Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

Misure Uniformi su $\mathbb{R}^n$

Relatore:
Prof.
Roberto Monti

Candidato:
Jodi Dianetti
Matricola 1030913

Anno accademico 2014/2015

Introduzione

Scopo di questa tesi è di esporre alcuni risultati in Teoria Geometrica della Misura tratti dai lavori di D. Preiss, B. Kirchheim e O. Kowalsky ([3], [4], [5]) riprendendo alcune dimostrazioni dalle note scritte da C. De Lellis ([2]).

Vedremo come imponendo condizioni sulla misura delle palle centrate nel supporto sia possibile dedurre proprietà interessanti su quest'ultimo.

Nel Capitolo 2 definiremo la nozione di misura uniforme:

Definizione 0.1 (Misura Uniforme)**.** Una misura boreliana $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ finita sui compatti è detta uniforme se

$$\mu(B_r(x)) = \mu(B_r(y)) \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \operatorname{supp}(\mu),\ r > 0.$$

Combinando in maniera opportuna funzioni radiali costruiremo una funzione analitica il cui luogo degli zeri è il supporto della misura.

Teorema 0.0.1 (Kirchheim-Preiss)**.** *Sia $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ una misura uniforme. Allora il supporto di μ è una varietà analitica reale, ossia esiste una funzione analitica $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che* $\operatorname{supp}(\mu) = \{H = 0\}$.

Nel Capitolo 3 definiremo le misure m-uniformi:

Definizione 0.2 (Misura α-uniforme)**.** Sia $\alpha > 0$. Una misura di Borel μ su $\mathbb{R}^n$ è detta α-uniforme se

$$\mu(B_r(x)) = \omega_\alpha r^\alpha \quad \text{per ogni} \quad x \in \operatorname{supp}(\mu),\ r > 0.$$

Denotiamo con $\mathcal{U}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle misure α-uniformi tali che $0 \in \operatorname{supp}(\mu)$.

In questo caso, assumendo di avere $\mu(B_r(u)) \leq \mu(B_r(0))$, per ogni $u \in \mathbb{R}^n$ si riuscirà a descrivere in maniera più accurata il supporto della misura. Proveremo infatti che

Teorema 0.0.2. *Sia m intero positivo, $m \leq n$. Sia $\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ misura tale che $\mu(B_r(u)) \leq \mu(B_r(0))$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$. Allora esiste una forma quadratica semidefinita positiva $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $\operatorname{tr}(Q) = m$ tale che* $\operatorname{supp}(\mu) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = |x|^2\}$ *e $Q(u) \leq |u|^2$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$.*

Nel Capitolo 4 vedremo che le misure piatte non sono l'unico esempio di misura m-uniforme e costruiremo un esempio particolarmente significativo in questo ambito: Il Cono di Preiss in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 0.0.3. *Sia* $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}$. *Allora* $\mathcal{H}^3_\Gamma$ *è una misura 3-uniforme su* $\mathbb{R}^4$.

L'importanza di questo esempio sta nel fatto che esso esaurisce, insieme alle misure piatte su piani 3-dimensionali, le possibili misure 3-uniformi su $\mathbb{R}^4$. Vale infatti il seguente teorema di classificazione:

Teorema 0.0.4. *Sia* $\mu : \mathbb{R}^{n+1} \to [0, \infty]$ *misura* n*-uniforme. Allora* μ *è piatta oppure* $n \geq 3$ *ed esiste un sistema ortonormale di coordinate tale che* $\mu = \mathcal{H}^n$ *ristretta al cono* $\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2\}$.

Indice

Capitolo 1

Notazioni e richiami di teoria della misura

Denoteremo con $\mathcal{L}^n$ la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. Data una σ-algebra $\mathcal{A}$, una misura $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ed un insieme $E \in \mathcal{A}$ indichiamo con μ_E la restrizione di μ ad E, ossia $\mu_E(A) = \mu(E \cap A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$.

Per ogni numero reale $\alpha > 0$ definiamo la costante

$$\omega_\alpha := \frac{\pi^{\alpha/2}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)},$$

dove

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s} ds \quad \text{per} \quad 0 < t < \infty.$$

Se α è un intero ω_α è uguale alla misura di Lebesgue della palla unitaria in $\mathbb{R}^\alpha$ (si veda Corollario 2.55, [6]).

Definizione 1.1. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \alpha < \infty$. Definiamo la funzione $\mathcal{H}^\alpha : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ponendo

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A)$$

con $\mathcal{H}^\alpha_\delta(A)$ è definito da

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) = \frac{\omega_\alpha}{2^\alpha} \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty (\operatorname{diam}(C_j))^\alpha : A \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j,\ \operatorname{diam}(C_j) < \delta \right\}$$

dove $\operatorname{diam}(C_j) = \sup\{|x - y| : x,\ y \in C_j\}$.

Richiamiamo alcune definizioni.

Definizione 1.2. Denotiamo con $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ la σ-algebra dei boreliani, ossia la σ-algebra generata dagli aperti di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.3. Una misura μ in $\mathbb{R}^n$ è Borel regolare se gli insiemi boreliani sono misurabili e se per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-misurabile esiste un un insieme di Borel B tale che $A \subset B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.

Riportiamo il seguente teorema (si veda il Teorema 1, 2.1 di [1]).

Teorema 1.0.5. *Per $0 \leq \alpha < \infty$, $\mathcal{H}^\alpha$ è una misura Borel regolare.*

Definizione 1.4. Chiameremo la misura $\mathcal{H}^\alpha : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ misura di Hausdorff α-dimensionale.

Elenchiamo ora alcune proprietà elementari della misura $\mathcal{H}^\alpha$ (Teorema 2, 2.1, [1]).

Proposizione 1.0.6. *Per $0 \leq \alpha < \infty$ valgono le seguenti affermazioni:*

(i) $\mathcal{H}^0(A) = \mathrm{card}(A)$;

(ii) $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ *su* $\mathbb{R}^n$;

(iii) $\mathcal{H}^\alpha(\lambda A) = \lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A)$ *per ogni* $\lambda > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$;

(iv) $\mathcal{H}^\alpha(L(A)) = \mathcal{H}^\alpha(A)$ *per ogni isometria affine* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Se $1 \leq k \leq n$, una varietà C^1 k-dimensionale di $\mathbb{R}^n$ è un insieme $M \subset \mathbb{R}^n$ con la seguente proprietà: per ogni $x \in M$ esiste un intorno U di x in $\mathbb{R}^n$, un aperto $V \subset \mathbb{R}^k$, ed una mappa iniettiva $f : V \to U$ di classe C^1 con differenziale $D_x f$ iniettivo per ogni $x \in V$ tale che $f(V) = M \cap U$. Una tale f viene detta parametrizzazione di $M \cap U$.

Sia ora $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineare ed iniettiva e definiamo la trasposta $T^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ di T imponendo la condizione

$$\langle T^*(w), v\rangle = \langle T(v), w\rangle \quad \text{per ogni} \quad w \in \mathbb{R}^n,\ v \in \mathbb{R}^k.$$

Essendo la composizione $T^*T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ invertibile, possiamo definire

$$J(T) := \sqrt{\det(T^*T)}.$$

Riportiamo il seguente teorema (si veda 11.25, [6]).

Teorema 1.0.7. (Formula dell'Area) *Sia M una vairietà C^1 di dimensione k di $\mathbb{R}^n$ parametrizzata da $f : V \to \mathbb{R}^n$. Se A è un sottoinsieme di Borel di V, allora $f(A)$ è un sottoinsieme di Borel di $\mathbb{R}^n$, e*

$$\mathcal{H}^k(f(A)) = \int_A J(D_x f) d\mathcal{H}^k(x). \tag{1.1}$$

Nel seguito utilizzeremo la seguente uguaglianza, che si deduce dalla Formula di Coarea (si veda 3.3.4 di [1]).

Proposizione 1.0.8. (Formula di Integrazione in Coordinate Polari) *Sia* $g \in L^1_{\mathcal{L}^n}(\mathbb{R}^n)$*. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(0)} g(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right) dr. \tag{1.2}$$

Capitolo 2

Supporto di misure uniformi

2.1 Introduzione

Iniziamo con la seguente

Definizione 2.1. Sia $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ una misura. Definiamo il supporto di μ come la chiusura dell'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \mu(B_r(x)) > 0 \quad \text{per ogni} \quad r > 0\},$$

dove $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$. Denotiamo con $\operatorname{supp}(\mu)$ il supporto di μ.

Definizione 2.2 (Misura Uniforme)**.** Una misura boreliana $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ finita sui compatti è detta uniforme se

$$\mu(B_r(x)) = \mu(B_r(y)) \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \operatorname{supp}(\mu),\ r > 0.$$

Ad una misura uniforme μ possiamo associare la funzione $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$, che chiameremo sostegno di μ, definita da

$$f(r) = \mu(B_r(x)) \quad \text{per ogni} \quad r > 0.$$

La definizione di f non dipende dal punto $x \in \operatorname{supp}(\mu)$, ed inoltre f risulta essere non negativa, crescente e continua da sinistra.

Dimostriamo ora una proprietà dell'integrale in una misura uniforme di funzioni radiali.

Proposizione 2.1.1. *Sia $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ una misura uniforme, sia $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana con $\varphi \geq 0$, allora per x, $y \in \operatorname{supp}(\mu)$ si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x - z|) d\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|y - z|) d\mu(z). \tag{2.1}$$

Prova. Notiamo innanzitutto che per ogni $0 < r < \infty$ e per ogni $x, y \in \operatorname{supp}(\mu)$ si ha

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[0,r)}(|x-z|)d\mu(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_r(x)}(z)d\mu(z) \\
&= \mu(B_r(x)) \\
&= \mu(B_r(y)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_r(y)}(z)d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[0,r)}(|y-z|)d\mu(z),
\end{aligned}
$$

ed inoltre

$$
\mu(\overline{B_r(x)}) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_{r+1/n}(x)) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_{r+1/n}(y)) = \mu(\overline{B_r(y)}),
$$

da cui in maniera analoga si ottiene

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[0,r]}(|x-z|)d\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[0,r]}(|y-z|)d\mu(z).
$$

Quindi per ogni intervallo limitato $I \subset [0,\infty)$ abbiamo l'uguaglianza

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \chi_I(|x-z|)d\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_I(|y-z|)d\mu(z)
$$

e dalla linearità dell'integrale segue che

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(|x-z|)d\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(|y-z|)d\mu(z)
$$

per ogni funzione semplice α definita su $[0,\infty)$. Sia ora $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione monotona crescente di funzioni semplici non negative su $[0,\infty)$ che converge puntualmente a φ. Per il teorema della convergenza monotona si conclude che

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x-z|)d\mu(z) &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(|x-z|)d\mu(z) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(|y-z|)d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|y-z|)d\mu(z).
\end{aligned}
$$

□

2.2 Teorema di Regolarità di Kirchheim-Preiss

Il seguente teorema, tratto dal lavoro di B. Kirchheim e D. Preiss [3], caratterizza il supporto di una misura uniforme come varietà analitica.

Teorema 2.2.1 (Kirchheim-Preiss). *Sia $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0,\infty]$ una misura uniforme. Allora il supporto di μ è una varietà analitica reale, ossia esiste una funzione analitica $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che* $\operatorname{supp}(\mu) = \{H = 0\}$.

Prima di procedere con la dimostrazione, proviamo il seguente

Lemma 2.2.2. *Sia f il sostegno di una misura uniforme μ. Allora:*

$$\mu(B_r(y)) \leq 5^n \left(\frac{r}{s}\right)^n f(s) \tag{2.2}$$

per ogni $0 < s < r < \infty$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^n$.

Prova. Fissiamo s, r tali che $0 < s < r < \infty$ e denotiamo con $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottoinsiemi $Z \subset B_r(y)$ tali che

$$|z_1 - z_2| \geq \frac{s}{2}$$

per ogni z_1, $z_2 \in Z$ con $z_1 \neq z_2$.

Per $Z \in \mathcal{F}$ le palle $\{B_{\frac{s}{4}}(z) : z \in Z\}$ sono disgiunte e contenute in $B_{\frac{5r}{4}}(y)$. Quindi, per $\omega_n = \mathcal{L}^n(B_1(0))$, abbiamo

$$\operatorname{card}(Z)\omega_n \left(\frac{s}{4}\right)^n = \sum_{z\in Z} \mathcal{L}^n(B_{\frac{s}{4}}(z)) \leq \mathcal{L}^n(B_{\frac{5r}{4}}(y)) = \omega_n \left(\frac{5r}{4}\right)^n,$$

da cui si conclude che

$$\operatorname{card}(Z) \leq 5^n \left(\frac{r}{s}\right)^n.$$

Questo ci permette di scegliere un insieme $M \in \mathcal{F}$ tale che $\mathrm{card}(M) = \max_{Z\in\mathcal{F}} \mathrm{card}(Z)$. Fissato $z \in M$ si ha o che $B_{\frac{s}{2}}(z) \cap \mathrm{supp}\,(\mu) = \emptyset$ e quindi $\mu(B_{\frac{s}{2}}(z)) = 0$, oppure che esiste $x \in B_{\frac{s}{2}}(z) \cap \mathrm{supp}\,(\mu)$ e quindi che $\mu(B_{\frac{s}{2}}(z)) \le \mu(B_s(x)) = f(s)$. In ogni caso, vale la disuguaglianza

$$\mu(B_{\frac{s}{2}}(z)) \le f(s)$$

per ogni $z \in M$. Si noti che la massimalità di M implica che le palle $\{B_{\frac{s}{2}}(z)\}_{z\in M}$ ricoprono $B_r(y)$. Possiamo quindi concludere che

$$\mu(B_r(y)) \le \sum_{z\in M} \mu(B_{\frac{s}{2}}(z)) \le \mathrm{card}(Z) f(s) \le 5^n \left(\frac{r}{s}\right)^n f(s).$$

□

Dimostrazione del Teorema 2.2.1. Sia $x_0 \in \mathrm{supp}\,(\mu)$ un punto fissato. Poniamo

$$F(x,s) := \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-s|z-x|^2} - e^{-s|z-x_0|^2}\right) d\mu(z) \quad \text{per} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad s > 0.$$

Proviamo che $F(x,s) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $s > 0$. Per il Teorema di Fubini Tonelli possiamo scrivere

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-x|^2} d\mu(z) = \int_0^1 \mu\left(\{z : e^{-s|z-x|^2} > r\}\right) dr = \int_0^1 \mu\left(B_{\sqrt{-(\ln r)/s}}(x)\right) dr.$$

Vogliamo ora maggiorare l'integrale a destra utilizzando la stima del Lemma 2.2.2

$$\mu(B_{r'}(x)) \le 5^n \left(\frac{r'}{s'}\right)^n f(s')$$

con $r' = \sqrt{-(\ln r)/s}$ e $s' = s^{-1/2}$, a tal fine si noti che $s' < r'$ se e solo se

$r < e^{-1}$. Otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mu\Big(B_{\sqrt{-(\ln r)/s}}(x)\Big)dr &= \int_0^{e^{-1}} \mu\Big(B_{\sqrt{-(\ln r)/s}}(x)\Big)dr \\ &\quad + \int_{e^{-1}}^1 \mu\Big(B_{\sqrt{-(\ln r)/s}}(x)\Big)dr \\ &\le 5^n f(s^{-1/2}) \int_0^{e^{-1}} (-\ln r)^{n/2} dr \\ &\quad + \int_{e^{-1}}^1 \mu\Big(B_{\sqrt{-(\ln r)/s}}(x)\Big)dr.\end{aligned}$$

Ricordando che per ogni $n \in \mathbb{N}, n > 0$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\Big[\ln(1/r)\Big]^{n/2}}{(1/r)^{1/2}} = 0,$$

troviamo $\delta > 0$ tale che, per ogni $0 < r < \delta$,

$$\Big[\ln(1/r)\Big]^{n/2} \le (1/r)^{1/2}.$$

Concludiamo così che

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-x|^2} d\mu(z) \le 5^n f(s^{-1/2})\big(2\delta^{1/2} + (-\ln\delta)^{n/2}\big) + \mu(B_{s^{-1/2}}(x)) < \infty. \tag{2.3}$$

Questo argomento prova che la funzione f assume valori reali.

Affermiamo ora che $F(x,s) = 0$ per ogni $s > 1$ se e solo se $x \in \operatorname{supp}(\mu)$. Dalla Proposizione 2.1.1 segue che $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ implica $F(x,s) = 0$ per ogni $s > 1$ (in effetti per ogni $s > 0$); rimane quindi da provare l'implicazione opposta. Proveremo che se $x \notin \operatorname{supp}(\mu)$ allora esiste $s > 1$ tale che $F(x,s) < 0$. Assumiamo quindi $x \notin \operatorname{supp}(\mu)$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \cap \operatorname{supp}(\mu) = \emptyset$. Si avrà, nuovamente per il Lemma 2.2.2,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-x|^2} d\mu(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{(k+1)\varepsilon}(x)\setminus B_{k\varepsilon}(x)} e^{-s|z-x|^2} d\mu(z) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-sk^2\varepsilon^2} \mu(B_{(k+1)\varepsilon}(x)) \\
&\leq 10^n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-sk^2\varepsilon^2} (k+1)^n f(\varepsilon/2)
\end{aligned}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-x_0|^2} d\mu(z) \geq e^{-s\varepsilon^2/4} \mu(B_{\varepsilon/2}(x_0)) = e^{-s\varepsilon^2/4} f(\varepsilon/2).$$

Queste ultime due disuguaglianze implicano che

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-x|^2} d\mu(z)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-x^0|^2} d\mu(z)} &\leq 10^n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-s(k^2-1/4)\varepsilon^2} (k+1)^n \\
&\leq 10^n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-s(k^2-1/4k^2)\varepsilon^2} (k+k)^n \\
&= 20^n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-s(3/4)k^2\varepsilon^2} k^n \\
&= 20^n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-s(3/8)k^2\varepsilon^2} e^{-s(3/8)k^2\varepsilon^2} k^n \\
&\leq 20^n e^{-s(3/8)\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(3/8)k^2\varepsilon^2} k^n.
\end{aligned}$$

Quindi, poichè

$$\lim_{s\to\infty} 20^n e^{-s(3/8)\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(3/8)k^2\varepsilon^2} k^n = 0,$$

deduciamo che

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-x|^2} d\mu(z)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-x^0|^2} d\mu(z)} = 0.$$

Concludiamo che, per s grande abbastanza, $F(x,s)$ dovrà essere strettamente negativa.

Definiamo ora la funzione $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ponendo

$$H(x) := \int_1^\infty e^{-s^2} F^2(x,s) ds \quad \text{per} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Proviamo che H è finita. Si noti che, se $s > 1$, per $x \in \mathbb{R}^n$ vale la stima

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-x|^2} d\mu(z) &\le 5^n f(s^{-1/2}) \int_0^{e^{-1}} (-\ln r)^{n/2} dr \\
&\quad + \int_{e^{-1}}^1 \mu\Big(B_{\sqrt{-(\ln r)/s}}(x)\Big) dr \\
&\le 5^n f(1) \int_0^{e^{-1}} (-\ln r)^{n/2} dr \\
&\quad + \int_{e^{-1}}^1 \mu\Big(B_{\sqrt{-(\ln r)}}(x)\Big) dr =: C < \infty.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Si ricava immediatamente la disuguaglianza

$$\begin{aligned}
F^2(x,s) &\le 2\bigg(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-x|^2} d\mu(z)\bigg)^2 + 2\bigg(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-x_0|^2} d\mu(z)\bigg)^2 \\
&\le 4C^2 < \infty
\end{aligned}$$

per ogni $s > 1$. Quindi H è finita e si ha che $H(x) = 0$ se e solo se $x \in \operatorname{supp}(\mu)$. Per completare la dimostrazione resta solo da mostrare che H è analitica.

Notiamo che H può essere estesa ad una funzione su $\mathbb{C}^n$ ponendo

$$H(\xi) := \int_1^\infty e^{-s^2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-s\sum_j (z_j-\xi_j)^2} - e^{-s|z-x_0|^2}\right) d\mu(z)\right]^2 ds$$

per ogni $(\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{C}^n$. Mostreremo che questa estensione è olomorfa. Iniziamo col mostrare che $H(\xi) \in \mathbb{C}$ per ogni $\xi \in \mathbb{C}^n$. Poniamo

$$h(s, z, \xi) := e^{-s\sum_j (z_j - \xi_j)^2} - e^{-s|z-x_0|^2},$$

in modo da avere

$$H(\xi) := \int_1^\infty e^{-s^2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} h(s, z, \xi)\, d\mu(z) \right]^2 ds.$$

Osserviamo poi che

$$h(s, z, \xi) = e^{-s|z-\mathrm{Re}\,\xi|^2 + s|\mathrm{Im}\,\xi|^2}\, e^{2si\sum_j (z_j - \mathrm{Re}\,\xi_j)\mathrm{Im}\,\xi_j} - e^{-s|z-x_0|^2},$$

da cui si ottiene

$$|h(s, z, \xi)| \leq e^{-s|z-x_0|^2} + e^{s|\mathrm{Im}\,\xi|^2} e^{-s|z-\mathrm{Re}\,\xi|^2}. \tag{2.5}$$

Quest'ultima disuguaglianza, insieme alla (2.4), ci servirà per stimare l'integrale seguente

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} h(s, z, \xi) d\mu(z) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |h(s, z, \xi)| d\mu(z) \\
&\leq e^{s|\mathrm{Im}\,\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-\mathrm{Re}\,\xi|^2} d\mu(z) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z-x_0|^2} d\mu(z) \\
&\leq C \left(1 + e^{s|\mathrm{Im}\,\xi|^2} \right)
\end{aligned}$$

per $s > 1$. Concludiamo che

$$|H(\xi)| \leq C \int_1^\infty e^{-s^2} \left(1 + e^{2s|\mathrm{Im}\,\xi|^2} \right) ds < \infty.$$

Mostriamo ora che per una generica direzione $\omega \in \mathbb{C}^n$ si ha che la derivata direzionale $\partial H / \partial \omega$ esiste in ogni punto di $\mathbb{C}^n$ e che risulta

$$\frac{\partial H}{\partial \omega}(\xi) = \int_1^\infty e^{-s^2} 2 \left[\int_{\mathbb{R}^n} h(s, z, \xi) d\mu(z) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h}{\partial \omega}(s, z, \xi) d\mu(z) \right] ds.$$

Siano ξ, $\omega \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ e si consideri il rapporto incrementale

$$\begin{aligned}\frac{H(\xi + t\omega) - H(\xi)}{t} &= \int_1^\infty \Big\{ e^{-s^2} \Big[\int_{\mathbb{R}^n} (h(s,z,\xi + t\omega) + h(s,z,\xi)) d\mu(z) \Big] \cdot \\ &\cdot \Big[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(s,z,\xi + t\omega) - h(s,z,\xi)}{t} d\mu(z) \Big] \Big\} ds.\end{aligned}$$

Studieremo ora il limite del rapporto incrementale per t che tende a 0. Per $\omega \in \mathbb{C}^n$ poniamo

$$|w|^2 := \sum_{j=1}^n \omega_j \overline{\omega_j}.$$

Siano s, ξ e ω fissati e per $|t| \leq 1$ definiamo e stimiamo utilizzando la (2.5) la funzione

$$\begin{aligned}f_{s,\xi,\omega,t}(z) := |h(s,z,\xi + t\omega) + h(s,z,\xi)| &\leq e^{-s|z - \mathrm{Re}\,(\xi + t\omega)|^2 + s|\mathrm{Im}\,(\xi + t\omega)|^2} \\ &\quad + 2\, e^{-s|z - x_0|^2} \\ &\quad + e^{-s|z - \mathrm{Re}\,\xi|^2 + s|\mathrm{Im}\,\xi|^2} \\ &\leq e^{2s(|\xi|^2 + |\omega|^2)} \big(e^{-s|z - \mathrm{Re}\,(\xi + t\omega)|^2} \\ &\quad + 2\, e^{-s|z - x_0|^2} + e^{-s|z - \mathrm{Re}\,\xi|^2} \big).\end{aligned}$$

Proviamo che esiste una funzione $f_{s,\xi,\omega} \in L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_{s,\xi,\omega,t} \leq f_{s,\xi,\omega}$ per ogni $|t| \leq 1$. Possiamo supporre $\mathrm{Re}\,\omega \neq 0$, altrimenti l'ultima stima fornirebbe già una maggiorante indipendente da t. Ora, se $z \notin B_{2|\mathrm{Re}\,\omega|}(\mathrm{Re}\,\xi)$ si ha l'ovvia disuguaglianza $|z - \mathrm{Re}\,\xi| \geq 2|\mathrm{Re}\,\omega|$, da cui si deduce che, per ogni $|t| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
|z - \operatorname{Re}\xi - t\operatorname{Re}\omega|^2 &\geq \left| z - \operatorname{Re}\xi - \frac{z - \operatorname{Re}\xi}{|z - \operatorname{Re}\xi|}|\operatorname{Re}\omega| \right|^2 \\
&= |z - \operatorname{Re}\xi|^2 \left| 1 - \frac{|\operatorname{Re}\omega|}{|z - \operatorname{Re}\xi|} \right|^2 \\
&\geq |z - \operatorname{Re}\xi|^2 \left(1 - \frac{|\operatorname{Re}\omega|}{2|\operatorname{Re}\omega|} \right)^2 \\
&= |z - \operatorname{Re}\xi|^2/4.
\end{aligned}$$

Quindi, chiamando $g(z) = \chi_{B_{2|\operatorname{Re}\omega|}(\operatorname{Re}\xi)}(z)$, per ogni $|t| \leq 1$ è verificata la disuguaglianza

$$f_{s,\xi,\omega,t}(z) \leq e^{2s(|\xi|^2+|\omega|^2)}\big(e^{-s|z-\operatorname{Re}\xi|^2/4} + g(z) + 2\,e^{-s|z-x_0|^2} + e^{-s|z-\operatorname{Re}\xi)|^2}\big)$$

dove la funzione di destra appartiene ad $L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ per la (2.3).

Per il Teorema della Convergenza Dominata concludiamo che

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} [h(s,z,\xi+t\omega) + h(s,z,\xi)]\, d\mu(z) = 2\int_{\mathbb{R}^n} h(s,z,\xi)d\mu(z).$$

Si consideri poi la quantità

$$\left| \frac{h(s,z,\xi+t\omega) - h(s,z,\xi)}{t} \right| \leq \left| e^{-s\sum_j (z_j-\xi_j)^2} \right| \left| \frac{e^{-st\left[t\sum_j \omega_j^2 + 2\sum_j (z_j-\xi_j)\omega_j\right]} - 1}{t} \right|.$$

Per un generico numero complesso α si ha

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{e^{-st\alpha} - 1}{t} \right| = s|\alpha|.$$

Ne deduciamo che per t in un intorno I di 0 e $|t| \leq 1$ vale la stima

$$\left| \frac{e^{-st\alpha} - 1}{t} \right| \leq 2e^{s|\alpha|}.$$

Utilizzando questa disuguaglianza elementare, semplici calcoli portano a

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{h(s,z,\xi+t\omega)-h(s,z,\xi)}{t}\right| &\leq 2\left[e^{-s\sum_j[(z_j-\operatorname{Re}\xi_j)^2+(\operatorname{Im}\xi_j)^2]}\right] \\
&\quad \cdot \left[e^{s\left|t\sum_j \omega_j^2+2\sum_j(z_j-\xi_j)\omega_j\right|}\right] \\
&\leq 2\,e^{-s|z-\operatorname{Re}\xi|^2}e^{s|\omega|^2}e^{2s\sum_j|z_j-\xi_j||\omega_j|} \\
&\leq 2\,e^{-s|z-\operatorname{Re}\xi|^2}e^{s|\omega|^2}e^{2sn|z-\xi||\omega|} \\
&\leq 2\,e^{-s|z-\operatorname{Re}\xi|^2}e^{s|\omega|^2}e^{2sn|z-\operatorname{Re}\xi||\omega|}e^{2sn|\operatorname{Im}\xi||\omega|} \\
&\leq 2\,e^{k_1 s}e^{-sk_2|z-\operatorname{Re}\xi|^2}
\end{aligned}
$$

per delle costanti k_1, k_2 opportune che dipendono solo da ξ, da ω e da n. Quindi di nuovo per il teorema della convergenza Dominata,

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{h(s,z,\xi+t\omega)-h(s,z,\xi)}{t}d\mu(z)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial h}{\partial\omega}(s,z,\xi)d\mu(z).$$

Ricaviamo ora

$$
\begin{aligned}
e^{-s^2}\int_{\mathbb{R}^n}|h(s,z,\xi+t\omega)+h(s,z,\xi))|d\mu(z) &\leq e^{-s^2}\int_{\mathbb{R}^n}|h(s,z,\xi+t\omega)|d\mu(z) \\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^n}|h(s,z,\xi))|d\mu(z) \\
&\leq e^{-s^2}\big[C\big(1+e^{s|\operatorname{Im}\xi|^2}\big) \\
&\quad+C\big(1+e^{s|\operatorname{Im}(\xi+t\omega)|^2}\big)\big] \\
&\leq c_1e^{c_1s-s^2}
\end{aligned}
$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{h(s,z,\xi+t\omega)-h(s,z,\xi)}{t}\right|d\mu(z)\leq c_2e^{c_2s}$$

per opportune costanti c_1 e c_2 indipendenti da s. Ne segue che

$$\begin{aligned} e^{-s^2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|h(s,z,\xi+t\omega)+h(s,z,\xi))|d\mu(z)\right)\cdot \\ \cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{h(s,z,\xi+t\omega)-h(s,z,\xi)}{t}\right|d\mu(z)\right)\leq c_3e^{c_3s-s^2}. \end{aligned}$$

per un'opportuna costante c_3. Applicando nuovamente il Teorema della Convergenza Dominata concludiamo che

$$\frac{\partial H}{\partial\omega}(\xi)=\int_1^\infty e^{-s^2}2\left[\int_{\mathbb{R}^n}h(s,z,\xi)d\mu(z)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial h}{\partial\omega}(s,z,\xi)d\mu(z)\right]ds.$$

Osservando infine che, per ogni j, si ha

$$\frac{\partial h}{\partial\bar{\xi}_j}(s,z,\xi)=0$$

ne segue che, per ogni j,

$$\frac{\partial H}{\partial\bar{\xi}_j}(\xi)=0.$$

Si conclude che H è olomorfa e quindi analitica. $\square$

Capitolo 3

Supporto di misure m-uniformi

3.1 Introduzione

Lo scopo di questo capitolo è di descrivere in maniera più accurata il supporto di una misura uniforme nel caso in cui il sostegno della misura sia una potenza del raggio.

Definizione 3.1 (Misura α-uniforme)**.** Sia $\alpha > 0$. Una misura di Borel μ su $\mathbb{R}^n$ è detta α-uniforme se

$$\mu(B_r(x)) = \omega_\alpha r^\alpha \quad \text{per ogni} \quad x \in \operatorname{supp}(\mu),\ r > 0.$$

Denotiamo con $\mathcal{U}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle misure α-uniformi tali che $0 \in \operatorname{supp}(\mu)$.

Esempio 3.1 (Misura Piatta)**.** Sia m intero tale che $1 \le m \le n$. Sia V un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m, p un punto di $\mathbb{R}^n$ e sia $K = p + V$ sottospazio affine. Allora la misura di Hausdorff m-dimensionale ristretta a K è una misura m-uniforme. Infatti, poichè la misura $\mathcal{H}^m$ è invariante per trasformazioni affini possiamo supporre $p = 0$ e $V = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$ in modo da avere $K = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$, e limitarci a calcolare la misura di palle centrate nell'origine. Infine, utilizzando la (1.1), troviamo

$$\mathcal{H}^m_K(B^n_r(0)) = \int_{K \cap B^n_r(0)} d\mathcal{H}^m(x) = \int_{B^m_r(0)} d\mathcal{L}^m(x) = \omega_m\, r^m \quad \text{per ogni} \quad r > 0,$$

dove $B^s_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^s : |x - y| < r\}$.

3.2 Supporto di misure m-uniformi

In questa sezione descriveremo il supporto di una misura m-uniforme, con m intero positivo, come luogo degli zeri di una forma quadratica. Richiamiamo alcune definizioni.

Definizione 3.2 (Forma Bilineare)**.** Una forma bilineare è una funzione $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$g(a_1u_1 + a_2u_2, v) = a_1g(u_1, v) + a_2g(u_2, v)$$

e

$$g(u, b_1v_1 + b_2v_2) = b_1g(u, v_1) + b_2g(u, v_2)$$

per ogni $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R},\ u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$.

Ricordiamo che fissata una base di $\mathbb{R}^n$ ad ogni forma bilineare può essere associata in maniera univoca una matrice di dimensione $n \times n$ tale che $g(u, v) = \langle u, A(v)\rangle$ per ogni $u,\ v \in \mathbb{R}^n$, dove col simbolo $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ si intende il prodotto scalare usuale di $\mathbb{R}^n$. Una forma bilineare g si dice simmetrica se $g(u, v) = g(v, u)$ per ogni $u,\ v \in \mathbb{R}^n$ ed in tal caso la matrice associata è simmetrica ($A^t = A$).

Definizione 3.3 (Forma Quadratica)**.** Una forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ è una funzione $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

(i) $Q(tu) = t^2Q(u) \quad$ per ogni $\quad u \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}$;

(ii) $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$G(u, v) = \frac{1}{2}(Q(u + v) - Q(u) - Q(v)) \quad \text{per ogni} \quad u,\ v \in \mathbb{R}^n$$

sia una forma bilineare.

Ad ogni forma quadratica Q è possibile associare una forma bilineare simmetrica G tale che $Q(u) = G(u, u)$, e quindi, in riferimento alla base canonica di $\mathbb{R}^n$, una matrice A simmetrica di dimensione $n \times n$ tale che $Q(u) = \langle u, A(u)\rangle$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$. Diciamo che una forma quadratica Q è semidefinita positiva se $Q(u) \geq 0$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$ e definiamo la traccia di Q ponendo

$$\operatorname{tr}(Q) := \sum_{i=1}^{n} Q(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, A(e_i)\rangle$$

dove gli e_i per $i \in \{1, \dots, n\}$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo infine che la traccia è un operatore continuo sullo spazio delle matrici di dimensione $n \times n$.

Il teorema che segue è tratto dal lavoro di D. Preiss [4] .

Teorema 3.2.1. *Sia m intero positivo, $m \leq n$. Sia $\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ misura tale che $\mu(B_r(u)) \leq \mu(B_r(0))$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$. Allora esiste una forma quadratica semidefinita positiva $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $\mathrm{tr}\,(Q) = m$ tale che $\mathrm{supp}\,(\mu) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = |x|^2\}$ e $Q(u) \leq |u|^2$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Per ogni $r > 0$, sia $b_r \in \mathbb{R}^n$ il punto definito dalla condizione

$$\langle b_r, v\rangle = \frac{\displaystyle\int_{B_r(0)} \left(r^2 - |z|^2\right) \langle z, v\rangle \, d\mu(z)}{\displaystyle\int_{B_r(0)} \left(r^2 - |z|^2\right) d\mu(z)}$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, e sia Q_r la forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ definita da

$$Q_r(v) = 2\,\frac{\displaystyle\int_{B_r(0)} \langle z, v\rangle^2 \, d\mu(z)}{\displaystyle\int_{B_r(0)} \left(r^2 - |z|^2\right) d\mu(z)}$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Chiaramente per ogni $r > 0$ Q_r è semidefinita positiva, ossia $Q_r(v) \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Ricaviamo ora, grazie al Teorema di Fubini Tonelli, un'uguaglianza che verrà utilizzata più volte in seguito:

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(0)} |z|^2 d\mu(z) &= \int_0^{r^2} \mu\big(\{z \in B_r(0) : |z| \geq \sqrt{t}\}\big)\, dt \\
&= \int_0^{r^2} \mu(B_r(0) \setminus B_{\sqrt{t}}(0))\, dt \\
&= \omega_m r^{m+2} - \frac{2\,\omega_m}{m+2} r^{m+2} \\
&= \frac{m\,\omega_m}{m+2} r^{m+2}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Dalla definizione di Q_r e dalla (3.1) troviamo

$$Q_r(v) \leq 2 \frac{|v|^2 \displaystyle\int_{B_r(0)} |z|^2 \, d\mu(z)}{\displaystyle\int_{B_r(0)} (r^2 - |z|^2) \, d\mu(z)}$$

$$= 2 \left(\frac{m \, \omega_m \, r^{m+2}}{m+2} \right) \left(\frac{m+2}{2 \, \omega_m \, r^{m+2}} \right) |v|^2 = m \, |v|^2$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Quindi, a meno di estrarre un'opportuna successione di raggi convergente a $+\infty$, supporremmo in seguito che Q_r abbia come limite puntuale, per r che tende a $+\infty$, una forma quadratica $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ anche essa semidefinita positiva. Calcoliamo la traccia di Q_r:

$$\mathrm{tr}\,(Q_r) = \sum_{i=1}^{n} Q_r(e_i) = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\displaystyle\int_{B_r(0)} z_i^2 d\mu(z)}{\displaystyle\int_{B_r(0)} \left(r^2 - |z|^2\right) d\mu(z)}$$

$$= 2 \frac{\displaystyle\int_{B_r(0)} |z|^2 d\mu(z)}{\displaystyle\int_{B_r(0)} \left(r^2 - |z|^2\right) d\mu(z)} = m.$$

Per continuità, concludiamo che $\mathrm{tr}\,(Q) = m$.

Mostriamo ora che l'ipotesi $\mu(B_r(u)) \leq \ \mu(B_r(0))$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n \, r > 0$, implica la disuguaglianza

$$\int_{B_r(u)} \left(r^2 - |z-u|^2\right)^2 d\mu(z) \leq \int_{B_r(0)} \left(r^2 - |z|^2\right)^2 d\mu(z) \tag{3.2}$$

valida per ogni $u \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Sia infatti $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x) = (r^2 - x^2)^2 \chi_{[0,r)}$. Tale funzione è chiaramente non negativa, continua e decrescente. Quindi esiste una successione crescente di funzioni semplici $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ che converge a φ della forma

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{I_k} \alpha_i^k \chi_{[0, r_i^k)}$$

con $\alpha_i^k \geq 0$, $r_i^k \leq r$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, ..., I_k\}$. Utilizzando il Teorema della Convergenza Monotona si trova

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(u)} (r^2 - |z-u|^2)^2 d\mu(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|z-u|) d\mu(z) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(|z-u|) d\mu(z) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{I_k} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha_i^k \chi_{[0,r_i^k)}(|z-u|) d\mu(z) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{I_k} \alpha_i^k \mu(B_{r_i^k}(u)) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{I_k} \alpha_i^k \mu(B_{r_i^k}(0)) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{I_k} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha_i^k \chi_{[0,r_i^k)}(|z|) d\mu(z) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(|z|) d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|z|) d\mu(z) \\
&= \int_{B_r(0)} \left(r^2 - |z|^2\right)^2 d\mu(z).
\end{aligned}$$

Per la Proposizione 2.1.1 vale inoltre, per ogni $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ e $r > 0$, l'uguaglianza

$$\int_{B_r(x)} \left(r^2 - |z-x|^2\right)^2 d\mu(z) = \int_{B_r(0)} \left(r^2 - |z|^2\right)^2 d\mu(z). \tag{3.3}$$

Proveremo ora che esiste una costante C tale che

$$2\langle b_r, u\rangle + Q_r(u) - |u|^2 \leq C|u|^3/r \tag{3.4}$$

per ogni $u \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ tali che $|u| \leq r$. Scriviamo

$$\begin{aligned}
(r^2 - |z-u|^2)^2 &= (r^2 - |z|^2 - |u|^2 + 2\langle z, u\rangle)^2 \\
&= (r^2 - |z|^2)^2 + |u|^4 + 4\langle z, u\rangle^2 \\
&\quad - 2|u|^2(r^2 - |z|^2) + 4\langle z, u\rangle (r^2 - |z|^2) \\
&\quad - 4|u|^2 \langle z, u\rangle,
\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} 4\langle z,u\rangle^2 - 2|u|^2(r^2-|z|^2) + 4\langle z,u\rangle(r^2-|z|^2) = (r^2-|z-u|^2)^2 \\ -(r^2-|z|^2)^2 - |u|^4 \\ +4|u|^2\langle z,u\rangle\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Utilizzando la (3.5), la (3.2) e la (3.1) proviamo la (3.4):

$$\begin{aligned} &2\langle b_r,u\rangle + Q_r(u) - |u|^2 \\ &\qquad = \frac{2\displaystyle\int_{B_r(0)}[(r^2-|z|^2)\langle z,u\rangle + \langle z,u\rangle^2]d\mu(z)}{\displaystyle\int_{B_r(0)}(r^2-|z|^2)d\mu(z)} - |u|^2 \\ &\qquad = \frac{2\displaystyle\int_{B_r(0)}[(r^2-|z|^2)\langle z,u\rangle + \langle z,u\rangle^2 - |u|^2(r^2-|z|^2)/2]d\mu(z)}{\displaystyle\int_{B_r(0)}(r^2-|z|^2)d\mu(z)} \\ &\qquad = \frac{\displaystyle\int_{B_r(0)}[(r^2-|z-u|^2)^2-(r^2-|z|^2)^2-|u|^4+4|u|^2\langle z,u\rangle]d\mu(z)}{2\displaystyle\int_{B_r(0)}(r^2-|z|^2)d\mu(z)} = (*) \end{aligned}$$

stimiamo allargando la palla di integrazione e utilizzando la (3.2)

$$(*) \leq \frac{\displaystyle\int_{B_{r+|u|}(u)} (r^2 - |z|^2)^2 d\mu(z) - \int_{B_r(0)} [(r^2 - |z|^2)^2 + |u|^4 - 4|u|^2 \langle z, u\rangle] d\mu(z)}{\displaystyle 2\int_{B_r(0)} (r^2 - |z|^2) d\mu(z)}$$

$$\leq \frac{\displaystyle\int_{B_{r+|u|}(0)\setminus B_r(0)} (r^2 - |z|^2)^2 d\mu(z) + \int_{B_r(0)} [4|u|^2 \langle z, u\rangle + |u|^4] d\mu(z)}{\displaystyle 2\int_{B_r(0)} (r^2 - |z|^2) d\mu(z)}$$

$$\leq \frac{\displaystyle\int_{B_{r+|u|}(0)\setminus B_r(0)} ((r + |u|)^2 - r^2)^2 d\mu(z) + 5\omega_m r^{m+1} |u|^3}{\displaystyle 2\int_{B_r(0)} (r^2 - |z|^2) d\mu(z)}$$

$$\leq \frac{\omega_m (|u|^2 + 2r|u|)^2 ((r + |u|)^m - r^m) + 5\omega_m r^{m+1} |u|^3}{m\, \omega_m r^{m+2} \,/\, (m+2)}$$

$$\leq \frac{9r^2 |u|^2 ((r + |u|)^m - r^m) + 5r^{m+1} |u|^3}{m\, r^{m+2} \,/\, (m+2)}$$

$$\leq C|u|^3/r \qquad \text{per} \quad |u| \leq r.$$

In maniera analoga, utilizzando la (3.5), la (3.3) e la (3.1), proviamo che esiste una costante H tale che

$$\left|2\langle b_r, x\rangle + Q_r(x) - |x|^2\right| \leq H|x|^3/r \tag{3.6}$$

per ogni $x \in \operatorname{supp}(\mu)$, $r > 0$ tali che $|x| \leq r$. Infatti abbiamo

$$
\begin{aligned}
&-2\langle b_r, x\rangle - Q_r(x) + |x|^2 \\
&= \frac{\displaystyle\int_{B_r(0)} \left[(r^2-|z|^2)^2 - (r^2-|z-x|^2)^2 + |x|^4 - 4|x|^2\langle z, x\rangle\right] d\mu(z)}{\displaystyle 2\int_{B_r(0)} (r^2-|z|^2) d\mu(z)} \\
&\leq \frac{\displaystyle 5\omega_m|x|^3 r^{m+1} + \int_{B_r(0)} (r^2-|x|^2)^2 d\mu(z) - \int_{B_r(0)} (r^2-|z-x|^2)^2 d\mu(z)}{m\,\omega_m r^{m+2}\,/\,(m+2)} \\
&\leq \frac{\displaystyle 5\omega_m|x|^3 r^{m+1} + \int_{B_r(0)} (r^2-|x|^2)^2 d\mu(z) - \int_{B_{r-|x|}(x)} (r^2-|z-x|^2)^2 d\mu(z)}{m\,\omega_m r^{m+2}\,/\,(m+2)} = (**)
\end{aligned}
$$

utilizzando la (3.3)

$$
\begin{aligned}
(**) &= \frac{\displaystyle 5\omega_m|x|^3 r^{m+1} + \int_{B_r(0)} (r^2-|x|^2)^2 d\mu(z) - \int_{B_{r-|x|}(0)} (r^2-|z|^2)^2 d\mu(z)}{m\,\omega_m r^{m+2}\,/\,(m+2)} \\
&\leq \frac{\displaystyle 5\omega_m|x|^3 r^{m+1} + \int_{B_r(0)\setminus B_{r-|x|}(0)} (r^2-|x|^2)^2 d\mu(z)}{m\,\omega_m r^{m+2}\,/\,(m+2)} \\
&\leq \frac{5|x|^3 r^{m+1} + [(r-|x|)^2 - r^2]^2[r^m - (r-|x|)^m]}{m\,r^{m+2}\,/\,(m+2)} \\
&\leq \frac{5|x|^3 r^{m+1} + 9|x|^2 r^2[r^m - (r-|x|)^m]}{m\,r^{m+2}\,/\,(m+2)} \\
&\leq H|x|^3/r \qquad \text{per} \quad |x| \leq r.
\end{aligned}
$$

Dalla disequazione (3.4) deduciamo che $b_r = 0$ per ogni $r > 0$. Sia infatti $r > 0$ fissato e sia, per assurdo, $b_r \neq 0$. Sia poi $t > 0$ tale che $t\,|b_r| \leq r$ e dividiamo la (3.4) per $|u|$, con $u = tb_r$, ottenendo

$$2\frac{\langle b_r, tb_r\rangle}{t|b_r|} + \frac{Q_r(tb_r)}{t|b_r|} - t|b_r| = 2|b_r| + t\frac{Q_r(b_r)}{|b_r|} - t|b_r| \leq C\,\frac{t^2|b_r|}{r}.$$

Da quest'ultima disuguaglianza passando al limite per t che tende a 0 si avrebbe $b_r = 0$ giungendo così ad una contraddizione. Quindi $b_r = 0$ per ogni $r > 0$ e dalla (3.4) per r che tende ad infinito otteniamo che

$$Q(u) \leq |u|^2 \quad \text{per} \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

ed in maniera analoga dalla (3.6) si deduce che

$$Q(x) = |x|^2 \quad \text{per} \quad x \in \mathrm{supp}(\mu).$$

$\square$

Capitolo 4

Il Cono di Preiss in $\mathbb{R}^4$

In questo capitolo presentiamo un esempio di misura 3-uniforme in $\mathbb{R}^4$ diverso dalla misura di Hausdorff $\mathcal{H}^3$ ristretta ad un piano di dimensione 3. Ciò che rende particolarmente significativo questo esempio è il fatto che esso esaurisce, insieme alle misure piatte su iperpiani 3-dimensionali, le possibili misure 3-uniformi su $\mathbb{R}^4$ e che qualcosa di simile accade anche in dimensione maggiore. Riportiamo di seguito un teorema che enuncia in maniera formale quanto finora detto, si veda [5] per una dimostrazione.

Teorema 4.0.2. *Sia $\mu : \mathbb{R}^{n+1} \to [0, \infty]$ misura n-uniforme. Allora μ è piatta oppure $n \geq 3$ ed esiste un sistema ortonormale di coordinate tale che $\mu = \mathcal{H}^n$ ristretta al cono $\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2\}$.*

In questa tesi ci limiteremo a mostrare che la misura di Hausdorff La dimostrazione quì riportata è tratta da [2]; un argomento alternativo può essere anch'esso trovato in [5].

Teorema 4.0.3. *Sia $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}$. Allora $\mathcal{H}^3_\Gamma$ è una misura 3-uniforme su $\mathbb{R}^4$.*

Avremo bisogno di due lemmi tecnici.

Lemma 4.0.4. *Sia $p \in \Gamma \setminus \{0\}$. Allora esiste una costante c tale che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-r^2|x-p|^2} d\mathcal{H}^3_\Gamma(x) = cr^{-3} \quad \text{per ogni} \quad r > 0, \tag{4.1}$$

e vale l'identità

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-r^2|x-p|^2} d\mathcal{H}^3_\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^k}{\partial r^k} e^{-r^2|x-p|^2} d\mathcal{H}^3_\Gamma(x) \tag{4.2}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Prova. Si noti che il cono è invariante per dilatazioni centrate nell'origine e per rotazioni attorno all'asse x_4. Quindi sarà sufficiente provare la (4.1) per il punto $p = (1,0,0,1)$ e per ogni $r > 0$. Per la (1.2) si ha

$$I(r) := \int_0^\infty \int_{\Gamma\cap\partial B_\rho(0)} e^{-r^2\left[(x_1-1)^2+x_2^2+x_3^2+(x_4-1)^2\right]} d\mathcal{H}^2(x)d\rho =: \int_0^\infty J(\rho)d\rho.$$

Notiamo che $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_4 - 1)^2 = |x|^2 + 2 - 2(x_1 + x_4)$ e che $\Gamma \cap \partial B_\rho(0)$ é dato da

$$\left\{x_4 = \rho/\sqrt{2},\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2/2\right\} \cup \left\{x_4 = -\rho/\sqrt{2},\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2/2\right\}.$$

Calcoliamo quindi

$$J(\rho) = e^{-r^2(\rho^2+2)}\left(e^{\sqrt{2}r^2\rho} + e^{-\sqrt{2}r^2\rho}\right)\int_{\{x\in\mathbb{R}^3:x_1^2+x_2^2+x_3^2=\rho^2/2\}} e^{2r^2x_1}d\mathcal{H}^2(x)$$

$$=: e^{-r^2(\rho^2+2)}\left(e^{\sqrt{2}r^2\rho} + e^{-\sqrt{2}r^2\rho}\right)K(\rho).$$

Utilizzando le coordinate sferiche $f(\theta,\phi) = (\rho/\sqrt{2})(\cos\theta, \sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi)$ calcoliamo

$$K(\rho) = \frac{\rho^2}{2}\int_0^\pi e^{\sqrt{2}r^2\rho\cos\theta}2\pi\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{\pi\rho}{\sqrt{2}r^2}\left[e^{\sqrt{2}r^2\rho} - e^{-\sqrt{2}r^2\rho}\right].$$

Da cui concludiamo che

$$J(\rho) = \frac{\pi\rho}{\sqrt{2}r^2}e^{-r^2(\rho^2+2)}\left(e^{\sqrt{2}r^2\rho} + e^{-\sqrt{2}r^2\rho}\right)\left(e^{\sqrt{2}r^2\rho} - e^{-\sqrt{2}r^2\rho}\right)$$

$$= \frac{\pi\rho}{\sqrt{2}r^2}e^{-r^2(\rho^2+2)}\left(e^{2\sqrt{2}r^2\rho} - e^{-2\sqrt{2}r^2\rho}\right)$$

$$= \frac{\pi\rho}{\sqrt{2}r^2}\left(e^{-r^2(\rho-\sqrt{2})^2} - e^{-r^2(\rho+\sqrt{2})^2}\right).$$

Ricaviamo infine

$$I(r) = \frac{\pi}{\sqrt{2}r^2}\left[\int_0^\infty e^{-r^2(\rho-\sqrt{2})^2}\rho\,d\rho - \int_0^\infty e^{-r^2(\rho+\sqrt{2})^2}\rho\,d\rho\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}r^2}\left[\int_{-\sqrt{2}}^\infty e^{-r^2t^2}(t+\sqrt{2})dt - \int_{\sqrt{2}}^\infty e^{-r^2t^2}(t-\sqrt{2})dt\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}r^2}\left\{\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} e^{-r^2t^2}t\,dt + \sqrt{2}\left[\int_{-\sqrt{2}}^\infty e^{-r^2t^2}dt + \int_{\sqrt{2}}^\infty e^{-r^2t^2}dt\right]\right\}$$

$$= \frac{\pi}{r^2}\left[\int_{-\sqrt{2}}^\infty e^{-r^2t^2}t\,dt + \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} e^{-r^2t^2}t\,dt\right] = \frac{\pi^{3/2}}{r^3}.$$

Proviamo la (4.2). Per $\bar{r} > 0$, $\delta > 0$ piccolo ed $r \in [\bar{r}-\delta, \bar{r}+\delta]$, preso un polinomio $P \in P[r]$ si ha

$$\begin{aligned} P(r|x-p|)\,e^{-r^2|x-p|^2} &\leq P(r|x-p|)e^{-r^2|x-p|^2} \\ &= P(r|x-p|)\,e^{-r^2|x-p|^2/2}\,e^{-r^2|x-p|^2/2} \\ &\leq Me^{-(\bar{r}-\delta)^2|x-p|^2/2}, \end{aligned}$$

dove

$$M = \sup_{y\in\mathbb{R}}\left\{P(y)\,e^{-y^2/2}\right\}.$$

Inoltre per la (4.1) abbiamo

$$\int_\Gamma Me^{-(\bar{r}-\delta)^2|x-p|^2/2}d\mathcal{H}^3(x) = Mc\left(\frac{\bar{r}-\delta}{\sqrt{2}}\right)^{-3} < \infty.$$

Per ogni k possiamo quindi passare con la derivata sotto il segno di integrale e concludere che

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-r^2|x-p|^2}d\mathcal{H}^3_\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^k}{\partial r^k}e^{-r^2|x-p|^2}d\mathcal{H}^3_\Gamma(x).$$

$\square$

Proveremo ora un altro lemma tecnico che ci permetterà nella dimostrazione del teorema di approssimare funzioni a supporto compatto tramite successioni di opportune combinazioni di funzioni polinomiali ed esponenziali.

Definizione 4.1. Sia $P[x]$ l'insieme dei polinomi in una variabile reale. Definiamo $\mathcal{R}_n$ come lo spazio vettoriale generato dall'insieme

$$\left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : f(x) = a + P(|x|^2)e^{-b|x|^2} \text{ con } P \in P[x],\ a \in \mathbb{R},\ b > 0 \right\}.$$

Lemma 4.0.5. *Sia $g \in C_c(\mathbb{R})$ e definiamo $G \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $G(x) := g(|x|)$. Allora esiste una successione di funzioni $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_n$ tale che G_k converge uniformemente a G su $\mathbb{R}^n$.*

Prova. Chiaramente $A \in \mathcal{R}_n$ se e solo se $A(x) = a(|x|)$ per qualche $a \in \mathcal{R}_1$. Quindi è sufficiente provare il lemma nel caso $n = 1$. Sia $[0, \infty]$ la compattificazione di $[0, \infty)$ e notiamo che ogni funzione $f \in \mathcal{R}_1$ si estende in modo unico ad una funzione $\tilde{f} \in C([0, \infty])$. Denotiamo con $\tilde{\mathcal{R}}$ lo spazio delle estensioni continue delle funzioni in $\mathcal{R}_1$. $\tilde{\mathcal{R}}$ è un'algebra, separa i punti, ossia per ogni coppia di punti a, $b \in [0, \infty]$ esiste una funzione $f \in \tilde{\mathcal{R}}$ tale che $f(a) \neq f(b)$, e contiene le costanti. Possiamo quindi applicare il Teorema di Stone-Weierstrass e concludere che $\tilde{\mathcal{R}}$ è denso in $C([0, \infty])$.

□

Dimostrazione del Teorema 4.0.3. Sia $p \in \Gamma \setminus \{0\}$ fissato. Definiamo $\mathcal{B}$ come lo spazio delle funzioni $f \in L^1(\mathbb{R}^4, \mathcal{H}^3_\Gamma)$ per cui esistono una $\varphi \in C(\mathbb{R})$ ed una costante $c_\varphi \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) = \varphi(|x - p|)$ e che

$$\int_\Gamma \varphi\left(\frac{|x-p|}{r}\right) d\mathcal{H}^3(x) = c_\varphi r^3 \tag{4.3}$$

per ogni $r > 0$.
Per il Lemma 4.0.4 abbiamo che la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x-p|^2}$ appartiene a $\mathcal{B}$. Calcolando la derivata prima in r dell'uguaglianza

$$\int_\Gamma e^{-|x-p|^2/r^2} d\mathcal{H}^3(x) = cr^3$$

otteniamo

$$\int_\Gamma \frac{2|x-p|^2}{r^3} e^{-|x-p|^2/r^2} d\mathcal{H}^3(x) = 3cr^2.$$

Deduciamo quindi che esiste una costante c_2 tale che la funzione $|x-p|^2 e^{-|x-p|^2}$ verifica la (4.3) per ogni $r > 0$. Per induzione possiamo quindi affermare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ la funzione $|x-p|^{2k}e^{-|x-p|^2} \in \mathcal{B}$. Per linearità concludiamo che per ogni polinomio $P \in P[x]$ si ha, dopo aver riscalato r, che $P(|x-p|^2)e^{-a|x-p|^2} \in \mathcal{B}$ per ogni $a > 0$ ed infine che per ogni funzione $\gamma \in \mathcal{R}_n$ si avrà $\gamma(x-p)e^{-|x-p|^2} \in \mathcal{B}$.

Il prossimo obbiettivo sarà quello di provare che per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ esiste una costante c_φ tale che per ogni $r > 0$

$$\int_\Gamma \varphi\left(\frac{|x-p|}{r}\right) d\mathcal{H}^3(x) = c_\varphi r^3.$$

Sia quindi $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ e definiamo $g \in C_c(\mathbb{R}^4)$ ponendo $g(x) = \varphi(|x-p|)e^{-|x-p|^2}$. Per il Lemma 4.0.5 esiste una successione $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_n$ che converge uniformemente a g su $\mathbb{R}^4$ ed esiste quindi una costante $T > 0$ tale che $\|\gamma_k\|_{\mathbb{R}^4} \leq T$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Grazie a quanto visto sopra avremo inoltre che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k(x-p)e^{-|x-p|^2} \in \mathcal{B}$ e quindi che esiste una costante c_k tale che per ogni $r > 0$

$$\int_\Gamma \gamma_k\left(\frac{x-p}{r}\right) e^{-|x-p|^2/r^2} d\mathcal{H}^3(x) = c_k r^3.$$

Per ogni $r > 0$ la successione di funzioni $\gamma_k((x-p)/r)e^{-|x-p|^2/r^2}$ converge puntualmente alla funzione $\varphi(|x-p|/r)$ e vale la disuguaglianza

$$\left|\gamma_k\left(\frac{x-p}{r}\right) e^{-|x-p|^2/r^2}\right| \leq Te^{-|x-p|^2/r^2} \in L^1(\mathbb{R}^4, \mathcal{H}^3_\Gamma)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^4, k \in \mathbb{N}$. Per il Teorema della Convergenza Dominata deduciamo quindi che esiste il limite

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \int_\Gamma \gamma_k\left(\frac{x-p}{r}\right)e^{-|x-p|^2/r^2} d\mathcal{H}^3(x) = \lim_{k\to\infty} c_k r^3 &= cr^3 \\ &= \int_\Gamma \varphi\left(\frac{|x-p|}{r}\right) d\mathcal{H}^3(x)\end{aligned}$$

dove

$$c = \lim_{k\to\infty} c_k.$$

Sia ora $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$ che converge puntualmente alla funzione $\chi_{[0,1)}$ e tale che $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subset [-1,2]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Abbiamo che esiste una costante $K > 0$ tale che per ogni $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^4$,

$$\left|\varphi_k\left(\frac{|x-p|}{r}\right)\right| \leq K\chi_{[-1,2]}\left(\frac{|x-p|}{r}\right) \in L^1_x(\mathbb{R}^4, \mathcal{H}^3_\Gamma).$$

Grazie al Teorema della Convergenza Dominata deduciamo nuovamente che esiste il limite

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_\Gamma \varphi_k\left(\frac{|x-p|}{r}\right)d\mathcal{H}^3(x) = \lim_{k\to\infty} c_{\varphi_k} r^3 &= c_p r^3 \\ &= \int_\Gamma \chi_{[0,1)}\left(\frac{|x-p|}{r}\right)d\mathcal{H}^3(x) \\ &= \mathcal{H}^3(B_r(p)\cap\Gamma)\end{aligned}$$

dove nuovamente $\lim_{k\to\infty} c_{\varphi_k} r^3 = c_p$.

Riassumendo abbiamo quindi provato che per ogni $p \in \Gamma \setminus \{0\}$ esiste una costante c_p tale che

$$\mathcal{H}^3(B_r(p)\cap\Gamma) = c_p r^3$$

per ogni $r > 0$.

Questo ci permette di concludere la dimostrazione. Osservando infatti che per $p \in \Gamma \setminus \{0\}$ fissato Γ è una varietà C^1 in un intorno di p troviamo

$$c_p = \lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{H}^3(B_r(p)\cap\Gamma)}{r^3} = \omega_3,$$

e quindi che $\mathcal{H}^3(B_r(p)\cap\Gamma) = \omega_3 r^3$ per ogni $r > 0$, $p \in \Gamma\setminus\{0\}$. D'altra parte, per $r > 0$ fissato, possiamo prendere una successione $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Gamma \setminus \{0\}$ che converge a 0 e concludere che

$$\mathcal{H}^3(B_r(0)\cap\Gamma) = \lim_{k\to\infty}\mathcal{H}^3(B_r(p_k)\cap\Gamma) = \omega_3 r^3,$$

giungendo così a termine dalla dimostrazione. $\square$

Bibliografia

[1] EVANS L. C.; GARIEPY R. F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press (1992).

[2] DE LELLIS C. *Lecture notes on rectifiable sets, densities and tangent measures.* European Mathematical Society, Zürich (2008).

[3] KIRCHHEIM, B.; PREISS, D. *Uniformly distributed measures in Euclidean spaces.* Math. Scan. 90 (2002), 152-160.

[4] PREISS D. *Geometry of measures in $\mathbb{R}^n$: Distribution, rectifiability, and densities.* Ann. Math. 125 (1987), 537-643.

[5] KOWALSKI, O.; PREISS D. *Besicovitch-type properties of measures and submanifolds.* J. Reine Angew. Math. 379 (1987), 115-151.

[6] FOLLAND G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* Wiley (1999).