Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

Gamma Convergenza

Relatore:
Prof.
Roberto Monti

Laureando:
Stefano Mammola
Matricola 1029760

Anno accademico 2015/2016

4 ottobre 2015

Introduzione

Scopo principale di questa tesi è quello di introdurre il concetto di Γ-Convergenza, che è utile per studiare problemi di minimo.

Nel primo capitolo tratteremo il metodo diretto nel calcolo delle variazioni, con l'introduzione delle definizioni di semicontinuità inferiore e coercitività.

Nel secondo capitolo vedremo il concetto di rilassamento con il quale riusciamo a descrivere il comportamento delle successioni di punti minimizzanti per una funzione.

La definizione di Γ-limite e alcune delle sue proprietà in uno spazio topologico sono descritte nel terzo e nel quarto capitolo. E in quest'ultimo vedremo degli importanti teoremi sulla convergenza dei valori minimi di una successione di funzioni.

Nel quinto capitolo caratterizzeremo i Γ-limiti negli spazi metrici, e vedremo, inoltre, l'equivaleza fra la Γ-convergenza e la convergenza dei minimi.

Infine, nell'ultimo capitolo accenneremo ad un classico esempio di Γ-convergenza applicato alla teoria della transizione di fase, in cui si utilizzano i concetti trattati nei capitoli precedenti.

Abbiamo utilizzato il libro [1] per i primi quattro capitoli e il libro [2] per l'esempio finale.

Indice

Capitolo 1

Metodo Diretto nel Calcolo delle Variazioni

In questo capitolo verranno introdotti la nozione di semincontinuità e il metodo diretto di Tonelli per l'esistenza di punti di minimo nei problemi variazionali.

1.1 Funzioni semicontinue inferiormente

Sia X uno spazio topologico, allora per ogni $x \in X$ definiamo

$$\mathcal{N}(x) = \{S \subseteq X : S \text{ è intorno aperto di } x\}$$

Definizione 1.1.1. *Una funzione $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, dove $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ si dice **semicontinua inferiormente nel punto** $x \in X$ se per ogni $t \in \mathbb{R}$ con $t < F(x)$ esiste $U \in \mathcal{N}(x)$ tale che $t < F(y)$ per ogni $y \in U$.*

*F si dice **semicontinua inferiormente su** X se lo è in ogni $x \in X$.*

Proprietà 1.1.2. *Dalla definizione segue che $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua inferiormente in $x \in X$ se e solo se*

$$F(x) \leq \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y)\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che per ogni $t < F(x)$ esista $U \in \mathcal{N}(x)$ tale che $t < F(y)$ per ogni $y \in U$, allora fissato $\epsilon > 0$, considero $F(x) - \epsilon := t$. Esiste allora $U \in \mathcal{N}(x)$ tale che

$$t < F(y)$$

per ogni $y \in U$. Questo significa che

$$t \leq \inf_{y \in U} F(y)\,.$$

Dunque, passando all'estremo superiore e ricordando come ho definito t si ha

$$F(x) - \epsilon \leq \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y)$$

e data l'arbitrarietà di ϵ ottengo che $F(x) \leq \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y)$.

Viceversa, considero $t < F(x) \leq \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y)$, allora esiste $U \in \mathcal{N}(x)$ tale che $t < \inf_{y \in U} F(y)$, cioè

$$t < F(y)$$

per ogni $y \in U$. □

Inoltre, se F è semicontinua inferiormente in x allora

$$F(x) \leq \liminf_{h \to \infty} F(x_h)$$

per ogni (x_h) successione convergente a x in X.

Diamo ora una caratterizzazione della semicontinuità inferiore nel caso in cui X soddisfi il **primo assioma di numerabilità**, cioè che il filtro degli intorni di ogni punto di X ammetta base numerabile:

Proposizione 1.1.3. *Supponiamo che X soddisfi il primo assioma di numerabilità. Sia $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e sia $x \in X$. Sono equivalenti:*

(a) *F è semicontinua inferiormente in x;*

(b) *$F(x) \leq \liminf_{h \to \infty} F(x_h)$ per ogni (x_h) successione convergente a x in X.*

Dimostrazione. L'implicazione (a) $\Rightarrow$ (b) è quanto detto nella Proprietà 1.1.2 e vale anche se X non siddisfa il primo assioma di numerabilità. Il fatto che valga (b) $\Leftrightarrow$ (c) è banale. Quindi proviamo che (b) $\Rightarrow$ (a). Ragioniamo per assurdo. Consideriamo (U_h) una base numerabile per il filtro degli intorni di x tale che $U_{h+1} \subseteq U_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, supponiamo che (a) sia falso, allora dalla Proprietà 1.1.2 segue che esiste $t < F(x)$ tale che:

$$\inf_{y \in U} F(y) < t$$

per ogni $U \in \mathcal{N}(x)$. Quindi per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste $x_h \in U_h$ tale che $F(x_h) < t$. E, dal momento che (x_h) converge a x in X, otteniamo

$$\liminf_{h \to \infty} F(x_h) \leq t < F(x)$$

che contraddice (b). □

La Proposizione 1.1.3 ci porta ad una diversa definizione di semicontinuità inferiore che coincide con la precedente definizione se X soddisifa al primo assioma di numerabilità:

Definizione 1.1.4. *Una funzione $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* ***sequenzialmente semicontinua inferiormente in un punto*** *$x \in X$ se*

$$F(x) \leq \liminf_{h \to \infty} F(x_h)$$

per ogni successione (x_h) convergente a x in X.
Diciamo che F è ***sequenzialmente semicontinua inferiormente su*** *X se lo è in ogni punto $x \in X$.*

Proprietà 1.1.5. *Ogni funzione semicontinua inferiormente è sequenzialmente semicontinua inferiormente. Il viceversa in generale è falso, però è vero se X soddisfa il primo assioma di numerabilità.*

Definizione 1.1.6. *Un insieme $A \subseteq X$ si dice* ***sequenzialmente aperto in*** *X se per ogni $x \in A$ e per ogni successione (x_h) convergente a x in X, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $x_h \in A$ per ogni $h \geq k$. Un insieme $K \subseteq X$ si dice* ***sequenzialmente chiuso in*** *X se $x \in K$ ogni qualvolta esita una successione in K convergente a x in X. Si noti che un insieme A è sequenzialmente aperto se e solo se $X \backslash A$ è sequenzialmete chiuso.*

Per ogni funzione $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ definiamo

$$\{F \geq t\} = \{x \in X : F(x) \geq t\}$$

E allo stesso modo gli insieme di livello $\{F > t\}, \{F \leq t\}, \{F < t\}$. Definiamo ***epigrafo*** di F l'insieme:

$$epi(F) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : F(x) \leq t\}.$$

La seguente proposizione è una diretta conseguenza della Definizione 1.1.1 e della Definizione 1.1.4 :

Proposizione 1.1.7. *Sia $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Sono equivalenti:*

(a) F è semicontinua inferiormente (risp. sequenzialemte semicontinua inferiormente) su X;

(b) per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{F > t\}$ è aperto (risp. sequenzialmente aperto) su X;

(c) per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insime $\{F \leq t\}$ è chiuso (risp. sequenzialemte chiuso) su X;

(d) epi(F) è chiuso (risp. sequenzialmente chiuso) in $X \times \mathbb{R}$.

Le seguenti proprietà di stabilità per famiglie di funzioni semicontinue inferiormente si ottengono dalla definizine di semicontinuità inferiore e dalla sua caratterizzazione data nella Proposizione 1.1.7.

Proposizione 1.1.8. *Sia $(F_i)_{i \in I}$ una famiglia di funzioni su X semicontinue inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinue inferiormente). Allora la funzione $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ definita ponendo $F(x) = \sup_{i \in I} F_i(x)$ è semicontiua inferiormente (rsp. sequenzialmente semicontinua inferiormente) su X. Inoltre, se I è finito, allora la funzione $G\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ definita ponendo $G(x) = \min_{i \in I} F_i(x)$ è semicontinua inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinua inferiormente) su X.*

Dimostrazione. Fissato $x \in X$ e presa una successione (x_h) convergente a x in X abbiamo che

$$F_i(x) \leq \liminf_{h \to \infty} F_i(x_h) \leq \liminf_{h \to \infty} F(x_h)\,.$$

Passando poi all'estremo superiore su $i \in I$ otteniamo

$$F(x) \leq \liminf_{h \to \infty} F(x_h)$$

e dunque la conclusione. □

La seguente Proposizine segue subito dalla Definizione 1.1.1.

Proposizione 1.1.9. *Se F e G sono funzioni semicontinue inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinue inferiormente) su X e $F+G$ è ben definita su X, cioè $(-\infty,+\infty) \neq (F(x),G(x)) \neq (+\infty,-\infty)$ per ogni $x \in X$, allora $F+G$ è una funzione semicontinua inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinua inferiormente) su X.*

Esempio 1.1.10. *Sia A un sottoinsieme di X, e consideriamo la funzione $1_A\colon X \to \mathbb{R}$ definita ponendo $1_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $1_A(x) = 0$ se $x \in X \setminus A$. Allora 1_A è semicontinua inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinua inferiormente) se e solo se A è aperto (risp. sequenzialmente aperto) in X.*
Consideriamo, ora, $\chi_A\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione indicatrice di A, definita ponendo $\chi_A(x) = 0$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = +\infty$ se $x \in X \setminus A$. Allora χ_A è semicontinua inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinua inferiormente) se e solo se A è chiuso (risp. sequenzialmente chiuso) in X.

1.2 Funzioni coercitive

Definizione 1.2.1. *Un punto $x \in X$ si dice* ***punto di chiusura*** *di una successione (x_h) in X se per ogni $U \in \mathcal{N}(x)$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $h \geq k$ con $x_h \in U$. Ovvero x è un punto di chiusura per la succssione (x_h) se e solo se $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{\{x_h : h \geq k\}}$, dove la barra indica la chiusura nella topologia di X.*

È chiaro che se x è il limite di una sottosuccessione di (x_h), allora x è un punto di chiusura di (x_h). Il viceversa vale se X soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Si può dimostrare, usando solo la definizione, che se F è semicontinua inferiormente su X allora

$$F(x) \leq \limsup_{h\to\infty} F(x_h)$$

per ogni punto x di chiusura di una successione (x_h).
Se F è sequenzialmente semicontinua inferiormente questa disuguaglianza vale anche quando x è il limite di una sottosuccessione di (x_h).

Definizione 1.2.2. *$K \subseteq X$ si dice* ***numerabilmente compatto*** *se ogni successione in K ha almeno un punto di chiusura in K. Diciamo che K è* ***sequenzialmente compatto*** *se ogni successione in K ha una sottosuccessione che converge ad un punto di K.*

Se K è sequenzialmente compatto allora è numerabilmente compatto. Inoltre, ogni sottoinsieme compatto di X è numerabilmente compatto.

Le nozioni di compattezza, compattezza sequenziale e compattezza numerabile coincidono se X è metrizzabile.

Definizione 1.2.3. *Una funzione $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ è* ***coercitiva*** *(risp.* ***sequenzialmente coercitiva****) su X se $\overline{\{F \leq t\}}$ è numerabilmente compatto (risp. sequenzialmente compatto) per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

Osservazione 1.2.4. *Ogni funzione coercitiva è sequenzialmente coercitiva.*

Se F è coercitiva (risp. sequenzialmente coercitiva) su X e $G \geq F$ su X, allora G è coercitiva (risp. sequenzialmente coercitiva) su X.

Se F è coercitiva (risp. sequenzialmente coercitiva) su X, allora ogni successione (x_h) in X con $\limsup_{h\to\infty} F(x_h) < +\infty$ ha un punto di chiusura (risp. una sottosuccessione convergente) in X. Il viceversa è vero se F è semicontinua inferiormente, piochè $\{F \leq t\}$ è chiuso, oppure se X è metrizzabile.

Siamo ora in grado di descrivere il metodo diretto di Tonelli per dimostrare alcuni risultati di esistenza nel Calcolo delle Variazioni.

Definizione 1.2.5. *Sia $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione, $x \in X$ è* ***punto di minimo*** *per F in X se $F(x) \leq F(y)$ per ogni $y \in X$. Questo significa che*

$$F(x) = \inf_{y\in X} F(y)$$

Una successione (x_h) in X si dice ***successione minimizzante*** *per F in X se*

$$\inf_{y\in X} F(y) = \lim_{h\to\infty} F(x_h)$$

È chiaro che ogni funzione F ammette una successione minimizzante.

Il metodo diretto nel Calcolo delle Variazioni è riassunto nel seguente Teorema.

Teorema 1.2.6. *Sia $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione coercitiva e semicontinua inferiormente (risp. sequenzialmente coercitiva e sequenzialmente semicontinua inferiormente). Allora:*

(a) F ha un punto di minimo in X;

(b) se (x_h) è una successione minimizzante per F in X e x è un punto di chiusura per (x_h) (risp. se x è il limite per una sottosuccessione di (x_h)), allora x è punto di minimo per F in X;

(c) se F non è identicamente $+\infty$, allora ogni successione minimizzante per F ha un punto di chiusura (risp. una sottosuccessine convergente).

Dimostrazione. Se F è identicamente $+\infty$ allora ogni punto di X è un punto di minimo per F, quindi valgono (a) e (b). Supponiamo allora che F non sia identicamente $+\infty$, e consideriamo (x_h) una successsione minimizzante per F in X. Poichè F è coercitiva (risp. sequenzialmente coercitiva) e

$$\lim_{h\to\infty} F(x_h) = \inf_{y\in X} F(y) < \infty$$

Per l'Osservazione 1.2.4 la successione (x_h) ammette un punto di chiusura (risp. una sottosuccessione convergente a) $x \in X$, quindi abbiamo provato (c). Ora, dal momento che F è semicontinua inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinua inferiormente) otteniamo

$$\inf_{y\in X} F(y) \leq F(x) \leq \lim_{h\to\infty} F(x_h) = \inf_{y\in X} F(y)$$

e dunque sono tutte uguaglianze, il che dimostra anche (a) e (b). □

1.3 Funzioni convesse

Suppponiamo ora che X sia uno spazio vettoriale.

Definizione 1.3.1. *Una funzione $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ è* ***convessa*** *se*

$$F(tx + (1-t)y) \le tF(x) + (1-t)F(y)$$

per ogni $t \in]0,1[$ e per ogni $x, y \in X$ tali che $F(x) < +\infty$ e $F(y) < +\infty$

Osservazione 1.3.2. *La funzione $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ è convessa se e solo se epi(F) è un sottoinsieme convesso di $X \times \mathbb{R}$*

Definizione 1.3.3. *Una funzione $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* ***strettamente convessa*** *se F non è identicamente $+\infty$ e*

$$F(tx + (1-t)y) < tF(x) + (1-t)F(y)$$

per ogni $t \in]0,1[$ e per ogni $x, y \in X$ tali che $x \neq y$, $F(x) < +\infty$, e $F(y) < +\infty$.

Proposizione 1.3.4. *Sia $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione strettamente convessa. Allora F ha al massimo un punto di minimo in X.*

Dimostrazione. Siano x e y due punti di minimo per F in X, allora

$$F(x) = F(y) = \min_{z \in X} F(z) < +\infty.$$

Se $x \neq y$ si ha che

$$F\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) < \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y) = \min_{z \in X} F(z)$$

Che è assurdo. Quindi $x = y$. $\square$

Esempio 1.3.5. *Vediamo che la norma in uno spazio di Banach è semicontinua inferiormente per la convergenza debole. Sia $1 \le p < +\infty$, e siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $L^p(A)$. Consideriamo la funzione $u \in L^p(A)$ e il funzionale $F\colon L^p(A) \to \mathbb{R}$ tale che*

$$F(u) = \left(\int_A |u(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Consideriamo una successione (u_h) di funzioni in $L^p(A)$, allora si ha che (u_h) converge debolmente ad u in $L^p(A)$ se e solo se

$$\int_A u_h v dx \text{ converge a } \int_A uvdx$$

per ogni funzione $v \in L^q(A)$, dove p è tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ora consideriamo

$$F(u) = \|u\|_p = \sup_{v \in L^q(A), \|v\|_q \le 1} \int_A uvdx$$

Dunque per ogni $\|v\|_q \le 1$ si ha per la disuguaglianza di Hölder

$$\int_A uvdx = \lim_{h\to\infty} \int_A u_h v dx \le \liminf_{h\to\infty} \|u_h\|_p \|v\|_q \le \liminf_{h\to\infty} \|u_h\|_p .$$

Otteniamo quindi $\|u\|_p \le \liminf_{h\to\infty} \|u_h\|_p$, dunque la semicontinuità inferiore della norma.

Capitolo 2

Rilassamenti

In questo capitolo introdurremmo la definzizione di rilassamento, e vedremo la sua utilità nello studio dei problemi di minimo.

2.1 Inviluppo semicontinuo inferiore

Definizione 2.1.1. *Per ogni funzione $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ definiamo l'**inviluppo semicontinuo inferiore** (o **rilassamento**) sc^-F di F per ogni $x \in X$ ponendo*

$$(sc^-F)(x) = \sup_{G \in \mathcal{G}(F)} G(x)\,,$$

con $\mathcal{G}(F) = \{G$ funzione semicontinua inferiormente su $X \mid G(y) \leq F(y)$ per ogni $y \in X\}$.

Osservazione 2.1.2. *Dalla Proposizione 1.1.8 si ha che la funzione $sc^-F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua inferiormente su X. E dalla definizione si deduce che $sc^-F \leq F$ e che $sc^-F \geq G$ per ogni funzione semicontinua inferiormente G tale che $G \leq F$. Cioè sc^-F è la più grande funzione semicontinua inferiormente maggiorata da F.*

Vediamo ora l'aspetto locale della definizione di rilassamento che abbiamo appena visto. In particolare, se due funzioni F e G coincidono in un intorno aperto di $x \in X$ allora $sc^-F = sc^-G$.

Proposizione 2.1.3. *Sia $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Allora*

$$(sc^-F)(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y)$$

per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$H(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y)\,.$$

Si vede che H è semicontinua inferiormente su X e che $H(x) \leq F(x)$ per ogni $x \in X$, quindi $H \leq sc^-F$ dalla definizione di sc^-F.
Sia, ora, $G \in \mathcal{G}(F)$, allora per la Proprietà 1.1.2 si ottiene

$$G(x) \leq \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} G(y) \leq \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y) = H(x)$$

per ogni $x \in X$. Questo implica, dalla definizione di $sc^- F$, che $sc^- F \leq H$, il che prova la proposizione. $\square$

Esempio 2.1.4. *Sia $E \subseteq X$ e sia χ_E la funzione indicatrice di E. Allora $sc^-(\chi_E) = \chi_{\overline{E}}$, dove $\overline{E}$ è la chiusura di E in X.*

La seguente proposizione segue dall'Osservazione 2.1.2 e dalla Proposizione 1.1.7.

Proposizione 2.1.5. *Sia $F \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Allora:*

(a) per ogni $s \in \mathbb{R}$

$$\{sc^- F \leq s\} = \bigcap_{t>s} \overline{\{F \leq t\}}\,;$$

(b) l'epigrafico di $sc^- F$ è la chiusura in $X \times \mathbb{R}$ dell'epigrafico di F.

Diamo ora una caratterizzazione del rilassamento, $sc^- F$, in termini di successioni.

Proposizione 2.1.6. *Supponiamo che X soddissfi il primo assioma di numerabilità. Sia $F \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e sia $x \in X$. Allora $(sc^- F)(x)$ è caratterizzata dalle seguenti proprietà:*

(a) per ogni successione (x_h) convergente a x in X si ha

$$(sc^- F)(x) \leq \liminf_{h\to\infty} F(x_h)$$

(b) esiste una successione (x_h) convergente a x in X tale che

$$(sc^- F)(x) \geq \limsup_{h\to\infty} F(x_h)\,.$$

Dimostrazione. La (a) segue direttamente dalla Proposizione 1.1.3. e dal fatto che $(sc^- F) \leq F$. Per dimostrare (b) supponiamo che $(sc^- F)(x) < +\infty$. Sia allora (U_h) una base numerabile per il filtro degli intorni di x tale che $U_{h+1} \subseteq U_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, e sia (t_h) una successione convergente a $(sc^- F)(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ tale che $t_h > (sc^- F)(x)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Per la Proposizione 2.1.3 per ogni $h \in \mathbb{N}$ abbiamo che $t_h > \inf_{y\in U_h} F(y)$, quindi esiste $x_h \in U_h$ tale che $t_h > F(x_h)$. Poichè (x_h) converge a x in X si ha

$$\limsup_{h\to\infty} F(x_h) \leq \lim_{h\to\infty} t_h = (sc^- F)(x)$$

e dunque abbiamo provato (b). $\square$

La seguente proposizione è una diretta conseguenza della Definizione 2.1.1

Proposizione 2.1.7. *Siano F, $G \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni. Allora*

$$sc^-(F+G) \geq sc^- F + sc^- G\,,$$

essendo $F+G$ e $sc^- F + sc^- G$ ben definiti su X per la Proposizione 1.1.9.
Se G è continua e ovunque finita, allora

$$sc^-(F+G) = sc^- F + G\,.$$

2.2 Legame fra il problema originale e il problema rilassato

Vogliamo ora collegare il problema originale $\min\limits_{x \in X} F(x)$ e il problema rilassato $\min\limits_{x \in X}(sc^- F)(x)$. In particolare, vedremo un teorema che che descrive il comportamento delle successioni minimizzanti per F in termini dei minimi di $sc^- F$.

Teorema 2.2.1. *Supponiamo che $F \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sia una funzione coercitiva. Allora*

(a) $sc^- F$ è coercitiva e semicontinua inferiormente;

(b) $sc^- F$ ha un punto di minimo su X;

(c) $\min\limits_{x \in X} (sc^- F)(x) = \inf\limits_{x \in X} F(x)$;

(d) ogni punto di chiusura di una successione minimizzante per F è un punto di minimo per $sc^- F$ in X;

(e) se X soddisfa il primo assioma di numerabilità allora ogni punto di minimo per $sc^- F$ è il limite di una successione minimizzante per F in X.

Dimostrazione. Avevamo già osservato che la funzione $sc^- F$ è semicontinua inferiormente, è anche coercitiva per la Proposizione 2.1.5 e quindi ammette punto di minimo per il Teorema 1.2.6.

La funzione costante $\inf\limits_{y \in X} F(y)$ è chiaramente semicontinua inferiormente ed è maggiorata da F, quindi

$$\inf_{y \in X} F(y) \leq (sc^- F)(x)$$

per ogni $x \in X$ per la Definizione 2.1.1. Questo implica che

$$\inf_{y \in X} F(y) \leq \min_{x \in X} (sc^- F)(x) \,.$$

Poichè $sc^- F \leq F$, la disuguaglianza opposta è ovvia e quindi abbiamo dimostrato (c).

Se x è un punto di chiusura per una successione minimizzante (x_h) per F, allora per il fatto che $F(x) \leq \limsup_{h \to \infty} F(x_h)$, si ha

$$(sc^- F)(x) \leq \limsup_{h \to \infty} (sc^- F)(x_h) \leq \limsup_{h \to \infty} F(x_h) = \inf_{y \in X} F(y)$$

e quindi x è punto di minimo per $sc^- F$ dal punto (c). Se X soddisfa il primo assioma di numerabilità e x è punto di minimo per $sc^- F$, per la Proposizione 2.1.6 e per il punto (c) esiste una successione (x_h) convergente a x in X tale che

$$\inf_{y \in X} F(y) = (sc^- F)(x) = \lim_{h \to \infty} F(x_h) \,,$$

e quindi (x_h) è una successione minimizzante per F. $\square$

Osservazione 2.2.2. *Se x è punto di minimo per sc^-F tale che $(sc^-F)(x) = F(x)$, allora x è un punto di mimino per F, dal Teorema 2.2.1.(c). Dunque, se conosciamo esplicitamente sc^-F, possiamo usare il seguente* ***metodo per trovare il punto di minimo di una funzione coercitiva*** *F.*
Prima di tutto, cerchiamo l'insieme di tutti i punti di minimo di sc^-F (che è non vuoto per il Teorema 2.2.1.(b)). Ora, calcoliamo le funzioni F e sc^-F nei punti di minimo di sc^-F. Dal Teorema 2.2.1.(c) i punti di minimo di F sono esattamente quelli di sc^-F tali che $(sc^-F)(x) = F(x)$.

Capitolo 3

Γ-Convergenza

In questo capitolo introdurremo la nozione di Γ-limite per funzioni definite su uno spazio topologico e faremo un paragone fra questo e il tradizionale concetto di convergenza.

3.1 Γ-limite inferiore, Γ-limite superiore e Γ-limite

Sia X uno spazio topologico e come, definito nel Capitolo 1, sia $\mathcal{N}(x)$ l'insime di tutti gli intorni aperti di x in X. Sia (F_h) una successione di funzioni da X in $\overline{\mathbb{R}}$.

Definizione 3.1.1. *Definiamo il* **Γ-*limite inferiore*** *e il* **Γ-*limite superiore*** *della successione* (F_h) *come la funzione da* X *in* $\overline{\mathbb{R}}$ *tale che*

$$(\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h)(x) = \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y),$$

$$(\Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h)(x) = \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \limsup_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y).$$

Se esiste una funzione $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h = \Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h = F$, allora si dice che $F = \Gamma\text{-}\lim_{h\to\infty} F_h$ e che la successione (F_h) Γ- converge a F (in X) o che F è il Γ-*limite* di (F_h) (in X).

Osservazione 3.1.2. *È chiaro che* $\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h \leq \Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h$, *dunque* (F_h) Γ- *converge a* F *se e solo se*

$$\Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h \leq F \leq \Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h$$

cioè, se e solo se

$$\sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \limsup_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y) \leq F \leq \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y)$$

per ogni $x \in X$.

Lemma 3.1.3. *Le funzioni* $\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h$ *e* $\Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h$ *sono semicontinue inferiormente su* X.

Dimostrazione. Dimostriamo, innanzitutto, che se $\mathcal{U}$ è una famiglia di sottoinsiemi aperti di X, e se $\alpha\colon \mathcal{U} \to \overline{\mathbb{R}}$ è una arbitraria funzione di insiemi, cioè una funzine definita sui sottoinsiemi di X, allora la funzione $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ definita ponendo

$$F(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \alpha(U)$$

è semicontinua inferiormente su X.
Infatti, per ogni aperto $U \in X$ e ogni $y \in U$ abbiamo che $U \in \mathcal{N}(y)$, quindi $F(y) \geq \alpha(U)$. Questo implica che $\inf_{y \in U} F(y) \geq \alpha(U)$ per ogni aperto $U \subseteq X$, quindi

$$F(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \alpha(U) \leq \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y)$$

per ogni $x \in X$. Ed essendo la disuguaglianza opposta verificata per Proprietà 1.1.2, otteniamo che F è semicontinua inferiormente.

A questo punto per dimostrare il Lemma basta sceglere le funzioni di insiemi

$$\alpha(U) = \liminf_{h \to \infty} \inf_{y \in U} F_h(y)\,, \qquad \beta(U) = \limsup_{h \to \infty} \inf_{y \in U} F_h(y)\,,$$

definite per ogni aperto $U \subseteq X$. □

3.2 Carattere locale di un Γ-limite

La seguente osservazione mostra il carattere locale di un Γ -limite.

Osservazione 3.2.1. *Se $\mathcal{B}(x)$ è una base per il filtro degli intorni di x in X, allora*

$$(\Gamma\text{-}\liminf_{h \to \infty} F_h)(x) = \sup_{U \in \mathcal{B}(x)} \liminf_{h \to \infty} \inf_{y \in U} F_h(y),$$

$$(\Gamma\text{-}\limsup_{h \to \infty} F_h)(x) = \sup_{U \in \mathcal{B}(x)} \limsup_{h \to \infty} \inf_{y \in U} F_h(y).$$

Se due successioni (F_h) e (G_h) coincidono su un aperto U in X, allora il Γ-limite inferiore, così come il Γ-limite superiore, coincidono su U.

Il seguente esempio mostra come si può calcolare il Γ-limite mediante l'utilizzo dell'Osservazione 3.2.1., e mostra che in generale Γ-limite e limite puntuale sono diversi.

Esempio 3.2.2. *Supponiamo che $X = \mathbb{R}$.*

(a) Sia $F_h(x) = hxe^{-2h^2x^2}$, allora (F_h) Γ-converge in $\mathbb{R}$ alla funzione

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}, & se\ x = 0 \\ 0, & se\ x \neq 0\,, \end{cases}$$

mentre (F_h) converge puntualmente a 0.

(b) *Sia*

$$F_h(x) = \begin{cases} hxe^{-2h^2x^2}, & h \text{ è pari} \\ 2hxe^{-2h^2x^2}, & h \text{ è dispari} \end{cases}$$

Allora (F_h) *converge puntualmente a* 0*, ma* (F_h) *non* Γ*-converge in* $\mathbb{R}$*. Infatti*

$$(\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h)(x) = \begin{cases} -e^{-\frac{1}{2}}, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{se } x \neq 0\,, \end{cases}$$

mentre

$$\Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h)(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{se } x \neq 0\,. \end{cases}$$

(c) *Sia* $(F_h)(x) = hxe^{hx}$*, allora* (F_h) Γ*-converge in* $\mathbb{R}$ *allora funzione*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ -\frac{1}{e}, & \text{se } x = 0 \\ +\infty & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

Invece (F_h) *converge puntualmente a* 0 *su* $]-\infty, 0]$ *e puntualmente a* $+\infty$ *su* $]0, +\infty]$.

(d) *Sia* $(F_h)(x) = \arctan(hx)$*, allora* (F_h) Γ*-converge in* $\mathbb{R}$ *alla funzione*

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

Invece, (F_h) *converge puntualmente alla funzione*

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

(e) *Sia* $F_h(x) = \sin(hx)$*, allora* (F_h) Γ*-converge in* $\mathbb{R}$ *alla funzione costante* $F = -1$*, infatti* $F_h(x) \geq -1$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e quindi è verificata la prima condizione della Proposizione 5.1.1, e con la scelta di* $(x_h) = -\frac{\pi}{2h}$ *è verificata anche la seconda condizione. Invece,* (F_h) *non converge puntualmente su* $\mathbb{R}$.

(f) *Sia* $F_h(x) = -e^{hx^2}$*, allora* (F_h) Γ*-converge in* $\mathbb{R}$ *alla funzione*

$$F(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{se } x \neq 0\,, \end{cases}$$

che è anche il limite puntuale di (F_h)*, mentre* $(-F_h)$ Γ*-converge a* 0 *in* $\mathbb{R}$.

(g) *Sia*

$$F_h(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se } h(x-e^h) \textit{ è un intero} \\ 1, & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

La condizione $h(x-e^h) \in \mathbb{Z}$ *equivale a dire* $x \in \frac{1}{h}\mathbb{Z} + e^h$. *Dunque per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e ogni* $h \in \mathbb{N}$ *esiste* $y \in \mathbb{R}$ *tale che* $|y-x| < \frac{1}{h}$ *e* $F_h(y) = 0$. *Ciò mostra che* (F_h) Γ*-converge alla funzine costante* $F = 0$ *in* $\mathbb{R}$. *Infatti*

$$0 = F(x) \leq \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h)$$

per ogni (x_h) *convergente a* x *in* X, *essendo* $F_h(y) \geq 0$ *per ogni* $y \in \mathbb{R}$.

Inoltre, se prendiamo la successione $(x_h) = \frac{1}{h} + e^h$ *otteniamo*

$$0 = F(x) = \lim_{h\to\infty} F_h(x_h)\,,$$

e grazie alla Proposizione 5.1.1, abbiamo concluso.

Per provare che (F_h) *converge puntualmente a* 1, *consideriamo il fatto che e è trascendente su* $\mathbb{Z}$, *quindi, se proviamo che siste al più un indice* $h \in \mathbb{N}$ *tale che* $F_h(x) = 0$ *avremo concluso la dimostrazione. Consideriamo allora* $h_1 \neq h_2 \in \mathbb{N}$ *con* $h_1, h_2 \geq 1$ *tali che*

$$h_1(x - e^{h_1}) = m_1 \in \mathbb{Z} \qquad h_2(x - e^{h_2}) = m_2 \in \mathbb{Z}$$

Se ora moltiplichiamo la prima per h_2 *e la seconda per* h_1 *e poi sottraiamo le equazioni così ottenute, avremo*

$$h_1h_2(-e^{h_1} + e^{h_2}) - (m_1h_2 - m_2h_1) = 0\,.$$

Abbiamo ottenuto un polinomio $p(z) = h_1h_2(-z^{h_1} + z^{h_2}) - (m_1h_2 - m_2h_1)$ *con* $p \in \mathbb{Z}[z]$ *tale che* $p(e) = 0$. *Essendo e trascendente su* $\mathbb{Z}$, *abbiamo che* p *deve essere il polinomio nullo e quindi* $h_1 = h_2$.

Si noti che in questo caso il Γ*-limite e il limite puntuale sono diversi in ogni punto* $x \in X$.

Ritorniamo a considerare uno spazio topologico X.

Osservazione 3.2.3. *Se le funzioni* $F_h(x)$ *sono indipendenti da* x, *cioè per ogni* $h \in \mathbb{N}$ *esiste una costante* $a_h \in \overline{\mathbb{R}}$ *tale che* $F_h(x) = a_h$ *per ogni* $x \in X$, *allora*

$$(\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h)(x) = \liminf_{h\to\infty} a_h\,, \qquad (\Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h)(x) = \limsup_{h\to\infty} a_h$$

per ogni $x \in X$.

Se le funzioni sono indipendenti da h, *cioè esiste una funzione* $F\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tale che* $F_h(x) = F(x)$ *per ogni* $x \in X$ *e per ogni* $h \in \mathbb{N}$, *allora*

$$\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h = \Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h = sc^- F$$

Siginifica che (F_h) Γ*-converge a* sc^-F *in* X, *vedi Proposizione 2.1.3.*

Capitolo 4

Convergenza dei Minimi e dei Punti di Minimo

In questo capitolo mostriamo che la Γ-convergenza di una successione (F_h) ad una funzione F implica, sotto oppportune condizioni di equi-coercitività, che la successione dei minimi di F_h converge ad minimo della funzione F.

4.1 Disuguaglianze su Insiemi Compatti e Aperti

Sia X uno spazio topologico e sia (F_h) una successione di funzioni da X *in* $\overline{\mathbb{R}}$, siano

$$F' = \Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h\,, \qquad F'' = \Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h\,.$$

Proposizione 4.1.1. *Sia U un sottoinsieme aperto di X. Allora*

$$\inf_{x\in U} F'(x) \geq \liminf_{h\to\infty} \inf_{x\in U} F_h(x) \qquad \inf_{x\in U} F''(x) \geq \limsup_{h\to\infty} \inf_{x\in U} F_h(x)\,.$$

Dimostrazione. Facciamo solo la prima disuguaglinza, per la seconda è analogo. Per ogni $x \in U$ abbiamo che $U \in \mathcal{N}(x)$ e dunque

$$F'(x) \geq \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y)\,,$$

dalla definizione di Γ-limite. Dunque

$$\inf_{x\in U} F'(x) \geq \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y),$$

che conclude la dimostrazione. □

Proposizione 4.1.2. *Sia K un sottoinsieme numerabilmente compatto di X. Allora*

$$\min_{x\in K} F'(x) \leq \liminf_{h\to\infty} \inf_{x\in K} F_h(x).$$

Dimostrazione. Intanto, partiamo dicendo che il minimo di F' esiste su K, dal Teorema 1.2.6, essendo F' semicontinua inferiormente su X, per il Lemma 3.1.3. Sia (F_{h_k}) una sottosuccessione di (F_h) tale che

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{x\in K} F_{h_k}(x) = \liminf_{h\to\infty} \inf_{x\in K} F_h(x)$$

e sia (y_k) una successione in K tale che

$$\lim_{k\to\infty} F_{h_k}(y_k) = \lim_{k\to\infty} \inf_{x\in K} F_{h_k}(x)\,.$$

Essendo K numerabilmente compatto, la successione (y_k) ammette un punto di chiusura y in K. Per ogni $U \in \mathcal{N}(y)$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $k \geq m$ tale che $y_k \in U$, quindi $\inf\limits_{x\in U} F_{h_k}(x) \leq F_{h_k}(y_k)$. Quindi

$$\liminf_{h\to\infty} \inf_{x\in U} F_h(x) \leq \liminf_{k\to\infty} \inf_{x\in U} F_{h_k}(x) \leq$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} F_{h_k}(y_k) = \lim_{k\to\infty} \inf_{x\in K} F_{h_k}(x) = \liminf_{h\to\infty} \inf_{x\in K} F_h(x)\,.$$

E ora, prendendo l'estremo superirore fra gli $U \in \mathcal{N}(y)$ otteniamo

$$F'(y) \leq \liminf_{h\to\infty} \inf_{x\in K} F_h(x)\,.$$

Poichè $y \in K$, si ha che $\min\limits_{x\in K} F'(x) \leq F'(y)$, che conclude la dimostrazine con la disuguaglianza precedente. $\square$

4.2 Convergenza dei minimi

Il seguente teorema riguarda il valore minimo di una successione di funzioni Γ-convergente.

Teorema 4.2.1. *Supponiamo che esista un sottoinsime numerabilmente compatto K di X tale che*

$$\inf_{x\in X} F_h(x) = \inf_{x\in K} F_h(x)$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$. Allora F' ammette minimo su X e

$$\min_{x\in X} F'(x) = \liminf_{h\to\infty} \inf_{x\in X} F_h(x)\,.$$

Inoltre, se (F_h) Γ-converge ad una funzione $F \in X$, allora F ammette minimo su X e

$$\min_{x\in X} F(x) = \lim_{h\to\infty} \inf_{x\in X} F_h(x)\,.$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 4.1.1, ponendo $U = X$ si ha che

$$\inf_{x\in X} F'(x) \geq \liminf_{h\to\infty} \inf_{x\in X} F_h(x)\,.$$

Per la Proposizione 4.1.2 e per le ipotesi fatte, abbiamo che

$$\inf_{x\in X} F'(x) \leq \min_{x\in K} F'(x) \leq \liminf_{h\to\infty} \inf_{x\in K} F_h(x) = \liminf_{h\to\infty} \inf_{x\in X} F_h(x)\,,$$

quindi, per la disuguaglianza appena vista, abbiamo che

$$\inf_{x\in X} F'(x) = \min_{x\in K} F'(x) = \liminf_{h\to\infty} \inf_{x\in X} F_h(x)\,.$$

Questo significa che F' ammette minimo su X.

Ora, se (F_h) Γ-converge ad F, dalla Proposizione 4.1.1, posto $U = X$, segue che

$$\inf_{x\in X} F(x) \geq \limsup_{h\to\infty} \inf_{x\in X} F_h(x)\,,$$

e dunque, grazie all'uguaglianza qui sopra, abbiamo concluso la dimostrazione. $\square$

4.3 Successioni equi-coercitive

Definizione 4.3.1. *Diciamo che una successione* (F_h) *è* ***equi-coercitiva*** *(su* X*) se per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *esiste un sottoinsieme* K_t *di* X *numerabilmente compatto e chiuso tale che* $\{F_h \leq t\} \subseteq K_t$ *per ogni* $h \in \mathbb{N}$*.*

Proposizione 4.3.2. *La successione* (F_h) *è equi-coercitiva se e solo se esiste una funzione coercitiva semicontinua inferiormente* $\Psi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *tale che* $F_h \geq \Psi$ *su* X *per ogni* $h \in \mathbb{N}$*.*

Dimostrazione. Se una tale funzione Ψ esiste, allora (F_h) è equi-coercitiva, essendo $\{F_h \leq t\} \subseteq \{\Psi \leq t\}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$, e l'insieme $K_t = \{\Psi \leq t\}$ è chiuso, per la Proposizione 1.1.7(c) e per la Definizione 1.2.3.

Viceversa, se (F_h) è equi-coercitiva allora esiste una famiglia $(K_t)_{t\in\mathbb{R}}$ di sottoinsiemi di X numerabilmente compatti chiusi, tale che $\{F_h \leq t\} \subseteq K_t$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $\Psi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione definita ponendo

$$\Psi(x) = \inf\{s \in \mathbb{R} \,|\, x \in K_t \text{ per ogni } t > s\}$$

con la usuale convenzione che $\inf \emptyset = +\infty$. Se $(F_h)(x) \leq s$ allora $x \in K_t$ per ogni $t > s$, quindi $\Psi(x) \leq s$. Dunque $\Psi \leq F_h$ su X per ogni $h \in \mathbb{N}$. Essendo

$$\{\Psi \leq s\} = \bigcap_{t>s} K_t$$

l'insieme $\{\Psi \leq s\}$ è chiuso e numerabilmente compatto per ogni $s \in \mathbb{R}$. Quindi Ψ è coercitiva e semicontinua inferiormente su X, dalla Proposizione 1.1.7(c). □

Il seguente lemma è una conseguenza della Definizione 3.1.1 e dalla Proprietà 1.1.2.

Lemma 4.3.3. *Siano* (F_h) *e* (G_h) *successioni di funzioni da* X *in* $\overline{\mathbb{R}}$ *tali che* $F_h \leq G_h$ *su* X *per ogni* $h \in \mathbb{N}$*, allora*

$$\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h \leq \Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} G_h\,, \quad \Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h \leq \Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} G_h\,.$$

In particolare, se (F_h) Γ*-converge a* F *e* (G_h) Γ*-converge a* G*, allora* $F \leq G$*.*
Se $H\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *è una funzione semicontinua inferiormente e* $H \leq F_h$ *su* X *per ogni* $h \in \mathbb{N}$*, allora*

$$H \leq \Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h \leq \Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h\,.$$

In particolare, se (F_h) Γ*-converge a* F*, allora* $H \leq F$*.*

Il seguente Lemma è una diretta conseguenza della definizione di Γ-limite, della Definizione 3.1.1, e delle proprietà del Γ-limite superiore e del Γ-limite inferiore.

Lemma 4.3.4. *Se* (F_{h_k}) *è una sottosuccessione di* (F_h) *allora*

$$\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h \leq \Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_{h_k}\,, \qquad \Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h \geq \Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_{h_k}\,.$$

In particolare, se (F_h) Γ*-converge ad* F *in* X*, allora* (F_{h_k}) Γ*-converge ad* F *in* X*.*

Il seguente teorema riguarda la convergenza dei minimi di una successione equi- coercitiva di funzioni.

Teorema 4.3.5. *Sia (F_h) equi-coercitiva su X. Allora F' e F'' sono coercitive e vale*

$$\min_{x \in X} F'(x) = \liminf_{h \to \infty} \inf_{x \in X} F_h(x).$$

Se poi (F_h) Γ-converge ad una funzione F in X, allora F è coercitiva e

$$\min_{x \in X} F(x) = \lim_{h \to \infty} \inf_{x \in X} F_h(x)\,.$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione 4.3.2 esiste una funzione semicontinua inferiormente coercitiva $\Psi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $F_h \geq \Psi$ su X per ogni $h \in \mathbb{N}$. Allora $F'' \geq F' \geq \Psi$, dal Lemma 4.3.3. Quindi F' e F'' sono coercitive, dall'Osservazione 1.2.4, e semicontinue inferiormente, dal Lemma 3.1.3, e quindi ammettono minimo su X dal Teorema 1.2.6.

Per dimostrare la prima uguaglianza proviamo intanto che

$$\min_{x \in X} F'(x) \geq \liminf_{h \to \infty} \inf_{x \in X} F_h(x)\,,$$

che segue dalla Proposizione 4.1.1, applicata con $U = X$. E ora è sufficente provare che

$$\min_{x \in X} F'(x) \leq \liminf_{h \to \infty} \inf_{x \in X} F_h(x)\,.$$

Assumendo che il membro di destra sia minore di $+\infty$, allora esiste una costante $t \in \mathbb{R}$ e una sottosuccessione (F_{h_k}) di (F_h) tale che

$$\lim_{k \to \infty} \inf_{x \in X} F_{h_k}(x) = \liminf_{h \to \infty} \inf_{x \in X} F_h(x) < t\,.$$

Possiamo inoltre supporre che

$$\inf_{x \in X} F_{h_k} < t$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Essendo (F_h) equi-coercitiva, esiste un sottoinsieme numerabilmente compatto chiuso K di X tale che $\{F_{h_k} \leq t\} \subseteq K$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dall'ultima disuguaglianza segue che l'insieme $\{F_{h_k} \leq t\}$ è non vuoto, quindi

$$\inf_{x \in X} F_{h_k}(x) = \inf_{x \in K} F_{h_k}(x)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Sia $G' = \Gamma\text{-}\liminf_{k \to \infty} F_{h_k}$. Se applichiamo il Teorema 4.2.1 alla sottosuccessione (F_{h_k}) otteniamo

$$\min_{x \in X} G'(x) = \lim_{k \to \infty} \inf_{x \in X} F_{h_k}(x) = \liminf_{h \to \infty} \inf_{x \in X} F_h(x)$$

e con questo abbiamo provato che $\min_{x \in X} F'(x) \leq \liminf_{h \to \infty} \inf_{x \in X} F_h(x)$, supponendo $F' \leq G'$ nel Lemma 4.3.4. Se (F_h) Γ-converge ad F, applicando la Proposizione 4.1.1 con $U = X$ abbiamo

$$\inf_{x \in X} F(x) \geq \limsup_{h \to \infty} \inf_{x \in X} F_h(x)\,,$$

e dunque abbiamo dimostrato il Teorema. □

Dal Teorema 4.3.5 abbiamo visto che l'ipotesi che $\inf_{x \in X} F_h(x) = \inf_{x \in K} F_h(x)$ del Teorema 4.2.1 è soddisfatta se (F_h) è equi-coercitiva e Γ-converge ad una funzione F che non è identicamente $+\infty$. Il seguente esempio mostra come la stessa condizione possa essere soddisfatta anche se (F_h) non è coercitva.

Esempio 4.3.6. *Sia* $X = \mathbb{R}$ *e sia* $F_h(x) = \sin(hx)$. *Allora* (F_h) *non è equi-coercitiva, ma la condizione che* $\inf_{x \in X} F_h(x) = \inf_{x \in K} F_h(x)$ *è soddisfatta, per esempio, prendendo* $K = [0, 2\pi]$.

Capitolo 5

Γ-Convergenza negli Spazi Metrici

In questo capitolo ci occuperemo di alcune proprietà dei Γ-limiti nel caso in cui X sia uno spazio metrizzabile, o, più in generale quando X è completamente regolare. In particolare, proveremo che una successione equi-coercitiva di funzioni (F_h) Γ-converge ad una funzione F se e solo se

$$\min_{x\in X}(F+G)(x) = \lim_{h\to\infty}\inf_{x\in X}(F_h+G)(x)$$

per ogni funzione continua non negativa $G\colon X\to\mathbb{R}$.

5.1 Caratterizzazione Sequenziale dei Γ-limiti

La seguente proposizione fornisce una caratterizzazione dei Γ-limiti in termini delle successioni.

Proposizione 5.1.1. *Supponiamo che X soddisfi il primo assioma di numerabilità. Allora la funzione F' è caratterizzata dalle seguenti proprietà:*

(a) per ogni $x\in X$ e per ogni successione (x_h) convergente a x in X vale

$$F'(x)\le \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h)\,;$$

(b) per ogni $x\in X$ esite una successione (x_h) onvergente a x in X tale che

$$F'(x) = \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h)\,.$$

La funzione F'' è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

(c) Per ogni $x\in X$ e per ogni successione (x_h) convergente a x in X vale

$$F''(x)\le \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h)\,;$$

(d) Per ogni $x\in X$ esite una successione (x_h) onvergente a x in X tale che

$$F''(x) = \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h)\,.$$

Quindi, la successione (F_h) Γ*-converge ad* F *se e solo se sono soddisfatte le seguenti proprietà:*

(e) per ogni $x \in X$ *e per ogni successione* (x_h) *convergente a* x *in* X *si ha*

$$F(x) \leq \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h)\,;$$

(f) per ogni $x \in X$ *esiste una successione* (x_h) *convergente a* x *in* X *tale che*

$$F(x) = \lim_{h\to\infty} F_h(x_h)\,.$$

Dimostrazione. Sia (x_h) una successione convergente a x in X e sia $U \in \mathcal{N}(x)$. Allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $x_h \in U$ per ogni $h \geq k$, quindi $\inf_{y\in U} F_h(y) \leq F_h(x_h)$ per ogni $h \geq k$. Questo implica che

$$\liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y) \leq \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h)\,,$$

$$\limsup_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y) \leq \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h)$$

per ogni $U \in \mathcal{N}(x)$, quindi

$$F'(x) \leq \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h) \qquad F''(x) \leq \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h)\,.$$

Questo prova sia (a) e (c). Si noti il fatto che non abbiamo utilizzato il fatto che X soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Per dimostrare (b) fissiamo $x \in X$ tale che $F'(x) < +\infty$. Sia (U_k) una base numerabile per il filtro degli intorni di x tale che $U_{k+1} \subseteq U_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e sia (s_k) una successione convergente a $F'(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ tale che $s_k > F'(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dalla definizione di $F'(x)$ abbiamo

$$s_k > \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in U_k} F_h(y)\,,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora esiste una successione strettamente crescente di interi (h_k) tale che

$$s_k > \inf_{y\in U_k} F_{h_k}(y)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $y_k \in U_k$ tale che $s_k > F_{h_k}(y_k)$. Definiamo, ora, la successione (x_h) ponendo $x_h = y_k$ se $h = h_k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, e $x_h = x$ se $h \neq h_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Essendo $x_h \in U_k$ per ogni $h \geq h_k$, la successione (x_h) converge a x in X, e poichè $x_{h_k} = y_k$, abbiamo

$$F'(x) = \lim_{k\to\infty} s_k \geq \liminf_{k\to\infty} F_{h_k}(y_k) \geq \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h)\,.$$

La disuguaglianza opposta discende direttamente da (a).

Per dimostrare (d) fissiamo $x \in X$ tale che $F''(x) < +\infty$. Sia (U_k) come sopra e sia (t_k) una successione decrescente convergente a $F''(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ tale che $t_k > F''(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dalla definizione di $F''(x)$ abbiamo

$$t_k > \limsup_{h\to\infty} \inf_{y\in U_k} F_h(y)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi esiste una successione strettamente crescente di interi (h_k) tale che

$$t_k > \inf_{y \in U_k} F_h(y)$$

per ogni $h \geq h_k$. Questo implica che per ogni $h \geq h_k$ esiste $y_k^h \in U_k$ tale che $t_k > F_h(y_k^k)$. Definiamo la successione (x_h) ponendo $x_h = x$ se $h < h_1$, e $x_h = y_h^k$ se $h_k \leq h < h_{k+1}$. Essendo $x_h \in U_k$ per ogni $h \geq h_k$, la successione (x_h) converge a x in X, e poichè $t_k > F_h(x_h)$ per ogni $h \geq h_k$, otteniamo

$$F''(x) = \lim_{k \to \infty} t_k \geq \limsup_{h \to \infty} F_h(x_h)\,.$$

E la disuguaglianza opposta deriva da (c).

Il fatto che (F_h) Γ-converge ad F se e solo se valgono (e) ed (f) discende dai punti (a), (b), (c) e (d). $\square$

5.2 Caratterizzazione dei Γ-limiti negli Spazi Completamente Regolari

Definizione 5.2.1. *Uno spazio topologico X si dice **completamente regolare** se per ogni $x \in X$ e per ogni intorno U di x esiste una funzione continua $G\colon X \to [0,1]$ tale che $G(x) = 0$ e $G(y) = 1$ per ogni $y \in X \setminus U$.*

Ricordiamo che ogni spazio vettoriale topologico è completamente regolare, ed in particolare ogni spazio metrico è completamente regolare.

La seguente caratterizzazione discende subito dalla definizione.

Proposizione 5.2.2. *Uno spazio topologico X è completamente regolare se e solo se per ogni $x \in X$ esiste una famiglia $\mathcal{G}(x)$ di funzioni continue $G\colon X \to \mathbb{R}$ tali che*

(a) $G(x) = 0$ per ogni $G \in \mathcal{G}(x)$;

(b) $G(y) \geq 0$ per ogni $G \in \mathcal{G}(x)$ e per ogni $y \in X$;

(c) per ogni $t > 0$ e ogni $U \in \mathcal{N}(x)$ esiste $G \in \mathcal{G}(x)$ tale che $G(y) \geq t$ per ogni $y \in X \setminus U$.

Il seguente teorema mostra che, se X è completamente regolare, allora la Γ-convergenza di una successione (F_h) su X può essere caratterizzata in termini del comportamento della successione

$$\inf_{x \in X} (F_h + G)(x)$$

per una opportuna famiglia di funzioni continue G.

Teorema 5.2.3. *Sia X uno spazio topologico completamente regolare, e sia (F_h) una successione di funzioni da X in $[0, +\infty]$. Inoltre, per ogni $x \in X$, sia $\mathcal{G}(x)$ una famiglia* *di funzioni continue che soddisfano le proprietà* (a), (b), (c) *della Proposizione 5.2.2. Allora*

$$(\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h)(x) = \sup_{G\in\mathcal{G}(x)} \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in X} (F_h + G)(y),$$

$$(\Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h)(x) = \sup_{G\in\mathcal{G}(x)} \limsup_{h\to\infty} \inf_{y\in X} (F_h + G)(y)$$

per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione solo della prima disuguaglianza, la seconda si dimostra in maniera analoga. Prendiamo $x \in X$ e definiamo

$$F'(x) = (\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h)(x),$$

$$H'(x) = \sup_{G\in\mathcal{G}(x)} \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in X} (F_h + G)(y).$$

Vogliamo dimostrare che $F'(x) = H'(x)$. Sia $t \in \mathbb{R}$ con $t < F'(x)$. Dalla definizione di $F'(x)$, esiste $U \in \mathcal{N}(x)$ tale che

$$t < \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y),$$

e quindi esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$t < \inf_{y\in U} F_h(y)$$

per ogni $h \geq k$. Dalla proprietà (c) esiste $G \in \mathcal{G}(x)$ tale che

$$t \leq \inf_{y\in X\setminus U} G(y).$$

E poichè $F_h \geq 0$ *e* $G \geq 0$ su X otteniamo

$$t \leq \inf_{y\in X} (F_h + G)(y)$$

per ogni $h \geq k$, dunque

$$t \leq \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in X} (F_h + G)(y) \leq H'(x).$$

Dal momento che la disuguazglianza vale per ogni $t < F'(x)$, abbiamo dimostrato che $F'(x) \leq H'(x)$.

Viceversa, fissiamo $g \in \mathcal{G}(x)$ e $\epsilon > 0$. Poichè G è continua e $G(x) = 0$, allora esiste $U \in \mathcal{N}(x)$ tale che $G(y) < \epsilon$ per ogni $y \in U$. Allora si ha

$$\inf_{y\in X} (F_h + G)(y) \leq \inf_{y\in U} (F_h + G)(y) \leq \inf_{y\in U} F_h(y) + \epsilon$$

e quindi

$$\liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in X} (F_h + G)(y) \leq \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in U} F_h(y) + \epsilon \leq F'(x) + \epsilon.$$

Per la arbitrarietà di $G \in \mathcal{G}(x)$ e $\epsilon > 0$ otteniamo $H'(x) \leq F'(x)$. □

Osservazione 5.2.4. *Sia* X *uno spazio topologico completamente regolare e sia* $F\colon X \to [0, +\infty]$ *una funzione non negativa. Per l'Osservazione 3.2.3. abbiamo*

$$(sc^- F)(x) = \sup_{G\in\mathcal{G}(x)} \inf_{y\in X} (F + G)(y)$$

per ogni $x \in X$, *e dove* $\mathcal{G}(x)$ *è una famiglia di funzioni continue che soddisfano le condizioni* (a), (b), (c).

5.3 Equivalenza fra la Γ-Convergenza e la Convergenza dei Minimi

Lemma 5.3.1. *Sia* $G\colon X \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora*

$$\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty}(F_h + G) = \Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h + G\,,$$

$$\Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty}(F_h + G) = \Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h + G\,.$$

In particolare, se (F_h) Γ*-converge a* F *in* X*, allora* $(F_h + G)$ Γ*-converge a* $F + G$ *in* X*.*

Proviamo ora il viceversa del Teorema 4.3.6.

Teorema 5.3.2. *Sia* X *uno spazio topologico completamente regolare, sia* (F_h) *una successione equi-coercitiva di funzioni da* X *in* $[0,+\infty[$ *e sia* $F\colon X \to [0,+\infty]$ *una funzione semicontinua inferiormente. Sono equivalenti*

(a) (F_h) Γ*-converge a* F*;*

(b) per ogni funzione continua $G\colon X \to [0,+\infty[$ *abbiamo*

$$\inf_{x\in X}(F + G)(x) = \lim_{h\to\infty}\inf_{x\in X}(F_h + G)(x).$$

Dimostrazione. Supponiamo (a) e fissiamo una funzione continua $G\colon X \to [0,+\infty[$. Allora $(F_h + G)$ Γ-converge a $F + G$ dal Lemma 5.3.1, allora (b) segue dal Teorema 4.3.6 sulla convergenza del valore minimo di una successione equi-coercitiva di funzioni.

Vicerversa, dal Teorema 5.2.3, per ogni $x \in X$ si ha che

$$(\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h)(x) = (\Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h)(x) = \sup_{G\in\mathcal{G}(x)}\inf_{y\in X}(F + G)(y),$$

dove $\mathcal{G}(x)$ indica l'insieme di tutte le funzioni continue $G\colon X \to [0,+\infty[$ tali che $G(0) = 0$. Allora (a) segue dall'Osservazione 5.2.4 e dal fatto che F è semicontinua inferiormente. □

Consideriamo adesso il caso di uno spazio metrico X.

Teorema 5.3.3. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico, sia* (F_h) *una successione di funzioni da* X *in* $[0,+\infty[$ *e sia* $\Phi(t)\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *una funzione continua tale che* $\Phi(0) = 0$, $\Phi(t) > 0$ *per ogni* $t > 0$ *e* $\liminf_{t\to+\infty}\Phi(t) > 0$*. Allora*

$$(\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h)(x) = \sup_{\lambda>0}\liminf_{h\to\infty}\inf_{y\in X}(F_h(y) + \lambda\Phi(d(y,x)))\,,$$

$$(\Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h)(x) = \sup_{\lambda>0}\limsup_{h\to\infty}\inf_{y\in X}(F_h(y) + \lambda\Phi(d(y,x)))\,.$$

per ogni $x \in X$*.*

Dimostrazione. Basta usare il Teorema 5.3.3 ponendo, per ogni $x \in X$, la famiglia di funzioni $\mathcal{G}(x)$ di tutte le funzioni $G\colon X \to \mathbb{R}$ della forma $G(y) = \lambda\Phi(d(y,x))$ con $\lambda > 0$. □

Osservazione 5.3.4. *Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $F\colon X \to [0,+\infty]$ una generica funzione non negativa. Con la scelta $F_h = F$ nel teorema appena visto otteniamo*

$$(sc^- F)(x) = \sup_{\lambda>0} \inf_{y\in X} (F(y) + \lambda\Phi(d(y,x)))$$

per ogni $x \in X$.

Teorema 5.3.5. *Siano (X,d) e Φ come nel Teorema 5.3.3 e siano (F_h) una successione di funzioni F da X in $[0,+\infty]$ e $F\colon X \to [0,+\infty]$ una funzione semicontinua inferiormente. Supponiamo che esista $\mu > 0$ tale che, per ogni $X \in X$, la successione di funzini*

$$G_h(y) = F_h(y) + \mu\Phi(d(y,x))$$

sia equi-coercitiva in X. Sia (λ_j) una successione di numeri reali che converge a $+\infty$ tale che $\lambda_j \geq \mu$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Allora sono equivalenti:

(a) (F_h) Γ-converge a F in X;

(b) per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in X$

$$\inf_{y\in X}\big(F(y) + \lambda_j\Phi(d(y,x))\big) = \lim_{h\to\infty} \inf_{y\in X}\big(F_h(y) + \lambda_j\Phi(d(y,x))\big).$$

Dimostrazione. L'implicazione $(a) \Rightarrow (b)$ è la stessa dimostrazione vista nel Teorema 4.2.1. Proviamo allora $(b) \Rightarrow (a)$. Dal Teorema 5.3.2 abbiamo

$$(\Gamma\text{-}\liminf_{h\to\infty} F_h)(x) = (\Gamma\text{-}\limsup_{h\to\infty} F_h)(x) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \inf_{y\in X}\big(F(y) + \lambda_j\Phi(d(y,x))\big)$$

per ogni $x \in X$. Dunque si conclude grazie all'Osservazione 5.3.4 e dalla definizione di semicontinuità inferiore. □

Capitolo 6

Esempio - Transizione di Fase

Questo capitolo è dedicato ad un classico problema in cui si utilizza il concetto di Γ- convergenza. Vedremo solo i concetti essenziali senza addentrarci nei dettagli.
Seguiremo il libro [2].

Consideriamo un fluido, sotto oppurtune condizioni di isotermia, contenuto in una regione limitata Ω. Denotiamo la concenrazione di fluido con la funzione $u\colon \Omega \to [0,1]$, dunque le configurazioni di equilibrio sono quelle che minimizzano una certa energia che dipende da u, avendo fissato la massa

$$\min \left\{ E(u) | u\colon \Omega \to [0,1], \int_\Omega u dx = C \right\}$$

dove l'energia è della forma

$$E(u) = \int_\Omega W(u) dx \,.$$

La densità di energia $W\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione con grafico come quello in Figura 6.1, con due minimi locali.

Per risolvere questo problema di minimo, possiamo considerare il cambiamento di variabile che manda W in $W(u) + c_1 u + c_2$, questo è un cambiamento affine che ha come

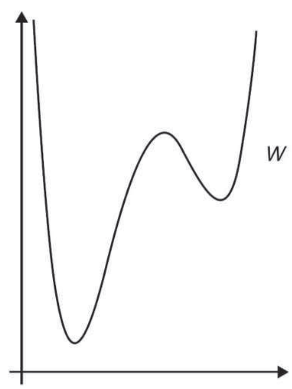

Figura 6.1: La densità di van der Waals

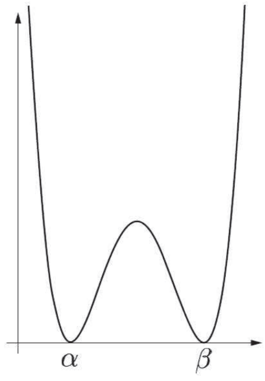

Figura 6.2: La densità di energia dopo la trasformazione affine

unica conseguenza il fatto di dover aggiungere ad $E(u)$ la quantità fissata

$$\int_\Omega (c_1 u + c_2)\, dx = c_1 C + c_2 |\Omega|\,.$$

Ora, chiamiamo questa densità di energia W e scegliamo c_1 e c_2 in modo tale che W sia non-negativa ed abbia esattamente due zeri nei punti α e β, come in Figura 6.2.

A questo punto, se è soddisfatto il vincolo sulla massa, allora i minimi che stavamo cercando sono dati da tutte le funzioni u che assumono solo i valori α e β e tali che $\int_\Omega u dx = C$. Per queste u le regioni $\{u = \alpha\}$ e $\{u = \beta\}$ si chiamano *fasi* del fluido e formano una partizione di Ω. Notiamo che il problema di minimo di partenza non fornisce alcuna indicazione sull'interazione fra le due fasi, che potrebbero essere molto irregolari o persino dense in Ω. Ma questo non è quello che si osserva sperimentalmente, infatti vengono assunte alcune configurazioni particolari, più precisamente, quelle con la minima area fra le due fasi. Cerchiamo di capire questo *minimal-interface criterion*: per evitare la comparsa di superfici irregolari aggiungiamo un termine contenente la derivata di u, chiamato *perturbazine singolare*, che può essere interpretata come una piccola *seperficie di tensione* fra le due fasi. Il problema originario si trasforma in un problema in cui compare il parametro ϵ, ed è della seguente forma

$$\min\left\{\int_\Omega \left(W(u) + \epsilon^2|Du|^2\right) dx : \int_\Omega u dx = C\right\}.$$

In questo caso si richiede una maggiore regolarità alla funzione u. La soluzione, infatti, ha la seguente forma

$$u_\epsilon(x) \approx u(x) + u_1\left(\frac{dist\,(x,S)}{\epsilon}\right),$$

dove $u\colon \Omega \to \{\alpha,\beta\}$ è una funzione di transizione di fase con una superficie minima S in Ω, $u_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ èuna funzione che tende a 0 all'infinito, che assicura il profilo ottimo fra le fasi per $\epsilon > 0$.

Questo è il procedimento usuale e si può provare rigorosamente usando la Γ-convergenza. Possiamo fare il disegno nel caso unidimensionale, in cui u è una funzione con un unico

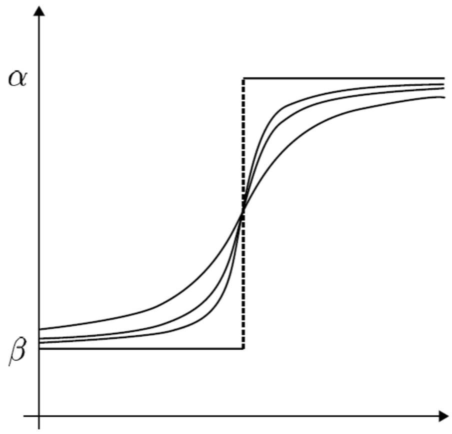

Figura 6.3: Comportamento dell'approssimazione tramite transizioni di fase

punto di discontinuità. Nella Figura 6.3 sono disegnate le funzioni u_ϵ per alcuni valori di ϵ.

Il comportamento delle u_ϵ non è facilmente deducibile dal problema di cui stavamo parlando sopra, ma si deduce più semplicemente se lo riscriviamo nella seguente forma

$$\min\left\{\int_\Omega \left(\frac{W(u)}{\epsilon} + \epsilon|Du|^2\right) dx : \int_\Omega u dx = C\right\}.$$

In questo modo si vede come i due termini diano lo stesso contributo all'integrale per ϵ che tende a 0 per una successione minimizzante. A livello qualitativo, il primo termine fa tendere u ad α o a β, mentre il secondo termine fa si che la superficie superflua diminuisca.

Bibliografia

[1] G. Dal Maso *An Introduction to* Γ-*Convergence*. Birkhäuser, 1993.

[2] A. Braides Γ-*Convergence for Beginners*. Oxford University Press, 2002.