Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Una disuguaglianza isoperimetrica quantitativa in $\mathbb{R}^n$

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Laureanda:
Lina Falcone
Matricola 1052622

25 Settembre 2015
Anno Accademico 2014/2015

Introduzione

La disuguaglianza isoperimetrica classica afferma che se E è un insieme boreliano in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, con misura di Lebesgue $\mathscr{L}^n(E)$ finita, allora il perimetro della palla avente stesso volume di E è inferiore al perimetro di E, ed in particolare vale l'uguaglianza se e solo se E è una palla.

Il caso bidimensionale ha origini nella Matematica greca e nasce come risposta al problema di determinare, tra tutte le figure piane aventi lo stesso perimetro, quella di area massima. Intuitivamente era noto fin dall'antichità che le soluzioni a questo problema, detto isoperimetrico, dovessero essere i cerchi, ma la dimostrazione rigorosa di tale intuizione occupò i matematici per secoli e i primi risultati completi furono raggiunti solo a partire dalla fine del 1800. La Teoria della Misura, introducendo la nozione di area e di perimetro per una più vasta gamma di insiemi, anche in dimensione maggiore di 2, fornì gli strumenti per delle generalizzazioni. Nel 1954 de Giorgi dimostrò la "proprietà isoperimetrica dell'ipersfera nella classe degli insiemi con frontiera orientabile di misura finita" [4] . La storia del problema isoperimetrico giunge fino ai giorni d'oggi. Nel 2008 è stato pubblicato un articolo da N. Fusco, F. Maggi e A. Pratelli in cui viene dimostrata una versione quantitativa della disuguaglianza isoperimetrica in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ (si veda [1]).
Il risultato è racchiuso nel seguente teorema:

Teorema. *Sia $n \geq 2$. Allora esiste una costante C_n dipendente solo dalla dimensione n dello spazio, tale che per ogni boreliano E di $\mathbb{R}^n$ con $0 < \mathscr{L}^n(E) < \infty$ si ha*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathscr{L}^n(E \Delta (x + rB))}{r^n} \leq C_{\mathrm{n}} \sqrt{\frac{P(E) - P(B_r)}{P(B_r)}},$$

dove B è la palla unitaria centrata nell'origine, r è il raggio della palla B_{r} avente lo stesso volume di E e $P(A)$ indica il perimetro distribuzionale di A, per A boreliano di $\mathbb{R}^n$.

Si noti che dal teorema discende la proprietà isoperimetrica dell'ipersfera in $\mathbb{R}^n$ nella classe degli insiemi boreliani.

In questo lavoro di tesi dimostreremo una versione più debole del teorema precedente, usando strumenti base di teoria della misura e il teorema della divergenza. Abbiamo seguito il modello di [2].

Ringraziamenti. Desidero ringraziare il mio relatore, prof. Roberto Monti, che mi ha seguita con pazienza ed entusiasmo, guidandomi, con estrema disponibilità, alla realizzazione di questo piccolo lavoro. Ringrazio la dottoressa Valentina Franceschi per aver messo a disposizione i suoi appunti, sulla base dei quali è stata realizzata questa tesi.

Ringrazio Michele per i numerosi consigli sull'utilizzo di LaTex e Giulia per aver contribuito alla revisione finale. Ringrazio infine i miei genitori per il loro sostegno, la loro presenza costante e per aver sempre creduto in me, tutti gli amici matematici e le mie coinquiline che hanno contribuito a rallegrare questi tre anni e a farmi sentire a casa anche a Padova.

1 Una disuguaglianza isoperimetrica quantitativa in $\mathbb{R}^n$

Introduciamo preliminarmente un po' di notazione.
Sia $n \geq 2$ una dimensione. Su $\mathbb{R}^n$ definiamo in maniera standard la misura di Lebesgue n dimensionale $\mathscr{L}^n$ e la misura di Hausdorff $n-1$ dimensionale $\mathscr{H}^{n-1}$. Diremo che un aperto A di $\mathbb{R}^n$ è di classe C^k, con k intero non negativo, se per ogni $x_0 \in \partial A$ esistono un intorno U di x_0 e una funzione $\phi \in C^k(U)$ tali che

$$U \cap \partial A = \{x \in U \ t.c. \ \phi(x) = 0\} \text{ e } \nabla\phi(x_0) = 0.$$

Per gli aperti di $\mathbb{R}^n$ di classe C^∞ definiamo il perimetro come la misura di Hausdorff $n-1$ dimensionale della loro frontiera, ovvero se A è un tale aperto

$$P(A) := \mathscr{H}^{n-1}(\partial A).$$

Indichiamo poi con B la palla aperta n dimensionale di centro 0 e raggio 1

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \ t.c. \ \|x\| < 1\}$$

e con ω_n la sua misura di Lebesgue, ovvero $\omega_n = \mathscr{L}^n(B) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, dove Γ è la funzione Γ di Eulero, ovvero $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$.
Decomponiamo ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ in $x = (\overline{x}, x_n)$ con $\overline{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}-1})$, $x_n \in \mathbb{R}$ e fissato ϵ con $0 \leq \epsilon < 1$, definiamo il cilindro superiore aperto

$$C_\epsilon := \{(\overline{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n \ t.c. \ \|\overline{x}\| < 1, x_n > \epsilon\}.$$

Siano A e C sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, con C aperto; scriviamo $A \subset\subset C$ se $\overline{A}$ è un sottoinsieme compatto di C. Indichiamo con $A\Delta\mathrm{C}$ la differenza simmetrica tra A e C, ovvero l'insieme $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$.

Obiettivo della tesi sarà dimostrare il seguente risultato:

Teorema 1.1. *Siano $n \geq 2$, ϵ un valore fissato tale che $0 \leq \epsilon < 1$, E un aperto di $\mathbb{R}^n$ di classe C^∞ con $\mathscr{L}^n(E) = \mathscr{L}^n(B)$.*

1. *Esiste una costante dimensionale c_n>0 tale che se $E\Delta B \subset\subset C_0$ allora*
$$P(E) - P(B) \geq c_n \left(\mathscr{L}^n(E\Delta B)\right)^3 \tag{1.1}$$

2. *Esiste una costante dimensionale d_n tale che se $E\Delta B \subset\subset C_\epsilon$ allora*
$$P(E) - P(B) \geq d_n\, \epsilon \left(\mathscr{L}^n(E\Delta B)\right)^2. \tag{1.2}$$

Calcoleremo esplicitamente le due costanti dimensionali e si avrà

$$c_n = \frac{n-1}{192\omega_n^2} \text{ e } d_n = \frac{n-1}{64\omega_n}.$$

Nella Sezione 2, partendo da un' idea geometrica, costruiremo su C_ϵ un campo vettoriale X continuo, di norma 1, tale che $\frac{\mathrm{div(X)}}{n-1} \leq 1$ (si veda il Teorema 2.1 per le proprietà precise di X). Nella Sezione 3 verrà presentata una dimostrazione del

Teorema 1.1. Usando le proprietà di X, il teorema della divergenza e le ipotesi su E, si dedurrà la validità delle seguenti disuguaglianze

$$\mathscr{L}^n(B \setminus E) \geq \int_{B\setminus E} \frac{\mathrm{div}X}{n-1}\, dx \geq \frac{\mathscr{H}^{n-1}(\partial B \setminus E) - \mathscr{H}^{n-1}(\partial E \cap B)}{n-1}$$

e

$$\mathscr{L}^n(E \setminus B) \leq \frac{\mathscr{H}^{n-1}(\partial E \setminus B) - \mathscr{H}^{n-1}(\partial B \cap E)}{n-1},$$

da cui

$$\int_{B\setminus E} \left(1 - \frac{\mathrm{div}X}{n-1}\right) dx \leq \frac{\mathscr{H}^{n-1}(\partial E) - \mathscr{H}^{n-1}(\partial B)}{n-1} = \frac{P(E)-P(B)}{n-1}.$$

Il Teorema di Fubini Tonelli, un cambio di variabile e la decrescenza della funzione $x \mapsto 1 - \frac{\mathrm{div}X(x)}{n-1}$ permetteranno di ottenere

$$\int_{B\setminus E} \left(1 - \frac{\mathrm{div}X}{n-1}\right) dx \geq \int_{\|\overline{x}\|<1} \int_0^{\mathscr{L}^1(B^{\overline{x}}\setminus E^{\overline{x}})} \left(1 - \frac{\mathrm{div}X(\overline{x}, \sqrt{1-\|\overline{x}\|^2} - s)}{n-1}\right) ds\, d\overline{x},$$

dove si è indicato con $B^{\overline{x}} \setminus E^{\overline{x}}$ la $\overline{x}$-sezione di $B \setminus E$ per $\overline{x}$ fissato, con $\|\overline{x}\| < 1$. Ricordando la definizione del campo vettoriale X e facendo delle stime elementari si avrà

$$\left(1 - \frac{\mathrm{div}X(\overline{x}, \sqrt{1-\|\overline{x}\|^2} - s)}{n-1}\right) \geq \frac{s^2 + 2\epsilon s}{8\,(1+\epsilon)} \geq \begin{cases} \dfrac{1}{8}s^2 & se\ \epsilon = 0 \\ \dfrac{1}{8}\epsilon\, s & se\ 0 < \epsilon < 1 \end{cases},$$

e quindi

$$\frac{P(E)-P(B)}{n-1} \geq \begin{cases} \displaystyle\int_{\|\overline{x}\|<1} \int_0^{m(\overline{x})} \frac{s^2}{8}\, ds\, d\overline{x} & se\ \epsilon = 0 \\ \displaystyle\int_{\|\overline{x}\|<1} \int_0^{m(\overline{x})} \frac{\epsilon\, s}{8}\, ds\, d\overline{x} & se\ 0 < \epsilon < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{24} \displaystyle\int_{\|\overline{x}\|<1} m(\overline{x})^3\, d\overline{x} & se\ \epsilon = 0 \\ \dfrac{\epsilon}{16} \displaystyle\int_{\|\overline{x}\|<1} m(\overline{x})^2\, d\overline{x} & se\ 0 < \epsilon < 1 \end{cases}.$$

La tesi seguirà applicando la disuguaglianza di Hölder.

2 Strumenti preliminari

Al fine di dimostrare il Teorema 1.1 costruiremo preliminarmente una funzione scalare u, definita su C_ϵ e analizzeremo il campo vettoriale pari al gradiente normalizzato di u.

Teorema 2.1. *Sia ϵ una costante fissata con $0 \le \epsilon < 1$. Esiste una funzione continua $u\colon C_\epsilon \to \mathbb{R}$ con insiemi di livello $\Sigma_t = \{(\overline{x}, x_n) \in C_\epsilon$ t.c. $u(\overline{x}, x_n) = t\}$, $t \in \mathbb{R}$, tale che:*

(i) $u \in C^1(C_\epsilon \cap B) \cap C^1(C_\epsilon \setminus B)$.

(ii) *Si ha $\bigcup_{t>0} \Sigma_t = B \cap C_\epsilon$ e $\bigcup_{t\le 0} \Sigma_t = C_\epsilon \setminus B$; fissato $t \in \mathbb{R}$, Σ_t è un'ipersuperficie di classe C^∞ con curvatura costante*

$$H_{\Sigma_t} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t^2+2\epsilon t+1}} & \textit{per } t > 0 \\ 1 & \textit{per } t \le 0. \end{cases}$$

(iii) *Il campo vettoriale $X = -\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$ è continuo su C_ϵ.*

(iv) *Dato $x = (\overline{x}, x_n) \in \Sigma_t$, si ha $\operatorname{div} X(x) = (n\text{-}1) \cdot H_{\Sigma_t}$.*

Dimostrazione del Teorema 2.1.

(i) **Costruzione della funzione u.** Fissato $t > 0$, sia S_t la sfera di centro $(0,-t)$ passante per $\partial B \cap \{x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\|\overline{x}\| < 1$ e $x_n = \epsilon\}$, cioè per l'intersezione tra la frontiera della palla unitaria e la base di C_ϵ. Sia $\Sigma_t = \partial S_t \cap (C_\epsilon \cap B)$. Definiamo la funzione $u(x)$: $C_\epsilon \cap B \to \mathbb{R}^+$ in modo tale che $u(x) = t$ se e solo se $x \in \Sigma_t$. I conti che seguono permettono di ricavare esplicitamente la funzione u. Da essi discende immediatamente che quella data è una buona definizione, ovvero che per ogni $x \in C_\epsilon$ esiste una e una sola $t > 0$ tale che $x \in \Sigma_t$ e quindi tale che $u(x) = t$. Calcoliamo il raggio $r(t)$ di S_t. Consideriamo la superficie $n-2$ dimensionale

$$\begin{aligned} A &:= \partial B \cap \{x \in \mathbb{R}^n \textit{ t.c. } \|\overline{x}\| < 1, x_n = \epsilon\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \textit{ t.c. } \sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2} = \pm x_n, \|\overline{x}\| < 1, x_n = \epsilon \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \|\overline{x}\| = \sqrt{1 - x_n^2}, x_n = \epsilon \right\} \\ &= \{(\overline{x}, \epsilon) \in \mathbb{R}^n \textit{ t.c. } \|\overline{x}\| = \sqrt{1-\epsilon^2}\}. \end{aligned}$$

Dato un punto $(\overline{y}, \epsilon) \in A$, si ha

$$r(t) = \|(\overline{0}, -t) - (\overline{y}, \epsilon)\| = \sqrt{(t-\epsilon)^2 + \|\overline{y}\|^2} = \sqrt{t^2 + 2\epsilon t + 1}.$$

La frontiera di S_t è dunque

$$\begin{aligned} \partial S_t &= \{x \in \mathbb{R}^n \textit{ t.c. } (x_n + t)^2 + \|x\|^2 = r(t)^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \textit{ t.c. } (x_n + t)^2 + \|x\|^2 = t^2 + 2\epsilon t + 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \textit{ t.c. } x_n^2 + t^2 + 2x_n t = t^2 + 2\epsilon t + 1 - \|x\|^2\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \textit{ t.c. } t = \frac{1 - x_n^2 - \|\overline{x}\|^2}{2(x_n - \epsilon)} \right\}, \end{aligned}$$

dove l'ultima espressione è ben definita perchè per ipotesi $x_n > \epsilon$.
Da questo ricaviamo che

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= \partial S_t \cap (C_\epsilon \cap B)\\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \; t.c. \; \frac{1-\|x\|^2}{2(x_n-\epsilon)} = t, \; x_n > \epsilon, \|\overline{x}\| < 1, \|x\| < 1 \right\},\end{aligned} \tag{2.1}$$

e quindi la funzione $u(x)$ è

$$u(\overline{x}, x_n) = \frac{1-\|x\|^2}{2(x_n-\epsilon)} \text{ per } x = (\overline{x}, x_n) \text{ in } C_\epsilon \cap B.$$

Procediamo alla costruzione di u in $C_\epsilon \setminus B$. Sia ∂B^+ la frontiera della calotta superiore della palla unitaria, ovvero $\partial B^+ = \left\{ (\overline{y}, y_{\mathrm{n}}) \in \mathbb{R}^n \; t.c. \; y_n = \sqrt{1 - \|\overline{y}^2\|} \right\}$. Dato un punto $x = (\overline{x}, x_n)$ di $C_\epsilon \setminus B$, sia v il vettore parallelo all'asse $\overline{x} = 0$ tale che il traslato di ∂B^+ lungo v passi per il punto x. Allora $\|\mathrm{v}\| = x_n - \sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2}$ (essendo $x \in C_\epsilon \setminus B$, si ha che $x_n > \sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2}$). Definiamo la funzione $u(x)$ come

$$u(\overline{x}, x_n) = -\|\mathrm{v}\| = \sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2} - x_n \text{ per } x = (\overline{x}, x_n) \text{ in } C_\epsilon \setminus B.$$

Riassumendo, la funzione u, costruita come sopra descritto, è la seguente:

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\|x\|^2}{2(x_n-\epsilon)} & \text{se } x \in C_\epsilon \cap B; \\ \\ \sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2} - x_n & \text{se } x \in C_\epsilon \setminus B. \end{cases} \tag{2.2}$$

Si noti che $u(x)$ è una funzione continua, positiva per $x \in C_\epsilon \cap B$, negativa per $x \in C_\epsilon \setminus B$.

(*ii*) **Insiemi di livello di u.** Fissato $t \in \mathbb{R}$, indichiamo con Σ_t l'insieme di livello di u associato al livello t, ovvero $\Sigma_t = \{(\overline{x}, x_n) \in C_\epsilon \text{ t.c. } u(\overline{x}, x_n) = t\}$. Se $t > 0$, Σ_t è pari all'intersezione tra C_ϵ e la palla di raggio $\frac{1}{\sqrt{t^2+2\epsilon t+1}}$ e centro $(\overline{0}, -t)$; se $t \leq 0$, detto v il versore parallelo all'asse $\overline{x} = 0$ e P_t il punto $0 - t{\cdot}\mathrm{v}$, Σ_t è pari al traslato di ∂B^+ lungo il vettore $(-t){\cdot}\mathrm{v}$ ed è dunque un sottoinsieme della frontiera della palla unitaria centrata in P_t. Σ_t è quindi un'ipersuperficie di classe C^∞. Ricordando che la curvatura media di una palla di raggio r in $\mathbb{R}^n$ è $\frac{1}{r}$, deduciamo che Σ_t ha curvatura media costante pari a

$$H_{\Sigma_t} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t^2+2\epsilon t+1}} & \text{per } t > 0 \\ 1 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}.$$

Si ha inoltre che

$$\bigcup_{t>0} \Sigma_t = \left(\bigcup_{t>0} \partial S_t \right) \cap C_\epsilon = B \cap C_\epsilon,$$

$$\bigcup_{t\leq 0} \Sigma_t = \left(\bigcup_{t\leq 0} (\partial B^+ - t \cdot \mathrm{v}) \right) \setminus B = C_\epsilon \setminus B.$$

(iii) **Costruzione del campo vettoriale $\boldsymbol{X}$.** Definiamo su C_ϵ il campo vettoriale $X{:=}-\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$. Procediamo al calcolo esplicito di X. In $C_\epsilon \cap B$ le derivate parziali di u sono

$$\frac{\partial u}{\partial x_{\mathrm{i}}} = -\frac{2x_{\mathrm{i}}}{2(x_n-\epsilon)} = -\frac{x_{\mathrm{i}}}{x_n-\epsilon} \qquad \text{per } \ i=1,...,n-1;$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{-4x_n(x_n-\epsilon)-2(1-\|x\|^2)}{4(x_n-\epsilon)^2} = -\frac{x_n^2-2x_n\epsilon+1-\|\overline{x}\|^2}{2(x_n-\epsilon)^2}.$$

La norma quadra del gradiente di u è quindi

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^2 &= \frac{1}{(x_n-\epsilon)^2}\sum_{i=1}^{n-1} x_{\mathrm{i}}^2 + \frac{(x_n^2-2x_n\epsilon+1-\|\overline{x}\|^2)^2}{4(x_n-\epsilon)^4} \\ &= \frac{4\|\overline{x}\|^2(x_n-\epsilon)^2+(x_n^2-2x_n\epsilon+1-\|\overline{x}\|^2)^2}{4(x_n-\epsilon)^4},\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = \frac{-2(x_n-\epsilon)^2}{\sqrt{4\|\overline{x}\|^2(x_n-\epsilon)^2+(x_n^2-2x_n\epsilon+1-\|\overline{x}\|^2)^2}}\left(\frac{\overline{x}}{x_n-\epsilon}, \frac{x_n^2-2x_n\epsilon+1-\|\overline{x}\|^2}{2(x_n-\epsilon)^2}\right).$$

Analogamente in $C_\epsilon \setminus B$ le derivate parziali di u sono

$$\frac{\partial u}{\partial x_{\mathrm{i}}} = -\frac{2x_{\mathrm{i}}}{2\sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}} = -\frac{x_{\mathrm{i}}}{\sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}} \quad \text{per } i=1,...,n-1; \qquad \frac{\partial u}{\partial x_n} = -1;$$

la norma del gradiente quadro di u è

$$\|\nabla u\|^2 = 1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{x_{\mathrm{i}}}{\sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}}\right)^2 = 1+\frac{\|\overline{x}\|^2}{1-\|\overline{x}\|^2} = \frac{1}{1-\|\overline{x}\|^2},$$

da cui

$$\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = \sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}\left(\frac{\overline{x}}{\sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}}, -1\right) = \left(-\overline{x}, -\sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}\right)$$

In definitiva il campo vettoriale $X\colon C_\epsilon \to \mathbb{R}^n$ è:

$$X = \begin{cases} \left(\frac{2(x_n-\epsilon)^2}{\sqrt{4\|\overline{x}\|^2(x_n-\epsilon)^2+(x_n^2-2x_n\epsilon+1-\|\overline{x}\|^2)^2}}\left(\frac{\overline{x}}{x_n-\epsilon}, \frac{x_n^2-2x_n\epsilon+1-\|\overline{x}\|^2}{2(x_n-\epsilon)^2}\right)\right) & \text{in } C_\epsilon \cap B; \\ \left(\overline{x}, \sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}\right) & \text{in } C_\epsilon \setminus B. \end{cases} \tag{2.3}$$

Osserviamo che X è una funzione vettoriale continua. Infatti $X|_{C_\epsilon \cap B}$ è estendibile per continuità in ∂B^+, $X|_{C_\epsilon \setminus B}$ è continua e le due funzioni coincidono su ∂B^+ in quanto, dato $x \in \partial B^+$, allora $x_n = \sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2}$, ovvero $\|\overline{x}\|^2 = 1 - x_n^2$, da cui

$$\begin{cases} \dfrac{2x_{\mathrm{i}}(x_n - \epsilon)}{\sqrt{4(1 - x_n^2)(x_n - \epsilon)^2 + (2x_n^2 - 2\epsilon x_n)^2}} = \dfrac{2x_{\mathrm{i}}(x_n - \epsilon)}{\sqrt{4(x_n - \epsilon)^2}} = x_{\mathrm{i}}; \\ \dfrac{2(x_n^2 - \epsilon x_n)}{2(x_n - \epsilon)} = x_n = \sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2}. \end{cases}$$

(*iv*) **Calcolo della divergenza di *X*.** Procediamo al calcolo esplicito della divergenza del campo vettoriale X. Poniamo

$$l = \frac{2(x_n - \epsilon)}{\sqrt{4\|\overline{x}\|^2(x_n - \epsilon)^2 + (x_n^2 - 2x_n\epsilon + 1 - \|\overline{x}\|^2)^2}}.$$

In $C_\epsilon \cap B$, dopo alcuni semplici conti, troviamo le derivate parziali

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_{\mathrm{i}}} = l\left(1 - \frac{2x_{\mathrm{i}}^2(2(x_n - \epsilon)^2 - x_n^2 + 2x_n\epsilon - 1 + \|\overline{x}\|^2)}{4\|\overline{x}\|^2(x_n - \epsilon)^2 + (x_n^2 - 2x_n\epsilon + 1 - \|\overline{x}\|^2)^2}\right) \text{per } i = 1, ..., n-1;$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial x_n} = l\left(1 - \frac{(x_n^2 - 2x_n\epsilon + 1 - \|\overline{x}\|^2)(x_n^2 - 2x_n\epsilon + 1 + \|\overline{x}\|^2)}{4\|\overline{x}\|^2(x_n - \epsilon)^2 + (x_n^2 - 2x_n\epsilon + 1 - \|\overline{x}\|^2)^2}\right).$$

Dato $x \in C_\epsilon \cap B$, posto $t = u(x) = \dfrac{1 - \|x\|^2}{2(x_n - \epsilon)}$, si ha che

$$l = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 2\epsilon t + 1}}. \tag{2.4}$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^2} &= \frac{4\|\overline{x}\|^2(x_n - \epsilon)^2 + (x_n^2 - 2x_n\epsilon + 1 - \|\overline{x}\|^2)^2}{4(x_n - \epsilon)^2} \\ &= \frac{(x_n^2 + \|\overline{x}\|^2 - 1)^2}{2(x_n - \epsilon)^2} + 4\epsilon\frac{\epsilon\|\overline{x}\|^2 - \|\overline{x}\|^2 x_n + \epsilon x_n^2 - x_n^3}{4(x_n - \epsilon)^2} + \frac{4x_n^2}{4(x_n - \epsilon)^2} \\ &= t^2 + \epsilon\frac{\epsilon(\|\overline{x}\|^2 + x_n^2 - 1) - x_n(\|\overline{x}\|^2 + x_n^2 - 1)}{(x_n - \epsilon)^2} + \frac{x_n^2 + \epsilon^2 - 2\epsilon x_n}{(x_n - \epsilon)^2} \\ &= t^2 + \epsilon\frac{(x_n - \epsilon)(1 - x_n^2 - \|\overline{x}\|^2)}{(x_n - \epsilon)^2} + 1 \\ &= t^2 + 2\epsilon t + 1, \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente la (2.4). Usando tale identità ricaviamo che

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}X(x) &= l\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-2x_{\mathrm{i}}^2\frac{2(x_n-\epsilon)^2-x_n^2+2x_n\epsilon-1+\|\overline{x}\|^2}{4\|\overline{x}\|^2(x_n-\epsilon)^2+(x_n^2-2x_n\epsilon+1-\|\overline{x}\|^2)^2}\right)\right.\\
&\quad\left.+1-\frac{(x_n^2-2x_n\epsilon+1-\|\overline{x}\|^2)(x_n^2-2x_n\epsilon+1+\|\overline{x}\|^2)}{4\|\overline{x}\|^2(x_n-\epsilon)^2+(x_n^2-2x_n\epsilon+1-\|\overline{x}\|^2)^2}\right)\\
&= l\left(n-\frac{4\|\overline{x}\|^2(x_n-\epsilon)^2+(2x_n\epsilon+\|\overline{x}\|^2-x_n^2-1)(2\|\overline{x}\|^2-x_n^2+2\epsilon x_n-1-\|\overline{x}\|^2)}{4\|\overline{x}\|^2(x_n-\epsilon)^2+(x_n^2-2x_n\epsilon+1-\|\overline{x}\|^2)^2}\right)\\
&= \frac{n-1}{\sqrt{t^2+2\epsilon t+1}},\ \text{per } x\in C_\epsilon\cap B, u(x)=t.
\end{aligned}$$

In $C_\epsilon \setminus B$ si ha che

$$\frac{\partial X_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{i}}}=\frac{\partial x_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{i}}}=1,\ \ \frac{\partial X_n}{\partial x_n}=\frac{\partial}{\partial x_n}\sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}=0,$$

da cui

$$\mathrm{div}X=n-1.$$

In conclusione abbiamo trovato che, dato $x\in C_\epsilon$, detto $t=u(x)$,

$$\mathrm{div}X(x)=\begin{cases}\dfrac{n-1}{\sqrt{t^2+2\epsilon t+1}} & \text{se } x\in C_\epsilon\cap B\\[2ex] n-1 & \text{se } x\in C_\epsilon\setminus B\end{cases}, \tag{2.5}$$

da cui, ricordando il valore di H_{Σ_t}, si ottiene

$$\mathrm{div}X(x)=(n-1)\cdot H_{\Sigma_t}.$$

□

Nella dimostrazione del Teorema 1.1 useremo il seguente risultato elementare di teoria dell'integrale.

Lemma. Sia $E\subset[0,1]$ un insieme misurabile con misura $\mathscr{L}^1(E)=|E|$ e consideriamo l'intervallo $I_{\mathrm{E}}=[1-|E|,1]$. Allora per ogni funzione decrescente $f:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ si ha

$$\int_E f(x)\,dx\geq\int_{I_{\mathrm{E}}}f(x)\,dx.$$

Dimostrazione. É sufficiente mostrare che $\displaystyle\int_{E\setminus I_{\mathrm{E}}}f(x)\,dx\geq\int_{I_{\mathrm{E}}\setminus E}f(x)\,dx$. Infatti, supponendo che questo sia vero, da $I_{\mathrm{E}}=(I_{\mathrm{E}}\cap E)\cup(I_{\mathrm{E}}\setminus E)$ e da $E=(I_{\mathrm{E}}\cap E)\cup(E\setminus I_{\mathrm{E}})$ segue che

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)\,dx &= \int_{I_{\mathrm{E}}\cap E}f(x)\,dx+\int_{E\setminus I_{\mathrm{E}}}f(x)\,dx\\
&\geq\int_{I_{\mathrm{E}}\cap E}f(x)\,dx+\int_{I_{\mathrm{E}}\setminus E}f(x)\,dx=\int_{I_{\mathrm{E}}}f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Dato $C \subset \mathbb{R}$ misurabile, indichiamo con $|C|$ la sua misura di Lebesgue 1-dimensionale, ovvero $|C| = \mathscr{L}^1(C)$. Essendo $\sup(E \setminus I_{\mathrm{E}}) \leq 1 - |I_{\mathrm{E}} \setminus E|$, dalla decrescenza di f e dal fatto che $|E| = |I_{\mathrm{E}}|$ si deduce che

$$\int_{I_{\mathrm{E}} \setminus E} f(x)\,dx \leq |I_{\mathrm{E}} \setminus E| \;\; f(1 - |I_{\mathrm{E}} \setminus E|) = |E \setminus I_{\mathrm{E}}| \;\; f(1 - |I_{\mathrm{E}} \setminus E|) \leq$$

$$\leq |E \setminus I_{\mathrm{E}}| \;\; f(\sup(E \setminus I_{\mathrm{E}})) \leq \int_{E \setminus I_{\mathrm{E}}} f(x)\,dx.$$

□

3 Dimostrazione del Teorema 1.1

Procediamo ora con una dimostrazione del Teorema 1.1.

Dimostrazione. Sia E un aperto di $\mathbb{R}^n$ di classe C^∞ con $\mathscr{L}^n(E) = \mathscr{L}^n(B)$ e $E \Delta B \subset\subset C_\epsilon$. Affermiamo che

$$\mathscr{L}^n(B \setminus E) \geq \int_{B \setminus E} \frac{\mathrm{div} X}{n-1}\,dx \geq \frac{\mathscr{H}^{n-1}(\partial B \setminus E) - \mathscr{H}^{n-1}(\partial E \cap B)}{n-1}. \tag{3.1}$$

Infatti per la (2.5) si ha $\frac{\mathrm{div} X}{n-1} \leq 1$ e quindi

$$\mathscr{L}^n(B \setminus E) = \int_{B \setminus E} 1\,dx \geq \int_{B \setminus E} \frac{\mathrm{div} X}{n-1}\,dx.$$

Sia $\nu_{B \setminus E}$ la normale esterna a $B \setminus E$; applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{B \setminus E} \frac{\mathrm{div} X}{n-1}\,dx &= \frac{1}{n-1} \int_{\partial(B \setminus E)} \left\langle X, \nu_{B \setminus E} \right\rangle \, d\mathscr{H}^{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\int_{\partial B \setminus E} \langle X, \nu_B \rangle \, d\mathscr{H}^{n-1} - \int_{\partial E \cap B} \langle X, \nu_E \rangle \, d\mathscr{H}^{n-1} \right).\end{aligned}$$

Osserviamo i seguenti fatti: per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e poiché il campo vettoriale X ha norma costantemente pari a 1, si ha che $\langle X, \nu_E \rangle \leq \|X\| \|\nu_{\mathrm{E}}\| = 1$; dato $x = (\overline{x}, x_n) \in \partial B$, ricordando la definizione di X in (2.3), si deduce che $X(x) = X(\overline{x}, x_n) = \left(\overline{x}, \sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2}\right) = (\overline{x}, x_n) = x$, da cui, essendo $\nu_B(x) = x$, si ottiene che $\langle X(x), \nu_B(x) \rangle = \langle x, x \rangle = 1$ su ∂B.
Da quanto osservato discende la seguente disuguaglianza

$$\begin{aligned}\int_{B \setminus E} \frac{\mathrm{div} X}{n-1}\,dx &\geq \frac{1}{n-1} \left(\int_{\partial B \setminus E} 1\,d\mathscr{H}^{n-1} - \int_{\partial E \cap B} 1\,d\mathscr{H}^{n-1} \right) \\ &= \frac{\mathscr{H}^{n-1}(\partial B \setminus E) - \mathscr{H}^{n-1}(\partial E \cap B)}{n-1}.\end{aligned}$$

Questo termina la dimostrazione della (3.1).

Affermiamo ora che

$$\mathscr{L}^n(E \setminus B) \leq \frac{\mathscr{H}^{n-1}(\partial E \setminus B) - \mathscr{H}^{n-1}(\partial B \cap E)}{n-1}. \tag{3.2}$$

Infatti per la (2.5) $\frac{\text{div}X}{n-1} = 1$ in $E \setminus B$ e applicando il teorema della divergenza con la stessa notazione usata sopra si trova

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^n(E \setminus B) &= \int_{E\setminus B} 1\, dx = \int_{E\setminus B} \frac{\text{div}X}{n-1}\, dx \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\int_{\partial E\setminus B} \langle X, \nu_E\rangle \, d\mathscr{H}^{n-1} - \int_{\partial B\cap E} \langle X, \nu_B\rangle \, d\mathscr{H}^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Osservando che per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $\langle X, \nu_E\rangle \leq \|x\|\|\nu_{\mathrm{E}}\| = 1$ e che $\langle X, \nu_B\rangle = 1$ per x $\in \partial B \cap E$, si ottiene la (3.2).

Definiamo

$$G(B \setminus E) := \int_{B\setminus E} \left(1 - \frac{\text{div}X}{n-1}\right) dx.$$

Mettendo insieme la (3.1) e la (3.2) e sfruttando l'ipotesi $\mathscr{L}^n(B) = \mathscr{L}^n(E)$ (da cui $\mathscr{L}^n(B \setminus E) = \mathscr{L}^n(E \setminus B)$), si ha che

$$\begin{aligned}\frac{\mathscr{H}^{n-1}(\partial B \setminus E) - \mathscr{H}^{n-1}(\partial E \cap B)}{n-1} &\leq \int_{B\setminus E} \frac{\text{div}X}{n-1}\, dx \\ &= \int_{B\setminus E} \left(1 + \left(\frac{\text{div}X}{n-1} - 1\right)\right) dx \\ &= \mathscr{L}^n(B \setminus E) - G(B \setminus E) \\ &= \mathscr{L}^n(E \setminus B) - G(B \setminus E) \\ &\leq \frac{\mathscr{H}^{n-1}(\partial E \setminus B) - \mathscr{H}^{n-1}(\partial B \cap E)}{n-1} - G(B \setminus E).\end{aligned}$$

Si conclude allora che

$$G(B\setminus E) \leq \frac{\mathscr{H}^{n-1}(\partial E \setminus B) - \mathscr{H}^{n-1}(\partial B \cap E) - \mathscr{H}^{n-1}(\partial B \setminus E) + \mathscr{H}^{n-1}(\partial E \cap B)}{n-1},$$

ovvero

$$G(B \setminus E) \leq \frac{\mathscr{H}^{n-1}(\partial E) - \mathscr{H}^{n-1}(\partial B)}{n-1}. \tag{3.3}$$

Procediamo con delle stime sul termine di sinistra della disuguaglianza (3.3). Applicando il teorema di Fubini Tonelli si trova

$$G(B \setminus E) = \int_{B\setminus E} \left(1 - \frac{\text{div}X}{n-1}\right) dx = \int_{\|\overline{x}\|<1} \int_{B^{\overline{x}}\setminus E^{\overline{x}}} \left(1 - \frac{\text{div}X}{n-1}\right) dx_n\, d\overline{x},$$

dove $B^{\overline{x}} \setminus E^{\overline{x}} = \{x_n \in \mathbb{R}\; t.c.\; (\overline{x}, x_n) \in B \setminus E\}$, è la $\overline{x}$ -sezione di $B \setminus E$. Definiamo la funzione $m : \{\|\overline{x}\| < 1\} \to \mathbb{R}$ tale che $m(\overline{x}) = \mathscr{L}^1(B^{\overline{x}} \setminus E^{\overline{x}})$ e indichiamo con $\varphi(\overline{x}) = \sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2}$ una parametrizzazione di ∂B^+. Fissato $\overline{x}$ tale che $\|\overline{x}\| < 1$, la funzione

$x_n \mapsto \mathrm{div}(\overline{x}, x_n)$ è una funzione crescente in x_n in quanto $\mathrm{div}(\overline{x}, x_n) = \dfrac{n-1}{r(t)}$, con $r(t)$ raggio della sfera di centro $(0, -t)$ passante per $C_\epsilon \cap B$ e per $(\overline{x}, x_n)$: all'aumentare di x_n, il raggio diminuisce e di conseguenza $\mathrm{div}X(\overline{x}, x_n)$ cresce. Ne consegue che la funzione che mappa x_n in $\left(1 - \frac{\mathrm{div}X}{n-1}\right)$ è decrescente. Per il Lemma della Sezione 2 vale allora la seguente disuguaglianza

$$\int_{B^{\overline{x}} \setminus E^{\overline{x}}} \left(1 - \frac{\mathrm{div}X}{n-1}\right) dx_n \geq \int_{\varphi(\overline{x}) - m(\overline{x})}^{\varphi(\overline{x})} \left(1 - \frac{\mathrm{div}X}{n-1}\right) dx_n.$$

Tramite il cambio di coordinate $x_n = \varphi(\overline{x}) - s$ si ottiene

$$\int_{\varphi(\overline{x}) - m(\overline{x})}^{\varphi(\overline{x})} \left(1 - \frac{\mathrm{div}X(\overline{x}, x_n)}{n-1}\right) dx_n = \int_0^{m(\overline{x})} \left(1 - \frac{\mathrm{div}X(\overline{x}, \varphi(\overline{x}) - s)}{n-1}\right) ds,$$

da cui

$$G(B \setminus E) \geq \int_{\|\overline{x}\| < 1} \int_0^{m(\overline{x})} \left(1 - \frac{\mathrm{div}X(\overline{x}, \varphi(\overline{x}) - s)}{n-1}\right) ds\, d\overline{x}. \tag{3.4}$$

Continuiamo ora con delle stime sull'argomento dell'integrale di destra in (3.4). Sia x un punto di $B \setminus E$. Poiché per ipotesi l'insieme $E \Delta B$ è contenuto in C_ϵ, allora $B \setminus E \subset E \Delta B$ è un sottoinsieme di $C_\epsilon \cap B$. Da questo e dalla (2.5) si ha che $\mathrm{div}X(x) = \dfrac{n-1}{\sqrt{t^2 + 2\epsilon t + 1}}$, con $t = u(x)$, da cui

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\mathrm{div}X(x)}{n-1} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 2\epsilon t + 1}} = \frac{\sqrt{t^2 + 2\epsilon t + 1} - 1}{\sqrt{t^2 + 2\epsilon t + 1}} \\ &= \frac{t^2 + 2\epsilon t}{\sqrt{t^2 + 2\epsilon t + 1}\left(\sqrt{t^2 + 2\epsilon t + 1} + 1\right)} \\ &\geq \frac{t^2 + 2\epsilon t}{\left(\sqrt{t^2 + 2\epsilon t + 1} + 1\right)^2} \geq \frac{t^2 + 2\epsilon t}{\left(2\sqrt{t^2 + 2\epsilon t + 1}\right)^2}, \end{aligned}$$

e quindi

$$1 - \frac{\mathrm{div}X(x)}{n-1} \geq \frac{t^2 + 2\epsilon t}{4\left(t^2 + 2\epsilon t + 1\right)}, \quad \text{con } x \in B \setminus E,\ t = u(x). \tag{3.5}$$

Il punto x è della forma $x = (\overline{x}, x_n) = (\overline{x}, \varphi(\overline{x}) - s) = (\overline{x}, \sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2} - s)$. Ricordando la definizione di $u(x)$ data in 2.2 si ricava che

$$\begin{aligned} t = u(x) = \frac{1 - \|\overline{x}\|^2 - x_n^2}{2(x_n - \epsilon)} &= \frac{1 - \|\overline{x}\|^2 - \left(\sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2} - s\right)^2}{2\left(\sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2} - s - \epsilon\right)} \\ = \frac{2s\sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2} - s^2}{2\left(\sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2} - s - \epsilon\right)} &= s\frac{2\sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2} - s}{2\left(\sqrt{1 - \|\overline{x}\|^2} - s - \epsilon\right)} \end{aligned}$$

$$= s\frac{2\left(\sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}-s-\epsilon\right)+2s+2\epsilon-s}{2\left(\sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}-s-\epsilon\right)}$$

$$= s\left(1+\frac{s+2\epsilon}{2\left(\sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}-s-\epsilon\right)}\right)\geq s,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\frac{s+2\epsilon}{2\left(\sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}-s-\epsilon\right)}\geq 0$ essendo x $\in C_\epsilon$, $0\leq\epsilon\leq x_n=\sqrt{1-\|\overline{x}\|^2}-s$ e $s\in[0,1]$.

É immediato verificare che la funzione $t\mapsto\dfrac{t^2+2\epsilon t}{4\left(t^2+2\epsilon t+1\right)}$ è crescente. Quindi, essendo $t=u(x)\geq s$, riprendendo la (3.5) e ricordando che s $\in[0,1]$, si ha

$$\begin{aligned}1-\frac{\operatorname{div}X(x)}{n-1}&\geq\frac{t^2+2\epsilon t}{4\left(t^2+2\epsilon t+1\right)}\geq\frac{s^2+2\epsilon s}{4\left(s^2+2\epsilon s+1\right)}\\&\geq\frac{s^2+2\epsilon s}{4\left(2+2\epsilon\right)}\geq\frac{s^2+2\epsilon s}{8\left(1+\epsilon\right)}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Distinguiamo due casi, corrispondenti alle due formulazioni presenti nell'enunciato del Teorema 1.1.

Primo caso: $\epsilon=0$. Dalle (3.4) e (3.6), usado la disuguaglianza di Hölder e ricordando che $\mathscr{L}^n(B\setminus E)=\mathscr{L}^n(E\setminus B)$ troviamo:

$$\begin{aligned}G(B\setminus E)&\geq\int_{\|\overline{x}\|<1}\int_0^{m(\overline{x})}\left(1-\frac{\operatorname{div}X(\overline{x},s)}{n-1}\right)ds\,d\overline{x}\\&\geq\int_{\|\overline{x}\|<1}\int_0^{m(\overline{x})}\frac{s^2}{8}\,ds\,d\overline{x}=\frac{1}{24}\int_{\|\overline{x}\|<1}m(\overline{x})^3\,d\overline{x}\\&=\frac{1}{24\left(\int_{\|\overline{x}\|<1}1\,d\overline{x}\right)^2}\left(\int_{\|\overline{x}\|<1}m(\overline{x})^3\,d\overline{x}\right)\left(\int_{\|\overline{x}\|<1}1\,d\overline{x}\right)^2\\&\geq\frac{1}{24\,\omega_{\mathrm{n}}^2}\left(\int_{\|\overline{x}\|<1}m(\overline{x})\,d\overline{x}\right)^3\geq\frac{1}{24\,\omega_{\mathrm{n}}^2}\left(\int_{\|\overline{x}\|<1}\mathscr{L}^1(B^{\overline{x}}\setminus E^{\overline{x}})\,d\overline{x}\right)^3\\&=\frac{1}{24\,\omega_{\mathrm{n}}^2}\left(\mathscr{L}^n(B\setminus E)\right)^3=\frac{1}{192\,\omega_{\mathrm{n}}^2}\left(\mathscr{L}^n(B\setminus E)+\mathscr{L}^n(E\setminus B)\right)^3\\&=\frac{1}{192\,\omega_{\mathrm{n}}^2}\left(\mathscr{L}^n(B\Delta E)\right)^3,\end{aligned}$$

da cui, riprendendo la (3.3) si ha

$$\begin{aligned}P(E)-P(B)&=\mathscr{H}^{n-1}(\partial E)-\mathscr{H}^{n-1}(\partial B)\\&\geq(n-1)\cdot G(B\setminus E)\\&\geq\frac{n-1}{192\,\omega_{\mathrm{n}}^2}\left(\mathscr{L}^n(B\Delta E)\right)^3\end{aligned}$$

ed è dunque dimostrata la disuguaglianza (1.1).

Secondo caso: $0 < \epsilon < 1$. Dalla (3.6), ricordando che $s \in [0,1]$ si trova

$$1 - \frac{\operatorname{div} X(\overline{x}, s)}{n-1} \geq \frac{s^2 + 2\epsilon s}{8\,(1+\epsilon)} \geq \frac{2\epsilon s}{8 * 2} = \frac{\epsilon\, s}{8}.$$

Riprendendo la (3.4), sfruttando la disuguaglianza appena vista, la disuguaglianza di Hölder e argomentazioni simili a quelle usate nel primo caso, si ottiene

$$\begin{aligned}
G(B \setminus E) &\geq \int_{\|\overline{x}\|<1} \int_0^{m(\overline{x})} \left(1 - \frac{\operatorname{div} X(\overline{x}, s)}{n-1}\right) ds\, d\overline{x} \\
&\geq \int_{\|\overline{x}\|<1} \int_0^{m(\overline{x})} \frac{\epsilon\, s}{8}\, ds\, d\overline{x} = \frac{\epsilon}{16} \int_{\|\overline{x}\|<1} m(\overline{x})^2\, d\overline{x} \\
&= \frac{\epsilon}{16 \int_{\|\overline{x}\|<1} 1\, d\overline{x}} \left(\int_{\|\overline{x}\|<1} m(\overline{x})^2\, d\overline{x}\right) \left(\int_{\|\overline{x}\|<1} 1\, d\overline{x}\right) \\
&\geq \frac{\epsilon}{16\, \omega_{\mathrm{n}}} \left(\int_{\|\overline{x}\|<1} m(\overline{x})\, d\overline{x}\right)^2 = \frac{\epsilon}{16\, \omega_{\mathrm{n}}} \left(\mathscr{L}^n(B \setminus E)\right)^2 \\
\frac{\epsilon}{64\, \omega_{\mathrm{n}}} &\left(\mathscr{L}^n(B \setminus E) + \mathscr{L}^n(E \setminus B)\right)^2 = \frac{\epsilon}{64\, \omega_{\mathrm{n}}} \left(\mathscr{L}^n(B \Delta E)\right)^2,
\end{aligned}$$

da cui, riprendendo la (3.3) si trova la (1.2).

□

Riferimenti bibliografici

[1] N. Fusco, F. Maggi, A. Pratelli, *The sharp quantitative isoperimetric inequality*, Annals of Mathematics, 186 (2008), 941-980.

[2] V. Franceschi, G.P. Leonardi, R. Monti, *Quantitative isoperimetric inequalities in* $\mathbb{H}^n$, Calc. Var. and Partial Differential Equations (2015).

[3] Guglielmo Di Meglio, *Il problema isoperimetrico classico, storia e mito*, Matematicamente.it, Numero 13 -Agosto 2010, reperibile al seguente url: `http://www.matematicamente.it/magazine/agosto2010/139-Dimeglio-problema-isoperimetrico.pdf`

[4] E. De Giorgi, *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Sez. I, 8 (1958), 33-44.