, essendo geodetica dal centro A_0 alla superficie Σ, è normale alla superficie. La derivata di $\varphi(r)$ va dunque calcolata lungo la direzione N. Per questo motivo scriveremo

$$\varphi'(r) = N\varphi(r) = N\langle A, A_0\rangle = \langle N, A_0\rangle. \tag{39}$$

Ma $\varphi'(r) = \frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{2}\cosh^2(r)\right)$, per cui

$$\langle N, A_0\rangle = -\sinh(r)\cosh(r). \tag{40}$$

D'altra parte, dalla (22), si ha che

$$\langle N, C(r, A_0)\rangle = \langle N, \mathscr{W}_r^\Sigma\rangle = -\frac{\sinh(2r)}{2} = -\sinh(r)\cosh(r), \tag{41}$$

quindi la componente di A_0 e $\mathscr{W}_r^\Sigma(A)$ lungo N sono la stessa.

Passiamo ora al calcolo della componente $\sigma(N, N)$; per quanto già detto, si ha

$$\varphi''(r) = N\varphi'(r) = N\langle N, A_0\rangle = \langle \nabla_N^\top N + \nabla_N^\perp N, A_0\rangle = \langle \nabla_N^\perp N, A_0\rangle = \langle \sigma(N, N), A_0\rangle,$$

dove abbiamo usato il fatto che $\langle \nabla_N^\top N, A_0\rangle = 0$. Infatti siccome $\nabla_N^\top N \in T_A\mathbb{CH}^n$ e $\langle \nabla_N^\top N, N\rangle = 0$, identità che si può ottenere differenziando l'espressione $\langle N, N\rangle = 1$

lungo N, il valore $\nabla_N^\top N$ è tangente la sfera; ma poi $\langle X, A_0\rangle = 0$ quando X è tangente alla sfera, dal momento che $A_0 \in T_A^\perp \mathbb{CH}^n$.

Abbiamo che $\varphi''(r) = -\sinh^2(r) - \cosh^2(r)$, perciò abbiamo ricavato

$$\langle A_0, \sigma(N,N)\rangle = -1 - 4\gamma. \tag{42}$$

D'altra parte, ricordando che $\langle N, \sigma(N,N)\rangle = 0$,

$$\langle \sigma(N,N), C(r,A_0)\rangle = \langle \sigma(N,N), \mathscr{W}_r^\Sigma\rangle = \langle \sigma(N,N), A\rangle + \gamma\langle \sigma(N,N), \sigma(N,N)\rangle,$$

dove

$$\langle \sigma(N,N), A\rangle = \langle \nabla_N N, A\rangle = -\langle N, \nabla_N A\rangle = -\langle N, N\rangle = -1.$$

Con dei conti diretti fatti in A_0, si ha che

$$\langle \sigma(N,N), \sigma(N,N)\rangle = \langle 2(A_0 - E_{nn}), 2(A_0 - E_{nn})\rangle = -4.$$

Dunque otteniamo

$$\langle C(r,A_0), \sigma(N,N)\rangle = -1 - 4\gamma. \tag{43}$$

Perciò anche la componente $\sigma(N,N)$ di A_0 e $C(r,A_0)$ è la stessa.

Vogliamo ora calcolare $\langle \sigma(X_i,N), A_0\rangle$ con $X_i \in T_A\Sigma$. Si ha che $\langle N, A_0\rangle = \varphi'(r)$. Dunque

$$\begin{aligned}
0 &= X_i\langle N, A_0\rangle \\
&= \langle \nabla_{X_i}^\top N + \nabla_{X_i}^\perp N, A_0\rangle \\
&= \langle \langle \nabla_{X_i}^\top N, N\rangle N + \sigma(X_i,N), A_0\rangle \\
&= \langle \langle \bar\lambda_j X_j + h(X_n,X_j)X_n, N\rangle N + \sigma(X_i,N), A_0\rangle \\
&= \langle \left(\bar\lambda_j\langle X_j, N\rangle + h(X_n,X_j)\langle X_n, N\rangle\right) N + \sigma(X_i,N), A_0\rangle \\
&= \langle \sigma(X_i,N), A_0\rangle.
\end{aligned} \tag{44}$$

Verifichiamo anche che le due matrici hanno la stessa proiezione lungo $\sigma_{ij} \coloneqq \sigma(X_i,X_j)$ per $(i,j) \in \{1,\dots,2n-1\} \times \{1,\dots,2n-1\}$, con $i \neq j$. Abbiamo già osservato che, se $X_j \in T\Sigma_r(A_0)$, si ha $\langle X_j, A_0\rangle = 0$. Quindi

$$\begin{aligned}
0 &= X_i\langle X_j, A_0\rangle \\
&= \langle \nabla_{X_i}^\top X_j + \nabla_{X_i}^\perp X_j, A_0\rangle \\
&= \langle \langle \nabla_{X_i}^\top X_j, N\rangle N + \sigma(X_i,X_j), A_0\rangle \\
&= -h_{ij}\langle N, A_0\rangle + \langle \sigma_{ij}, A_0\rangle,
\end{aligned} \tag{45}$$

dove $h_{ij} \coloneqq h(X_i,X_j)$ è la seconda forma fondamentale di Σ.

Ora, se $i \neq j$, si può assumere senza perdita di generalità che $h_{ij} = 0$, dunque otteniamo

$$\langle \sigma_{ij}, A_0\rangle = 0, \qquad i \neq j. \tag{46}$$

Se invece $i = j$, dalla (45) si ha

$$0 = -h_{ii}\langle N, A_0\rangle + \langle \sigma_{ii}, A_0\rangle. \tag{47}$$

Svolgendo dei conti diretti con $A = A_0$, abbiamo

$$\sigma_{A_0}(X_i,X_i) = 2(A_0 - E_{ii}).$$

Quindi in A abbiamo

$$\sigma(X_i,X_i) = 2A - (2E_{ii})_A.$$

L'equazione (47) diventa

$$0 = -h_{ii}\langle N, A_0\rangle + \langle 2A - 2(E_{ii})_A, A_0\rangle, \tag{48}$$

che, grazie all'identità (39), si può riscrivere come

$$0 = -h_{ii}\varphi'(r) + 2\langle A, A_0\rangle - 2\langle (E_{ii})_A, A_0\rangle.$$

Usando (37) e ricordando che $\varphi(r) \coloneqq -\frac{1}{2}\cosh^2(r)$ abbiamo

$$-h_{ii}\varphi'(r) + 2\langle A, A_0\rangle = 0.$$

Dunque $\langle (E_{ii})_A, A_0\rangle = 0$ per $i \neq n$. Quindi, dalla (48) otteniamo che si ha sempre $\langle A_0, \sigma(X_i, X_j)\rangle = 0$, tranne quando $(i,j) = (n,n)$. Ma, siccome la struttura complessa commuta con la seconda forma fondamentale, abbiamo $\sigma(X_n, X_n) = \sigma_N$. Dunque le uniche componenti di A_0 normali a $\mathbb{CH}^n$ sono A e σ_N, e abbiamo già verificato che sono le stesse di $\mathscr{W}_r^\Sigma$. $\square$

Ringraziamenti

Desidero ringraziare chiunque mi sia stato vicino, mi abbia sostenuto e incoraggiato in questo percorso di studi: ai miei nonni, ai miei fratelli, a tutti i miei familiari ma in particolar modo ai miei genitori, va rivolto un grazie di cuore per la disponibilità e la completa dedizione che hanno rivolto da sempre nei miei confronti. Senza loro non avrei mai potuto raggiungere questo traguardo.
Infine, un grande grazie per l'affetto che mi regalano ogni giorno a tutti gli amici e le persone che più mi vogliono bene perché sanno rendere dolce la vita.

Riferimenti bibliografici

[1] Sebastián Montiel. "Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space". In: *Journal of the Mathematical Society of Japan* 37.3 (1985), pp. 515–535.

[2] Jürgen Berndt. "Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic space". In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1989.395 (1989), pp. 132–141.

[3] Susana Fornari, Katia Frensel e Jaime Ripoll. "Hypersurfaces with constant mean curvature in the complex hyperbolic space". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 339.2 (1993), pp. 685–702.

[4] S Fornari, K Frensel e J Ripoll. "Errata to:"Hypersurfaces with constant mean curvature in the complex hyperbolic space"[Trans. Amer. Math. Soc. 339 (1993), no. 2, 685–702; MR1123452 (93m: 53065)]". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 347.8 (1995), p. 3177.

[5] William Mark Goldman. *Complex hyperbolic geometry*. Oxford University Press, 1999.

[6] Antonio Ros. "The isoperimetric problem". In: *Global theory of minimal surfaces* 2 (2001), pp. 175–209.

[7] J Lucas Barbosa, Manfredo Do Carmo e Jost Eschenburg. "Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds". In: *Manfredo P. do Carmo–Selected Papers*. Springer, 2012, pp. 291–306.

[8] Thomas E Cecil e Patrick J Ryan. *Geometry of hypersurfaces*. Vol. 10. Springer, 2015.

[9] Erika Battaglia, Roberto Monti e Alberto Righini. "Stable hypersurfaces in the complex projective space". In: *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)* 199.1 (2020), pp. 231–251.