Università degli studi di Padova

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Soluzione Fondamentale per il Laplaciano di Kohn

Relatore:
Prof. Roberto Monti
Laureanda:
Sara Farinelli

Anno Accademico 2015/2016

Introduzione

In questa tesi studiamo la soluzione fondamentale di un operatore differenziale del secondo ordine, detto Laplaciano di Kohn, che può essere considerato il prototipo di sublaplaciano in un gruppo di Lie stratificato non commutativo.
Introduciamo innanzitutto l'ambiente in cui questo operatore è definito, il gruppo di Heisenberg. Indicato con $\mathbb{H}^n$, questo è il gruppo di Lie la cui varietà sottostante è $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ e la cui operazione di gruppo è così definita

$$(z,t) * (w,s) = (z + w, t + s + 2\Im(z \cdot \bar{w})).$$

La base canonica dell'algebra di Lie associata a questo gruppo è costituita dai campi

$$X_i := \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial t}, \qquad Y_i := \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial t}, \qquad T := \frac{\partial}{\partial t} \quad i = 1, \dots, n,$$

dove stiamo indicando i punti di $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ con $(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Il Laplaciano di Kohn è l'operatore

$$\triangle_H := -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + Y_i^2.$$

Si vede facilmente che $\triangle_H$ non è ellittico in nessun punto, quindi non possiamo utilizzare la teoria degli operatori ellittici per lo studio di $\triangle_H$. Tuttavia l'importante *teorema di ipoellitticità di Hörmander*, del 1967, ci assicura che il Laplaciano di Kohn è un operatore ipoellittico, ovvero che ogni soluzione distribuzionale u di $\triangle_H u = f$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ se f è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$. Questo ci permette di definire la soluzione fondamentale Γ richiedendo che sia una funzione di $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\})$, che tenda a 0 all'infinito e che sia soluzione dell'equazione

$$\triangle_H \Gamma = \delta_0,$$

nel senso delle distribuzioni. Un *teorema di esistenza* ci garantisce che una soluzione fondamentale del $\triangle_H$ esiste. Utilizzando il *principio del massimo debole*, analogo a quello valido per il Laplaciano standard, ed in particolare un suo corollario, che stabilisce che l'unica funzione $\triangle_H$-armonica che tende a zero all'infinito è la funzione nulla, riusciamo a provare *l'unicità della soluzione fondamentale*. A questo punto dimostriamo, utilizzando l'unicità, che la soluzione fondamentale Γ deve avere delle proprietà che rispecchiano alcune caratteristiche dell'operatore. Nel dettaglio Γ *è simmetrica rispetto all'origine*, ovvero

$$\Gamma(\xi) = \Gamma(\xi^{-1}),$$

per ogni ξ dove è definita, e questo si prova utilizzando il fatto che Γ è un'inversa di $\triangle_H$ nel seguente senso: presa ψ in $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Gamma(\xi^{-1} * \zeta) \triangle_H \psi(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) = \psi(\xi).$$

Definiamo due gruppi di automorfismi in $\mathbb{H}^n$, le dilatazioni $\eta_r(z,t) = (rz, r^2 t)$ con $r > 0$ e le rotazioni $\Phi(z,t) = (Rz, t)$ con R matrice unitaria n-dimensionale. Proviamo che $\triangle_H$ è

2−omogeneo rispetto alle dilatazioni η_r e invariante per rotazioni e da questo deriva che la soluzione fondamentale Γ *è omogenea di grado* $-2n$ *rispetto alle dilatazioni* ovvero

$$\Gamma \circ \eta_r = r^{-2n}\Gamma,$$

e *invariante per rotazioni*, ovvero

$$\Gamma \circ \Phi = \Gamma.$$

Proviamo in seguito utilizzando il *principio del massimo forte* che *la soluzione fondamentale è strettamente positiva* ed infine, utilizzando la norma di Korányi, $\rho(z,t) = (|z|^4 + t^2)^{1/4}$ che Γ soddisfa

$$\lim_{|\xi|\to 0} \Gamma(\xi) = +\infty.$$

Quindi da queste proprietà possiamo concludere che la Γ sarà del tipo $\Gamma(z,t) = \Gamma(|z|,t)$. Procediamo nella ricerca della soluzione fondamentale seguendo Stein che in [4] suggerisce di cercare una soluzione di questa forma

$$\Gamma(z,t) = \rho(z,t)^{-2n} f\Big(\frac{t}{\rho(z,t)^2}\Big). \tag{1}$$

Per determinare f osserviamo che se Γ è soluzione distribuzionale dell'equazione $\triangle_H \Gamma = \delta_0$, Γ in particolare deve soddisfare in senso classico l'equazione $\triangle_H \Gamma = 0$ fuori dall'origine. Svolgendo i calcoli, con opportune sostituzioni, da tale condizione otteniamo che Γ è soluzione della seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine

$$-(1-s^2)^{3/2} f''(s) + (n+1)s(1-s^2)^{1/2} f'(s) = 0,$$

con $s = \frac{t}{\rho(z,t)^2}$. Risolviamo questa equazione differenziale, otteniamo una famiglia di soluzioni non costanti, nessuna delle quali rispetta la proprietà di simmetria centrale che la soluzione fondamentale deve avere. Scartiamo pertanto tali soluzioni e consideriamo la soluzione costante. Abbiamo dunque ottenuto che se Γ come in (1) è la soluzione fondamentale, allora f è una costante. La soluzione è quindi della forma

$$\Gamma(z,t) = \frac{c}{\rho(z,t)^{2n}}.$$

Dimostriamo infine l'esistenza della soluzione fondamentale per il Laplaciano di Kohn, provando che $\Gamma(z,t) = \frac{c_n}{\rho(z,t)^{2n}}$ soddisfa in $\mathbb{H}^n$ l'equazione

$$\triangle_H \Gamma = \delta_0,$$

con

$$c_n = \Big[n(n+2)\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} |z|^2(\rho(z,t)^4+1)^{-(n+4)/2} d\mathcal{L}^{2n+1}(z,t)\Big]^{-1},$$

seguendo la dimostrazione di Folland in [2], che per primo la trovò.

Indice

1 Introduzione al gruppo di Heisenberg

In questa sezione richiamiamo alcune definizioni di geometria differenziale e diamo una breve presentazione del Gruppo di Heisenberg.
Un *gruppo di Lie* è un insieme dotato di una struttura di varietà differenziale e di una struttura di gruppo e tale che il prodotto del gruppo e l'inversione sono due mappe differenziabili.

Un'*algebra di Lie* è uno spazio vettoriale V dotato di un'applicazione bilineare $[\cdot,\cdot] : V \times V \longrightarrow V$ che ha la proprietà di antisimmetria, ovvero $[X, Y] = -[Y, X]$ per ogni $X, Y \in V$, e che soddisfa l'identità di Jacobi, ovvero $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ per ogni $X, Y, Z \in V$.

Dato un gruppo di Lie $(G, *)$ si associa ad ogni $p \in G$ la traslazione sinistra

$$\begin{aligned} \tau_p : G &\longrightarrow G \\ q &\mapsto p * q. \end{aligned}$$

Un campo vettoriale X su un gruppo di Lie G si dice *invariante a sinistra* se per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ vale

$$X(f \circ \tau_p) = X(f) \circ \tau_p \quad \text{per ogni } p \in G,$$

dove si sta identificando il campo vettoriale X con l'operatore differenziale ad esso associato.

L'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra in un gruppo di Lie è un'algebra di Lie con l'operazione $[X, Y] = XY - YX$, e si dice *algebra di Lie* del gruppo. Consideriamo la varietà differenziale $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$. Indichiamo i punti di tale varietà equivalentemente con

$$\begin{aligned} &(z, t) = (z_1, \ldots, z_n, t) \quad z_i \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}, \\ &(x, y, t) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, t) \quad x_i,\ y_i,\ t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

dove $z_i = x_i + iy_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Indichiamo con

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial t}, \\ &\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}, \end{aligned}$$

le corrispondenti derivazioni. Detto $\bar{z} = x_i - iy_i$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big). \end{aligned}$$

Definiamo su $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ l'operazione

$$(z, t) * (w, s) = (z + w, t + s + 2\Im(z \cdot \bar{w})),$$

dove $\cdot$ è il prodotto scalare usuale, e $\Im$ indica la parte immaginaria di un numero complesso. Si verifica che $*$ è un'operazione di gruppo, non commutativa, che rende la varietà $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ un gruppo di Lie.

DEFINIZIONE 1.1. Il *gruppo di Heisenberg* $2n+1$-dimensionale, indicato con $\mathbb{H}^n$, è il gruppo di Lie ottenuto ponendo sulla varietà differenziale $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ l'operazione $*$ sopra definita.

Definiamo i seguenti campi vettoriali

$$X_i := \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial t}, \qquad Y_i := \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial t}, \qquad T := \frac{\partial}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si verifica con un calcolo diretto che sono campi invarianti a sinistra. Inoltre la mappa che ad X associa $X(0)$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, dall'algebra di Lie del gruppo allo spazio tangente ad $\mathbb{H}^n$ nella sua identità. Ora essendo

$$\{X_1(0), \dots, X_n(0), Y_1(0), \dots, Y_n(0), T(0)\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial t} \right\}$$

la base canonica dello spazio tangente ad $\mathbb{H}^n$ in 0, possiamo concludere che l'insieme di campi sopra definito costituisce la base canonica dell'algebra di Lie del gruppo.

Definiamo inoltre in $\mathbb{H}^n$ i due seguenti gruppi di automorfismi:

- le *dilatazioni* $\eta_r(z,t) := (rz, r^2 t), \; 0 < r < \infty$,

- le *rotazioni* $\Phi(z,t) := (Rz, t)$, dove R è una matrice unitaria di $\mathbb{C}^n$, $R \in U(n)$.

Risulterà utile la funzione norma, detta *norma di korányi* $\rho(z,t) := (|z|^4 + t^2)^{1/4}$, dove $|z|^2 = \bar{z} \cdot z$. Osserviamo che $\rho(\Phi(z,t)) = \rho(z,t)$, per ogni Φ rotazione e che ρ è una funzione 1-omogenea rispetto alle dilatazioni η_r, ovvero $\rho(\eta_r(z,t)) = r\rho(z,t)$, per ogni $r > 0$. Chiameremo B_H le palle aperte relative alla norma ρ, B le palle euclidee.
Si dimostra che la *misura di Haar* di tale gruppo è esattamente la misura di *Lebesgue*, $\mathcal{L}^{2n+1}$. Utilizzeremo dunque tale misura.

2 Il Laplaciano di Kohn

In questa sezione presentiamo il Laplaciano di Kohn e ne mostriamo alcune proprietà.

DEFINIZIONE 2.1. Il *Laplaciano di Kohn* è l'operatore differenziale del secondo ordine

$$\triangle_H := -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + Y_i^2. \tag{2}$$

NOTA 2.2. In realtà nella letteratura matematica, come ad esempio in [6], il Laplaciano di Kohn è l'operatore

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + Y_i^2,$$

tuttavia, per questioni pratiche, svolgeremo la trattazione con l'operatore definito in (2).

Osserviamo che $\triangle_H$ *non è ellittico in nessun punto*. Fissato infatti un punto $(x, y, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, il simbolo principale associato a tale operatore in (x, y, t) è la forma quadratica

$$(u, v, s) \mapsto \mathcal{Q}(u, v, s) = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(u_i + 2y_i s)^2 + (v_i - 2x_i s)^2,$$

che si annulla nei punti (u, v, s) con $u_i = -2y_i s$, $v_i = 2x_i s$, $s \in \mathbb{R}$, dove $(u, v, s) \neq 0$ per $s \neq 0$. Tuttavia è un *operatore ipoellittico*, ovvero ogni soluzione distribuzionale u dell'equazione $\triangle_H u = f$ con f funzione $\mathcal{C}^\infty$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$. L'ipoellitticità è garantita dal teorema di Hörmander, pubblicato nel 1967 in [1].

TEOREMA 2.3 (teorema di ipoellitticità)**.** *Se $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ sono campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{R}^{2n+1}$ che verificano la* condizione di Hörmander*, allora l'operatore differenziale $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + Y_i^2$ è ipoellittico.*

Nel nostro specifico caso la condizione di Hörmander è che sia

$$dim\big(Lie\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}\big) = 2n + 1$$

in ogni punto, ed è verificata poiché $[X_i, Y_i] = -4T$ e $X_1, \dots, X_n, Y_1,$
$\dots, Y_n, T$ sono linearmente indipendenti in ogni punto.

Analogamente alla definizione data per i campi vettoriali, diciamo che un operatore differenziale $\mathcal{P}$ su $\mathbb{R}^{2n+1}$ è invariante a sinistra se presa $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ si ha

$$\mathcal{P}(f \circ \tau_p) = \mathcal{P}(f) \circ \tau_p \quad \text{per ogni } p \in \mathbb{R}^{2n+1}. \tag{3}$$

Osserviamo che il *Laplaciano di Kohn è un operatore invariante a sinistra.* Questo è evidente dalla forma (2); vediamo infatti che $\triangle_H$ è una somma di prodotti di campi invarianti a sinistra e il prodotto di campi invarianti a sinistra è un operatore invariante a sinistra. Siano infatti S e T campi invarianti a sinistra allora ST è un operatore invariante a sinistra, in quanto presa $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ si ha

$$ST(f \circ \tau_p) = S(T(f \circ \tau_p)) = S(T(f) \circ \tau_p) = S(T(f)) \circ \tau_p = ST(f) \circ \tau_p \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Nel seguito utilizzeremo anche le due seguenti forme alternative del Laplaciano di Kohn

- in termini di $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial y_i}$, $\frac{\partial}{\partial t}$, per $i = 1, \ldots, n$:

$$\triangle_H = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\Big) + 4|z|^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\frac{\partial}{\partial t}\Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(x_j\frac{\partial}{\partial y_j} - y_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\Big]; \qquad (4)$$

- in termini di $\frac{\partial}{\partial z_i}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$, $\frac{\partial}{\partial t}$, per $i = 1, \ldots, n$:

$$\triangle_H = \sum_{j=1}^{n}\Big[-\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} - |z_j|^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + i\frac{\partial}{\partial t}\Big(z_j\frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z}_j\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\Big)\Big]. \qquad (5)$$

Dalla scrittura (4) deduciamo che $\triangle_H$ *è un operatore autoaggiunto*, ovvero presa $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$,, che è lo spazio delle funzioni derivabili infinite volte e a supporto compatto, si ha

$$\langle \triangle_H \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \triangle_H \psi \rangle,$$

per ogni φ distribuzione su $\mathbb{R}^{2n+1}$.
Risulteranno utili in seguito le seguenti proprietà di $\triangle_H$.

PROPOSIZIONE 2.4. *Il Laplaciano di Kohn è*

1. *omogeneo di grado* 2 *rispetto alle dilatazioni* η_r*, definite nel gruppo di Heisenberg, nel seguente senso*
$$\triangle_H(f \circ \eta_r) = r^2(\triangle_H f) \circ \eta_r;$$

2. *invariante rispetto alle rotazioni del gruppo di Heisenberg, nel seguente senso: se* Φ *è una rotazione si ha*
$$\triangle_H(f \circ \Phi) = (\triangle_H f) \circ \Phi.$$

Dimostrazione.

1. La verifica del fatto che X_i e Y_i sono η_r-omogenei di grado uno è immediata. Segue che X_i^2 e Y_i^2 sono η_r omogenei di grado 2.

2. Osservando l'operatore nella forma (4), si nota che, a meno di una costante, la prima somma è esattamente il Laplaciano di $\mathbb{R}^{2n}$ rispetto alle coordinate x, y. Questo verifica la condizione di invarianza poiché detta $H(f)(x, y, t)$ la matrice Hessiana di f rispetto alle sole coordinate x, y in (x, y, t), e $R \in SO(2n)$, la corrispondente reale della matrice unitaria associata a Φ, vale
$$\begin{aligned}\triangle(f \circ \Phi)(x, y, t) =& tr(H(f \circ \Phi)(x, y, t)) = tr(R^t H(f)(\Phi(x, y, t))R) = \\ =& tr(H(f)(\Phi(x, y, t)) = \triangle(f) \circ \Phi(x, y, t),\end{aligned}$$
essendo la traccia invariante per trasformazioni ortogonali. Il termine del secondo ordine in t è invariante per le rotazioni Φ poichè queste lasciano fissa la variabile t, e le loro restrizioni ad $\mathbb{R}^{2n}$ sono isometrie di $\mathbb{R}^{2n}$ con la norma euclidea, pertanto lasciano invariato $|z|^2$. Per quanto riguarda l'ultimo termine invece, si verifica con un calcolo diretto che la condizione che deve soddisfare una matrice M affinchè l'operatore risulti

invariante per l'applicazione che fissa t e che coincide con M in $\mathbb{R}^{2n}$ è che M sia una matrice a blocchi del tipo

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix},$$

e questa condizione è chiaramente soddisfatta da R.

$\square$

3 Unicità della soluzione fondamentale

In questa sezione diamo la definizione di soluzione fondamentale per un operatore differenziale e presentiamo alcuni strumenti, in $\mathbb{H}^n$ che ci permettono di dimostrare l'unicità della soluzione fondamentale per il Laplaciano di Kohn.
Indicheremo i punti di $\mathbb{R}^{2n+1}$ con ξ.

In generale una *soluzione fondamentale* per un operatore differenziale $\mathcal{P}$ in $\mathbb{R}^n$ è una distribuzione Γ su $\mathbb{R}^n$ soluzione della seguente equazione differenziale

$$\mathcal{P}\Gamma = \delta_0 \tag{6}$$

dove δ_0 è la delta di Dirac centrata nell'origine. Nel nostro caso non è restrittivo dare la seguente definizione di soluzione fondamentale.

DEFINIZIONE 3.1. Una soluzione fondamentale per l'operatore differenziale $\triangle_H$, definito in $\mathbb{H}^n$ è una funzione

$$\Gamma : \ \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che

- Γ è una distribuzione, quindi Γ è in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1})$;
- Γ risolve in senso distribuzionale l'equazione

$$\mathcal{P}\Gamma = \delta_0; \tag{7}$$

- Γ appartiene a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\})$;
- $\Gamma(\xi) \longrightarrow 0$ per ξ che tende a infinito.

A questo punto affermiamo che una soluzione fondamentale per il Laplaciano di Kohn esiste. Questo è garantito da un teorema di esistenza della soluzione fondamentale che riguarda una classe di operatori di cui $\triangle_H$ fa' parte, ovvero gli operatori definiti come somme di quatrati in gruppi di Carnot omogenei. Tutto ciò esula dai nostri interessi, e può essere approfondito in [6] e in [3].
Per procedere nello studio delle proprietà di una eventuale soluzione fondamentale abbiamo bisogno di alcuni strumenti. Abbiamo a disposizione i seguenti teoremi, che enunciamo senza dimostrare.

TEOREMA 3.2 (Principio debole del massimo)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ un aperto limitato, sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tale che*

$$\begin{cases} \triangle_H u \leq 0 & in\,\Omega, \\ \limsup\limits_{\xi \to \zeta,\, \xi \in \Omega} u(\xi) \leq 0 & per\ ogni\ \zeta \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Allora $u(\xi) \leq 0$ per ogni $\xi \in \Omega$.

Utilizzeremo un un importante corollario di questo teorema, che ci dice che l'unica funzione $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, $\triangle_H$-armonica che tende a zero all'infinito è la funzione nulla.

COROLLARIO 3.3. *Sia $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, soluzione di $\triangle_H u = 0$. Se*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} u(\xi) = 0,$$

allora $u(\xi) = 0$ per ogni ξ in $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Abbiamo inoltre a disposizione il seguente

TEOREMA 3.4 (Principio forte del massimo)**.** *Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^{2n+1}$ e sia u una funzione in $\mathcal{C}^2(\Omega)$ tale che*

$$\begin{cases} \triangle_H u \leq 0 & in\,\Omega, \\ u \leq 0 & in\,\Omega. \end{cases}$$

Se esiste $\bar{\xi}$ in Ω, tale che $u(\bar{\xi}) = 0$, allora $u \equiv 0$ in Ω.

Introduciamo ora un ulteriore strumento che ci permette di approssimare, in un qualche senso esplicitato poi, una soluzione fondamentale, che abbiamo definito in L^1_{loc} con una funzione C^∞: la ε-regolarizzazione di una funzione $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1})$.
Sia χ la funzione così definita

$$\chi(\xi) = \begin{cases} c\exp\left(\dfrac{1}{\rho(\xi)^4 - 1}\right) & |\xi| < 1, \\ 0 & |\xi| \geq 1. \end{cases}$$

Allora χ è una funzione $\mathcal{C}^\infty$ il cui supporto è $B_H(0,1)$, (palla aperta per la norma ρ di centro l'origine e raggio 1). La costante $c = \left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \chi d\mathcal{L}^{2n+1}\right]^{-1}$ è scelta in modo che valga

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \chi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) = 1.$$

Per $\varepsilon > 0$ definiamo

$$\chi_\varepsilon(\xi) := \frac{1}{\varepsilon^{2n+2}} \chi(\eta_{1/\varepsilon}(\xi)),$$

allora χ_ε è chiaramente derivabile infinite volte. Il suo supporto è $B_H(0,\varepsilon)$, (dove $B_H(0,\varepsilon)$ è la palla aperta di centro zero e raggio ε per la norma ρ), e vale ancora $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \chi_\varepsilon d\mathcal{L}^{2n+1} = 1$.
A questo punto, per u in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1})$ definiamo la *ε-regolarizzazione* di u

$$u_\varepsilon(\xi) := \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u(\zeta^{-1} * \xi)\chi_\varepsilon(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u(\zeta)\chi_\varepsilon(\xi * \zeta^{-1}) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta).$$

NOTA 3.5. Come nel caso di $\mathbb{R}^n$ con le operazioni standard, le funzioni χ_ε sono dette nuclei di regolarizzazione e la ε-regolarizzazione della funzione u si ottiene facendo il prodotto di convoluzione tra u e il nucleo di regolarizzazione. Dobbiamo tuttavia in questo caso agire con un po' di cautela. La non commutatività dell'operazione $*$ si riflette sul prodotto di convoluzione tra due funzioni, rendendo anche questo non commutativo. Abbiamo sopra scelto di definire la ε-regolarizzazione come il prodotto di convoluzione rispettivamente di u e χ_ε.

Utilizzeremo le proprietà delle ε-regolarizzazioni esposte nella seguente

PROPOSIZIONE 3.6. *Sia u in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1})$, allora*

1. *u_ε è in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$;*
2. *u_ε converge a u in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1})$ per ε che tende a 0^+;*
3. *$\lim_{|\xi|\to+\infty} u_\varepsilon(\xi) = 0$ se $\lim_{|\xi|\to+\infty} u(\xi) = 0$;*
4. *u_ε è $\triangle_H$-armonica se u è soluzione distribuzionale di $\triangle_H u = 0$.*

Dimostrazione.

1. Proviamo la continuità in un generico punto $\bar{\xi}$.

$$\lim_{\xi\to\bar{\xi}} u_\varepsilon(\xi) = \lim_{\xi\to\bar{\xi}} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u(\zeta^{-1} * \xi)\chi_\varepsilon(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) =$$

effettuando il cambio di variabile $\zeta^{-1} * \xi = \tau$ si ha

$$= \lim_{\xi\to\bar{\xi}} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u(\tau)\chi_\varepsilon(\xi * \tau^{-1}) d\mathcal{L}^{2n+1}(\tau) =$$

ed essendo χ_ε a supporto compatto e quindi limitata e u integrabile sui compatti, possiamo applicare il teorema di convergenza dominata, portare il limite nell'integrale e abbiamo

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u(\tau)\chi_\varepsilon(\bar{\xi} * \tau^{-1}) d\mathcal{L}^{2n+1}(\tau) = u_\varepsilon(\bar{\xi}),$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene facendo il cambio di variabile inverso a quello appena fatto.
Per provare la derivabilità osserviamo che

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi_i}\chi_\varepsilon(\xi * \tau^{-1})\right| \leq \| \nabla\chi_\varepsilon(\,\cdot * \tau^{-1}) \|_\infty = C < +\infty,$$

con C indipendente da ξ essendo χ_ε una funzione $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto. Allora possiamo applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, poiché possiamo considerare il precedente integrale come l'integrale su un compatto, e abbiamo che

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} u_\varepsilon(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi_i}\chi_\varepsilon(\xi * \tau^{-1}) d\mathcal{L}^{2n+1}(\tau).$$

Con argomenti analoghi a quello con cui abbiamo mostrato la continuità si prova che le derivate parziali sono continue. Si può allora provare per induzione la tesi.

2. Vogliamo far vedere che preso un compatto K, $\| u_\varepsilon - u \|_{1,K} \longrightarrow 0$ per $\varepsilon \to 0^+$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_K |u_\varepsilon(\xi) - u(\xi)| d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) \leq \\
&\leq \int_K \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} |u(\zeta^{-1} * \xi) - u(\xi)| \chi_\varepsilon(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \chi_\varepsilon(\zeta) \Big(\int_K |u(\zeta^{-1} * \xi) - u(\xi)| d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) \Big) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta).
\end{aligned}$$

Ora l'integrale interno converge a 0 per ζ^{-1} che tende a 0 perchè vale la continuità in media dell'integrale di Lebesgue. Allora per ogni $\sigma > 0$ esiste ε tale che se $\zeta^{-1} \in B_H(0, \varepsilon)$,

$$\int_K |u(\zeta^{-1} * \xi) - u(\xi)| d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) < \sigma.$$

Ma il supporto di χ_ε è esattamente $B_H(0, \varepsilon)$ e quindi

$$\| u_\varepsilon - u \|_{1,K} \leq \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \chi_\varepsilon(\zeta) \sigma d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) = \sigma.$$

3. Abbiamo che $\lim\limits_{|\xi| \to +\infty} u_\varepsilon(\xi) = 0$, infatti

$$\begin{aligned}
\lim_{|\xi| \to +\infty} u_\varepsilon(\xi) &= \lim_{|\xi| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u(\zeta) \chi_\varepsilon(\xi * \zeta^{-1}) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) = \\
&= \lim_{|\xi| \to \infty} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u(\xi * \zeta^{-1}) \chi_\varepsilon(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \lim_{|\xi| \to \infty} u(\xi * \zeta^{-1}) \chi_\varepsilon(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) = 0,
\end{aligned}$$

dove il passaggio al limite sotto il segno di integrale è lecito perché sono soddisfatte le ipotesi del teorema di convergenza dominata, essendo u continua fuori dall'origine e χ_ε a supporto compatto.

4. Dobbiamo far vedere che $\triangle_H u_\varepsilon = 0$. Mostriamo che u_ε è soluzione distribuzionale dell'equazione $\triangle_H u = 0$ e concludiamo immediatamente essendo u_ε di classe $\mathcal{C}^\infty$. Presa ψ in $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u_\varepsilon(\xi) \triangle_H \psi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u(\zeta^{-1} * \xi) \chi_\varepsilon(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) \Big) \triangle_H \psi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u(\zeta^{-1} * \xi) \triangle_H \psi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) \Big) \chi_\varepsilon(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) =
\end{aligned}$$

poiché l'integrale interno è nullo essendo $\triangle_H$ invariante a sinistra e u soluzione distribuzionale dell'equazione $\triangle_H u = 0$.

$\square$

Ora siamo pronti per provare il teorema di unicità della soluzione fondamentale per $\triangle_H$.

TEOREMA 3.7 (di unicità)**.** *La soluzione fondamentale per l'operatore* $\triangle_H$ *è unica.*

Dimostrazione. Siano Γ_1 e Γ_2 due soluzioni fondamentali per $\triangle_H$ nel senso della Definizione 3.1. Sia $u{:=}\Gamma_1 - \Gamma_2$. Allora $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1})$ soddisfa in senso distribuzionale l'equazione $\triangle_H u = 0$ e $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty} u(\xi) = 0$. Dal punto 3 della Proposizione 3.6 abbiamo che $\lim_{|\xi|\to+\infty} u_\varepsilon(\xi) = 0$. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon(\xi)$ è in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ ed è una funzione $\triangle_H$-armonica che tende a 0 per $|\xi|$ che tende a $+\infty$. Per il Corollario 3.3 $u_\varepsilon \equiv 0$. Abbiamo inoltre detto che le $\varepsilon-$regolarizzazioni tendono ad u in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1})$ (Proposizione 3.6, punto 2). Allora deve essere $u(\xi) = 0$ per quasi ogni ξ, ma u è una funzione continua fuori dall'origine quindi $u(\xi) = 0$ per ogni $\xi \neq 0$. Segue che $\Gamma_1 = \Gamma_2$. $\square$

Da questo punto in poi ci riferiamo ad una funzione che soddisfa $\triangle_H\Gamma = \delta_0$ come alla soluzione fondamentale, avendone dimostrato l'unicità.

4 Proprietà della soluzione fondamentale

In questa sezione, utilizzando il teorema di unicità, dimostrato nella sezione precedente, proviamo che la soluzione fondamentale deve avere alcune proprietà che rispecchiano le proprieta dell'operatore $\triangle_H$. Queste permettono di restringere l'insieme in cui cercare la soluzione fondamentale rendendone quindi più agevole la ricerca.

Introduciamo la seguente

PROPOSIZIONE 4.1. *Sia Γ la soluzione fondamentale di $\triangle_H$ allora Γ inverte a sinistra $\triangle_H$ nel seguente senso*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Gamma(\xi^{-1} * \zeta) \triangle_H \psi(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) = \psi(\xi) \tag{8}$$

per ogni $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ e ξ in $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Gamma(\xi^{-1} * \zeta) \triangle_H \psi(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Gamma(h) \triangle_H \psi(\xi * h) d\mathcal{L}^{2n+1}(h).$$

dove l'uguaglianza tra gli integrali segue dal cambio di variabile $\xi^{-1} * \zeta = h$, osservando che il modulo determinante della matrice Jacobiana di una traslazione è 1. Ora dalla proprietà di invarianza a sinistra, precedentemente illustrata, si ha

$$\triangle_H(\psi(\xi * h)) = (\triangle_H \psi)(\xi * h),$$

(con la prima scrittura intendiamo $\triangle_H$ applicato alla funzione $\xi \mapsto \psi(\xi * h)$). Quindi il secondo integrale è, per definizione di soluzione fondamentale, $\psi(\xi * 0) = \psi(\xi)$. $\square$

Grazie alla precedente proposizione, alle proprietà del Laplaciano di Kohn sopra esposte e utilizzando il teorema di unicità possiamo provare la

PROPOSIZIONE 4.2. *Sia Γ la soluzione fondamentale di $\triangle_H$, allora*

1. *Γ è simmetrica rispetto all'origine, in particolare $\Gamma(\xi) = \Gamma(\xi^{-1})$ per ogni ξ dove è definita;*

2. *Γ è η_r-omogenea di grado $-2n$, ovvero $\Gamma(\eta_r(\xi)) = r^{-2n}\Gamma(\xi)$ per ogni η_r dilatazione del gruppo di Heisenberg e per ogni ξ dove Γ è definita;*

3. *Γ è invariante per rotazioni, ovvero $\Gamma(\Phi(\xi)) = \Gamma(\xi)$ per ogni Φ rotazione del gruppo di Heisenberg e per ogni ξ dove Γ è definita;*

4. *Γ è strettamente positiva;*

5. *Γ ha un polo nell'origine, ovvero $\lim_{|\xi| \to +\infty} \Gamma(\xi) = +\infty$.*

Dimostrazione.

1. Dobbiamo provare che $\Gamma(\xi^{-1}) = \Gamma(\xi)$ per ogni $\xi \neq 0$. Mostriamo che

$$\xi \mapsto \Gamma(\xi^{-1})$$

è una soluzione fondamentale per $\triangle_H$, e possiamo concludere essendo la soluzione fondamentale unica. Presa $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, e detta ι l'inversione nel gruppo di Heisenberg $(\Gamma \circ \iota)(\xi) = \Gamma(\xi^{-1})$, dobbiamo far vedere che vale

$$\langle \triangle_H(\Gamma \circ \iota), \varphi \rangle = \varphi(0). \tag{9}$$

Definiamo la funzione

$$u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Gamma(\zeta^{-1} * \xi) \triangle_H \varphi(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta).$$

Si vede con un cambio di variabili che la funzione è in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$. Sia ora ψ in $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^{2n+1})$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \triangle_H u(\xi)\psi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1} &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u(\xi) \triangle_H \psi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1} = \\ = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Gamma(\zeta^{-1} * \xi) \triangle_H \varphi d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta) \Big) \triangle_H \psi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) = \\ = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Gamma(\zeta^{-1} * \xi) \triangle_H \psi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) \Big) \triangle_H \varphi(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta). \end{aligned}$$

Sostiuiamo ora la (8) della Proposizione 4.1 e otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \triangle_H u(\xi)\psi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1} = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \triangle_H \varphi(\xi)\psi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi)$$

per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+1})$. Deduciamo che $\triangle_H(u - \varphi) = 0$. Ora $\lim_{|\xi| \to +\infty} u(\xi) = 0$, e essendo φ a supporto compatto $\lim_{|\xi| \to +\infty} u(\xi) - \varphi(\xi) = 0$. Dal Corollario 3.3 segue che $u(\xi) = \varphi(\xi)$ per ogni ξ. Quindi in particolare

$$\varphi(0) = u(0) = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Gamma(\zeta^{-1}) \triangle_H \varphi(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1},$$

da cui, essendo $\triangle_H$ autoaggiunto, segue la (9).

2. Come nel punto precedente, per mostrare che $\Gamma(\xi) = r^{2n}\Gamma(\eta_r(\xi))$ per ogni $\xi \neq 0$ e per ogni $r > 0$, mostriamo, attraverso la 2-omogeneità del $\triangle_H$ che $r^{2n}\Gamma \circ \eta_r$ è una soluzione fondamentale del Laplaciano di Kohn e concludiamo grazie al teorema di unicità. Chiaramente $r^{2n}\Gamma \circ \eta_r$ appartiene a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1})$ e $r^{2n}\Gamma(\eta_r(\xi)) \longrightarrow 0$ per $|\xi|$ che tende a infinito. Sia $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, allora

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} r^{2n}\Gamma(\eta_r(\xi)) \triangle_H \psi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \frac{1}{r^2}\Gamma(\xi) \triangle_H \psi(\eta_{1/r}(\xi)) d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) = \psi(\eta_r(0)) = \psi(0), \end{aligned}$$

che è quanto voluto.

3. Proviamo che $\Gamma \circ \Phi$ è una soluzione fondamentale e ancora una volta concludiamo utilizzando l'unicità. $\Gamma \circ \Phi$ appartiene a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1})$ e $\Gamma(\Phi(\xi)) \longrightarrow 0$ per $|\xi|$ che tende a infinito. Presa $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Gamma(\Phi(\xi)) \triangle_H \psi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Gamma(\zeta) \triangle_H \psi(\Phi^{-1}(\zeta)) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta).$$

Ora Φ^{-1} è ancora una rotazione del gruppo di Heisenberg quindi dalla proprietà di invarianza per rotazioni abbiamo che l'ultimo integrale è esattamente

$$\langle \Gamma, \triangle_H(\psi \circ \Phi^{-1}) \rangle = \langle \triangle_H \Gamma, \psi \circ \Phi^{-1} \rangle = \psi(0).$$

Quindi per ogni $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, abbiamo che $\langle \triangle_H \Gamma \circ \Phi, \psi \rangle = \psi(0)$, e possiamo concludere.

4. Prendiamo $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, ψ non negativa. Definiamo ancora una volta

$$u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \Gamma(\xi^{-1} * \zeta) \psi(\zeta) d\mathcal{L}^{2n+1}(\zeta).$$

Abbiamo $\triangle_H u(\xi) = \psi(\xi) \geq 0$ (vedere Proposizione **??**) ed inoltre $\lim\limits_{|\xi| \to +\infty} u(\xi) = 0$. Per il principio debole del massimo, Teorema 3.2, $u(\xi) \geq 0$ per ogni ξ. Segue quindi che $\Gamma \geq 0$. Ora dal principio forte del massimo, Teorema 3.4, segue che o $\Gamma \equiv 0$ oppure $\Gamma(\xi) > 0$ per ogni $\xi \neq 0$. Dal fatto che Γ è la soluzione fondamentale e non può quindi essere costantemente nulla segue quanto voluto.

5. Definiamo
$$m := \min\{\Gamma(\xi), \xi \text{ tale che } \rho(\xi) = 1\},$$
dove ρ è la norma di Korányi. Per il punto precedente $m > 0$. Dall'omogeneità di Γ abbiamo che
$$\Gamma(\xi) = \rho(\xi)^{-2n} \Gamma(\eta_{1/\rho(\xi)}(\xi),$$
con $\rho(\eta_{1/\rho(\xi)}(\xi))) = 1$ per l'omogeneità della norma ρ rispetto alle dilatazioni del gruppo, quindi
$$\rho(\xi)^{-2n} \Gamma(\eta_{1/\rho(\xi)}(\xi)) \geq \rho(\xi)^{-2n} m,$$
e passando al limite otteniamo che $\lim\limits_{\xi \to 0} \Gamma(\xi) = +\infty$.

$\square$

5 La soluzione fondamentale

Dopo aver stabilito che la soluzione fondamentale per $\triangle_H$ deve avere le proprietà esposte nella Proposizione 4.2, procediamo come suggerito da Stein in [4], cercando una soluzione fondamentale della forma

$$\Gamma(z,t) = \rho(z,t)^{-2n} f\Big(\frac{t}{\rho(z,t)^2}\Big). \tag{10}$$

Dobbiamo dunque determinare la funzione f tale che Γ soddisfi le proprietà della Proposizione 4.2. Osserviamo che le proprietà 2 e 3 sono verificate per ogni f. Infatti la funzione

$$(z,t) \mapsto \frac{t}{\rho(z,t)^2}$$

è 0-omogenea rispetto alle dilatazioni del gruppo di Heisenberg ed è una funzione di $|z|$, invariante quindi per le rotazioni precedentemente definite. Dobbiamo assicurarci che una Γ della forma appena detta sia localmente integrabile, $\mathcal{C}^\infty$ fuori dall'origine, abbia un polo nell'origine, sia strettamente positiva e soddisfi la proprietà 1 di simmetria. Possiamo già dire che f dovrà essere strettamente positiva e pari nella variabile t.
Ricordiamo che Γ deve soddisfare

$$\triangle_H \Gamma = \delta_0, \tag{11}$$

in senso distribuzionale, ovvero

$$\langle \triangle_H \Gamma, \psi \rangle = \psi(0), \tag{12}$$

per ogni $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$. Essendo Γ una funzione $\mathcal{C}^\infty$ fuori dall'origine, le derivate distribuzionali coincidono con le derivate classiche, poiché $\triangle_H$ è autoaggiunto e vale la formula di integrazione per parti. Quindi per ogni ψ appartenente a $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\})$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \triangle_H \Gamma(\xi)\psi(\xi) d\mathcal{L}^{2n+1}\psi(0) = \langle \triangle_H \Gamma, \psi \rangle = \psi(0) = 0,$$

da cui concludiamo che Γ deve essere soluzione classica di $\triangle_H \Gamma = \delta_0$ fuori dall'origine, ovvero

$$\triangle_H \Gamma(\xi) = 0, \tag{13}$$

per ogni $\xi \neq 0$. Imponendo a Γ di essere soluzione della (13) fuori dall'origine, si ottiene che f deve soddisfare la seguente equazione differenziale:

$$\frac{-|z|^6}{\rho(z,t)^{2n+8}} f''\Big(\frac{t}{\rho(z,t)^2}\Big) + \frac{t|z|^2(n+1)}{\rho(z,t)^{2n+6}} f'\Big(\frac{t}{\rho(z,t)^2}\Big) = 0. \tag{14}$$

Si osserva che $\Big(1 - \frac{t^2}{\rho(z,t)^4}\Big)\rho(z,t)^4 = |z|^4$ e si riscrive la (14) nel seguente modo

$$\begin{aligned} &-\Big(1 - \frac{t^2}{\rho(z,t)^4}\Big)^{3/2} \rho(z,t)^{-2n-2} f''\Big(\frac{t}{\rho(z,t)^2}\Big) + \\ &+ (n+1)\Big(1 - \frac{t^2}{\rho(z,t)^4}\Big)^{1/2} \frac{t}{\rho(z,t)^2} \rho(z,t)^{-2n-2} f'\Big(\frac{t}{\rho(z,t)^2}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Si pone allora nella precedente equazione $\frac{t}{\rho(z,t)^2} = s$, con $s \in [-1,1]$ e si ottiene

$$-(1-s^2)^{3/2}f''(s) + (n+1)s(1-s^2)^{1/2}f'(s) = 0.$$

Si è dunque giunti ad un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, in cui non appaiono termini di grado zero. Si può quindi abbassare il grado dell'equazione ponendo $f'(s) = h(s)$

$$-(1-s^2)^{3/2}h'(s) + (n+1)s(1-s^2)^{1/2}h(s) = 0, \tag{15}$$

e si ottiene un'equazione del primo ordine a variabili separabili. Integrando a destra e a sinistra l'espressione

$$\frac{h'(s)}{h(s)} = \frac{(n+1)s}{1-s^2},$$

si ottiene una famiglia ad un parametro di soluzioni non costanti

$$h(s) = c(1-s^2)^{-(n+1)/2} \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ora si risolve l'equazione $f'(s) = h(s)$, e si trova

$$f_{c,d}(s) = \int_0^s h(t)dt + d = c\int_0^s (1-t^2)^{-(n+1)/2}dt + d = -c\int_{\pi/2}^{\arccos(s)} \sin(\theta)^{-n}d\theta + d, \quad d \in \mathbb{R},$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal cambio di variabile $t = \cos\theta$, $\theta \in [0,\pi]$.
Le soluzioni ottenute

$$f_{c,d}\Big(\frac{t}{\rho(z,t)^2}\Big) = -c\int_{\pi/2}^{\arccos\left(\frac{t}{\rho(z,t)^2}\right)} \sin(\theta)^{-n}d\theta + d,$$

non soddisfano la condizione 1 di simmetria della Proposizione 4.2. Si scartano pertanto tali funzioni e si analizzano le soluzioni fornite dalla soluzione costante della (15), $h(s) = 0$, che conduce a $f(s) = d$ e $\Gamma(z,t) = \frac{d}{\rho(z,t)^2}$. Per determinare la costante d bisogna imporre a Γ di essere soluzione di (11).

NOTA 5.1. Non è vero a priori che tale procedimento conduce ad una soluzione fondamentale. Abbiamo infatti scelto di cercare una Γ della forma espressa in (14). Potrebbe accadere che una costante d per cui $\Gamma(z,t) = \frac{d}{\rho(z,t)^2}$ è soluzione di (11) non esiste.

Con il seguente teorema proviamo che effettivamente esiste una costante c_n dipendente da n per cui $\Gamma_n(z,t) = \frac{c_n}{\rho(z,t)^2}$ è la soluzione fondamentale per l'operatore $\triangle_H$ in $\mathbb{H}^n$.

TEOREMA 5.2 (Folland)**.** *La funzione $\Gamma_n(z,t) = \frac{c_n}{\rho(z,t)^{2n}}$ è la soluzione fondamentale per l'operatore $\triangle_H$, dove $c_n > 0$ è la costante*

$$c_n = \Big[n(n+2)\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} |z|^2(\rho(z,t)^4+1)^{-(n+4)/2}d\mathcal{L}^{2n+1}(z,t)\Big]^{-1}.$$

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che ρ^{-2n} è in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1})$. Infatti è integrabile sui compatti fuori dall'origine essendo in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1}\setminus\{0\})$. Per verificare l'integrabilità attorno a zero consideriamo $B_H(0,1) = \{(z,t) : \rho(z,t) < 1\}$ palla unitaria relativa alla funzione norma ρ. Allora

$$\Big| \int_{B_H(0,1)} \rho^{-2n}(z,t) d\mathcal{L}^{2n+1}(z,t)\Big| = \Big| \int_{B_H(0,1)} (|z|^4 + t^2)^{-n/2} d\mathcal{L}^{2n+1}(z,t)\Big| \leq$$

facciamo un cambio di coordinate in $\mathbb{R}^{2n}$, passando alle coordinate sferiche (r, ϕ) con $z = r\phi$, $r > 0$, $\phi \in \mathbb{S}^{2n-1}$, maggioriamo i moduli dei seni e coseni , ottenuti dal cambio di coordinate, con 1, applichiamo poi il teorema di Tonelli e abbiamo

$$\leq C_n \int_{\{r^4+t^2<1\}\cap\{r>0\}} (r^4 + t^2)^{-n/2} r^{2n-1} d\mathcal{L}^2(r,t) =$$

poniamo ora $r^2 = s$

$$= \frac{C_n}{2} \Big| \int_{\{s^2+t^2<1\}\cap\{s>0\}} (s^2 + t^2)^{-n/2} s^{n-1} d\mathcal{L}^2(s,t)\Big| \leq$$

facciamo un ulteriore cambio di coordinate, passando alle coordinate polari del piano (h, θ), con $s = h\cos\theta$, $t = h\sin\theta$, e con maggiorazioni analoghe alle precedenti otteniamo

$$\leq \bar{C}_n \int_{\{0<h<1\}} |h^{-n} h^{n-1} h| d(h) = \bar{C}_n < +\infty,$$

Segue quindi che è ben definita la distribuzione associata a Γ_n.
Si deve ora dimostrare che

$$\langle \triangle_H \Gamma_n, \psi\rangle = \psi(0) \quad \forall\, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1}).$$

Poiché $\rho(z,t)$ ha una singolarità nell'origine, per $\varepsilon > 0$ definiamo una funzione ausiliaria $\rho_\varepsilon(z,t) := (\rho(z,t)^4 + \varepsilon^4)^{1/4} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, tale che ρ_ε tende a $\rho(z,t)$ puntualmente per $\varepsilon \to 0^+$.
Definiamo inoltre la funzione

$$\phi(z,t) := n(n+2)|z|^2(\rho(z,t)^4 + 1)^{-n/2-2}.$$

Mostreremo in seguito che vale

$$(\triangle_H \rho_\varepsilon^{-2n})(z,t) = \varepsilon^{-2n-2}(\phi \circ \eta_{1/\varepsilon})(z,t) \tag{16}$$

per ogni (z,t). Allora presa $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, essendo $\triangle_H$ autoaggiunto, si ha

$$\langle \triangle_H \Gamma_n, \psi\rangle = \langle \Gamma_n, \triangle_H \psi\rangle =$$

applichiamo ora il teorema di convergenza dominata, e sostituiamo la (16)

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \langle c_n \rho_\varepsilon^{-2n}, \triangle_H \psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \langle c_n \triangle_H \rho_\varepsilon^{-2n}, \psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \langle c_n \varepsilon^{-2n-2} \phi \circ \eta_{1/\varepsilon}, \psi\rangle. \tag{17}$$

Scrivendo l'argomento dell'ultimo limite in forma integrale ed effettuando il cambio di variabili $(\frac{z}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}) = (w, h),\ \varepsilon^{-2n-2} d(z,t) = d(w,h)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} c_n \varepsilon^{-2n-2} \phi(\frac{z}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}) \psi(z,t)\, d(z,t) = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} c_n \phi(w,h) \psi(\varepsilon w, \varepsilon^2 h) d(w,h).$$

Segue quindi che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle c_n \varepsilon^{-2n-2} \phi \circ \eta_{1/\varepsilon}, \psi \rangle = c_n \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \psi(0) \phi(w,h) d(w,h) = \psi(0), \tag{18}$$

essendo la seconda uguaglianza in (17) e il passaggio al limite sotto il segno di integrale in (18) giustificati dal teorema di convergenza dominata. Si è dunque mostrato quanto voluto. Resta ora da provare la (16). Ricordando che $\rho_\varepsilon^{-2n}(z,t) = ((|z|^4 + t^2 + \varepsilon^4)^{-n/2}$, si osserva che ρ_ε è una funzione radiale di z_j e $\bar{z}_j$ e che il campo $z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ è la derivazione lungo le circonferenze del piano relativo alle coordinate z_j e $\bar{z}_j$, ed è quindi nullo se applicato a ρ_ε. Basta perciò calcolare le seguenti derivate

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_j} \rho_\varepsilon^{-2n}(z,t) = -n z_j |z|^2 (\rho_\varepsilon(z,t)^4)^{-n/2-1}, \\
&\frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon^{-2n}(z,t) = -nt(\rho_\varepsilon(z,t)^4)^{-n/2-1}, \\
&\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_\varepsilon^{-2n}(z,t) = n(n+2) t^2 \rho_\varepsilon(z,t)^{-2n-8} - n\rho_\epsilon(z,t)^{-2n-4}, \\
&\frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rho_\varepsilon^{-2n}(z,t) = n(n+2)|z|^2 |z_j|^2 \rho_\varepsilon(z,t)^{-2n-8} - n(|z|^2 + |z_j|^2) \rho_\varepsilon(z,t)^{-2n-4},
\end{aligned}$$

e si ottiene

$$\begin{aligned}
(\triangle_H \rho_\varepsilon^{-2n})(z,t) &= (-n(n+2))|z|^2(|z|^4 + t^2)\rho_\varepsilon^{-2n-8} + (2n + n^2)|z|^2 \rho_\varepsilon^{-2n-4} = \\
&= n(n+2)|z|^2 \rho_\varepsilon^{-2n-4}((-\rho_\varepsilon^{-4})|z|^4 + t^2) + 1) = \\
&= n(n+2)\epsilon^4 |z|^2 \rho_\varepsilon^{-2n-8} = \\
&= n(n+2)\varepsilon^{-2n-4}|z|((\rho \circ \eta_{1/\varepsilon})^4 + 1)^{-n/2-2} = \\
&= \varepsilon^{-2n-2} \phi \circ \eta_{1/\varepsilon}(z,t),
\end{aligned}$$

dove nei precedenti passaggi ρ_ε e $\eta_{1/\varepsilon}$ sono valutate in (z,t). Si è inoltre utilizzata l'1-omogeneità di ρ rispetto alla dilatazione η_r (nello specifico $\eta_{1/\varepsilon}$). $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equation.* Acta Mathematica, Volume 119, 1967.

[2] G.B. Folland, *A Fundamental Solution for a Subellptic operator.* Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 79, Number 2, March 1973.

[3] G.B. Folland, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups.* Arkiv för Matematik, Volume 13, Issue 1, December 1975.

[4] E.M. Stein, *Armonic analisys: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.* Princeton, Princeton University Press, 1993.

[5] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differental Operators 1.* Reprint of the second edition 1990, Germany, Springer, 2003.

[6] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians.* Springer Monographs in Mathematics, Germany, Springer, 2007.