UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"
Corso di Laurea Triennale in Matematica

DIFFERENZIABILITÀ DI FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Laureando:
Vladyslav Gapyak
1120603

Data: 18 Ottobre 2019

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Le funzioni continue non sono a priori differenziabili.
Il primo obiettivo di questa tesi è presentare la classe delle funzioni lipschitziane come buon sottoinsieme delle funzioni continue per risultati di differenziabilità.
Il secondo obiettivo è evidenziare come il legame sia così interessante, che l'indebolimento delle ipotesi sugli spazi dominio e codominio permettano comunque l'enunciazione di variazioni sul medesimo risultato:

$$\text{Lipschitzianità} \quad \Longrightarrow \quad \text{Differenziabilità}$$

con opportune correzioni sul significato di differenziabilità in funzione delle ipotesi sugli spazi di partenza e arrivo.
Il terzo e ultimo obiettivo è mostrare la quantità e diversità delle tecniche e degli approcci utilizzati per dimostrare questi risultati.

Nel capitolo 2 verranno presentati due risultati classici: i teoremi di Lebesgue e di Rademacher, che asseriscono la q.o. differenziabilità di funzioni lipschitziane tra i reali, e per lipschitziane $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispettivamente.
Il Teorema di Lebesgue si affronta passando per un risultato di differenziabilità q.o. per funzioni monotone, per il quale sono necessarie le argomentazioni e stime tipiche della teoria della misura di Lebesgue e il lemma di ricoprimento di Vitali. Si conclude infine osservando che le funzioni lispchitziane sono a variazione limitata e quindi differenza di monotone.
La dimostrazione del Teorema di Rademacher fornisce un approccio a livello intuitivo molto interessante: lo spazio verrà suddiviso in fili, ovvero in sottospazi 1-dimensionali su cui valga il teorema di Lebesgue per ottenere differenziabilità direzionale da cui dedurre la differenziabilità forte.

Nel capitolo 3 verrano introdotte per spazi di Banach le nozioni analoghe alle differenziablità direzionale e forte degli spazi finito dimensionali reali, e i due limiti della teoria: per funzioni lipschitizane tra spazi di Banach le due nozioni di differenziabilità coincidono se lo spazio dominio è finito dimensionale, mentre crolla il legame per spazi infinito dimensionali, da cui la necessità di ipotesi particolari. In particolare, saranno enunciati teoremi di differenziabilità debole per funzioni a codominio in spazi RNP, ovvero spazi su cui è valida una versione del teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym. Vedremo come la proprietà RNP sia legata alla lipschitzianità, dunque verranno usate le proprietà della convoluzione e dei mollificatori. Generalizzeremo poi il risultato considerando domini Banach separabili e codomini RNP. Qui sarà necessario introdurre una nuova concezione della terminologia *quasi ovunque*, avendo abbandonato la misura di Lebesgue degli spazi reali: gli insiemi *Aronszajn-nulli.*

Il capitolo 4 sarà totalmente dedicato alla formulazione di un principio variazionale visto come un gioco infinito tra due giocatori, e la sua generalizzazione in spazi metrici in cui fallisce la completezza. Introdurremo quindi una nozione di completezza bimetrica, ovvero richiederemo la convergenza delle successioni di Cauchy per la metrica, a patto che le distanze nella seconda pseudometrica siano controllate da certe funzioni.

Nel capitolo 5 utilizzeremo il principio variazionale introdotto per dimostrare un risultato di esistenza di punti di differenziabilità forte per funzioni lipschitziane. Tale approccio costituisce un primo esempio dell'applicazione del principio variazionale introdotto, il cui completo potenziale può essere apprezzato in risultati più forti la cui enunciazione costituirà il corpo delle conclusioni.

L'appendice contiene per completezza la dimostrazione di una proprietà utile per la dimostrazione del Teorema fondamentale del capitolo 5 che è stata distaccata dalle argomentazioni principali per evitare interruzioni delle argomentazioni e idee presentate nell'approccio variazionale.

Capitolo 2

Risultati classici su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$

É noto che per funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, la derivabilità in un punto implica la continuità nel punto medesimo. É facile inoltre costruire un esempio di funzione continua ovunque ma non derivabile in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ del dominio, ad esempio traslando la funzione modulo in modo che il minimo sia immagine del punto singolare:

$$|\bullet - x_0| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad .$$

Non è invece banale costruire una funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovunque continua ma mai differenziabile. Il primo risultato soddisfacente in tal senso ad essere pubblicato con dimostrazione valida è il celebre esempio di Weierstraß(1875):

Teorema 2.0.1 (Weierstraß)**.** *Siano $a \in (0,1)$ e $b \in 2\mathbb{N}+1$ tali che $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.*
Allora la funzione

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

è continua ma non ha punti di derivabilità.

Dimostrazione. E. Hewitt, K. Stromberg: *Real and abstract analysis: a modern treatment of the theory of functions of a real variable*, 1975, Theorem 17.7, pagina 258. □

2.1 Teorema di Lebesgue

Un primo risultato interessante di esistenza di derivate per funzioni a valori reali si trova nella tesi di Henri Lebesgue ($\sim$ 1900):

Teorema 2.1.1. *Ogni funzione $f \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ((a,b) limitato o illimitato) monotona è derivabile quasi ovunque (ovvero l'insieme dei punti di non derivabilità ha misura di Lebesgue nulla).*

Prima di procedere con la dimostrazione del teorema, introduciamo alcune definizioni e risultati ausiliari.

Definizione 2.1.1. Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $f \colon I \to \mathbb{R}$ e $x \in I$.

- Dicesi *derivata superiore* di f in x la quantità:
$$\overline{D}f(x) = \limsup_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} : 0 < |h| < \delta \right\};$$
- Dicesi *derivata inferiore* di f in x_0 la quantità:
$$\underline{D}f(x) = \liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} : 0 < |h| < \delta \right\}$$

Osservazione 2.1.1. Risulta evidente la disuguaglianza $\underline{D}f(x) \le \overline{D}f(x)$ per ogni $x \in I$. In particolare f è derivabile in $x \in I$ se e solo se $\underline{D}f(x) = \overline{D}f(x) \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.1.2. Sia $\mathcal{V}$ una famiglia di intervalli chiusi non degeneri di $\mathbb{R}$ e sia un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$. Si dirà che $\mathcal{V}$ è un *ricoprimento di Vitali* di E, se per ogni $x \in E$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intervallo $I \in \mathcal{V}, x \in I$ con $l(I) < \varepsilon$.

Teorema 2.1.2 (Lemma di ricoprimento di Vitali)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme con misura esterna $m^*(E) < \infty$ e $\mathcal{V}$ un ricoprimenti di Vitali di E. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $I_1, \dots, I_m \in \mathcal{V}$ con $I_j \cap I_i = \emptyset$ per $j \ne i$, tali che*

$$\mathcal{L}^1\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{m} I_j\right) < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Poiché la misura esterna $m^*(E)$ è finita, si ha per definizione

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} m^*(I_k)\colon \{I_k\}_{\in\mathbb{N}} \text{ ricoprimento di intervalli aperti di } E\right\}.$$

Dalla definizione di estremo inferiore allora, scelto $\varepsilon = 1 > 0$ esiste $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con

$$m^*\left(\bigcup_k I_k\right) \le \sum_k m^*(I_k) < m^*(E) + \varepsilon = m^*(E) + 1 < +\infty.$$

Ma allora $\Omega = \bigcup_k I_k$ è un aperto unione di aperti con $\mathcal{L}^1(\Omega) < +\infty$ e $\Omega \supseteq E$. Si può inoltre selezionare da $\mathcal{V}$ un ricoprimento di Vitali di E che abbia in più la proprietà di essere contenuto in Ω : $\mathcal{V}$ è un ricoprimento di Vitali di E, allora si consideri l'insieme degli elementi di questo che sono anche contenuti in Ω, sia quindi $\mathcal{V}_\Omega = \{I\colon I \in \mathcal{V}, I \subseteq \Omega\} \subseteq \mathcal{V}$. L'oggetto $\mathcal{V}_\Omega$ è a sua volta un ricoprimento di Vitali per E, se infatti $x \in E$ e $\varepsilon > 0$, essendo Ω aperto, esiste $\alpha > 0$ t.c. $(x-\alpha, x+\alpha) \subseteq \Omega$ con $l(x-\alpha, x+\alpha) = 2\alpha$; ora $\mathcal{V}$ è di Vitali per E, quindi esiste $I_x \in \mathcal{V}$ tale che $I_x \ni x$ e $l(I_x) < \min\{\varepsilon, \alpha\}$. Risulta $\mathcal{V} \ni I_x \subseteq (x-\alpha, x+\alpha) \subseteq \Omega \implies I_x \in \mathcal{V}_\Omega$. Ma questo è vero $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists I_x \in \mathcal{V}_\Omega$ e $l(I_x) < \varepsilon$, concludendo che $\mathcal{V}_\Omega$ è di Vitali per E.
Si costruisca ora una successione di intervalli $\{I_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ di $\mathcal{V} := \mathcal{V}_\Omega$ nel modo seguente: supponendo di aver già scelto $I_1, \dots, I_m$ disgiunti a due a due:

- se fosse $E \subset \bigcup_{j=1}^m I_j$, ovvero $E \setminus \bigcup_{j=1}^m I_j = \emptyset$, allora sarebbe soddisfatta la tesi del teorema dal momenti in cui vale
$$\mathcal{L}^1\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{m} I_j\right) = 0$$
e si avrebbe un arresto.
- Altrimenti poniamo $\mathcal{U}_m = \{I \in \mathcal{V} | I \cap I_j = \emptyset,\ j = 1, \dots, m\}$. La classe $\mathcal{U}_m$ risulta non vuota, infatti, essendo $E \setminus \bigcup_{j=1}^m I_j \ne \emptyset$, scelto un elemento x in questo, per definizione di ricoprimento di Vitali esiste un $I_x \in \mathcal{V}$, $x \in I_x$ con $l(I_x) > 0$ sufficientemente piccolo perché valga $I_x \cap I_j = \emptyset$ per $j = 1, \dots, m$.
Si ponga $k_m = \sup\{l(I) | I \in \mathcal{U}_m\}$; risulta ovviamente $0 < k_m \le \mathcal{L}^1(\Omega) < \infty$. Si scelga quindi I_{m+1} in modo tale che $I_{m+1} \in \mathcal{U}_m$ e $l(I_{m+1}) > \frac{k_m}{2}$.

Supponendo di non aver ottenuto un arresto della procedura, si ottiene una successione di intervalli chiusi e mutualmente disgiunti $\{I_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Ma allora

$$\sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) = \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) \le \mathcal{L}^1(\Omega) < \infty$$

e tale serie è quindi convergente e fissato $\varepsilon > 0$, si trova un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} l(I_k) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Sia $R = E \setminus \bigcup_{k=1}^N I_k$, basta dimostrare che $\mathcal{L}^1(R) < \varepsilon$.
Sia $x \in R$; esiste allora $I \in \mathcal{V}$ tale che $x \in I$ e $I \cap I_j = \emptyset$ per $j = 1, \dots, N$. Esiste allora un m (sarà ovviamente $m > N$) tale per cui $I \cap I_m \neq \emptyset$: se infatti ciò non fosse vero, allora sarebbe $I \cap I_m = \emptyset$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, e quindi $I \in \mathcal{U}_m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Ma allora si avrebbe $l(I) \leq k_m < 2\,l(I_{m+1})$; d'altra parte la convergenza della serie $\sum_{j=1}^{\infty} l(I_j)$ implica che $l(I_m) \xrightarrow{m\to+\infty} 0$ e si avrebbe quindi l'assurdo $l(I) = 0$.
Si ponga $p = \min\{m \in \mathbb{N} | I \cap I_m \neq \emptyset\}$. Tale insieme è certamente non vuoto. Si ha quindi che $I \cap I_j = \emptyset$ per $j = 1, \dots, p-1$ da cui segue che $I \in \mathcal{U}_{p-1}$ e quindi $l(I) \leq k_{p-1} < 2\,l(I_p)$. Si ha inoltre che $I \cap I_p \neq \emptyset$, e osservando che se $x \in I$ e x_0 è il centro di I_p si ha

$$|x - x_0| \leq l(I) + \frac{l(I_p)}{2} < (2 + \frac{1}{2}) l(I_p) = \frac{5}{2} l(I_p),$$

e quindi $I \subset 5\,I_p$, ove $5\,I_p$ indica l'intervallo concentrico a I_p di lunghezza 5 volte la lunghezza di I_p. Poiché $x \in I$ si ha dimostrato che

$$x \in \bigcup_{p=N+1}^{\infty} 5\,I_p$$

e, valendo per ogni $x \in R$ si ottiene

$$R \subset \bigcup_{p=N+1}^{\infty} 5\,I_p.$$

Pertanto

$$\mathcal{L}^1(R) \leq \mathcal{L}^1\Big(\bigcup_{p=N+1}^{\infty} 5\,I_p\Big) \leq \sum_{p=N+1}^{\infty} l(5\,I_p) = 5 \sum_{p=N+1}^{\infty} l(I_p) < \varepsilon.$$

□

Lemma 2.1.1. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora per ogni $\alpha > 0$ reale si ha:*

a) $\mathcal{L}^1\big(\{x \in (a,b) : \overline{D}f(x) \geq \alpha\}\big) \leq \frac{1}{\alpha}[f(b) - f(a)]$;

b) $\mathcal{L}^1\big(\{x \in (a,b) : \overline{D}f(x) = \infty\}\big) = 0$.

Dimostrazione. a) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$; risulta conveniente rinominare l'insieme in esame:

$$E_\alpha = \{x \in (a,b) : \overline{D}f(x) \geq \alpha\}.$$

Preso β tale che $0 < \beta < \alpha$, si definisca la collezione di intervalli $\mathcal{I}$ nel modo seguente:

$$\mathcal{I} = \{[c,d] \subset (a,b) : f(d) - f(c) \geq \beta(d - c)\}.$$

Dimostriamo che $\mathcal{I}$ è ricoprimento di Vitali di E_α. Sia $\varepsilon > 0$ fissato e $x \in E_\alpha$. Per definizione $x \in (a,b)$ e $\overline{D}f(x) \geq \alpha > \beta$. Quindi

$$\overline{D}f(x) = \inf_{\delta>0} \sup \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} : 0 < |h| < \delta \right\} > \beta$$

quindi per ogni $\delta > 0$ si ha che $\sup_h \left\{ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} : 0 < |h| < \delta \right\} > \beta$. Sia in particolare $\delta^* = \min\{x - a, b - x, \varepsilon\}$. Allora per $0 < |h| < \delta^*$ si ha che $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > \beta$.
Se poi $h > 0$ e scegliamo $c = x$ e $d = x + h$ allora risulta:

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} > \beta \quad \Leftrightarrow \quad f(d) - f(c) > \beta(d - c);$$

se invece $h < 0$, segliendo $c = x + h$ e $d = x$ si ottiene:

$$\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \beta \quad \Leftrightarrow \quad f(c) - f(d) < \beta(c - d) \quad \Leftrightarrow \quad f(d) - f(c) > \beta(d - c).$$

In entrambi i casi $[c,d] \in \mathcal{I}$ e $x \in [c,d]$; inoltre $l([c,d]) = |h| < \delta < \varepsilon$. Sia ora un arbitrario $\varepsilon > 0$ fissato, poiché $\mathcal{L}^1(E_\alpha) \leq \mathcal{L}^1\big((a,b)\big) = b - a < \infty$ e $\mathcal{I}$ è un ricoprimento di Vitali di E_α, per il lemma di Vitali esiste una sottocolllezione $\{[c_1,d_1],\dots,[c_n,d_n]\} \subset \mathcal{I}$ tale che:

$$\mathcal{L}^1\left(E_\alpha \setminus \bigcup_{k=1}^{n} [c_k,d_k]\right) < \varepsilon.$$

Per la subadditività della misura di Lebesgue si ha:

$$\mathcal{L}^1(E_\alpha) \leq \mathcal{L}^1\left(E_\alpha \setminus \bigcup_{k=1}^{n} [c_k,d_k]\right) + \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=1}^{n} [c_k,d_k]\right) < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}^1\big([c_k,d_k]\big) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} (d_k - c_k).$$

Ora, poiché $[c_k,d_k] \in \mathcal{I}$ per ogni $k \in \{1,2,\dots,n\}$, si ha per definizione:

$$f(d_k) - f(c_k) \geq \beta(d_k - c_k) \quad \Leftrightarrow \quad (d_k - c_k) \leq \frac{1}{\beta}[f(d_k) - f(c_k)];$$

da cui segue subito che

$$\mathcal{L}^1(E_\alpha) < \varepsilon + \frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{n}[f(d_k) - f(c_k)].$$

Poiché per ipotesi f è anche monotona crescente, si ha $\mathcal{L}^1(\{x \in (a,b) \colon \overline{D}f(x) \geq \alpha\}) < \varepsilon + \frac{1}{\beta}[f(b) - f(a)]$; passando al limite per $\varepsilon \to 0$ e $\beta \to \alpha$ si ottiene quanto enunciato:

$$\mathcal{L}^1(\{x \in (a,b) \colon \overline{D}f(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha}[f(b) - f(a)].$$

b) Si osservi che

$$\{x \in (a,b) \colon \overline{D}f(x) = \infty\} = \bigcap_{M \in \mathbb{R}} \{x \in (a,b) \colon \overline{D}f(x) > M\}$$

Per ogni $M^* \in \mathbb{R}$ fissato si ha che $\bigcap_M \{x \in (a,b) \colon \overline{D}f(x) > M\} \subset \{x \in (a,b) \colon \overline{D}f(x) \geq M^*\}$. In particolare per ogni $M^* \in \mathbb{R}$ e $M^* > 0$ si ha che:

$$\mathcal{L}^1(\{x \in (a,b) \colon \overline{D}f(x) = \infty\}) \leq \mathcal{L}^1(\{x \in (a,b) \colon \overline{D}f(x) \geq M^*\}) \leq \frac{1}{M^*}[f(b) - f(a)];$$

passando al limite per $M^* \to +\infty$ si ottiene l'asserto:

$$\mathcal{L}^1(\{x \in (a,b) \colon \overline{D}f(x) = \infty\}) = 0.$$

□

Con gli strumenti ottenuti, segue una dimostrazione del risutato di Lebesgue:

Dimostrazione del Teorema 2.1.1. Sia f per semplicità crescente, dato che se f fosse descrescente basterebbe considerare la funzione $-f$ crescente e che ha i medesimi punti di differenziabilità. Sia inoltre (a,b) limitato; qualora non lo fosse, ci si riconduca a questo caso scrivendo $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ con $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sequenza di intervalli aperti e limitati tali che $(a_n,b_n) \subset (a_{n+1},b_{n+1})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti, se f risulta quasi ovunque differenziabile su ogni sottointervallo limitato (a_n,b_n) allora esiste un insieme $E_n \subset (a_n,b_n)$ con $\mathcal{L}^1(E_n) = 0$ e f è differenziabile su tutto $(a_n,b_n) \setminus E_n$. Pertanto f risulterebbe differenziabile su $\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n b_n) \setminus E_n = (a,b) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Ma unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla, quindi f risulterebbe differenziable su tutto (a,b).
Per definizione, f è differenziabile in tutti i punti del dominio in cui le derivate inferiore e superiore sono finite e coincidono. Segue che l'insieme dei punti in cui f è non differenziabile in (a,b) si può scrivere come:

$$\{x \in (a,b) \colon \overline{D}f(x) = \infty\} \cup \{x \in (a,b) \colon \infty > \overline{D}f(x) > \underline{D}f(x)\}.$$

Essendo f crescente, per il Lemma 2.1.1 risulta subito $\mathcal{L}^1(\{x \in (a,b)\colon \overline{D}f(x) = \infty\}) = 0$. Serve quindi mostrare che sia anche $\mathcal{L}^1(\{x \in (a,b)\colon \infty > \overline{D}f(x) > \underline{D}f(x)\}) = 0$.
Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, definendo $E_{\alpha,\beta} = \{x \in (a,b)\colon \underline{D}f(x) < \beta < \alpha < \overline{D}f(x) < \infty\}$, si può riscrivere l'insieme di cui sopra nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\{x \in (a,b)\colon \infty > \overline{D}f(x) > \underline{D}f(x)\} &= \bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}} \{x \in (a,b)\colon \underline{D}f(x) < \beta < \alpha < \overline{D}f(x) < \infty\} \\ &= \bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}} E_{\alpha,\beta}\end{aligned}$$

É sufficiente dimostrare che $\mathcal{L}^1(E_{\alpha,\beta}) = 0$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Sia $\varepsilon > 0$ fissato, si ponga per semplicità $E = E_{\alpha,\beta}$ una volta fissati anche α e β con $\beta < \alpha$. Esiste pertanto un insieme aperto Ω' contenente E, tale per cui $\mathcal{L}^1(\Omega') \le \mathcal{L}^1(E) + \varepsilon$. Sia $\Omega = \Omega' \cap (a,b)$; allora Ω è ancora un aperto, e ha la proprietà di essere $E \subset \Omega \subset (a,b)$ e di mantenere le disuguaglianze $\mathcal{L}^1(\Omega) \le \mathcal{L}^1(\Omega') < \mathcal{L}^1(E) + \varepsilon$. Si definisca la collezione di intervalli chiusi $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} = \{[c,d] \subset \Omega\colon f(d) - f(c) < \beta(d-c)\}.$$

Con argomentazioni pressocché identiche a quelle nel Lemma 2.1.1, si dimostra che $\mathcal{I}$ è un ricoprimento di Vitali per E. Avendo assunto la limitatezza di (a,b), si garantisce che $\mathcal{L}^1(E) < \infty$. Per il lemma di Vitali, esiste una sottocollezione finita di intervalli chiusi mutualmente disgiunti $\{[c_1,d_1],\dots,[c_n,d_n]\}$ di $\mathcal{I}$ tale che:

$$\mathcal{L}^1\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n}[c_k,d_k]\right) < \varepsilon \quad (\spadesuit)$$

Ora:

$$\sum_{k=1}^{n}[f(d_k) - f(c_k)] < \sum_{k=1}^{n}\beta[d_k - c_k] < \beta\,\mathcal{L}^1(\Omega) < \beta\,[\mathcal{L}^1(E) + \varepsilon] \quad (\star)$$

Si osservi che per ogni $k \in \{1,2,\dots,n\}$ si ha che $E \cap [c_k,d_k] \subset \{x \in [c_k,d_k]\colon \overline{D}f(x) \ge |\alpha|\}$. Quindi per ogni k si ha

$$\mathcal{L}^1(E \cap [c_k,d_k]) \le \mathcal{L}^1(\{x \in [c_k,d_k]\colon \overline{D}f(x) \ge |\alpha|\}) \le \frac{1}{|\alpha|}[f(d_k) - f(c_k)] \quad (\star\star)$$

Esplicitando E come $E = \left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n}[c_k,d_k]\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n}[c_k,d_k] \cap E\right)$ e sfruttando le proprietà della misura si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(E) &= \mathcal{L}^1\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n}[c_k,d_k]\right) + \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=1}^{n}[c_k,d_k] \cap E\right) \\ &\overset{(\spadesuit)}{<} \varepsilon + \sum_{k=1}^{n}\mathcal{L}^1([c_k,d_k] \cap E) \quad \text{poiché i } [c_k,d_k] \text{ sono mutualmente disgiunti} \\ &\overset{(\star\star)}{<} \varepsilon + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|\alpha|}[f(d_k) - f(c_k)] \\ &\overset{(\star)}{<} \varepsilon + \frac{\beta}{|\alpha|}(\mathcal{L}^1(E) + \varepsilon).\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ottiene la stima $\mathcal{L}^1(E) \le \frac{\beta}{|\alpha|}\mathcal{L}^1(E)$. Se fosse $\mathcal{L}^1(E) > 0$ allora questa stima implicherebbe che $1 \le \frac{\beta}{|\alpha|} \implies |\alpha| \le \beta$ e quindi che $\alpha \le \beta$, contraddicendo l'ipotesi $\beta < \alpha$. Si conclude pertanto che $\mathcal{L}^1(E) = 0$ e che f è differenziabile quasi ovunque in (a,b). $\square$

Verranno ora introdotti alcuni risultati sulle funzioni a variazione limitata, per poter dimostrare il primo risultato di differenziabilità di funzioni lipschitziane di questa sezione: sia $\mathcal{S}([a,b])$ l'insieme delle *suddivisioni* σ di un intervallo chiuso $[a,b] \subset \mathbb{R}$; con abuso di notazione, si scriverà $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$, per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 2.1.3. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

- Dicesi *variazione totale* di f la quantità:
$$V_{[a,b]}(f) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} \sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})|;$$
qualora ovvio dal contesto, si scriverà per semplicità $V_{[a,b]}(f) = V(f)$.
- Se $V(f) < \infty$ si dirà che f è *a variazione totale limitata* e si indicherà $f \in BV([a,b])$.

La nozione di lipschitzianità, fondamentale nella trattazione dei risultati a seguire, verrà ora data in contesto generale tra spazi vettoriali normati; l'adattamento al caso più semplice reale è immediato.

Definizione 2.1.4. Siano $(X, \| \quad \|_X), (Y, \| \quad \|_Y)$ spazi vettoriali normati, $A \subset X$. Una funzione $f : A \to Y$ di dice *lipschitziana* se
$$\exists L > 0 \quad \text{tale che} \quad \|f(x) - f(y)\|_Y \leq L\|x - y\|_X \quad \forall x, y \in A \quad .$$
La più piccola costante L per cui valga questa proprietà è detta *la costante di Lipschitz* e si denota
$$\mathrm{Lip}(f) = \sup \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|_Y}{\|x - y\|_X} : \ x, y \in A, x \neq y \right\}$$
Proposizione 2.1.1. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora $f \in BV([a,b])$.*

Dimostrazione. La funzione f è lipschitziana, si ha quindi $|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{Lip}(f)\,|x - y|$ per ogni $x, y \in [a,b]$. Comunque sia presa una suddivisione $\sigma \in \mathcal{S}([a,b])$ si ha
$$\sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{x_i \in \sigma} \mathrm{Lip}(f)\,|x_i - x_{i-1}| = \mathrm{Lip}(f)|b - a| \quad ,$$
quindi $V(f) \leq \mathrm{Lip}(f)(b - a) < \infty$. □

Teorema 2.1.3 (Jordan)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, allora sono equivalenti le seguenti:*

A) $f \in BV([a,b])$;

B) Esistono due funzioni $\varphi,\psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone crescenti tali che $f = \varphi - \psi$.

Dimostrazione. A)⇐B) Anzitutto, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ è crescente, e si ha per ogni $\sigma \in \mathcal{S}([a,b])$ che
$$\sum_{x_i \in \sigma} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| = \sum_{x_i \in \sigma} \varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = \varphi(b) - \varphi(a) < +\infty$$
e analogamente per ψ; questo mostra che $\varphi, \psi \in BV([a,b])$. La conclusione segue subito da:
$$V(f) = V(\varphi - \psi) \leq V(\varphi) + V(-\psi) = V(\varphi) + V(\psi) < \infty.$$
A)⇒B). Si considerino le seguenti quantità, dette variazione *positiva* e *negativa* di f:
$$\begin{aligned}
V^+_{[a,b]} &= \sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} \sum_{x_i \in \sigma} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ \\
&= \frac{1}{2} \sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} \sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \frac{1}{2}\big(V_{[a,b]}(f) + f(b) - f(a)\big). \\
V^-_{[a,b]} &= \sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} \sum_{x_i \in \sigma} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \\
&= \frac{1}{2} \sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} \sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})| - (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \frac{1}{2}\big(V_{[a,b]}(f) - (f(b) - f(a))\big);
\end{aligned}$$

esse soddisfano ovviamente alle seguenti identità:

$$V^+_{[a,b]}(f) + V^-_{[a,b]}(f) = V_{[a,b]}(f);$$

$$V^+_{[a,b]}(f) - V^-_{[a,b]}(f) = f(b) - f(a).$$

Definiamo le due funzioni obiettivo φ,ψ: $[a, b] \to \mathbb{R}$ della dimostrazione nel seguente modo: per ogni $x \in [a, b]$

$$\varphi(x) = f(a) + V^+_{[a,x]}(f) \quad , \quad \psi(x) = V^-_{[a,x]}(f) \quad .$$

Le funzioni così definite sono ovviamente crescenti. Inoltre si ha

$$f(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f(a) + V^+_{[a,x]}(f) - V^-_{[a,x]}(f) = \varphi(x) - \psi(x).$$

□

Enunciamo finalmente il seguente importante risultato:

Teorema 2.1.4. *Una funzione $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ lipschitziana è differenziabile quasi ovunque.*

Dimostrazione. La funzione f è lipschitziana, per la Proposizione 2.1.1 si ha che $f \in BV([a, b])$; per il Teorema 2.1.3 di Jordan esistono due funzioni φ,ψ: $[a, b] \to \mathbb{R}$ crescenti tali che $f = \varphi - \psi$. Il Teorema 2.1.1 garantisce la differenziabilità quasi ovunque di funzioni monotone, in particolare delle due funzioni in esame. Ma allora, per linearità del limite anche $\varphi - \psi$ è quasi ovunque differenziabile, ovvero lo è $f = \varphi - \psi$. □

2.2 Teorema di Rademacher

La prima estensione naturale del teorema di differenziabilità quasi certa di funzioni lipschitziane (2.1.4) a cui rivolgere i propri sforzi sta nel considerare il caso in più dimensioni. Sia pertanto lo spazio $\mathbb{R}^n$ per un qualche $n \geq 2$, è noto che in esso è definita la nozione di misura di Lebesgue n-dimensionale $\mathcal{L}^n$. Si darà quindi per scontato cosa si intenda per *quasi ovunque* in $\mathbb{R}^n$. Occorre tuttavia una nuova nozione di differenziazione:

Definizione 2.2.1. Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è *differenziabile* in $x \in \mathbb{R}^n$ se esiste una mappa lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che:

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x) - T(y - x)|}{|x - y|} = 0$$

o equivalentemente

$$f(y) = f(x) + T(y - x) + o(|y - x|) \quad \text{per } y \to x.$$

Se tale T esiste, è unico, e si denoterà $Df(x) = T$.

Teorema 2.2.1 (di Rademacher)**.** *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $f: U \to \mathbb{R}^m$ una funzione lipschitziana. Allora f è $\mathcal{L}^n$-quasi ovunque differenziabile.*

Dimostrazione. Anzitutto, poiché f è lipschitziana (risp. differenziabile) se e solo se ogni componente di f è lipschitizana (risp. differenziabile), si può assumere per semplicità $m = 1$, considerando quindi $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Fissato comunque $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$ ($\Leftrightarrow v \in \partial B(0, 1)$), si definisca per $x \in U$, (qualora il seguente limite esiste) la *derivata direzionale* di direzione v:

$$D_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

- PASSO 1. $D_v f(x)$ esiste quasi ovunque per $\mathcal{L}^n$:

Si considerino le restrizioni di f lungo le rette di direzione v, così facendo la derivata di f ristretta ad una retta orientata è la derivata direzionale di f nella direzione in esame. In dettaglio, per ogni $w \perp v$ risulta che $w + \langle v \rangle = \{w + tv \colon t \in \mathbb{R}\}$ è la generica retta affine parallela a $\langle v \rangle$ con distanza $\|w\|$ dall'origine; scegliamo U_w l'insieme in cui il parametro t permetta che $w + tv \in U$, ovvero tale che sia $\{tv + w \colon t \in U_w\} = \big(w + \langle v \rangle\big) \cap U =: L$ e sia f_w la restrizione di f lungo il segmento L appena definito:

$$U_w = \{t \in \mathbb{R} \colon tv + w \in U\}$$
$$f_w(t) = f(tv + w), \quad t \in U_w.$$

U è un aperto, pertanto U_w è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ (eventualmente vuoto). E si ha quindi

$$f_w'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f_w(t+h) - f_w(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f\big((tv + w) + h\big) - f\big((tv + w) + h\big)}{h} = D_v f(tv + w).$$

Risulta f_w lipschitziana per ogni $w \perp v$, presi infatti $t_1, t_2 \in U_w$:

$$\begin{aligned}|f_w(t_2) - f_w(t_1)| &= |f(t_1 v + w) - f(t_2 v + w)| \leq \mathrm{Lip}(f)\|(t_1 v + w) - (t_2 v + w)\| = \\ &= \mathrm{Lip}(f)\|(t_1 - t_2)v\| \leq \mathrm{Lip}(f)\|v\||t_1 - t_2| = \mathrm{Lip}(f)|t_1 - t_2|\end{aligned}$$

cosicché f_w' esiste in quasi ogni $t \in U_w$ per il Teorema 2.1.4; segue l'esistenza di $D_v f(tv + w)$ per quasi ogni $t \in U_w$ ($\clubsuit$).
La continuità di f in quanto lipschitziana, implica la Borel misurabilità di

$$\begin{aligned}\overline{D}_v f(x) &= \limsup_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{k \to \infty} \sup_{\substack{0 < |t| < \frac{1}{k} \\ t \in \mathbb{Q}}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}\end{aligned}$$

e così è Borel misurabile anche

$$\underline{D}_v f(x) = \liminf_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Ma allora risulta Borel misurabile l'insieme in cui fallisce la condizione di esistenza del limite del rapporto incrementale $\overline{D}_v(f) = \underline{D}_v(f)$:

$$\begin{aligned}S &= \{x \in U \mid D_v f(x) \text{ non esiste}\} \\ &= \{x \in U \mid \underline{D}_v f(x) < \overline{D}_v f(x)\}.\end{aligned}$$

Sia inoltre l'insieme dei punti di U_w in cui non c'è la derivabilità: $S_w = U_w \cap \{t \colon tv + w \in S\}$. Applicando il teorema di Fubini si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(S) &= \int_U \chi_S(x)\, dx \\ &= \int_{v^\perp} \int_{U_w} \chi_S(tv + w)\, dt\, dw \\ &= \int_{v^\perp} \mathcal{L}^1(S_w)\, dw \overset{(\clubsuit)}{=} \int_{v^\perp} 0\, dw = 0.\end{aligned}$$

Allora si ottiene quanto voluto: $D_v(f)$ esiste quasi ovunque in U.

- PASSO 2. Per ogni $v \in \partial B(0,1)$, si ha $D_v f(x) = v \cdot \nabla f(x)$ per quasi ogni $x \in U$:

Per il passo 1, $D_v f(x)$ esiste per quasi ogni $x \in U$ e così esiste per quasi ogni $x \in U$ il gradiente $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) = \big(D_{x_1} f(x), \ldots, D_{x_n} f(x)\big)$ ove $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \partial B(0,1)$ è la base canonica. D'altra parte, f è lipschitziana, per cui $D_w f(x) \leq \mathrm{Lip}(f)$ per ogni $w \in \partial B(0,1)$ e quindi $x \mapsto D_v f(x)$ e $x \mapsto v \cdot \nabla f(x)$ sono funzioni in $L^\infty(U) \subset L^1_{loc}(U)$. L'idea sta nello sfruttare il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni:

Lemma 2.2.1 (di Du Bois-Reymond)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ allora $f = 0$ quasi ovunque.

Pertanto è sufficiente mostrare che:

$$\int_U \big(D_v f(x) - v \cdot \nabla f(x)\big) g(x)\, dx = 0$$

per ogni $g \in C_c^\infty(U)$. Le funzioni f_w e g_w definite come al passo 1, sono assolutamente continue (f_w in quanto lipschitziana e g_w in quanto continua sul supporto compatto per il teorema di Heine-Borel e nulla su $\mathrm{supp}(g)^c$) e $\mathrm{supp}(g) \subset U$, potendo integrare le funzioni assolutamente continue per parti e sfruttando $\partial U \subset \mathrm{supp}(g)^c$ per cui $g(x) = 0$ per $x \in \partial U$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_U D_v f(x) \cdot g(x)\, dx &= \int_{v^\perp} \int_{U_w} D_v f(tv + w) \cdot g(tv + w)\, dt\, dw \\
&= \int_{v^\perp} \int_{U_w} f_w'(t) g_w(t)\, dt\, dw \\
&= \int_{v^\perp} f_w(t) g_w(t) \Big|_{t=\inf\{U_w\}}^{t=\sup\{U_w\}} dw - \int_{v^\perp} \int_{U_w} f_w(t)\, g_w'(t)\, dt\, dw \\
&= -\int_{v^\perp} \int_{U_w} f(tv + w) \cdot D_v g(tv + w)\, dt\, dw \\
&= -\int_U f(x) \cdot D_v g(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Ora, la regolarità di g garantisce l'identità $D_v g(x) = v \cdot \nabla g(x)$, utile per il seguente:

$$\begin{aligned}
\int_U \big(v \cdot \nabla f(x)\big) g(x)\, dx &= \sum_{i=1}^n v_i \int_U D_{x_i} f(x)\, g(x)\, dx \\
&= -\sum_{i=1}^n v_i \int_U f(x) \cdot D_{x_i} g(x)\, dx \\
&= -\int_U f(x) \cdot \big(v \cdot \nabla g(x)\big)\, dx \\
&= -\int_U f(x) \cdot D_v g(x)\, dx
\end{aligned}$$

si conclude sottraendo le due relazioni trovate.

- PASSO 3. f è differenziabile in quasi ogni punto $x \in U$:

Siano $x \in U$ fissato, $v \in \partial B(0,1)$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$, si scriverà per semplicità

$$Q(x, v, t) = \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} - v \cdot \nabla f(x) \quad .$$

Ora

$$|\nabla f(x)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)^2} \leq \sqrt{\big(\mathrm{Lip}(f)\big)^2 + \cdots + \big(\mathrm{Lip}(f)\big)^2} = \mathrm{Lip}(f)\sqrt{n}.$$

Se $v' \in \partial B(0,1)$, allora:

$$\begin{aligned}
|Q(x,v,t) - Q(x,v',t)| &\leq \left|\frac{f(x+tv) - f(x+tv')}{t}\right| + |(v-v')\cdot \nabla f(x)| \\
&\leq \mathrm{Lip}(f)\,|v-v'| + |\nabla f(x)|\,|v-v'| \\
&= \mathrm{Lip}(f)|v-v'|\left(1 + \frac{|\nabla f(x)|}{\mathrm{Lip}(f)}\right) \\
&\leq (\sqrt{n}+1)\,\mathrm{Lip}(f)|v-v'|. \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Ora, $\mathbb{R}^n$ è separabile, pertanto esiste un sottoinsieme numerabile $E \subset \mathbb{R}^n$ e denso. Si consideri $\mathcal{B} = \{B(e,q)\colon e \in E, q \in \mathbb{Q}^+\}$, è una famiglia numerabile di palle aperte. In particolare si consideri la sottofamiglia $\mathcal{B}_{\mathbb{I}} = \{B \in \mathcal{B}\colon B \cap \partial B(0,1) \neq \emptyset\}$. Per ogni $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{I}}$ si scelga $x \in B \cap \partial B(0,1)$, si ottiene così una famiglia numerabile e densa in $\partial B(0,1)$, risulta quindi che $\partial B(0,1)$ è separabile. Sia allora $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \partial B(0,1)$ numerabile e denso. Si fissi ora $\varepsilon > 0$, si ottiene il ricoprimento $\{B(v_k,\varepsilon)\}_{k\in\mathbb{N}}$ di palle aperte di centri $v_k \in \partial B(0,1)$ e raggi $\varepsilon > 0$. Ora, $\partial B(0,1)$ é compatto, quindi si puó scegliere un sottoricoprimento finito $\{B(v_k,\varepsilon)\}_{k=1}^N$, e si scelga un N sufficientemente grande perché comunque sia $v \in \partial B(0,1)$, valga:

$$|v - v_k| \leq \frac{\varepsilon}{2(\sqrt{n}+1)\,\mathrm{Lip}(f)} \quad \text{per qualche } k \in \{1,\ldots,N\}. \qquad (\star\star)$$

Dal momento che

$$\lim_{t\to 0} Q(x,v_k,t) = 0 \qquad (k = 1,\ldots,N),$$

esiste un $\delta > 0$ per cui

$$|Q(x,v_k,t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni } 0 < |t| < \delta,\ k = 1,\ldots,N. \qquad (\star\star\star)$$

Di conseguenza, per ogni $v \in \partial B(0,1)$, esiste $k \in \{1,\ldots,N\}$ tale che (utilizzando $(\star)$ e $(\star\star\star)$):

$$|Q(x,v,t)| \leq |Q(x,v_k,t)| + |Q(x,v,t) - Q(x,v_k,t)| < \frac{\varepsilon}{2} + (\sqrt{n}+1)\,\mathrm{Lip}(f)\frac{\varepsilon}{2(\sqrt{n}+1)\,\mathrm{Lip}(f)} \leq \varepsilon$$

se $0 < |t| < \delta$. Si osservi che lo stesso $\delta > 0$ funziona per tutti i $v \in \partial B(0,1)$.
Si scelga ora un qualsiasi $y \in U, y \neq x$. Si consideri il versore $v = \frac{y-x}{|y-x|}$, cosicché sia $y = x + tv$ ove $t = |x-y|$. Allora

$$\begin{aligned}
f(y) - f(x) - \nabla f(x)\cdot(y-x) &= f(x+tv) - f(x) - tv\cdot\nabla f(x) \\
&= o(t) \\
&= o(|x-y|)\,, \quad \text{per } y \to x.
\end{aligned}$$

Si conclude quindi che f è differenziabile in x, con $Df(x) = \nabla f(x)$.

$\square$

Capitolo 3

Generalizzazioni

3.1 Spazi di Banach

La nozione di lipschitzianità introdotta nella sezione precedente è valida in tutta generalità in spazi vettoriali normati, e in particolare per spazi di Banach. Nella dimostrazione del teorema di Rademacher, si sono usate due nozioni differenti di derivata, una direzionale e una più forte; risulta necessario estendere la nozione anche a questo contesto:

Definizione 3.1.1. Siano X, Y spazi di Banach, $S \subset X$ un sottoinsieme aperto di X e $f : S \to Y$ una funzione.

- Diremo che f ammette *derivata direzionale* in $x \in S$ di direzione $u \in X$ se il limite

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} =: f'(x; u)$$

  esiste finito.
  Se tale limite $f'(x; u)$ esiste finito per ogni direzione $u \in X$ e definisce un operatore lineare e limitato (quindi continuo) $f'(x) : X \to Y$ con $u \mapsto f'(x; u)$, allora si dice che f è *Gâteaux-differenziabile* in $x \in S$.

- Se invece, preso $x \in S$, esiste un operatore lineare e limitato $T_x : X \to Y$ tale che

$$f(x+u) = f(x) + T_x u + o(\|u\|), \quad \text{per} \quad \|u\| \to 0 \quad , u \in X.$$

  o equivalentemente

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\|f(x+u) - f(x) - T_x u\|_Y}{\|u\|_X}$$

  allora si dice che f è *Fréchet-differenziabile* in $x \in S$.

Osservazione 3.1.1. La Fréchet-differenziabilità è più forte e implica la differenziabilità secondo Gâteaux.
Infatti, fissati $x \in S$ e $0 \neq u \in X$, esiste T_x lineare e continuo tale che $f(x+tu) = f(x) + T_x u + o(\|tu\|)$ per $\|tu\| \to 0$. Pertanto

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{t(T_x u) + o(\|tu\|)}{t} = T_x u + \lim_{t \searrow 0} \frac{o(\|tu\|)}{t} \overset{t>0, u\neq 0}{=} T_x u + \|u\| \lim_{\|tu\| \to 0} \frac{o(\|tu\|)}{\|tu\|} = T_x u.$$

In generale le due nozioni non sono equivalenti (segue controesempio). Tuttavia lo sono nel caso di funzioni lipschitziane con dominio uno spazio di Banach finito dimensionale:

Proposizione 3.1.1. *Siano X, Y spazi di Banach, $dim(X) < \infty$ e $f : X \to Y$ una funzione lipschitziana.*
Allora f è Gâteaux differenziabile $\Leftrightarrow$ Fréchet-differenziabile.

Dimostrazione. La necessità è stata dimostrata nell'osservazione precedente.
Sufficienza: Sia f Gâteaux-differenziabile in $x \in X$, allora esiste un operatore $T : X \to Y$ lineare e continuo tale che $Tv = f'(x; v) \quad \forall v \in X$. Dobbiamo dimostrare che valga

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|}{\|h\|} = 0 \qquad (\clubsuit)$$

Se ($\clubsuit$) non fosse vera, allora esisterebbe $\varepsilon > 0$ e una successione $\{h_n\} \subset X$ con $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{\|f(x+h_n)-f(x)-Th_n\|}{\|h_n\|} \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Consideriamo ora la successione normalizzata $\{\frac{h_n}{\|h_n\|}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial B_X(0, 1]$. Per ipotesi X è spazio di Banach con $dim(X) < \infty$, pertanto $\partial B_X(0, 1]$ è compatto per la topologia indotta dalla norma. Per il teorema di Heine-Borel ogni successione su un compatto ammette una sottosuccessione convergente, nel caso in esame sia essa $\{\frac{h_{n_k}}{\|h_{n_k}\|}\}_{k \in \mathbb{N}}$, convergente quindi in $\partial B_X(0, 1]$. Per semplicità rinominiamo: $t_k = \|h_{n_k}\| > 0$, $t_k \to 0$ e $v_k = \frac{h_{n_k}}{\|h_{n_k}\|}$, con $v_k \to v \in \partial B_X(0, 1]$.
Le seguenti stime permettono di concludere:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \frac{\|f(x + h_{n_k}) - f(x) - Th_{n_k}\|}{\|h_{n_k}\|} = \frac{\|f(x + v_k t_k) - f(x) - T(t_k v_k)\|}{t_k} = \\
&= \frac{\|f(x + v_k t_k) + [f(x + t_k v) - f(x + t_k v)] + [t_k T(v) - t_k T(v)] - f(x) - T(t_k v_k)\|}{t_k} \leq \\
&\leq \frac{\|f(x + v_k t_k) - f(x + t_k v)\| + \|t_k T(v) - t_k T(v_k)\| + \|f(x + t_k v) - f(x) - t_k T(v)\|}{t_k} \leq \\
&\leq \frac{\mathrm{Lip}(f)\|v_k t_k - v t_k\| + t_k\|T(v - v_k)\| + \|f(x + t_k v) - f(x) - t_k T(v)\|}{t_k} \leq \\
&\leq \mathrm{Lip}(f)\|v_k - v\| + \|T\|_{\mathcal{L}}\|v - v_k\| + \frac{\|f(x + t_k v) - f(x) - T(t_k v)\|}{t_k} \to 0
\end{aligned}$$

per $t_k \xrightarrow{k \to +\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_k \xrightarrow{k \to +\infty} v$. $\square$

L'equivalenza tra le due nozioni di differenziazione per funzioni lipschitziane tra spazi di Banach fallisce al fallimento della compattezza della palla unitaria nel dominio X, condizione ottenuta considerando ad esempio $dim(X) = \infty$ come conseguenza del Lemma di Riesz.

Esempio 3.1.1. Sia $f : L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$ con $x \mapsto \sin(x)$, è ovviamente lipschitziana con $\mathrm{Lip}(sin) = 1$ e ovunque Gâteaux differenziabile: sia infatti $u \in L^2[0, 1]$, segue

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\sin(x + tu) - \sin(x)}{(\frac{2}{2})t} =$$

usando le formule di prostaferesi

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{2\cos(\frac{2x+tu}{2})\sin(\frac{tu}{2})}{\frac{2t}{2}} = \lim_{\frac{t}{2} \to 0} \cos\left(x + \frac{t}{2}u\right) = \cos(x).$$

Pertanto $f'(x) = u\cos(x)$. Tuttavia non è mai Fréchet-differenziabile: si scelga infatti $x = 0$ e direzione χ_E con $E \subset [0, 1]$ qualsiasi, allora $\sin(\chi_E) \in \{0, sin(1)\}$ e

$$\sin(\chi_E) = \chi_E \sin(1) + (\chi_E - \chi_E) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\chi_E) = \chi_E + \chi_E(sin(1) - 1),$$

ma $\chi_E(\sin(1) - 1) \notin o(\|\chi_E\|)$ per $\|\chi_E\| \to 0$ e quindi non vale Fréchet-differenziabilità:

$$\sin(0 + \chi_E) \neq \sin(0) + \cos(0)\chi_E + o(\|\chi_E\|) = \chi_E + o(\|\chi_E\|) \quad \text{per} \quad \|\chi_E\| \to 0.$$

La differenziabilità di funzioni lipschitziane tra spazi di Banach risulta più problematica, per esempio non è più garantita la differenziabilità in alcun senso:

Esempio 3.1.2. La funzione (isometria) $F : [0,1] \to L^1[0,1]$ definita ponendo $t \mapsto \chi_{[0,t]}$ è lipschitziana ma non ha derivata di Gâteaux in nessun punto. Infatti si ha che per $0 \leq s < t \leq 1$ risulta $\frac{F(t)-F(s)}{s-t} = \frac{\chi_{[s,t]}}{t-s}$ e

$$\lim_{t \searrow s} \frac{F(t)-F(s)}{t-s} = \lim_{t \searrow s} \frac{\chi_{[s,t]}}{t-s} = \begin{cases} 0 & \text{in } [0,1] \setminus \{s\} \\ \infty & \text{in } \{s\}. \end{cases}$$

Risulta pertanto necessario restringersi allo studio di spazi di Banach con proprietà precise che verranno esposte nella sezione seguente.

3.2 Spazi RNP

3.2.1 Introduzione agli RNP e caratterizzazione

Introdurremo ora delle estensioni dei risultati tipici della teoria della misura a misure a valori in spazi di Banach. Questo permette di enunciare la naturale definizione di spazi RNP. Risulta però estremamente conveniente (ed è la norma in letteratura) assumere come definizione una proprietà caratterizzante gli spazi RNP per mezzo di funzioni lipschitziane: questo sarà l'obiettivo di questa sezione. Ci atterremo a questa prassi, pertanto i risultati qui enunciati non verranno dimostrati.

Ricoridiamo anzitutto il Teorema di Radon-Nikodym.

Definizione 3.2.1. Siano (Ω, Σ) uno spazio misurabile, ovvero Ω è un insieme non vuoto e $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-algebra e $\mu, \nu \colon \Sigma \to [0, +\infty]$ due misure. Si dirà che ν è *assolutamente continua* rispetto a μ e si scriverà $\nu \ll \mu$ se per ogni $A \in \Sigma$ con $\mu(A) = 0$ vale $\nu(A) = 0$.

Teorema 3.2.1 (Radon-Nikodym). *Sia (X, Σ) uno spazio misurabile su cui siano definite due misure σ-finite $\mu, \nu \colon \Sigma \to [0, +\infty]$. Se $\nu \ll \mu$ allora esiste una funzione misurabile $f \colon X \to [0, +\infty)$ tale che per ogni $A \in \Sigma$ si abbia $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$. Tale f è chiamata* derivata di Radon-Nikodym *e si indica con $\frac{d\nu}{d\mu} = f$.*

Estendiamo ora la nozione di integrale di Lebesgue a funzioni a valori in spazi di Banach.

Definizione 3.2.2. Sia (Ω, Σ) uno spazio misurabile e sia E uno spazio di Banach. Una *misura* a valori in E su Ω è una mappa $\tau \colon \Sigma \to E$ tale che $\tau(\emptyset) = 0$ e

$$\tau\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i)$$

ogni qualvolta $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma$ sono mutualmente disgiunti.

Osservazione 3.2.1. Affinché questa definizione abbia senso, si richiede che la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i)$ converga sempre.

Definizione 3.2.3. Dato (Ω, Σ) uno spazio misurabile e $\tau \colon \Sigma \to E$ una misura a valori in uno spazio di Banach E, si indica con $|\tau|$ la *variazione* di τ, ovvero la misura σ-additiva non negativa su (Ω, Σ)

$$|\tau|(A) = \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} \|\tau(A_i)\|\}$$

ove il sup è preso sull'insieme di tutte le partizioni finite di A con $A_i \in \Sigma$.

Saranno considerate nel seguito solo misure a variazione finita, ovvero misure τ tali per cui $|\tau|(\Omega) < \infty$.

Definizione 3.2.4. Una misura τ a variazione finita si dice *assolutamente continua* rispetto a una misura scalare σ-finita e positiva μ (si scriverà $\tau \ll \mu$) qualora valga una delle seguenti condizioni equivalenti:

(i) $|\tau| \ll \mu$;

(ii) $\mu(A) = 0 \implies \tau(A) = 0$;

(iii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $\mu(A) < \delta$ implica che $|\tau|(A) < \varepsilon$.

Osservazione 3.2.2. In particolare si ha che $\tau \ll |\tau|$.

Definizione 3.2.5. Sia (Ω, Σ, μ) uno spazio σ-finito di misura scalare completa μ, e sia E uno spazio di Banach. Una funzione semplice $f = \sum_{i=1}^{m} x_i \chi_{A_i}$ con $x_i \in E$ è detta misurabile se $A_i \in \Sigma$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. In generale $f\colon \Omega \to E$ è detta *misurabile* se esiste una sequenza $\{f_n\}_n$ di funzioni semplici misurabili tali che $f_n \to f$ quasi ovunque per $n \to \infty$.

Definizione 3.2.6. Sia $f = \sum_{i=1}^{m} x_i \chi_{A_i}$ una funzione semplice con $\mu(A_i) < \infty$ per ogni i, si ponga

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} x_i \mu(A_i).$$

Una funzione $f\colon \Omega \to E$ è detta *integrabile secondo Bochner* se esiste una sequenza di funzioni semplici misurabili $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente quasi ovunque a f e tale che $\int_\Omega \|f_n - f_m\| d\mu \to 0$ per $m, n \to \infty$. L'integrale $\int_\Omega f \, d\mu$, detto *integrale di Bochner* di f, è definito come:

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Esattamente come nel caso scalare, si dimostra che il limite esiste, che non dipende dalla scelta della sequenza approssimante $\{f_n\}_n$, che $\int \|f\| d\mu$ è finito e che $\|\int f \, d\mu\| \le \int \|f\| \, d\mu$.

Proposizione 3.2.1. *Una funzione $f\colon \Omega \to E$ è Bochner integrabile se e solo se è misurabile e $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$.*

Lo spazio delle classi di equivalenza delle funzioni Bochner integrabili $f\colon \Omega \to E$ con la norma $\|f\|_1 = \int_\Omega \|f\| \, d\mu$ si denoterà $L^1(\Omega, \Sigma, \mu, E)$, o con notazione meno pesante $L^1(\mu, E)$. In modo naturale sono definiti gli spazi $L^p(\mu, E)$ per $1 < p \le \infty$. Le proprietà degli integrali di Bochner sono simili a quelle degli integrali scalari. Per esempio, vale ancora il teorema di convergenza dominata. Inoltre, se $T\colon E \to F$ è operatore lineare e limitato, allora

$$T \int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega T f \, d\mu$$

per ogni funzione Bochner-integrabile $f\colon \Omega \to E$. Se poi $\Omega = [0, 1]$ con la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^1$ e f è continua, allora $\int f \, dx$ coincide con l'integrale di Riemann, e lo stesso vale in situazioni più generali ove l'integrale di Riemann ha senso.

Sia (Ω, Σ, μ) uno spazio con misura ed E uno spazio di Banach. Per ogni $f \in L^1(\mu, E)$, la formula

$$\tau(A) = \int_A f \, d\mu = \int_\Omega f \cdot \chi_A \, d\mu$$

definisce una misura a valori in E su (Ω, Σ), assolutamente continua rispetto a μ. La misura τ ha variazione finita data da $|\tau|(A) = \int_A \|f\| \, d\mu$.

Vale inoltre il Teorema di Differenziazione di Lebesgue anche per l'integrale di Bochner:

Proposizione 3.2.2. *Sia $\mathcal{L}^n$ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$, e $f \in L^1(\mathcal{L}^n, E)$, allora*

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \|f(y) - f(x)\| dy \to 0$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ per $r \to 0$. In particolare, per tali x, vale

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y) dy.$$

Definizione 3.2.7. Siano E uno spazio di Banach e $C \subset E$ un chiuso, limitato e convesso. Si dirà che C ha la *proprietà di Radon-Nikodym* (RNP) se soddisfa alla seguente condizione, simile all'enunciato del teorema di Radon-Nikodym: sia (Ω, Σ) uno spazio misurabile e siano $\tau \colon \Sigma \to E$ una misura a valori in E, e $\mu \colon \Sigma \to [0, 1]$ una misura di probabilità. Si assuma che

$$\frac{\tau(A)}{\mu(A)} \in C \quad \text{per ogni } A \in \Sigma \text{ t.c. } \mu(A) \neq 0.$$

Allora esiste una funzione $f \in L^1(\mu, E)$ tale che

$$\tau(A) = \int_A f(w) d\mu(w), \quad A \in \Sigma.$$

Si dirà che lo spazio E ha la RNP se la palla unitaria $B_E(0, 1]$ ha la RNP.

Verrà ora enunciato il teorema caratterizzante la proprietà sopra enunciata e obiettivo di questa sezione.

Teorema 3.2.2. *Sia E uno spazio di Banach. Le seguenti sono equivalenti:*

(i) E ha la RNP;

(ii) ogni funzione assolutamente continua $f \colon [0, 1] \to E$ è q.o. differenziabile;

(iii) ogni funzione $f \colon [0, 1] \to E$ lipschitziana ha un punto di differenziabilità.

Dimostrazione. Si veda [7, p. 112]. □

Il punto di partenza della trattazione sarà quindi la seguente:

Definizione 3.2.8. Si dirà che uno spazio di Banach E ha la proprietà di Radon-Nikodym (E è RNP) se vale una delle due proprietà equivalenti:

(i) ogni funzione lipschitziana $f \colon \mathbb{R} \to E$ ha almeno un punto di differenziabilità;

(ii) ogni funzione lipschitziana $f \colon \mathbb{R} \to E$ è q.o. differenziabile.

Osservazione 3.2.3. Il cambio di dominio $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$ tra il teorema 3.2.2 e la definizione precedente è comodo e si giustifica come segue: se $f \colon [-n, n] \to E$ è lipschitziana (e quindi assolutamente continua), allora $f \circ \varphi_n \colon [0, 1] \to E$ ove $\varphi_n \colon [0, 1] \to [-n, n]$ è il diffeomorfismo definito da $x \mapsto \varphi(x) = 2n(x - \frac{1}{2})$, è lipschitziana e quindi q.o. differenziabile in $[0, 1]$; l'analiticità di φ_n dimostra la q.o. differenziabilità di f.
Sia ora $f \colon \mathbb{R} \to E$ lipschitiziana, allora è lipschitziana ogni sua restrizione $f_n = f|_{[-n,n]}$, in particolare f_n è q.o. differenziabile su $[-n, n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ora, $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$, $[-n, n] \subset [-(n + 1), n + 1]$

e $f_n \to f$ puntualmente; siano $A_n = \{x \in [-n, n] \colon f_n$ non è differenziabile in $x\}$, risulta quindi $A_n \subset A_{n+1}$ e $\mathcal{L}^1(A_n) = 0$ per ogni n; allora

$$\mathcal{L}^1(\{x \in \mathbb{R} \colon f \text{ non differenziabile in } x\}) = \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}^1(A_n) = 0$$

dimostra la differenziabilità di f. Il viceversa è ovvio.

Esempio 3.2.1. L'esempio 3.1.2 dimostra che lo spazio $L^1[0,1]$ non è uno spazio RNP.

Il seguente risultato garantisce che la definizione di spazio RNP sia interessante, ovvero che esistano spazi interessanti che verificano la proprietà:

Proposizione 3.2.3. *Sia E uno spazio di Banach separabile. Allora il duale E^* ha la RNP se e solo se E^* è separabile.*

Dimostrazione. [7], pg.114. □

3.2.2 Gâteaux differenziabilità di lipschitziane da $\mathbb{R}^n$ a RNP

Lemma 3.2.1. *Siano E e F spazi di Banach, $U \subset E$ sottoinsieme aperto e $f \colon U \to F$ una funzione lipschitziana. Sia $G \leq E$ un sottogruppo additivo denso, e si assuma che per qualche $x_0 \in U$ e per tutti gli $u \in G$ le derivate direzionali in x_0*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}$$

esistano e siano additive in quanto funzioni di u. Allora f è Gâteaux differenziabile in x_0.

Dimostrazione. Anzitutto, risulta opportuno alleggerire la notazione ponendo $h_t(u) = \frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}$. La Gâteuax differenziabilità in $x_0 \in U$ è dimostrata se la derivata direzionale esiste per ogni direzione $u \in E$ e la mappa $E \ni u \mapsto \lim_{t\to 0} h_t(u)$ è operatore lineare e limitato.

Per $t \neq 0$ le funzioni $h_t(u)$ sono lipschitziane, preso infatti $u' \in E$:

$$\begin{aligned} \|h_t(u) - h_t(u')\| &= \left\| \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0 + tu')}{t} \right\| \leq \frac{\mathrm{Lip}(f)}{|t|} \|x_0 + tu - x_0 - tu'\| \\ &\leq \mathrm{Lip}(f)\|u - u'\| \end{aligned}$$

da cui segue che in $u \in E$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per cui

$$\|h_t(u) - h_t(u')\| \leq \mathrm{Lip}(f)\|u - u'\| < \varepsilon$$

per $\|u - u'\| < \delta := \frac{\varepsilon}{\mathrm{Lip}(f)}$. Ovvero le $h_t(u)$ sono equicontinue in $u \in E$ per $t \neq 0$. Per ipotesi $\lim_{t\to 0} h_t(u)$ esiste per gli $u \in G$. Sia $\overline{u} \in E \setminus G$, poiché $\overline{G} = E$ esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ tale che $u_n \to \overline{u}$ per $n \to \infty$. Si ha quindi che

$$\lim_{t\to 0} h_t(\overline{u}) = \lim_{t\to 0} h_t\big(\lim_{n\to\infty} u_n\big) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to 0} h_t(u_n)$$

ove lo scambio dei limiti è possibile perché per ipotesi $h_t(u_n)$ sono continue in $t = 0$ e vale la convergenza uniforme delle $h_t(u_n)$ a $h_t(\overline{u})$.

La successione $\{\lim_{t\to 0} h_t(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ è di Cauchy:

$$\|\lim_{t\to 0} h_t(u_n) - \lim_{t\to 0} h_t(u_m)\| \leq \|\lim_{t\to 0} \mathrm{Lip}(f)\|u_n - u_m\|\| \leq \mathrm{Lip}(f)\|u_n - u_m\| \to 0$$

per $n, m \to \infty$, sfruttando che $\{u_n\}_n$ è di Cauchy. La completezza di F conclude l'esistenza della derivata direzionale in $\overline{u}$.

L'additività del limite su E segue dall'additività su G e da stime dirette simili a quelle fatte fino ad ora, e con conti diretti si mostra che $\lim_{t\to 0} h_t(\alpha u) = \alpha \lim_{t\to 0} h_t(u)$. Il limite è pertanto un operatore lineare, ed è limitato da $\mathrm{Lip}(f)$. □

Teorema 3.2.3. *Sia F uno spazio di Banach RNP e $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Allora ogni funzione $f\colon U \to F$ lipschitziana è Gâteaux-differenziabile q.o. in U.*

Dimostrazione. Si dimostrerà il teorema per f definita su tutto $\mathbb{R}^n$, in quanto evidentemente sufficiente. Sia G un sottogruppo additivo numerabile e denso di $\mathbb{R}^n$, ad esempio $G = \mathbb{Q}^n$ in quanto anello (quindi gruppo abeliano per $+$) e denso. Le derivate direzionali di f nelle direzioni di G sono funzioni lipschitziane dai reali a F, dotato della RNP: viene garantita la loro q.o. esistenza per definizione. Mostrando che queste derivate direzionali sono q.o. funzioni additive su G, si conclude utilizzando il Lemma 3.2.1. A tal scopo è comodo usare le proprietà della convoluzione.

Sia $\varphi(x)$ una funzione C^1 su $\mathbb{R}^n$ a supporto compatto tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. Per esempio si può considerare il mollificatore standard:

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & \text{per } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{per } \|x\| \geq 1 \end{cases} \quad , \quad \text{con } C = \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} dx \right)^{-1}.$$

La funzione $g(x) = f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy$ è una funzione C^1; quindi $D_g(x)u = \big(f * D_\varphi(x)\big)u$ è funzione lineare di $u \in \mathbb{R}^n$ per ogni x. D'altra parte, per ogni x e per tutti gli $u \in G$, segue dalle definizioni che:

$$\begin{aligned} D_g(x)u &= \lim_{t\to 0} \frac{g(x+tu) - g(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \left(\frac{f(x+tu-y)}{t} - \frac{f(x-y)}{t} \right) dy. \end{aligned}$$

ove l'integrando è chiaramente maggiorato da $\max \varphi \, \mathrm{Lip}(f)$, ove il massimo esiste per il teorema di Weierstrass e la compattezza del supporto. Per mezzo del teorema di Convergenza Dominata si deduce l'uguaglianza

$$D_g(x)u = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \lim_{t\to 0} \left(\frac{f(x-y+tu)}{t} - \frac{f(x-y)}{t} \right) dy.$$

In altre parole, $D_g(x)u = \varphi * h_u(x)$ ove h_u è la funzione limitata e misurabile $\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu)-f(x)}{t}$. Di conseguenza, $\varphi * (h_{u+v} - h_u - h_v) = 0$ per ogni $u, v \in G$. La stessa equazione risulta vera sostituendo $\varphi(x)$ con $\varphi_k(x) = k^n \varphi(kx)$.

Sia $\tilde{h}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata (in particolare $\tilde{h} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$), allora

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k * \tilde{h}(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y)\tilde{h}(x-y)dy = \lim_{k\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} k^n \varphi(ky)\tilde{h}(x-y)dy$$

il cambio variabile $ky = z$ porge

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k * \tilde{h}(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} k^n \varphi(z)\tilde{h}\left(x - \frac{z}{k}\right) \frac{dz}{k^n};$$

la limitatezza di $\tilde{h}$ e l'esistenza del massimo di φ permettono di usare il teorema di convergenza dominata per portare il limite sotto il segno di integrale, ottenendo:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k * \tilde{h}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \lim_{k\to\infty} \tilde{h}\left(x - \frac{z}{k}\right) dz.$$

Si osservi ora che per i punti $x \in \mathbb{R}^n$ di Lebesgue, ovvero i punti appartenenti all'*insieme di Lebesgue*, definito come

$$\mathcal{L}_f = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \right\},$$

vale inoltre

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k * \tilde{h}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \lim_{k \to \infty} \tilde{h}\left(x - \frac{z}{k} \right) dz = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \tilde{h}(x) dz = \tilde{h}(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) dz = \tilde{h}(x);$$

il Teorema di Differenziazione di Lebesgue afferma che $\mathcal{L}^n((\mathcal{L}_f)^c) = 0$, e che quindi $\lim_{k \to \infty} \varphi_k * \tilde{h}(x) = \tilde{h}(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$. Ora, dal momento che l'immagine di f in F è separabile, si può assumere F separabile; si consideri quindi un funzionale $T \colon \mathbb{R} \to F$, vale ancora che $\lim_{k \to \infty} \varphi_k * T(x) = T(x)$ q.o. in $\mathbb{R}^n$. Applicando i medesimi passaggi sostituendo $T(x)$ con $\tilde{h}(x)$ si ottiene l'uguaglianza:

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k * T(x) = T(x)$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Considerando $T = h_{u+v} - h_u - h_v$ si ha che $0 = \lim_{k \to \infty} \varphi_k * T(x) = T(x) = (h_{u+v} - h_u - h_v)(x)$ per ogni $u, v \in G$ e per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$, ovvero per tali u, v, x vale $h_{u+v}(x) = h_u(x) + h_v(x)$. Essendo G numerabile l'insieme degli x accettati può essere scelto indipendentemente da u e v. □

3.2.3 Gâteaux differenziabilità di lipschitziane da Banach separabile a RNP

L'obiettivo di questa sezione è presentare un risultato di quasi ovunque Gâteaux differenziabilità per funzioni lipschitziane tra spazi di Banach con RNP nel codominio.

Il primo problema nuovo da affrontare è il seguente: in spazi di Banach infinito-dimensionali non ci sono misure di Borel σ-finite invarianti per traslazione (ad esclusione della misura banale che misura tutto a 0). Risulta quindi necessario introdurre un nuovo significato per la nozione di *quasi ovunque*. In letteratura esistono varie nozioni: insiemi *Haar*-nulli, *Gauss*-nulli e *Aronszajn*-nulli, ad esempio; la scelta è ricaduta su quest'ultima. Prima di procedere con la definizione, vediamo come si può introdurre la misura di Lebesgue in spazi di Banach finito-dimensionali.

Sia E uno spazio di Banach n-dimensionale e sia $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ una sua base. Allora l'applicazione $\iota \colon \mathbb{R}^n \to E$ definita ponendo $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto (\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$ è ovviamente una biiezione lineare: è quindi bicontinua. Sia τ_E la topologia indotta dalla norma di E o da qualsiasi norma, essendo tutte equivalenti se la dimensione è finita, come in questo caso. Allora $\iota \colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to (E, \mathcal{B}(\tau_E))$ è una funzione misurabile (in quanto continua) una volta considerate le σ-algebre generate dagli aperti. La bicontinuità garantisce il trasporto degli aperti, dei chiusi e dei boreliani da $\mathbb{R}^n$ a E e viceversa. Definiamo quindi λ_n la misura di Lebesgue sullo spazio di Banach n-dimensionale come *Push-forward* della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$.

Definizione 3.2.9. Sia E uno spazio di Banach n-dimensionale, diremo misura di Lebesgue λ_n su E, l'applicazione

$$\lambda_n \colon \mathcal{B}(\tau_E) \to [0, \infty]$$

definita ponendo $\lambda_k(B) := \mathcal{L}^n\big(\iota^{-1}(B)\big)$ per ogni boreliano B di E.

Definizione 3.2.10. Sia E uno spazio di Banach.

- Per ogni $0 \neq y \in E$ sia $\mathcal{A}(y)$ la famiglia di tutti i boreliani A in E la cui intersezione con ogni retta parallela a y è un insieme 1-dimensionale di misura di Lebesgue nulla;
- Se $\{x_n\}$ è una successione finita o numerabile di punti non nulli di E, si denoterà $\mathcal{A}(\{x_n\})$ la collezione di tutti i boreliani A che possono essere decomposti come $A = \bigcup A_n$, ove $A_n \in \mathcal{A}(x_n)$ per ogni n.

- Sia A un boreliano in uno spazio di Banach separabile E. L'insieme A è detto *Aronszajn-nullo* se appartiene a $\bigcap \mathcal{A}(\{x_n\})$, dove l'intersezione è presa sull'insieme di tutte le successioni $\{x_n\}$ tali che $\langle\{x_n\}\rangle$ è denso in E; ovvero, per ogni successione $\{x_n\}$ di vettori non nulli con span lineare denso, A può essere decomposto in unione di boreliani $\{A_n\}$ tali che $A_n \in \mathcal{A}(x_n)$ per ogni n.

Lemma 3.2.2. *Sia F un sottospazio k-dimesionale di E e sia λ_k la misura di Lebesgue su F. Allora la funzione $f_B(x) = \lambda_k(F \cap (B + x))$ è una funzione boreliana per ogni sottoinsieme boreliano $B \subset E$.*

Dimostrazione. É chiaro che, comunque sia scelto B boreliano chiuso e limitato e $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme $\{x\colon \lambda_k(F \cap (B + x)) \geq \alpha\}$ è chiuso. Sia infatti una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{x\colon \lambda_k(F \cap (B + x)) \geq \alpha\}$ convergente ad un qualche $\overline{x}$; ovviamente $f_B(x_n) \geq \alpha$ per ogni n, in particolare vale

$$\lim_{n\to\infty} f_B(x_n) \geq \alpha.$$

Ma $f_B(x_n) \to f_B(\overline{x})$ perché $B + x_n \to B + \overline{x}$ per $n \to \infty$.

Sia ora $\{B_j\}_j$ una sequenza di boreliani a misura finita crescente (risp. decrescente) a B, allora per continuità dall'alto (risp. dal basso) vale $f_{B_j}(x) \to f_B(x)$. Poiché ogni boreliano è ottenuto da insiemi chiusi e limitati con numerabili intersezioni e unioni di questo tipo, il risultato segue per ogni boreliano. □

Proposizione 3.2.4. *Sia F un sottospazio n-dimensionale di E, e sia $\{y_k\}_{k=1}^n$ una base di F. Sia λ_n la misura di Lebesgue su F, e sia A un boreliano di E tale che $\lambda_n(F \cap (A + x)) = 0$ per ogni $x \in E$. Allora $A \in \mathcal{A}(\{y_k\})$.*

Dimostrazione. Si dimostra per induzione sulla dimensione n di F.

Per $n = 1$ è la definizione di $\mathcal{A}(y_1)$.

Sia ora $G = \langle y_1, \dots, y_{n-1}\rangle$ e si assuma che la misura λ_n sia normalizzata come il prodotto della misura di Lebesgue λ_{n-1} in G e la misura λ_1 sulla linea determinata da y_n; per semplicità si denoterà con λ_1 il traslato della misura su ogni linea parallela a y_n.

L'insieme $A_n = \{x \in A\colon \lambda_1\big(A \cap (x + \mathbb{R}y_n)\big) = 0\}$ è un boreliano per il Lemma 3.2.2; quindi è boreliano anche $A' = A \setminus A_n$, e ha la proprietà che per ogni linea L parallela a y_n si ha che o $L \cap A' = \emptyset$ o $L \cap A' = L \cap A$ e $\lambda_1(L \cap A') > 0$. Si fissi $x \in E$, il risultato seguirà dall'ipotesi induttiva una volta mostrato che $\lambda_{n-1}\big(G \cap (A' + x)\big) = 0$. L'insieme $B = G \cap (A' + x)$ è contenuto nella proiezione C di $F \cap (A' + x)$ su G nella direzione di y_n. Per l'osservazione di cui sopra, per ogni $u \in B$ la linea L parallela a y_n che passa attraverso u soddisfa $\lambda_1\big(L \cap (A' + x)\big) > 0$. Quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_n\big((A + x) \cap F\big) \geq \lambda_n\big((A' + x) \cap F\big) \\ &= \int_C \lambda_1\Big((u + \mathbb{R}y_n) \cap (A' + x)\Big) d\lambda_{n-1} \\ &\geq \int_B \lambda_1\Big((u + \mathbb{R}y_n) \cap (A' + x)\Big) d\lambda_{n-1} \end{aligned}$$

per il teorema di Fubini. Segue allora che $\lambda_{n-1}(B) = 0$, perché l'integrando nell'ultimo integrale è strettamente positivo. □

Teorema 3.2.4. *Sia E uno spazio di Banach separabile, $U \subset E$ aperto, F uno spazio con RNP e $f\colon U \to F$ lipschitziana. Allora l'insieme dei punti in U in cui f non è Gâteaux differenziabile è Aronszajn-nullo.*

Dimostrazione. Anzitutto, l'insieme dei punti in cui f è Gâteaux differenziabile è un boreliano:

la derivata di f in x nella direzione u esiste se e solo se le derivate destre e sinistre esistono e coincidono, ovvero con la definizione $\varepsilon - \delta$ scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $\delta = \frac{1}{m}$, se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $m \in \mathbb{N}$

tale che

$$\left|\frac{f(x+tu)-f(x)}{t}-\frac{f(x+su)-f(x)}{s}\right|<\frac{1}{n}$$

per $s,t\in\mathbb{Q}$ con $|s|,|t|<\frac{1}{m}$. La precedente proprietà sarà denominata $\mathcal{P}(u,x,m,n)$.

Il Lemma 3.2.1 permette di poter considerare un gruppo additivo numerabile denso G di direzioni u perché sià garantita la Gâteaux differenziabilità, ma allora l'insieme dei punti di Gâteaux differenziabilità di f è l'insieme

$$\mathcal{G}=\bigcup_{u\in G}\bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ m\in\mathbb{N}}}\{x\in U\mid \mathcal{P}(u,x,m,n)\text{ è vera}\};$$

essendo $\{x\in U\mid \mathcal{P}(u,x,m,n)\text{ è vera}\}$ un boreliano dalla continuità di f, segue che $\mathcal{G}$ è unione e intersezione numerabile di boreliani, ovvero è un boreliano. Queste argomentazioni, o ad esse simili, garantiranno la borelianità di tutti gli insiemi che compariranno in questa dimostrazione.

Come al solito, consideriamo il caso più facilmente gestibile e che non lede la generalità del teorema, in cui f sia definita su tutto lo spazio E.

Sia ora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset E$ una qualsiasi sequenza di vettori linearmente indipendenti a span lineare denso in E, ovvero tali che $\overline{\langle\{x_n\}_n\rangle}=E$ e si ponga $V_n=\langle\{x_k\mid k\leq n\}\rangle$ lo spazio vettoriale generato dai primi n vettori della sequenza considerata. Sia inoltre D_n l'insieme di tutti gli $x\in E$ tali che la derivata direzionale di f in x esiste in tutte le direzioni $u\in V_n$ e sia lineare in $u\in V_n$. Per ogni $y\in E$, l'insieme $E\setminus D_n$ è l'insieme degli $x\in E$ per cui falliscono le derivate direzionali di f nelle direzioni di V_n; così l'insieme $(E\setminus D_n)+y$ è l'insieme degli $x\in E$ in cui la funzione $f_y:=f(x-y)$ non ha derivata direzionale nelle direzioni di V_n e infine $\big((E\setminus D_n)+y\big)\cap V_n$ è l'insieme degli $x\in E$ in cui $f_y|_{V_n}(x)$ non ha derivata direzionale nelle direzioni di V_n.

Ora, a meno di isomorfismi tra V_n e $\mathbb{R}^n$, la funzione $f_y|_{V_n}$ è lipschitziana tra un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale finito-dimensionale e lo spazio con RNP di Banach F. Il Teorema 3.2.3 permette di concludre che l'insieme $\big((E\setminus D_n)+y\big)\cap V_n$ ha misura nulla in V_n; la Proposizione 3.2.4 implica che $E\setminus D_n$ appartiene a $\mathcal{A}(\{x_k\colon k\leq n\})$. Segue allora che

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(E\setminus D_n)=E\setminus\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}D_n\right)\in\mathcal{A}(\{x_k\}).$$

Ma $\langle\{x_n\}\rangle$ è sottogruppo additivo denso di E e per il Lemma 3.2.1 si conclude la Gâteaux differenziabilità di f su $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}D_n$. □

Capitolo 4

Principi variazionali

L'obiettivo di questo capitolo è presentare un principio variazionale introdotto da Lindenstrauss J., Preiss D. e Tišer J. in [5] che ha il pregio di semplificare le dimostrazioni esistenti di risultati di Fréchet differenziabilità per funzioni lipschitziane: un esempio verrà fornito nel Capitolo 5.
La mera enunciazione di questo principio però lo priva, a nostro avviso, di chiarezza e fruibilità; per questa ragione buona parte di questo capitolo è dedicata all'enunciazione e dimostrazione di risultati simili al principio d'interesse e in un certo senso, propedeutici ad esso. Per aiutare la comprensione dei dettagli tecnici di tali risultati, essi verranno interpretati come un gioco infinito tra due giocatori ideali. Ulteriori motivazioni e dettagli di questo punto approccio sono forniti da Lindenstrauss J., Preiss D. e Tišer J. in [6, Capitolo 7].

4.1 Principi variazionali come giochi

Supponiamo di avere uno spazio metrico (M, d), una funzione $f\colon M \to \mathbb{R}$ e un numero $\varepsilon_0 > 0$.
Il primo giocatore sceglie un numero positivo η_0; il secondo giocatore risponde scegliendo $F_0\colon M \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in M$ e dei numeri positivi r_0, ε_1. Allora il primo giocatore sceglie un numero positivo η_1, al quale segue la risposta del giocatore 2: una funzione $F_1\colon M \to \mathbb{R}$, un punto $x_1 \in M$ e dei numeri positivi r_1, ε_2, e così via. Le costanti r_k, η_k e ε_k alla mossa k limitano il secondo giocatore nella scelta della funzione F_k. Si pensi alle funzioni F_k come perturbazioni della funzione f, in particolare all'inizio di ogni turno resta definita la funzione che rappresenta la perturbazione parziale di f, sia essa $h_k := f + \sum_{i=0}^{k-1} F_i$. L'obiettivo del primo giocatore è ottenere la convergenza della successione $\{x_k\}_k$ a un punto di minimo della funzione perturbata $h_\infty := f + \sum_{k=0}^{\infty} F_k$. Definiamo con precisione le regole e limitazioni a cui devono sottostare i due giocatori.

Gioco perturbativo (perturbation game)

I due giocatori verranno contrassegnati dai simboli (α) e (β).

Configurazione iniziale: ai giocatori sono assegnati:

- uno spazio metrico (M, d);
- una funzione $f\colon M \to \mathbb{R}$ inferiormente limitata;
- un numero $0 < \varepsilon_0 < \infty$.

Regole del gioco: per le mosse $k = 0, 1, \ldots$:

Mossa k di (α): Il giocatore (α) sceglie un $\eta_k > 0$ e denota

$$h_k(x) = f(x) + \sum_{j=0}^{k-1} F_j(x).$$

Mossa k di (β): il giocatore (β) sceglie

- numeri $r_k > 0$ e $0 < \varepsilon_{k+1} < \infty$,
- un punto $x_k \in M$ e una funzione $F_k \colon M \to [0, \infty]$ tale che

$$h_k(x_k) + F_k(x_k) < \eta_k + \inf_{x\in M} h_k(x) \quad \text{e} \quad \inf_{d(x_k,y)>r_k} F_k(y) > \varepsilon_k.$$

Si ponga infine $h_\infty(x) := f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x)$.

Non verranno introdotte nozioni di vincita o perdita in questo gioco, in quanto tutti i risultati enunciati forniranno una strategia per (α) che permette di raggiungere l'obiettivo assegnato indipendentemente dal gioco di (β), che quindi sarebbe costretto a perdere sempre.

Il primo risultato che presentiamo non garantisce l'esistenza del minimo per la funzione perturbata h_∞, tantomeno garantisce che la sequenza $(x_k)_k$ sia minimizzante per h_∞.

Teorema 4.1.1. *Nel gioco perturbativo, il giocatore (α) ha una strategia con prima mossa $\eta_0 = \varepsilon_0$ che, indipendentemente dal gioco di (β), garantisce che la sequenza $(x_j)_j$ e le funzioni h_k abbiano le seguenti proprietà. Per ogni $0 \le j \le k < \infty$,*

(VP1) $h_k(x_k) < \varepsilon_j + \inf_{x\in M} h_j(x)$;

(VP2) $h_k(x_k) < \varepsilon_k + h_j(x_j)$;

(VP3) $F_j(x_k) < \varepsilon_j$;

(VP4) $d(x_j, x_k) \le r_j$;

(VP5) $h_k(x) \ge h_k(x_k) + \frac{1}{2}\varepsilon_j$ *se* $k > j \ge 1$ *e* $d(x, x_k) > 2r_j$;

(VP6) la sequenza $h_j(x_j)$ converge e, se h_∞ è definita da

$$h_\infty(x) = f(x) + \sum_{j=0}^{\infty} F_j(x)$$

il suo limite soddisfa a $\lim_{j\to\infty} h_j(x_j) \le \inf_{x\in M} h_\infty(x)$.

Dimostrazione. La strategia richiesta per (α) può essere descritta nel modo seguente:
Se $k = 0$, si ponga:

- $\eta_0 = \varepsilon_0$;
- $\sigma_0 = h_0(x_0) + F_0(x_0) - \inf_{x\in M} h_0(x)$;
- si osservi che $\sigma_0 < \eta_0$.

Se $k \ge 1$ invece

- sia $\eta_k = \frac{1}{2^{k+1}} \min\{\eta_0 - \sigma_0, \eta_1 - \sigma_1, \dots, n_{k-1} - \sigma_{k-1}, \varepsilon_k\}$;
- si denoti $\sigma_k = h_k(x_k) + F_k(x_k) - \inf_{x\in M} h_k(x)$;
- si osservi che $\sigma_k < \eta_k$.

(VP1)-(VP2) Si supponga ora che (x_k) sia una sequenza ottenuta mentre (α) stava utilizzando questa strategia. Per le regole del gioco, $h_k \ge h_{k-1} \ge \dots \ge h_0 = f$ e che $h_k(x_k)$ e $F_k(x_k)$ sono finiti. Dal momento che $h_k(x) = h_{k-1}(x) + F_{k-1}(x)$, si ha

$$\inf_{x\in M} h_k(x) \le h_{k-1} + F_{k-1}(x_{k-1}) = \sigma_{k-1} + \inf_{x\in M} h_{k-1}(x).$$

Quindi per $k \geq j$,

$$h_k(x_k) + F_k(x_k) = \sigma_k + \inf_{x\in M} h_k(x) \leq \sum_{i=j}^{k} \sigma_i + \inf_{x\in M} h_j(x) \tag{4.1}$$

$$< \eta_j + \inf_{x\in M} h_j(x). \tag{4.2}$$

Dal momento che $\eta_j \leq \varepsilon_j$ e $F_k \geq 0$, questa disuguaglianza porge (VP1) e il suo corollario (VP2).

(VP3) Inoltre, per (4.1) con $x = x_k$ ed espandendo la parte sinistra, si trova

$$h_j(x_k) + F_j(x_k) + F_{j+1}(x_k) + \cdots + F_k(x_k) < \eta_j + h_j(x_k).$$

Poiché $F_j \geq 0$ e la disuguaglianza stretta implica che $h_j(x_k)$ è finito, si inferisce che $F_j(x_k) < \eta_j$, da cui (VP3).

(VP4) Ricordando che le funzioni F_j soddisfano a $\inf_{d(x_j,y)>r_j} F_j(y) > \varepsilon_j$, per le regole governanti le mosse di (β), segue da (VP3) che

$$F_j(x_k) \leq \varepsilon_j < \inf_{d(x_j y)>r_j} F_j(y),$$

mostrando che $d(x_j, x_k) > r_j$ non può avvenire

(VP5) Sia $k > j \geq 1$ e $d(x, x_k) > 2r_j$. Allora (VP4) implica che $d(x, x_j) > r_j$ e, conseguentemente, $F_j(x) \geq \varepsilon_j$. Usando inoltre la disuguaglianza $h_k(x_k) \leq h_j(x_j) + \eta_j$, che discende da 4.1 con $x = x_j$, si stima

$$\begin{aligned} h_k(x) &\geq h_{j+1}(x) \\ &= h_j(x) + F_j(x) \geq h_j(x_j) - \eta_j + \varepsilon_j \\ &\geq h_k(x_k) - 2\eta_j + \varepsilon_j \geq h_k(x_k) + \frac{1}{2}\varepsilon_j. \end{aligned}$$

Infine, per vedere che la sequenza $(h_k(x_k))$ converge, si ricordi che è inferiormente limitata e che $h_k(x_k) \leq h_j(x_j) + \eta_j$ per $k > j$. Dal momento che $\eta_j \to 0$, segue che la sequenza $(h_k(x_k))$ è di cauchy, quindi convergente. La disuguaglianza richiesta in (VP6) segue notando che 4.1 con $k = j$ e la disuguaglianza $h_j \leq h_\infty$ implicano

$$h_j(x_j) \leq \eta_j + \inf_{x\in M} h_j(x) \leq \eta_j + \inf_{x\in M} h_\infty(x)$$

e prendendo il limite per $j \to \infty$. □

Si osservi che non è garantito che $(x_k)_k$ sia una successione di Cauchy. Se, per esempio, (β) sceglie $r_k = \infty$ per ogni k, la metrica su M è irrilevante.

Introduciamo ora una nozione fondamentale di quest'ambito:

Definizione 4.1.1. Sia X uno spazio metrico. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si dice *semicontinua inferiormente* in un punto $x_0 \in X$ se per ogni sequenza $(x_n)_n$ convergente a x_0 vale la disuguaglianza

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Il seguente risultato fornisce condizioni deboli ma sufficienti che garantiscono che la funzione h_∞ abbia minimo.

Proposizione 4.1.1. *Se la sequenza $(x_j)_j$ del Teorema 4.1.1 converge ad un qualche x_∞ e valgono le seguenti ipotesi di semicontinuità inferiore:*

$$f(x_\infty) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k) \quad e \quad F_j(x_\infty) \leq \liminf_{k\to\infty} F_j(x_k) \quad per\ j = 0, 1, \ldots$$

allora la funzione h_∞ raggiunge il minimo in x_∞ e le proprietà (VP1)-(VP5) valgono anche qualora $0 \leq j < k = \infty$. Inoltre,

$$\begin{aligned} h_\infty(x_\infty) &\leq \lim_{k\to\infty} h_k(x_k) \\ &< \inf\{h_\infty | d(x, x_0) > 2r_j\} \ per\ ogni\ j \geq 1. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Chiaramente per $j \leq k$, vale $h_j \leq h_k$. Questo permette di dedurre le seguenti disuguaglianze per $j \geq 0$:

$$h_j(x_\infty) \leq \liminf_{k\to\infty} h_j(x_k) \leq \liminf_{k\to\infty} h_k(x_k) = \lim_{k\to\infty} h_k(x_k);$$

queste, combinate con (VP6) permettono di ottenere che h_∞ abbia minimo in x_∞. Segue inoltre che le disuguaglianze (VP1) e (VP2) sono vere per $0 \leq j < k = \infty$. Per questi j e k, (VP3) segue dalla semicontinuità inferiore di F_j e (VP4) dalla continuità della metrica. Infine, se $j \geq 1$ e $d(x, x_\infty) > 2r_j$, allora $d(x, x_k) > 2r_j$ per k abbastanza grande, così $h_k(x) \geq h_k(x_k) + \frac{1}{2}\varepsilon_j$ per (VP5), e prendendo il limite per $k \to \infty$, si dimostra sia (VP5) per $k = \infty$, sia la seconda disuguaglianza cercata. □

Corollario 4.1.1. *Nelle ipotesi del gioco perturbativo, con lo spazio (M, d) completo e la funzione f inferiormente semicontinua, (β) segua le seguenti regole:*

(a) le funzioni F_j sono semicontinue inferiormente;

(b) $\liminf_{j\to\infty} r_j = 0$.

Allora la strategia di (α) del Teorema 4.1.1 garantisce che la sequenza $(x_j)_j$ converga a un punto $x_\infty \in M$ in cui la funzione h_∞ raggiunge il proprio minimo e le proprietà (VP1)-(VP5) valgono per $0 \leq j < k \leq \infty$. Inoltre,

$$h_\infty(x_\infty) \leq \lim_{k\to\infty} h_k(x_k) < \inf_{d(x,x_\infty)>r} h_\infty(x) \ per\ ogni\ r > 0.$$

Dimostrazione. Per (VP4) e (b), la sequenza (x_j) è di Cauchy. La completezza di M porge la convergenza in un qualche punto x_∞. La semicontinuità inferiore di f e delle F_j implicano le ipotesi della Proposizione 4.1.1, da cui segue l'asserto. □

Il Corollario 4.1.1 costituisce una versione astratta del principio variazionale d'interesse, che può essere specializzato prescrivendo in anticipo le funzioni di perturbazione e le costanti e imponendo che (β) scelga sempre le funzioni F_k e i punti x_k in modo tale che valga $F_k(x_k) = 0$. Questa scelta infatti permette a (β) di garantire la decrescenza della sequenza $h_k(x_k)$.

Corollario 4.1.2. *Si supponga che $f\colon M \to \mathbb{R}$ sia inferiormente limitata e inferiormente semicontinua su uno spazio metrico completo (M, d). Si supponga inoltre che $F_j\colon M \times M \to [0, \infty]$, $j \geq 0$, siano funzioni inferiormente semicontinue nella seconda variabile con $F_j(x, x) = 0$ per ogni $x \in M$ e che $0 < r_j \leq \infty$ siano tali che $r_j \to 0$ e*

$$\inf_{d(x,y)>r_j} F_j(x, y) > 0.$$

Se $x_0 \in M$ e $(\varepsilon_j)_{j=0}^\infty$ è una sequenza di positivi tali che

$$f(x_0) < \varepsilon_0 + \inf_{x\in M} f(x) \quad e \quad \inf_{d(x_0,y)>r_0} F_0(x_0, y) > \varepsilon_0,$$

allora si trova una sequenza $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *in* M *convergente a qualche* $x_\infty \in M$ *tale che la funzione*

$$h(x) := f(x) + \sum_{j=0}^{\infty} F_j(x_j, x)$$

abbia x_∞ *come punto di minimo in* M. *Inoltre, per ogni* $j \geq 0$, *valgono le seguenti disuguaglianze:*

$$d(x_j, x_\infty) \leq r_j, \qquad F_j(x_j, x_\infty) \leq \varepsilon_j,$$

$$h(x_\infty) \leq \varepsilon_j + \inf_{x \in S}\Big(f(x) + \sum_{i=0}^{j-1} F_i(x_i, x)\Big).$$

E, posto

$$h_k\colon = f(x) + \sum_{0 \leq j < k} F_j(z),$$

valgono $h_k(x_k) \leq h_j(x_j)$ *e (VP1)-(VP5) ogniqualvolta* $0 \leq j < k+1 \leq \infty$.

Dimostrazione. Notiamo anzitutto che rendere più piccoli gli ε_j per $j \geq 1$, rende l'asserto più forte. Assumiamo quindi che

$$\inf_{d(x,y) > r_j} F_j(x, y) > \varepsilon_j, \quad j \geq 1.$$

Con questa ipotesi, il Corollario 4.1.2 diventa un caso speciale del Corollario 4.1.1 non appena imponiamo la seguente ulteriore regola sulla k-esima mossa di (β):

- Per $k = 0$, (β) deve scegliere il punto di partenza x_0 assegnato.
- Per $k \geq 1$, il punto scelto x_k deve soddisfare la seguente condizione:

$$h_k(x_k) \leq \min\{h_k(x_{k-1}), \frac{1}{2}\eta_k + \inf_{x \in M} h_k(x)\}.$$

Deve inoltre porre $F_k(x) := F_k(x_k, x)$ e scegliere i parametri assegnati r_k e ε_{k+1}.

Si osservi che questa scelta soddisfa le regole generali per (β). Per il Corollario 4.1.1, la funzione h raggiunge il minimo in M in x_∞. I successivi tre asserti discendono da (VP4),(VP3) e (VP2) rispettivamente. La disuguaglianza $h_k(x_k) \leq h_{k-1}(x_{k-1})$ segue dal fatto che $h_k(x_{k-1}) = h_{k-1}(x_{k-1})$. □

4.2 Principio variazionale bimetrico

In questa sezione viene proposta una generalizzazione del Corollario 4.1.2 che funzioni anche senza l'ipotesi di completezza dello spazio metrico. Introduciamo anzitutto generalizzazioni di completezza, semicontinuità inferiore e continuità in senso bimetrico:

Definizione 4.2.1. • Sia (M, d) uno spazio metrico e d_0 una pseudometrica continua su M. Si dice che M è (d, d_0)-*completo* se esistono funzioni $\delta_j\colon M^{j+1} \to (0, \infty)$, $j \geq 0$, tali per cui le successioni $(x_j)_{j=0}^{\infty}$ di Cauchy per la metrica d rispettanti la condizione

$$d_0(x_j, x_{j+1}) \leq \delta_j(x_0, \dots, x_j) \quad \text{per ogni } j \geq 0$$

convergono ad un elemento di M.
• Diremo che una funzione $f\colon M \to \mathbb{R}$ è (d, d_0)-*continua* se esistono funzioni $\delta_j\colon M^{j+1} \to (0, \infty)$, $j \geq 0$, tali per cui

$$f(x) = \lim_{j \to \infty} f(x_j)$$

per ogni $(x_j)_j \subset M$, $x_j \xrightarrow{d} x \in M$ e

$$d_0(x_j, x_{j+1}) \leq \delta_j(x_0, \dots, x_j) \quad \text{per ogni } j \geq 0.$$

• Inoltre diremo che una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ è (d, d_0)-*inferiormente semicontinua* se esistono funzioni $\delta_j : M^{j+1} \to (0, \infty)$, $j \geq 0$, tali per cui

$$f(x) \leq \liminf_{j \to \infty} f(x_j)$$

ogni qual volta $x_j \in M$, $x_j \xrightarrow{d} x \in M$ e

$$d_0(x_j, x_{j+1}) \leq \delta_j(x_0, \dots, x_j) \quad \text{per ogni } j \geq 0.$$

Osservazione 4.2.1. Queste definizioni coincidono con le usali di d-completezza e semicontinuità inferiore scegliendo $d_0 = 0$. Si osservi inoltre che nelle precedenti definizioni conta solamente che le stime $d_0(x_j, x_{j+1}) \leq \delta(x_0, \dots, x_j)$ valgano per indici j sufficientemente grandi. Qualora reggessero per $j \geq k$, si potrebbero ridefinire gli x_i per $i \leq k$ ponendo $x_i = x_k$; in tal modo la nuova sequenzza soddisfa alle stime per tutti i j, senza modifiche né del valore di $\liminf_{j\to\infty}$, né della convergenza o divergenza della sequenza.

Ricordiamo inoltre la seguente:

Definizione 4.2.2. Sia (X, τ) uno spazio topologico e $S \subset X$ un suo sottoinsieme. Si dice che S è un insieme G_δ se è intersezione numerabile di aperti, ovvero se esiste $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \tau$ tale che $S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Enunciamo e dimostriamo ora condizioni topologiche sufficienti per la completezza e la semicontinuità inferiore bimetrica, criteri più convenienti della verifica diretta:

Lemma 4.2.1. *Sia (M, d) uno spazio metrico, d_0 una pseudometrica continua su M e $f : M \to \mathbb{R}$. Se $\forall r \in \mathbb{R}$, l'insieme $f^{\leftarrow}(]-\infty, r]) = \{x \in M | f(x) \leq r\}$ è un sottoinsieme G_δ di (M, d_0), allora f è (d, d_0)-inferiormente semicontinua.*

Dimostrazione. Dalle ipotesi, comunque sia scelto $q \in \mathbb{Q}$, l'insieme $\{x \in M | f(x) \leq q\}$ è G_δ e quindi intersezione numerabile di d_0-aperti, pertanto esiste una successione $(H_i^q)_{i=1}^\infty$ di d_0-aperti tali che

$$\{x \in M | f(x) \leq q\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i^q$$

É possibile riordinare tutti gli insiemi H_i^q, $i \geq 1$, $q \in \mathbb{Q}$ in un'unica sequenza $G_0, G_1 \dots$, utilizzando ad esempio le seguenti biiezioni sugli indici:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{Q} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{N}$$

e ponendo quindi $G_{\Psi\circ\Phi(i,q)} = H_i^q$.
Definiamo $B_0[x, r] := \{y \in M | d_0(x, y) \leq r\}$ la d_0-palla chiusa di centro x e raggio r. Presa una successione $(x_j)_{j=1}^\infty$ è possibile scegliere ricorsivamente i valori $\delta_0 \equiv 1$ e $\delta_j(x_0, \dots, x_j) > 0$, $j \geq 1$, tali che

- $\delta_j(x_0, \dots, x_j) \leq \dfrac{1}{2}\delta_{j-1}(x_0, \dots, x_{j-1})$,
- se per $0 \leq i < j$, $x_j \in G_i$, allora $B_0[x_j, 2\delta_j(x_0, \dots, x_j)] \subset G_i$.

Ciò è possibile poiché $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ forma un ricoprimento di d_0-aperti di M.
Supponiamo ora che $x_j \xrightarrow{d} x_\infty \in M$ e che siano soddisfatte le condizioni $d_0(x_j, x_{j+1}) \leq \delta_j(x_0, \dots, x_j)$ per ogni $j \geq 1$. Consideriamo ora un qualsiasi $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q < f(x_\infty)$. L'insieme degli $x \in M$ tali che $f(x) \leq q$ è per ipotesi $f^{\leftarrow}\{(]\infty, q])\} = \bigcup_{i\in I} G_i$ per un opportuno sottoinsieme di indici $I \subset \mathbb{N}$. In

particolare $\exists \bar{i} \in I$ tale per cui $f^{\leftarrow}(]-\infty, q]) \subset G_{\bar{i}}$ e $x_\infty \notin G_{\bar{i}}$; se così non fosse infatti, allora sarebbe $x_\infty \in G_i \forall i \in I$ e quindi $x_\infty \in f^{\leftarrow}(]-\infty, q])$, ovvero $f(x_\infty) \leq q$: assurdo. Mostriamo ora che $\forall j > \bar{i}$ vale $f(x_j) > q$.
Se $j > \bar{i}$ allora $x_j \in f^{\leftarrow}(]-\infty, q]) \implies x_j \in G_{\bar{i}}$ e quindi $B_0[x_j, 2\delta_j(x_0, \dots, x_j)] \subset G_{\bar{i}}$. Ma per $\forall k \geq j$ si ha

$$d_0(x_k, x_{k+1}) \leq \delta_k(x_0, \dots, x_k) \leq \frac{1}{2^{k-j}} \delta_j(x_0, \dots, x_j)$$

da cui

$$d_0(x_j, x_k) \leq d_0(x_j, x_{j+1}) + \dots + d_0(x_{k-1}, x_k) \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{k-j-1}}\right) \delta_j(x_0, \dots, x_j) \leq 2\delta_j(x_0, \dots, x_j) \quad .$$

La pseudometrica d_0 è d-continua, si può quindi passare al limite per $k \to \infty$:

$$\lim_{k \to \infty} d_0(x_j, x_k) = d_0(x_j, x_\infty) \leq 2\delta_j(x_0, \dots, x_j) \quad .$$

Ciò implica che $x_\infty \in B_0[x_j, 2\delta_j(x_0, \dots, x_j)] \subset G_{\bar{i}}$: contraddizione. Si può concludere che $f(x_j) > q$, $\forall j > \bar{i}$, per cui risulta subito evidente che vale anche $\inf_{j > \bar{i}} f(x_j) \geq q$ e si conclude:

$$\liminf_{j \to \infty} f(x_j) \geq f(x_\infty) \quad \text{per } q \nearrow f(x_\infty)$$

□

Lemma 4.2.2. *Sia (M, d) uno spazio completo, d_0 una pseudometrica continua su M e S un sottoinsieme G_δ di (M, d_0). Allora S è (d, d_0)-completo.*

Dimostrazione. Si ponga $f = \chi_{M \setminus S} : M \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ la funzione caratteristica del complementare in M di S. Allora:

$$f^{\leftarrow}(]-\infty, r]) = \begin{cases} \emptyset & \text{per } r < 0 \\ S & \text{per } 0 \leq r < 1 \\ M & \text{per } r \geq 1 \end{cases}$$

In tutti i casi si tratta di insiemi G_δ, poiché S lo è per ipotesi e M e $\emptyset$ sono d_0-chiusaperti intersezione numerabile di loro stessi. Allora f soddisfa alle ipotesi del Lemma 4.2.1. e f è quindi (d, d_0)-inferiormente semicontinua, ovvero esistono funzioni $\delta_j : M^{j+1} \to (0, \infty)$ tali che

$$f(x) \leq \liminf_{j \to \infty} f(x_j)$$

ogni qual volta $x_j \xrightarrow{d} x \in M$ e valgono le maggiorazioni $d_0(x_j, d_{j+1}) \leq \delta_j(x_0, \dots, x_j)$ per ogni $j \geq 0$. Supponiamo invece ora una successione di Cauchy per d in S, $(x_j)_{j=0}^\infty \subset (S, d)$ soddisfacente alle stime $d_0(x_j, d_{j+1}) \leq \delta_j(x_0, \dots, x_j)$, per ogni $j \geq 0$. La completezza di M garantisce la convergenza della successione ad un punto $x \in M$, e la (d, d_0)-inferiore semicontinuità di f porge:

$$f(x) = \chi_{M \setminus S}(x) \leq \liminf_{j \to} \chi_{M \setminus S}(x_j) = 0 \quad \text{in quanto } x_j \in S \quad \forall j \geq 0 \ .$$

Si conclude che $x \in S$, e quindi l'asserto voluto. □

Presentiamo quindi il principio variazionale:

Teorema 4.2.1. *Siano (M, d) uno spazio metrico e $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione inferiormente limitata. Sia d_0 una pseudometrica continua su M tale che*

- *M è (d, d_0)-completo;*
- *f è (d, d_0)-inferiormente semicontinua.*

Siano $F_j\colon M \times M \to [0,\infty], j \geq 0$ *funzioni d-inferiormente semicontinue nella seconda variabile con* $F_j(x,x) = 0$ *per ogni* $x \in M$ *e*

$$\inf_{d(x,y)>r_j} F_j(x,y) > 0 \quad \textit{per qualche sequenza } r_j \searrow 0. \tag{4.3}$$

Se $x_0 \in M$ *e* $(\varepsilon_j)_{j=0}^{\infty}$ *è una qualsiasi sequenza di positivi tali che*

$$f(x_0) \leq \varepsilon_0 + \inf_{x\in M} f(x),$$

allora esiste una sequenza $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *in* M *d-convergente a un qualche* $x_\infty \in M$ *e una funzione* d_0*-continua* $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ *tale che la funzione*

$$h(x)\colon = f(x) + \varphi(x) + \sum_{j=0}^{\infty} F_j(x_j, x)$$

raggiunge il suo minimo in M *in* x_∞.
Se inoltre $0 \leq j < k+1 \leq \infty$, *si ottiene*

$$F_j(x_j, x_k) \leq \varepsilon_j \qquad e \qquad h(x_\infty) \leq \varepsilon_j + \inf_{x\in M}\biggl(f(x) + \varphi(x) + \sum_{i=0}^{j-1} F_i(x_i, x)\biggr). \tag{4.4}$$

Dimostrazione. L'arbitrarietà della scelta dei valori ε_j per $j \geq 1$ permette di assumere la convergenza della serie $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j$ e tale che

$$\inf_{d(x,y)>r_j} F_j(x,y) > \varepsilon_j. \tag{4.5}$$

Si prendano le funzioni $\delta_j\colon M^{j+1} \to (0,\infty)$ che permettono l'ipotesi di (d,d_0)-semicontinuità inferiore, e si assuma siano le stesse che garantiscono la (d,d_0)-completezza di M.

Verranno ora definiti per induzione i punti $x_j \in M$, le funzioni d_0-continue $\varphi_j\colon M \to [0,\infty)$ e le funzioni inferiormente limitate $h_j\colon M \to (-\infty,\infty]$ tali che, in particolare, siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(i) $\varphi_j(x_j) = 0$ per $j \geq 0$;

(ii) $h_j(x_j) \leq \varepsilon_j + \inf_{x\in M} h_j(x)$ per $j \geq 0$;

(iii) $h_j(x_j) \leq h_{j-1}(x_{j-1})$ per $j \geq 1$;

(iv) $\varphi_j(x_j) + F_j(x_i, x_j) \leq \varepsilon_i$ per $j \geq i \geq 0$.

Per $j = 0$, il punto $x_0 \in M$ è già assegnato dalle ipotesi. Si ponga $h_0(x) = f(x)$ e si definisca

$$\varphi_0(x) = 2\varepsilon_0 \min\biggl\{1, \frac{d_0(x,x_0)}{\delta_0(x_0)}\biggr\}.$$

E ciò soddisfa a (i). Per ipotesi,

$$h_0(x_0) \leq \varepsilon_0 + \inf_{x\in M} h_0(x),$$

che soddisfa (ii). La condizione (iii) è vuota per $j = 0$ e la (iv) è banalmente soddisfatta.

Sia ora $j > 0$ e si suppongano ora x_i, φ_i e h_i già definiti per $i = 0, 1, \ldots, j-1$. Si ponga

$$h_j(x) = h_{j-1}(x) + \varphi_{j-1}(x) + F_{j-1}(x_{j-1}, x) = f(x) + \sum_{i=0}^{j-1}\bigl(\varphi_i(x) + F_i(x_i, x)\bigr).$$

Il fatto che $h_j(x_{j-1}) = h_{j-1}(x_{j-1})$ permette di scegliere x_j tale che

$$h_j(x_j) \leq \min\{h_{j-1}(x_{j-1}), \varepsilon_j + \inf_{x\in M} h_j(x)\}.$$

Siano quindi

$$\varphi_j(x) = 2\varepsilon_j \min\left\{1, \frac{d_0(x, x_j)}{\delta_j(x_0, \dots, x_j)}\right\}.$$

Chiaramente le condizioni (i), (ii) e (iii) sono soddisfatte. Per la (iv), siano $0 \leq i < j$, dal momento che per $j = i$ il memobro sinistro della condizione (iv) è nullo. Allora

$$\begin{aligned}
h_i(x_i) &\geq h_j(x_j) && \text{poiché } h_i(x_i) \text{ decrescono in } i\\
&\geq h_{i+1}(x_j) && \text{poiché } h_i(x) \text{ crescono in } i\\
&= h_i(x_j) + \varphi_i(x_j) + F_i(x_i, x_j) && \text{per definizione di } h_{i+1}\\
&\geq h_i(x_i) + \varphi_i(x_j) + F_i(x_i, x_j) - \varepsilon_i && \text{perché } h_i(x_i) \leq \varepsilon_i + h_i(x).
\end{aligned}$$

Sottraendo $h_i(x_i)$ ad ambo i membri della disuguaglianza ottenuta, si ottiene la condizione (iv) e la conclusione della costruzione.

La condizione (iv) implica che la sequenza $(x_j)_j$ sia di Cauchy per la metrica d. Sia $\varepsilon > 0$, e sia un indice i tale per cui $r_i \leq \varepsilon$. Di conseguenza, grazie a (4.5), $F_i(x, y) > \varepsilon_i$ se $d(x, y) > \varepsilon$. La condizione (iv) garantisce che per ogni $j > i$, sia $F_i(x_i, x_j) \leq \varepsilon_i$,e ciò implica che $d(x_i, x_j) \leq \varepsilon$, come richiesto.

Si osservi che la sequenza $(x_j)_j$ soddisfa a $d_0(x_i, x_j) \leq \delta_i(x_0, \dots, x_i)$ per $j > i$: se fosse vera infatti la disuguaglianza opposta $d_0(x_i, x_j) > \delta_i(x_0, \dots, x_i)$, si avrebbe $\varphi_i(x_j) = 2\varepsilon_i$, in contraddizione con (iv).

Di conseguenza, per la (d, d_0)-completezza di M e la (d, d_0)-semicontinuità inferiore di f, la sequenza $(x_j)_j$convergenza in metrica d ad un qualche punto $x_\infty \in M$ e

$$f(x_\infty) \leq \liminf_{j\to\infty} f(x_j).$$

Sia $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x)$. La serie è uniformemente convergente, pertanto la funzione φ è d_0-continua. In particolare, è anche d-continua. La funzione perturbata $h(x)$ del teorema sarà

$$h(x) = f(x) + \varphi(x) + \sum_{j=0}^{\infty} F_j(x_j, x).$$

Le funzioni $x \mapsto F_j(x_j, x)$ sono d-semicontinue inferiormente per ipotesi, pertanto, per ogni k fissato si ottiene

$$\begin{aligned}
h_0(x_0) \geq h_1(x_1) \geq \dots \geq \lim_{j\to\infty} h_j(x_j) &\geq \liminf_{j\to\infty}\big(f(x_j) + \varphi(x_j) + \sum_{i=0}^{k} F_i(x_i, x_j)\big)\\
&\geq f(x_\infty) + \varphi(x_\infty) + \sum_{i=0}^{k} F_i(x_i, x_\infty).
\end{aligned}$$

Quindi

$$h_j(x_j) \geq h(x_\infty) \quad \text{per ogni } j \geq 0. \tag{4.6}$$

La prima disuguaglianza in (4.4) è immediata conseguenza di (iv), e la seconda di (4.6) e (ii):

$$h(x_\infty) \leq h_j(x_j) \leq \varepsilon_j + \inf_{x\in M} h_j(x) \leq \varepsilon_j + \inf_{x\in M}\big(f(x) + \varphi(x) + \sum_{i=0}^{j-1} F_i(x_i, x)\big).$$

Infine, passando al limite per $j \to \infty$ si conclude che

$$h(x_\infty) \leq \inf_{x\in M}\big(f(x) + \varphi(x) + \sum_{i=0}^{\infty} F_i(x_i, x)\big) = \inf_{x\in M} h(x).$$

Questo dimostra che $h(x)$ ha minimo in M in x_∞. □

Considerando il caso $j = 0$ nella seconda disuguaglianza di (4.4) è immediato vedere che $h(x_\infty)$.

Si osservi inoltre che il risultato del Teorema 4.2.1 non cambia se una costante viene aggiunta a φ. Si può quindi sempre sostituire φ con $\varphi - \varphi(x_\infty)$ per ottenere $\varphi(x_\infty) = 0$. Oltre a ciò, si può rimpiazzare φ con $\max\{0, \varphi\}$, lasciando inalterata $h(x_\infty)$ e non diminuendo gli altri valori di h. Si può pertanto aggiungere tra le ipotesi del Teorema 4.2.1 che valga $\varphi \geq \varphi(x_\infty) = 0$.

Capitolo 5

Fréchet differenziabilità

5.1 Introduzione

L'obiettivo di questo ultimo capitolo è dimostrare come il principio variazionale bimetrico introdotto possa essere utilizzato per dimostrare risultati di differenziabilità secondo Fréchet per funzioni lipschitziane con dominio in spazi di Banach.

Teorema 5.1.1. *Sia X uno spazio di Banach con duale X^* separabile e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana ovunque Gâteaux-differenziabile. Allora f ha almeno un punto di Fréchet-differenziabilità.*

Preludono alla dimostrazione due fatti qui di seguito enunciati e dimostrati, per i quali introduciamo la seguente definizione:

Definizione 5.1.1. Una funzione $\Theta\colon X \to \mathbb{R}$ è detta *superiormente Fréchet differenziabile* in un punto $x_0 \in X$ se esiste un elemento del duale topologico $L \in X^*$ tale che

$$\limsup_{\|u\|\to 0} \frac{\Theta(x_0+u)+\Theta(x_0)-Lu}{\|u\|} \leq 0.$$

Proposizione 5.1.1. *Sia $\Theta\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione ovunque superiormente Fréchet differenziabile, $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ continua e $f\colon X \to \mathbb{R}$ lipschitziana e ovunque Gâteaux differenziabile. Si supponga inoltre che la funzione $h\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$h(x,u) = f'(x;u) + \Theta(u) + \psi(x)$$

abbia minimo in (x_0, y_0). Allora f è Fréchet differenziabile in x_0.

Dimostrazione. Si osservi che fissando la variabile $x = x_0$ in $h(x,u)$, la funzione risultante $X \ni u \mapsto h(x_0,u) = f'(x_0;u)+\Theta(u)+\psi(x_0)$ è chiaramente superiormente differenziabile e per ipotesi ha minimo in u_0: se L è differenziale superiore di Θ in u_0, si ha che $f'(x_0;u_0)+L = 0$ e quindi $f'(x_0;u_0) = -L$.

La Fréchet differenziabilità della funzione f si può dimostrare mostrando che vale:

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{f(x_0+v)-f(x_0)+L(v)}{\|v\|} = 0.$$

Equivalentemente si mostrerà che:

$$f(x_0+v)-f(x_0) \geq -L(v) - \varepsilon\|v\|$$

e

$$f(x_0+v)-f(x_0) \leq -L(v) + \varepsilon\|v\|$$

per $\varepsilon > 0$ e $\|u\|$ opportunamente piccola.

• [Prima disuguaglianza]:

Sia $\varepsilon > 0$ e $\Delta > 0$ tali che

$$\Theta(u) - \Theta(u_0) \leq L(u - u_0) + \frac{\varepsilon}{3}\|u - u_0\|$$

per $\|u - u_0\| \leq \Delta$. L'ipotesi di continuità di ψ permette l'esistenza di $\delta_0 > 0$ tale che

$$|\psi(x) - \psi(x_0)| < \frac{\varepsilon\Delta}{3}$$

per $\|x - x_0\| \leq \delta_0$. Sia inoltre $\delta > 0$ tale che sia $\delta(1 + \frac{\|u_0\|}{\Delta}) < \delta_0$ e

$$|f(x_0 + tu_0) - f(x_0) - f'(x_0; tu_0)| \leq \frac{\varepsilon\delta}{3}|t|$$

per $|t| \leq \frac{\delta}{\Delta}$.

In particolare verranno utilizzate le seguenti due:

$$-f(x_0 - tu_0) + f(x_0) - f'(x_0; tu_0) \leq \frac{\varepsilon\Delta}{3}t;$$

$$f(x_0 + tu_0) - f(x_0) - f'(x_0; tu_0) \leq \frac{\varepsilon\Delta}{3}t.$$

Si assuma ora $v \in X$ con norma $\|v\| < \delta$. Sia $t = \frac{\|v\|}{\Delta}$ e $u = (\frac{1}{t})v + u_0$. Poiché (x_0, u_0) è minimo di $h(x, u)$, per ogni $x \in [x_0 - tu_0, x_0 + v]$ si può scrivere che

$$f'(x; u) + \Theta(u) + \psi(x) \geq f'(x_0; u_0) + \Theta(u_0) + \psi(x_0).$$

Pertanto, per tale scelta di x, vale

$$\|x - x_0\| \leq \|x_0 + v - (x_0 - tu_0)\| \leq \|v\|(1 + \frac{\|u_0\|}{\Delta}) < \delta_0.$$

Inoltre per queste scelte si ha $\|u - u_0\| = \|(\frac{v}{t} - u_0) - u_0\| = \|\frac{v}{t}\| = \|\frac{v}{\|v\|/t}\| = \Delta$.

Valgono di conseguenza le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} f'(x; u) &\geq f'(x_0; u_0) - \big(\Theta(u) - \Theta(u_0)\big) - \big(\psi(x) - \psi(x_0)\big) \\ &\geq f'(x_0; u_0) - L(u - u_0) - \frac{\varepsilon}{3}\|u - u_0\| - \frac{\varepsilon\Delta}{3} \\ &= f'(x_0; u_0) - \frac{1}{t}L(v) - \frac{\varepsilon}{3t}\|v\| - \frac{\varepsilon}{3t}\|v\| = f'(x_0; u_0) - \frac{1}{t}L(v) - \frac{2\varepsilon}{3t}\|v\|. \end{aligned}$$

Ma allora

$$\begin{aligned} f(x_0 + v) - f(x_0 - tu_0) &\geq t \inf\{f'(x; u) \mid x \in [x_0 - tu_0, x_0 + v]\,\} \\ &\geq f'(x_0; tu_0) - L(v) - \frac{2\varepsilon}{3}\|v\|. \end{aligned}$$

Inoltre, è stato scelto t con $|t| \leq \frac{\delta}{\Delta}$; ciò porge

$$f(x_0 - tu_0) - f(x_0) \geq -f'(x_0; tu_0) - \frac{\varepsilon\Delta}{3}t = -f'(x_0; tu_0) - \frac{\varepsilon}{3}\|v\|.$$

Sommando le ultime due disuguaglianze ottenute membro a membro si ottiene la stima voluta:

$$f(x_0 + v) - f(x_0) \geq -L(v) - \varepsilon\|u\|.$$

• [Seconda disuguaglianza]:

Il procedimento è simmetrico a quello seguito per la disuguaglianza precedente: sia t definito ancora come $t = \|v\|/\Delta$, ma si consideri questa volta $u = -(\frac{1}{t})v + u_0$. per ogni scelta di $x \in [x_0 + v, x_0 + tu_0]$ si ottiene ancora che

$$f'(x;u) + \Theta(u) + \psi(x) \geq f'(x_0;u_0) + \Theta(u_0) + \psi(x_0)$$

e le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} f'(x;u) &\geq f'(x_0;u_0) - \big(\Theta(u) - \Theta(u_0)\big) - \big(\psi(x) - \psi(x_0)\big) \\ &\geq f'(x_0;u_0) - L(u-u_0) - \frac{\varepsilon}{3}\|u-u_0\| - \frac{\varepsilon\Delta}{3} \\ &= f'(x_0;u_0) + \frac{1}{t}L(v) - \frac{\varepsilon}{3t}\|v\| - \frac{\varepsilon}{3t}\|v\| = f'(x_0;u_0) + \frac{1}{t}L(v) - \frac{2\varepsilon}{3t}\|v\|. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} f(x_0+tu_0) - f(x_0+v) &\geq t\,\inf\{f'(x;u) \mid x \in [x_0+v, x_0+tu_0]\,\} \\ &\geq f'(x_0;tu_0) + L(v) - \frac{2\varepsilon}{3}\|v\|. \end{aligned}$$

Sottraendo questa a

$$f(x_0+tu_0) - f(x_0) \leq f'(x_0;tu_0) + \frac{\varepsilon\Delta}{3}t$$

si ottiene

$$f(x_0+v) - f(x_0) \leq -L(v) + \frac{2\varepsilon}{3}\|v\| + \frac{\varepsilon\Delta}{3}t = -L(v) + \varepsilon\|v\|.$$

Si conclude quindi per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. □

La derivata direzionale $f'(x_0;u)$ non è in genere continua come funzione nelle due variabili x, u, ma è (d, d_0)-continua per opportune metrica d e pseudometrica continua d_0. Questo fatto costituisce il cuore dell'approccio variazionale utilizzato.

Proposizione 5.1.2. *Siano X uno spazio di Banach e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana e ovunque Gâteaux differenziabile. Sia inoltre $M := X \times X$ su cui è definita la metrica*

$$d\big((x,u),(y,v)\big) = \sqrt{\|x-y\|^2 + \|u-v\|^2}$$

e con la pseudometrica continua

$$d_0\big((x,u),(y,v)\big) = \|x-y\|.$$

Allora la mappa $(x,u) \mapsto f'(x;u)$ da M in $\mathbb{R}$ è (d,d_0)-continua.

Dimostrazione. Per stabilire la (d,d_0)-continuità è necessario trovare dalle funzioni $\delta_j\colon M^{j+1} \to (0,\infty)$ che la definiscano. Siano esse così definite: sia $\delta_0(x_0,u_0) = 1$. Per ogni $j \geq 1$ e le coppie $(x_0,u_0), \ldots, (x_j,u_j)$, si può trovare un $\delta > 0$ tale che

$$0 < \delta < \frac{1}{2}\delta_{j-1}\big((x_0,u_0),\ldots,(x_{j-1},u_{j-1})\big)$$

e tale che, se $|t| \leq j\delta$, valga

$$|f(x_j + tu_j) - f(x_j) - f'(x_j;tuj)| \leq \frac{|t|}{j}.$$

Infine si ponga $\delta_j\big((x_0,u_0),\ldots,(x_j,u_j)\big) = \delta$.

Si deve ora dimostrare che $f'(x_j; u_j) \to f'(x; u)$ ogni qual volta $(x_j, u_j) \xrightarrow{d} (x, u) \in M$ e che

$$\|x_{j+1} - x_j\| \leq \delta_j\big((x_0, u_0), \ldots, (x_j, u_j)\big).$$

Introduciamo la seguente notazione semplificativa: $d_j = \delta_j\big((x_0, u_0), \ldots, (x_j, u_j)\big)$.

Per costruzione, $\delta_{j+1} \leq \frac{1}{2}\delta_j$, e quindi per $k > j$

$$\|x_k - x_j\| \leq \|x_j - x_{j+1}\| + \cdots + \|x_{k-1} - x_k\| \leq (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-j+1}}) \leq 2\delta_j$$

e al limite per $k \to \infty$ si ottiene $\|x - x_j\| \leq 2\delta_j$. Inoltre $j\delta_j \leq j(\frac{1}{2}\delta_{j-1}) \leq \cdots \leq (1/2)^j \to 0$ per $j \to \infty$ porge $j\delta_j \to 0$.

Sia $\varepsilon > 0$, esiste un $j \in \mathbb{N}$ tale per cui valgano le seguenti:

$$\operatorname{Lip}(f)\|u - u_j\| < \varepsilon,$$

$$\frac{1 + 4\operatorname{Lip}(f)}{j} < \varepsilon,$$

$$|f(x + tu) - f(x) - f'(x; tu)| \leq \varepsilon|t| \quad \text{per } |t| \leq j\delta_j.$$

Si scelga $t \in \mathbb{R}$ con $|t| = j\delta_j$. Si ottengono allora le seguenti stime:

$$\begin{aligned}
|f'(x; tu) - f'(x_j; tu_j)| &\leq |f(x + tu) - f(x) - f(x_j + tu_j) + f(x_j)| + \varepsilon|t| + \frac{|t|}{j} \\
&\leq |f(x + tu) - f(x_j + tu_j)| + |f(x_j) - f(x)| + \varepsilon|t| + \frac{|t|}{j} \\
&\leq 2\operatorname{Lip}(f)\|x - x_j\| + \operatorname{Lip}(f)\|u - u_j\||t| + \varepsilon|t| + \frac{|t|}{j} \\
&\leq \left(\frac{4\operatorname{Lip}(f)\delta_j}{|t|} + \operatorname{Lip}(f)\|u - u_j\| + \varepsilon + \frac{1}{j}\right)|t| \\
&= \left(\frac{1 + 4\operatorname{Lip}(f)}{j} + \operatorname{Lip}(f)\|u - u_j\| + \varepsilon\right)|t| \leq 3\varepsilon|t|.
\end{aligned}$$

Si conclude perché per $j \to \infty$ vale $|t| = j\delta_j \to 0$. □

Si userà il seguente fatto, la cui dimostrazione è rimandata all'appendice di fine tesi per non interrompere il flusso dell'argomentazione.

Teorema 5.1.2. *Sia X uno spazio di Banach con duale X^* separabile. Allora esiste una norma su X equivalente e Fréchet differenziabile in ogni punto $x \neq 0$. Tale norma è detta* Fréchet regolare.

Dimostrazione. In Appendice A. □

5.2 Dimostrazione

Dimostrazione del Teorema 5.1.1. Poiché per ipotesi lo spazio duale X^* è separabile, allora per il Teorema 5.1.2 lo spazio X ammette una norma Fréchet regolare $\|\cdot\|$. Applichiamo qui il principio variazionale enunciato nel Teorema 4.2.1 sullo spazio metrico $M = X \times X$ dotato della metrica d e della pseudometrica continua d_0 introdotte nella Proposizione 5.1.2, ovvero

$$d\big((x,u),(y,v)\big) = \sqrt{\|x-y\|^2 + \|u-v\|^2} \quad \text{e}$$

$$d_0\big((x,u),(y,v)\big) = \|x-y\|.$$

Lo spazio (M,d) è completo e di conseguenza è (d,d_0)-completo. Si scelgano le funzioni $F_j\big((x,u),(y,v)\big) := \frac{1}{2^j}d^2\big((x,u),(y,v)\big) = \frac{1}{2^j}\big(\|x-y\|^2 + \|u-v\|^2\big)$ e costanti $r_j = \frac{1}{2^j}$, $j \geq 0$. Allora chiaramente

$$\inf\big\{F_j\big((x,u),(y,v)\big) \mid d\big((x,u),(y,v)\big) > r_j\big\} > 0.$$

Il (principio) Teorema 4.2.1 verrà utilizzato per trovare una perturbazione opportuna che raggiunge il minimo della funzione

$$g(x,u) := f'(x;u) + \|u\|^2.$$

Per fare questo, rimangono da verificare le altre ipotesi. Anzitutto, la Proposizione 5.1.2 garantisce la (d,d_0)-continuità di g (e quindi la (d,d_0)-semicontinuità inferiore); è anche inferiormente limitata, dal momento che $g(x,u) \geq -\operatorname{Lip}(f)\|u\| + \|u\|^2$. La scelta del punto di partenza e della sequenza dei positivi $(\varepsilon_j)_j$ che controllano la velocità di convergenza è irrilevante in questa situazione, ad eccezione del caso $j = 0$, ove abbiamo un'ipotesi da verificare; si pongano pertanto i parametri $\varepsilon_j = \frac{1}{2^j}$ e si definisca il punto di partenza (x_0,u_0) tale che sia soddisfatta la condizione richiesta dal principio

$$g(x_0,u_0) < \varepsilon_0 + \inf_{(x,u)\in M} g(x,u).$$

Ma allora, per il (principio) Teorema 4.2.1 esiste una sequenza di coppie $\{(x_j,u_j)\}_{j=1}^{\infty}$ d-convergente ad un qualche punto $(x_\infty,u_\infty) \in M$ e una funzione d_0-continua $\varphi\colon X \times X \to \mathbb{R}$ tale che la funzione

$$h(x,u) = f'(x,u) + \|u\|^2 + \varphi(x,u) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}\big(\|x-x_j\|^2 + \|u-u_j\|^2\big)$$

raggiunge il suo minimo in M in (x_∞,u_∞). Per come è definita la pseudometrica d_0, la d_0-continuità di φ implica l'indipendenza della funzione φ dalla variabile x. Posto infine $\psi(x) = \varphi(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}\|x-x_j\|^2$ (d-continua) e

$$\Theta(u) := \|u\|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}\|u-u_j\|^2$$

chiaramente Fréchet differenziabile (perché $\|\cdot\|$ è Fréchet regolare), e quindi superiormente Fréchet differenziabile. Si ha allora $h(x,u) = f'(x;u) + \Theta(u) + \psi(x)$ e essendo nelle ipotesi della Proposizione 5.1.1, si conclude che f è Fréchet differenziabile nel punto x_∞. $\square$

5.3 Conclusioni

Concludiamo la tesi enunciando un teorema la cui dimostrazione è notevolmente semplificata dall'utilizzo del principio variazionale bimetrico e che ben evidenzia il potenziale dell'approccio presentato.

Definizione 5.3.1. Uno spazio di Banach X è detto uno *spazio di Asplund* se il duale di ogni sottospazio separabile di X è ancora separabile.

Teorema 5.3.1. *Sia X uno spazio di Asplund e $\emptyset \neq G \subset X$ un sottoinsieme aperto di X e $f : G \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora f ha punti di Fréchet-differenziabilità. Inoltre, per ogni $a, b \in G$ tali per cui il segmento $[a, b]$ sia interamente contenuto in G e per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $x \in G$ in cui f è Fréchet-differenziabile e*

$$f'(x; b - a) < f(b) - f(a) + \epsilon$$

Dimostrazione. Si veda [5]. □

Si possono quindi formulare i seguenti due corollari riassuntivi per casi importanti:

Corollario 5.3.1 (Gâteaux-differenziabilità)**.** *Le funzioni lipschitziane $f : X \to Y$ sono q.o. Gâteaux-differenziabili se per esempio:*

- *$X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ e in tal caso sono anche punti di Fréchet-differenziabilità;*
- *$X = \mathbb{R}^m$ e $Y = \mathbb{R}^n$ e in tal caso sono anche punti di Fréchet-differenziabilità;*
- *$X = \mathbb{R}^n$ e Y Banach con RNP;*
- *X Banach separabile, Y ha la RNP e il q.o. è nel senso di Aronszajn.*

Dimostrazione. Contenuto della tesi. □

Corollario 5.3.2 (Fréchet-differenziabilità)**.** *Le funzioni lipschitziane $f : X \to \mathbb{R}$ con U hanno punti di Fréchet-differenziabilità se per esempio:*

- *X è Banach riflessivo;*
- *X è uno spazio di Hilbert;*
- *X è Banach con duale RNP.*

Dimostrazione. É noto che se X è uno spazio di Banach e X^* il suo duale, allora

$$X \text{ è riflessivo e separabile} \quad \Leftrightarrow \quad X^* \text{ è riflessivo e separabile}$$

Quindi se $Y \leqslant X$ sottospazio separabile allora il duale Y^* è separabile. Gli spazi di Banach riflessivi sono spazi di Asplund. In particolare, il teorema di Milman garantisce che gli spazi uniformemente convessi siano riflessivi, quindi anche gli spazi di Hilbert, in quanto Banach e uniformemente convessi, sono spazi di Asplund. Inoltre per il Corollario 3.2.3, uno spazio di Banach è uno spazio Asplund se e solo se il duale X^* ha la RNP. □

Appendice A

Norma Fréchet regolare

Forniamo qui una dimostrazione del Teorema 5.1.2, di cui riportiamo il testo:

Teorema 5.1.2: *Sia X uno spazio di Banach tale che il suo duale X^* sia separabile. Allora esiste una norma su X equivalente e Fréchet differenziabile in ogni punto $x \neq 0$.*

Definizione A.0.1. Uno spazio di Banach si dice *localmente uniformemente covesso* se presa una successione di versori $(x_n)_n \subset \partial B_X(0,1]$ convergenti ad un qualche $x \in \partial B_X(0,1]$ tali che $\|x + x_n\| \to 2$, si abbia $\|x_n - x\| \to 0$.

Lemma A.0.1. *Sia X uno spazio di Banach il cui duale X^* sia localmente uniformemente convesso. Allora la norma in X è regolare.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ di norma $\|x\| = 1$. Allora esiste un elemento del duale $x^* \in X^*$ tale che $\|x^*\| = x^*(x) = 1$. Per ogni $u \in X$ si può scegliere un funzionale $y_u \in X^*$ tale che $y_u^*(x+u) = \|x+u\|$. Allora vale la seguente maggiorazione

$$2 \geq \|y_u^* + x^*\| \geq y_u^*(x) + x^*(x) = y_u^*(x + u - u) + x^*(x) = \|x + u\| - y_u^*(u) + 1.$$

Ma allora per $\|u\| \to 0$ si ha $\|y_u^* + x^*\| \to 2$. Per la locale uniforme convessitù di X^* si ottiene la convergenza $\|y_u^* - x^*\| \to 0$ per $\|u\| \to 0$. Di conseguenza:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x + y\| + \|x - u\| - 2 &= y_u^*(x + u) + y_{-u}^*(x - u) - 2 \\ &= y_u^*(x) + y_{-u}^*(x) - 2 + (y_u^* - y_{-u}^*)(u) \\ &\leq \|y_u^* - y_{-u}^*\| \, \|u\| = o(\|u\|). \end{aligned}$$

□

Dimostrazione del Teorema 5.1.2. La separabilità di X^* porge la separabilità di X, pertanto esistono:

- Una sequenza $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_X(0,1]$ ivi densa;
- Una sequenza crescente di sottospazi finito-dimensionali $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ di X^* tali che
$$X^* = \overline{\bigcup_{n\geq 1} F_n}.$$

Si considerino ora le mappe $T\colon X^* \to l_2$ e $S\colon X^* \to l_2$:

$$\begin{aligned} Tx^* &= (x^*(x_1), \frac{1}{2}x^*(x_2), \dots, \frac{1}{n}x^*(x_n), \dots) \\ Sx^* &= (dist(x^*, F_1), \frac{1}{2}dist(x^*, F_2), \dots, \frac{1}{n}dist(x^*, F_n), \dots). \end{aligned}$$

La funzione su X^* definita ponendo $x^* \mapsto \|Tx^*\|$ è debole* continua su insiemi limitati e la funzione $x^* \mapsto \|Sx^*\|$ è debole* inferiormente semicontinua su insiemi limitati. Inoltre

$$\|T(x^* + y^*)\| \le \|Tx^*\| + \|Ty^*\| \quad \text{e} \quad \|S(x^* + y^*)\| \le \|Sx^*\| + \|Sy^*\|.$$

Possiamo quindi definire la norma equivalente

$$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$$

su X^* ponendo

$$|\!|\!|x^*|\!|\!|^2 := \|x^*\|^2 + \|Tx^*\|^2 + \|Sx^*\|^2. \tag{A.1}$$

Tutti e tre gli addendi della definizione precedente sono debolmente* inferiormente semicontinui, e quindi la palla unitaria in questa norma è debolmente* chiusa. Di conseguenza $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ è la norma duale di una norma equivalente su X. Per il Lemma A.0.1 è sufficiente dimostrare che $(X^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ è localmente uniformemente convesso.

Siano $|\!|\!|x^*|\!|\!| = |\!|\!|x_k^*|\!|\!| = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e tali che

$$\lim_{k\to\infty} |\!|\!|x^* + x_k^*|\!|\!| = 2.$$

Dal momento che ciascuna espressione $\|x^*\|$, $\|Tx^*\|$, e $\|Sx^*\|$ in A.1 soddisfano alla disuguaglianza triangolare, si ottiene

$$\begin{aligned}
\big(\|x_k^*\| - \|x^*\|\big)^2 \big(\|Tx_k^*\| - \|Tx^*\|\big)^2 + \big(\|Sx_k^*\| - \|Sx^*\|\big)^2& \\
\le (2\|x_k^*\|^2 + 2\|x^*\|^2 - \|x_k^* + x^*\|^2)& \qquad (A.2)\\
+ (2\|Tx_k^*\|^2 + 2\|Tx^*\|^2 - \|T(x_k^* + x^*)\|^2)& \qquad (A.3)\\
+ (2\|Sx_k^*\|^2 + 2\|Sx^*\|^2 - \|S(x_k^* + x^*)\|^2)& \qquad (A.4)\\
= 2|\!|\!|x_k^*|\!|\!|^2 + 2|\!|\!|x^*|\!|\!|^2 - |\!|\!|x_k^* + x^*|\!|\!|^2 \to 0.&
\end{aligned}$$

Di conseguenza $\|Tx_k^*\| \to \|Tx^*\|$ e $\|Sx_k^*\| \to \|Sx^*\|$.
le espressioni in A.2, A.3 e A.4 sono positive, valgono anche le seguenti:

$$\|T(x^* + x_k^*)\| \to 2\|Tx^*\|$$
$$\|S(x^* + x_k^*)\| \to 2\|Sx^*\|.$$

Per la uniforme convessità di l_2 e di conseguenza la sua locale uniforme convessità, valgono

$$\|T(x^* - x_k^*)\| \to 0 \quad \text{e} \quad \|S(x^* - x_k^*)\| \to 0,$$

da cui segue che per ogni n,

$$\lim_{k\to\infty} x_k^*(x_n) = x^*(x_n),$$
$$\lim_{k\to\infty} dist(x_k^*, F_n) = dist(x^*, F_n).$$

La sequenza $(x_n)_n$ è stata scelta densa nella sfera unitaria di X e la successione $(x_k^*)_n$ è limitata, si deduce quindi che $x_k^* \to x^*$ in topologia debole*.
Per trovare una contraddizione, si supponga che per $\varepsilon > 0$ fissato esista una sottosuccessione di (x_k^*) (che possiamo assumere essere la sequenza originale) tale che valga

$$\liminf_{k\to\infty} \|x_k^* - x^*\| > \varepsilon.$$

Sia n tale per cui $dist(x^*, F_n) < \frac{1}{4}\varepsilon$. Allora per ogni k sufficientemente grande, esiste un $z_k^* \in F_n$ con $\|z_k^* - x_k^*\| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Dal momento che F_n è finito dimensionale, una sottosuccessione di (z_k^*) converge ad un qualche funzionale $z^* \in F_n$. Pertanto

$$\|x^* - z^*\| \le \liminf_{k\to\infty} \|x_k^* - z^*\| \le \liminf_{x_k^* - z_k^*} \le \frac{\varepsilon}{3}$$

e si ottiene la contraddizione desiderata

$$\varepsilon < \liminf_{k\to\infty} \|x_k^* - x^*\| \le \|x^* - z^*\| + \lim_{k\to\infty} + \limsup_{k\to\infty} \|z_k^* - x_k^*\| \le \varepsilon.$$

□

Bibliografia

[1] Kolmogorov A.N., Fomin S.V.: *Introductory real analysis*, 1970

[2] Evans L.C., Gariepy R.F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC PRESS, 1992

[3] Folland G.B.: *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Wiley-Interscience, Second edition, 1999.

[4] Brezis H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[5] Lindenstrauss J., Preiss D., Tišer J.: *Fréchet differentiability of Lipschitz functions via a variational principle*, J.Eur.Math.Soc. 12,385-412(2010) DOI 10.4171/JEMS/202.

[6] Lindenstrauss J., Preiss D., Tišer J.: *Fréchet Differentiability of Lipschitz Functions and Porous Sets in Banach Spaces*, Annals of Mathematics studies 179, 2012.

[7] Benyamini Y., Lindenstrauss J.: *Geometric Nonlinear Functional Analysis, Volume 1*, American Mathematical Society, Colloquium Publications Vol. 48

[8] Preiss, D.: *Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces.* J.Funct.Anal.91,312-345(1990) Zbl 0711.46036 MR 1058975