



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Reti separate ed equazione del determinante Jacobiano

Laureando:
Manfredi Federico PIVETTA

Relatore:
Prof. Roberto MONTI

Anno accademico 2014/2015

RETI SEPARATE ED EQUAZIONE DEL DETERMINANTE JACOBIANO

MANFREDI FEDERICO PIVETTA

1. INTRODUZIONE

Il teorema sui cambi di variabile negli integrali multipli afferma che, dati U, V aperti in \mathbb{R}^n e un diffeomorfismo $\phi \in C^1(U, V)$, abbiamo:

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\phi(x))|J\phi(x)|dx, \quad (1.1)$$

dove $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, e $J\phi(x)$ indica il determinante Jacobiano del diffeomorfismo ϕ . Se consideriamo ϕ come una deformazione dello spazio e prendiamo $f = 1$ costante, l'equazione acquista un significato più preciso: essa rappresenta la distribuzione di volume nello spazio deformato in funzione della trasformazione ϕ . In quest'ottica la funzione $\rho(x) = J\phi(x)$, se esiste, descrive la distribuzione di volume dopo la trasformazione.

È naturale quindi analizzare il seguente problema differenziale, noto come problema del determinante Jacobiano:

$$J\phi(x) = f(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Questa equazione è importante nell'ambito della geometria simplettica, per la ricerca e costruzione di trasformazioni incomprimibili, e trova numerose applicazioni in fisica, all'interno della teoria dell'elasticità [2].

Nel caso di funzioni di classe C^∞ su varietà compatte il problema di provare l'esistenza di una soluzione ϕ all'equazione (1.2) con dato f era già stato risolto da Moser nel 1965 [7]. Nel 1990, Moser e Dacorogna per primi hanno esteso questo risultato di esistenza alle funzioni Hölderiane nel seguente modo [3]:

Teorema 1.1 (Moser-Dacorogna). *Fissati $k \geq 0$ e $0 < \alpha < 1$, siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, connesso, limitato e con frontiera di classe $C^{k+3,\alpha}$, $f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ con $f > 0$. Allora esiste una soluzione $\phi(x) \in \text{Diff}^{k+1,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ al problema differenziale:*

$$\begin{cases} J\phi(x) = f(x), & x \in \Omega \\ \phi(x) = x, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3)$$

Nel 1994 Rivière e Ye hanno ottenuto un metodo risolutivo per l'equazione che ancora una volta funziona per dati Hölderiani, ma non si può estendere a funzioni f continue [8]. L'esistenza di soluzioni all'equazione con dato $f \in C^0$ è rimasta un problema aperto fino al 1998, quando separatamente sia McMullen [6] che Burago e Kleiner [1] hanno trovato controesempi. Gli autori costruiscono in dimensione 2 una

funzione f continua per cui l'equazione (1.2) non ammetta soluzione ϕ biLipschitziana. La prima parte di questa tesi sarà dedicata ad illustrare il seguente risultato di Burago e Kleiner, ampliando la costruzione con tutti i dettagli e le verifiche formali omesse nell'articolo originale.

Teorema 1.2 (Burago-Kleiner). *Siano $I = [0, 1]$ e fissiamo $L > 0$, $c > 0$. Esiste una funzione continua $\rho : I^2 \rightarrow [1, 1+c]$ per cui non esiste una soluzione L -biLipschitziana $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dell'equazione:*

$$Jf(x) = \rho(x)$$

per L^2 -q.o. $x \in I^2$.

Il controesempio garantisce l'esistenza di un dato $f \in C^0$ tale che nessuna funzione ϕ L -biLipschitziana risolve l'equazione (1.2). Questo è un enunciato più forte del precedente: l'estensione ingenua del teorema avrebbe previsto infatti una soluzione di classe C^1 . La funzione ϕ biLipschitziana non è però in generale derivabile. Il determinante Jacobiano di ϕ è quindi da intendersi definito a meno di insiemi di misura nulla. In effetti ogni funzione Lipschitziana è differenziabile quasi ovunque per il teorema di Rademacher, pertanto possiamo calcolare la sua matrice Jacobiana in quasi ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$. Notiamo che, data l'origine del nostro problema, questo non è grave. Infatti il determinante Jacobiano viene integrato nell'equazione di cambiamento di variabile, e cambiamenti su insiemi di misura nulla non sono percepiti.

Un'altra possibile estensione dei risultati è stata fornita da Ye nel 1994, che ha esaminato il caso in cui la condizione di derivabilità viene indebolita, e cercato soluzioni deboli negli spazi di Sobolev W_p^l , $p < \infty$ [9]. È interessante notare che in questo caso i risultati di regolarità della soluzione rispetto al dato sono del tutto analoghi, mentre la richiesta di regolarità sulla frontiera del dominio $\partial\Omega$ cresce non solo con la regolarità l della soluzione ma anche con la dimensione n dello spazio e con la sommabilità del dato $f \in L_p$.

In maniera alquanto sorprendente si riesce però ad ottenere una soluzione biLipschitziana della seguente disequazione con dato continuo se si considera il problema:

$$\begin{cases} J\phi(x) \geq f(x), & x \in \Omega \\ \phi(x) = x, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.4)$$

come visto da Fischer e Kneuss [4]. La regolarità del dato iniziale è la migliore possibile per questo problema: in generale, non esiste soluzione per dati iniziali non continui.

Nella seconda parte di questa tesi considereremo una possibile applicazione di questo risultato. Diamo la seguente definizione:

Definizione 1.3. Sia (M, d) uno spazio metrico. Si dice *rete separata* in M un insieme $X \subseteq M$ per cui valgono le seguenti due proprietà:

- (1) esiste una costante positiva $a \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $x_1, x_2 \in X$:

$$d(x_1, x_2) > a$$

(2) esiste una costante positiva $b \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $y \in M$:

$$d(y, X) < b$$

Le costanti a e b si chiameranno *costanti caratteristiche* di X .

L'esistenza di un omeomorfismo biLipschitziano tra due reti separate nel piano è un problema posto da Gromov nel 1993 [5]. Seguendo la traccia di dimostrazione pubblicata su [1], produrremo una dimostrazione dettagliata del seguente risultato:

Teorema 1.4. *Esistono reti separate in \mathbb{R}^2 che non sono bilipschitzianamente equivalenti a \mathbb{Z}^2 .*

In effetti si può dimostrare (vedasi [6]) che il problema dell'esistenza di un omeomorfismo biLipschitziano tra due reti separate è proprio equivalente all'esistenza di soluzioni biLipschitziane dell'equazione del determinante Jacobiano.

2. EQUAZIONE DEL DETERMINANTE JACOBIANO

In questa sezione forniremo una dimostrazione del seguente risultato:

Teorema 2.1 (Burago-Kleiner). *Siano $I = [0, 1]$ e fissiamo $L > 0$, $c > 0$. Esiste una funzione continua $\rho : I^2 \rightarrow [1, 1+c]$ per cui non esiste una soluzione L -biLipschitziana $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dell'equazione:*

$$Jf(x) = \rho(x)$$

per L^2 -q.o. $x \in I^2$.

Dimostrazione. Fissiamo le due costanti L e c , e costruiamo la funzione ρ cercata. La seguente definizione ci servirà per semplificare la notazione:

Definizione 2.2. Due punti $x, y \in I^2$ si dicono A -dilatati da una funzione $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se: $d(f(x), f(y)) > Ad(x, y)$.

Costruiamo una successione di funzioni ρ_N sui rettangoli $R_N = [0, 1] \times [0, \frac{1}{N}]$ nel seguente modo: suddividiamo i rettangoli in N quadrati congruenti S_i , $i = 1, \dots, N$, e definiamo $\rho_N = 1$ sui quadrati di indice dispari, $\rho_N = 1 + c$ sui quadrati di indice pari (cioè $\rho_N(x, y) = 1$ se la parte intera della coordinata, $[Nx]$, è pari; $\rho_N(x, y) = 1 + c$ altrimenti).

Per costruire la funzione ρ dovremo usare il seguente Lemma:

Lemma 2.3. *Esistono delle costanti $k \in \mathbb{R}^+$, $M \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}^+$, e $N_0 \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $N > N_0$, e per ogni $\varepsilon \leq \frac{\mu}{N^2}$, se i punti $(0,0)$ e $(1,0)$ sono A -dilatati per una mappa $f : R_N \rightarrow \mathbb{R}^2$ L -biLipschitziana il cui determinante Jacobiano $Jac(f)$ è uguale a ρ_N a meno di un insieme di misura al più ε , allora esiste almeno una coppia di punti $(1+k)A$ -dilatata della forma $((\frac{p}{NM}, \frac{s}{NM}), (\frac{q}{NM}, \frac{s}{NM}))$, con p, q e s interi, $0 \leq p, q \leq NM$, $0 \leq s \leq M$.*

Dimostrazione. Prendiamo una funzione f come da ipotesi. Senza perdita di generalità possiamo assumere che $f(0,0) = (0,0)$ e che $f(1,0) = (z,0)$, per qualche $z \geq A$: ci basterà infatti cambiare sistema di riferimento per ottenere il caso generale.

Suddividiamo ogni quadrato S_i in $M \times M$ quadrati di lato $\frac{1}{NM}$. Chiameremo $x_{p,q}^i = (\frac{p+M(i-1)}{NM}, \frac{q}{NM})$: esso è il punto di "coordinate (p, q) nell' i -esimo quadrato S_i , dove queste coordinate sono intese sul reticolo regolare $M \times M$ nel quadrato S_i .

Dimostriamo il lemma per assurdo: assumiamo che ogni coppia del tipo $x_{p,s}^i, x_{q,s}^j$ non sia $(1+k)A$ -dilatata, al variare di $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ e $p, q, s \in \{1, 2, \dots, M\}$.

Consideriamo coppie di punti del tipo $x_{p,q}^i, x_{p,q}^{i+1}$; chiameremo una coppia di questo tipo una coppia di *punti corrispondenti*. In pratica, dato un punto $x_{p,q}^i$ per trovare il punto corrispondente basta sommare il vettore $(\frac{1}{N}, 0)$.

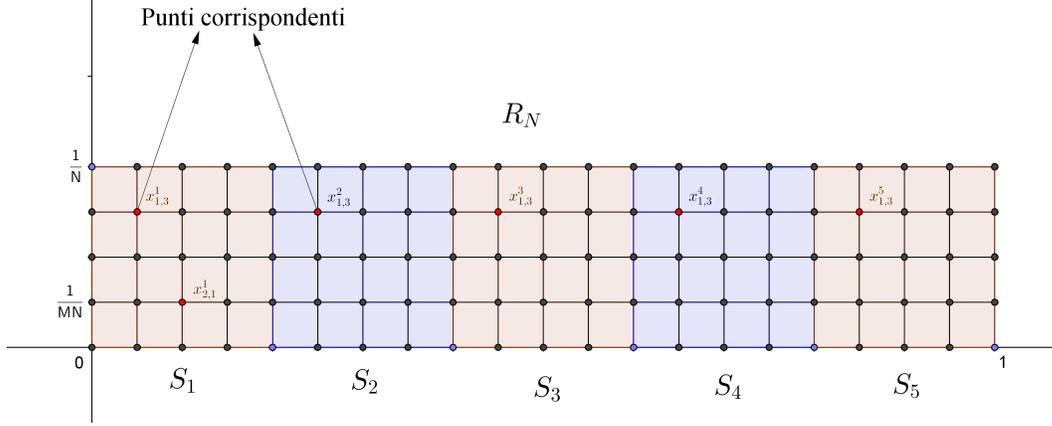


Figura 1: Rettangolo R_N

Definizione 2.4. Sia dato $l \in (0, 1)$. Sia $W_{p,q}^i = f(x_{p,q}^{i+1}) - f(x_{p,q}^i)$ il vettore che congiunge le immagini secondo f di due punti corrispondenti. Diremo che questo vettore è l -regolare se la sua proiezione sull'asse x è lunga almeno $\frac{(1-l)A}{N}$. Diremo che un quadrato S_i è l -regolare se ogni vettore $W_{p,q}^i$ è regolare, per ogni $p, q \in \{1, 2, \dots, M\}$.

Proviamo l'esistenza di un quadrato regolare:

Lemma 2.5. Per ogni $l \in (0, 1)$ esistono $N_0 \in \mathbb{N}$ e $\tilde{k} > 0$ tali che, per ogni $N > N_0$ e $0 < k < \tilde{k}$, esiste un quadrato l -regolare $S_{\tilde{i}}$ nella suddivisione di R_N .

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che ogni quadrato S_i non sia regolare. In particolare ciascun S_{i_j} con $i_j \in \{i \in \{1, 2, \dots, N\} \mid i \text{ pari}\}$ non è regolare, quindi c'è un vettore non regolare che parte da S_{i_j} ; del tutto analogo il caso per i_j dispari.

Per il principio dei piccioni allora deve esistere una riga di altezza $0 \leq s \leq M$ con almeno $\frac{N}{2M+2}$ vettori non regolari scelti su quadrati S_{i_j} con i_j di parità fissata. Infatti esistono N quadrati non regolari, $M+1$ righe e 2 classi di parità (pari e dispari): per il principio dei piccioni, esiste una riga in cui ci sono almeno $\frac{N}{2(M+1)}$ vettori regolari che partono dai quadrati di indice pari (analogamente dispari). Notiamo che l'aver fissato la parità di i_j garantisce che i segmenti non regolari così ottenuti non si intersechino tra loro.

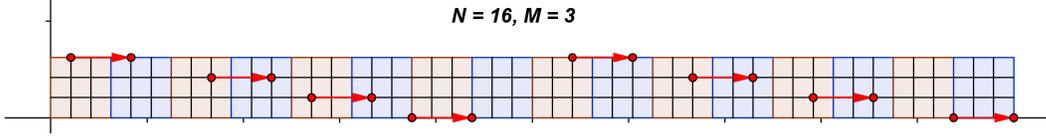


Figura 2: Principio dei piccioni

Siano ora $x_{p_1,s}^{i_1}, x_{p_1,s}^{i_1+1}, x_{p_2,s}^{i_2}, x_{p_2,s}^{i_2+1}, x_{p_3,s}^{i_3}, \dots$ tutti i vertici dei vettori non regolari così trovati. Notiamo che questi punti sono tutti sulla stessa riga di altezza s , e che sono tutti in quadrati diversi. Possiamo quindi considerare il poligono che ha per vertici questi punti, più i punti $(0,0)$, $(0, \frac{s}{MN})$, $(1, \frac{s}{MN})$, $(1,0)$. Questo è semplicemente il rettangolo con vertici questi ultimi quattro punti, visto che tutti gli altri punti cadono sul segmento che congiunge $(0, \frac{s}{MN})$ e $(1, \frac{s}{MN})$. A noi però interessa esaminare l'immagine di questo poligono secondo f .

La proiezione sull'asse x dell'immagine di questo poligono è lunga almeno A : infatti il segmento $[(0,0), (1,0)]$ è mandato in $[(0,0), (z,0)]$ per ipotesi. Stimiamo però la proiezione degli altri lati. I segmenti non regolari $W_{p_j,s}^{i_j}$, per definizione di non regolarità, hanno proiezione lunga almeno $\frac{(1-l)A}{N}$; ogni altro segmento orizzontale ha proiezione lunga almeno $\frac{(1+k)A}{N}$ perchè abbiamo supposto che nessun segmento venga $(1+k)A$ -dilatato. Infine, gli ultimi due segmenti da stimare sono quelli verticali $[(0,0), (0, \frac{s}{MN})]$ e $[(1, \frac{s}{MN}), (1,0)]$, che per la L-Lipschitzianità di f hanno proiezione al più $\frac{L}{N}$.

Chiamiamo P_x la proiezione sull'asse x del poligono. Vogliamo stimare P_x dall'alto. Siccome $\frac{(1-l)A}{N} \leq \frac{(1+k)A}{N}$, le proiezioni dei segmenti regolari possono essere più lunghe di quelle dei segmenti non regolari. Di conseguenza, per stimare dall'alto la proiezione dobbiamo considerare l'altezza s tale che il numero di segmenti regolari ad altezza s è massimo. Ricordando che il minimo numero di vettori non regolari alla stessa altezza è $\frac{N}{2M+2}$ per quanto detto sopra, considereremo $N - \frac{N}{2M+2}$ segmenti come se fossero regolari, e gli altri come non regolari.

$$\begin{aligned} P_x &\leq \frac{(1-l)A}{N} \frac{N}{2M+2} + \frac{(1+k)A}{N} (N - \frac{N}{2M+2}) + \frac{2L}{N} \leq \\ &\leq (1+k)A + \frac{2L}{N} + \frac{(1-l)A - (1+k)A}{2M+2} \leq \frac{(2M+1)(1+k) - (1-l)}{2M+2} A + \frac{2L}{N} \end{aligned}$$

Scegliamo \tilde{k} in modo tale che $1+k < \frac{2M+2}{2M+1}$. Ricordiamo che $l \in (0,1)$, quindi esiste un $\alpha > 0$ tale che:

$$P_x \leq \frac{(2M+1)(1+k) - (1-l)}{2M+2} A + \frac{2L}{N} < (1-\alpha)A + \frac{2L}{N}$$

Ci basta ora scegliere N_0 in modo tale che $\frac{2L}{\alpha A} < N_0$ e avremo:

$$P_x \leq (1-\alpha)A + \frac{2L}{N} < A \tag{2.5}$$

Per quanto visto in precedenza, questo è assurdo. \square

Lemma 2.6. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un l_0 tale che per ogni $l \leq l_0$ e $k \leq l$, $|(\frac{A}{N}, 0) - W_{p,q}^i| \leq \frac{\varepsilon}{N}$ per ogni vettore regolare $W_{p,q}^i$.

Dimostrazione. Sia $W_{p,q}^i = (X, Y)$, $(\frac{A}{N}, 0) = W$. Se $W_{p,q}^i$ è regolare, $X \geq \frac{(1-l)A}{N}$. D'altro canto nessun segmento è $(1+k)A$ -dilatato, quindi $X^2 + Y^2 \leq \frac{(1+k)^2 A^2}{N^2}$ (in particolare $X \leq \frac{(1+k)A}{N}$). Indichiamo la proiezione sull'asse x con π :

$$W_x := |\pi(W - W_{p,q}^i)| = |X - \frac{A}{N}|$$

Da quanto detto in precedenza abbiamo due casi:

$$\frac{(1-l)A}{N} \leq X \leq \frac{A}{N}$$

oppure:

$$\frac{A}{N} \leq X \leq \frac{(1+k)A}{N}$$

Quindi possiamo affermare che:

$$W_x \leq |\frac{A}{N} - \frac{(1+k)A}{N}| + |\frac{A}{N} - \frac{(1-l)A}{N}| \leq \frac{(l+k)A}{N} \leq \frac{2lA}{N}$$

Sostituendo il minimo di X nella disuguaglianza

$$X^2 + Y^2 \leq \frac{(1+k)^2 A^2}{N^2}$$

otteniamo:

$$(\frac{(1-l)A}{N})^2 + Y^2 \leq X^2 + Y^2 \leq \frac{(1+k)^2 A^2}{N^2}$$

e ricordando che $k < l$:

$$\begin{aligned} Y^2 &\leq \frac{(1+k)^2 A^2}{N^2} - \frac{(1-l)^2 A^2}{N^2} \leq \frac{A^2}{N^2}((1+k)^2 - (1-l)^2) = \\ &= \frac{A^2}{N^2}(k^2 + 2k + 1 - 1 + 2l - l^2) \leq \frac{A^2}{N^2}(2k + 2l + 0) \leq \frac{4lA^2}{N^2} \end{aligned}$$

In totale abbiamo:

$$\begin{aligned} |W - W_{p,q}^i| &= |(\frac{A}{N}, 0) - (X, Y)| = \sqrt{Y^2 + \frac{(A - NX)^2}{N^2}} \leq \sqrt{Y^2 + \frac{(-kA)^2}{N^2}} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{4lA^2}{N^2} + \frac{(kA)^2}{N^2}} = \sqrt{\frac{A^2(4l + k^2)}{N^2}} \leq \frac{A}{N}\sqrt{4l + l^2} \leq \frac{A}{N}\sqrt{4l_0 + l_0^2} \leq \frac{\varepsilon}{N} \end{aligned}$$

□

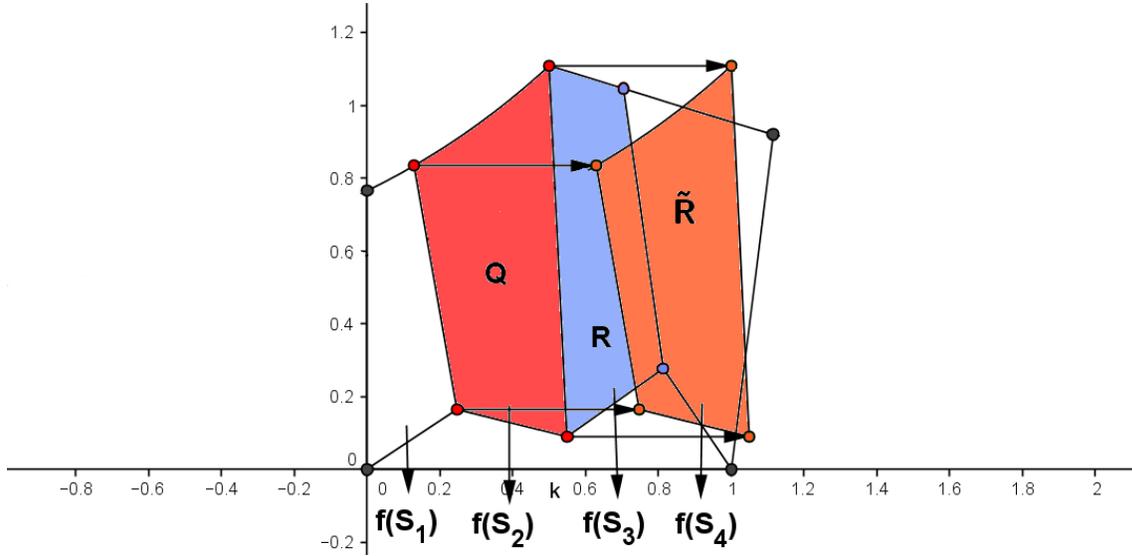


Figura 3: R , Q e \tilde{R}

Ricordiamo che $c > 0$ è un reale fissato. Dimostriamo ora la principale proprietà dei quadrati regolari:

Lemma 2.7. *Esistono un $\varepsilon_0 > 0$ ed un $M_0 > 0$ tali che per ogni $\varepsilon < \varepsilon_0$ e $M > M_0$, i quadrati S_i regolari hanno la seguente proprietà:*

$$|\text{Area}(f(S_{i+1})) - \text{Area}(f(S_i))| \leq \frac{c}{2N^2}$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, prendiamo i pari (il caso in cui è dispari è del tutto analogo). Chiamiamo $Q = f(S_i)$, $R = f(S_{i+1})$, $\tilde{R} = f(S_i) + W$ il traslato di Q (che ha la stessa area di Q).

Sappiamo che per quel particolare i , ogni vettore $W_{p,q}^i$ è regolare, quindi possiamo applicare il lemma precedente:

$$|(f(x_{p,q}^{i+1}) - f(x_{p,q}^i)) - W| \leq \frac{\varepsilon}{N}$$

Notiamo che i punti $x_{p,q}^i$ formano una rete separata su S_i , e i punti $x_{p,q}^{i+1}$ formano una analoga rete separata su S_{i+1} .

Fissiamo un punto $P \in S_{i+1}$ la cui immagine è $f(P) \in R$. Esiste un punto $X_R = x_{p_0, q_0}^{i+1} \in S_{i+1}$ (con $p_0, q_0 \in \{1, \dots, M\}$) tale che $|X_R - P| < \frac{1}{MN}$, per le proprietà delle reti separate. Siccome f è L -Lipschitziana, abbiamo che $|f(X_R) - f(P)| < \frac{L}{MN}$.

Per quanto detto sopra il punto $X_Q = x_{p_0, q_0}^i \in S_i$ è tale che:

$$|(f(x_{p,q}^{i+1}) - f(x_{p,q}^i)) - W| = |f(X_R) - (f(X_Q) + W)| \leq \frac{\varepsilon}{N}$$

Possiamo quindi affermare che ogni punto $f(P) \in R$ è tale che, per qualche $p, q \in \{1, \dots, M\}$:

$$d(f(P), f(x_{p,q}^i) + W) \leq \frac{L}{MN} + \frac{\varepsilon}{N}$$

La funzione f è biLipschitziana, quindi è un omeomorfismo, e in particolare è

aperta e chiusa. Un punto interno P_1 del quadrato S_i deve avere un intorno $U_{P_1} \subset S_i$; possiamo quindi considerare l'immagine di questo intorno $f(U_{P_1})$. Naturalmente $f(P_1) \in f(U_{P_1})$, e siccome f è aperta $f(U_{P_1})$ è aperto. Se prendiamo un punto interno $P_2 \in f(S_i) = Q$ e un suo intorno $U_{P_2} \subset Q$, per continuità la sua controimmagine $f^{-1}(P_2) \in f^{-1}(U_{P_2})$ è un punto interno. Scomponendo dominio e codominio in parte interna e frontiera otteniamo immediatamente che P è punto di frontiera in S_i se e solo se $f(P)$ è punto di frontiera in $f(S_i)$. Siccome le traslazioni sono omomorfismi, possiamo ragionare allo stesso modo per $\tilde{R} = Q + W$.

Consideriamo quindi i punti $f(x_{p,q}^i) + W$ che si trovano sulla frontiera del poligono \tilde{R} . Per Lipschitzianità di f , fissato uno di questi punti A ne esiste un altro B tale che $d(A, B) < \frac{L}{MN}$. Per quanto detto sopra la frontiera di \tilde{R} è omeomorfa alla frontiera di S_i ; possiamo quindi affermare che la lunghezza di questa frontiera è al più $\frac{4L}{N}$.

Infatti basta ragionare con la definizione di lunghezza di una curva. La frontiera è parametrizzabile perchè è omeomorfa ad una curva parametrizzabile (la frontiera di S_i è una spezzata). Sia $\phi(t)$ una parametrizzazione. Per ogni insieme di parametri $0 = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = T$ e ogni spezzata passante per i punti $\phi(t_1), \dots, \phi(t_n)$, la lunghezza della spezzata è:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n-1} |\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k)| = \sum_{k=1}^{n-1} |(\phi(t_{k+1}) - W) - (\phi(t_k) - W)| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} L |f^{-1}(\phi(t_{k+1}) - W) - f^{-1}(\phi(t_k) - W)| \leq LS' \end{aligned}$$

dove S' è la lunghezza della frontiera di S_i , e l'ultima disuguaglianza vale per definizione di lunghezza di una curva.

Sia $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, \partial\tilde{R}) \leq \frac{\varepsilon}{N} + \frac{2L}{MN}\}$ un intorno della frontiera di \tilde{R} . Per il ragionamento precedente $\partial\tilde{R} \subset U$. Ne consegue:

$$|Area(R) - Area(Q)| = |Area(R) - Area(\tilde{R})| \leq Area(U)$$

Costruiamo una successione di insiemi convergente a U nel seguente modo. Prendiamo una successione di suddivisioni $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di $\partial\tilde{R}$ equidistribuite. Chiamiamo W_k la spezzata chiusa costruita a partire dalla suddivisione T_k .

Consideriamo $U_k = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, W_k) \leq \frac{\varepsilon}{N} + \frac{2L}{MN}\}$. Chiaramente $U_k \rightarrow U$ per $k \rightarrow \infty$. Inoltre $Area(U_k)$ è facilmente calcolabile, perchè si scompone in rettangoli di noto raggio e lunghezza totale l_k di limite noto, e sezioni circolari di noto raggio e ampiezza totale 2π per le proprietà degli angoli esterni dei poligoni convessi.

Denotando con $r = \frac{\varepsilon}{N} + \frac{2L}{MN}$:

$$\begin{aligned} Area(U_k) &= l_k r + 2\pi r^2 \\ Area(U) &= \lim_{k \rightarrow \infty} Area(U_k) = V(\partial\tilde{R})r + 2\pi r^2 \leq \frac{4L}{N}r + 2\pi r^2 \end{aligned}$$

Possiamo fissare ε_0 e M_0 in modo tale che $r < r_0$, con r_0 arbitrario. Scegliendo opportunamente r_0 possiamo far sì che $Area(U) \leq \frac{c}{2N^2}$. \square

Notiamo che nella precedente dimostrazione la costante $\frac{c}{2N^2}$ scelta è del tutto arbitraria.

Concludiamo ora la dimostrazione del Lemma 2.3. Vogliamo confrontare $Area(Q)$ e $Area(R)$. Sappiamo che esiste una regione $E \subset R_N$ di misura al più ε tale che $Jac(f) = \rho$ su $R_N \setminus E$. Ricordiamo inoltre che $\rho(x) = 1$ per $x \in S_i$ e $\rho(x) = 1 + c$ per $x \in S_{i+1}$. Notiamo che f è L -Lipschitziana, quindi dato $A \subset \mathbb{R}^2$ si ha $Area(f(A)) \leq L^2 Area(A)$. Quindi:

$$\begin{aligned} Area(Q) &= 1 \cdot Area(S_i \setminus E) + Area(f(S_i \cap E)) \leq 1 \cdot Area(S_i) + Area(f(S_i \cap E)) \leq \\ &\leq 1 \cdot Area(S_i) + L^2 Area(S_i \cap E) \leq 1 \cdot Area(S_i) + L^2 Area(E) \leq \frac{1}{N^2} + \varepsilon L^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Area(R) &= (1 + c) \cdot Area(S_{i+1} \setminus E) + Area(f(S_{i+1} \cap E)) \geq (1 + c) \cdot Area(S_{i+1} \setminus E) \geq \\ &\geq (1 + c) \cdot (Area(S_{i+1}) - Area(E)) \geq (1 + c) \cdot \left(\frac{1}{N^2} - \varepsilon\right) \end{aligned}$$

Grazie al precedente lemma confrontiamo l'area di R con l'area di Q :

$$\begin{aligned} \frac{c}{2N^2} &> |Area(R) - Area(Q)| \geq (1 + c) \left(\frac{1}{N^2} - \varepsilon\right) - \frac{1}{N^2} - \varepsilon L^2 = \\ &= \frac{c}{N^2} - (1 + c + L^2)\varepsilon \end{aligned}$$

Ricordiamo che ciò deve valere per ogni $\varepsilon \leq \frac{\mu}{N^2}$. Abbiamo quindi una contraddizione con la seguente scelta di μ :

$$\mu = \frac{c}{2(1 + c + L^2)}$$

□

Usiamo ora l'informazione dataci dal Lemma 2.3 per dimostrare il Teorema 2.1. Procederemo con una costruzione induttiva a partire dal seguente lemma:

Lemma 2.8. *Esiste $k > 0$ per cui vale la seguente proprietà: consideriamo un qualsiasi segmento $[x, y]$ in I^2 , e un intorno U del segmento. Possiamo definire una funzione misurabile $\rho : U \rightarrow \{1, 1 + c\}$, un $\varepsilon > 0$ e un insieme finito di segmenti disgiunti $[l_i, r_i] \subset U$ tali che: se gli estremi del segmento x, y sono A -dilatati da una mappa $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ L -biLipschitziana per la quale $Jac(f) = \rho$ eccetto su un insieme di misura al più ε , allora per un qualche i la coppia di punti l_i, r_i è $(1 + k)A$ -dilatata dalla funzione f .*

Dimostrazione. Sia ϕ una affinità che porta il segmento $[x, y]$ su $[0, 1]$ (e quindi l'intorno U in un intorno di $[0, 1]$). Per N sufficientemente grande $R_N = [0, 1] \times [0, \frac{1}{N}] \subset U$. Usiamo il lemma precedente e otteniamo un $k' > 0$, una funzione misurabile ρ_N , un $\varepsilon' > 0$, un insieme finito di segmenti del tipo $[(\frac{p}{NM}, \frac{s}{NM}), (\frac{q}{NM}, \frac{s}{NM})]$, una mappa L' -biLipschitziana f' , una costante di dilatazione A' . Consideriamo ora la funzione misurabile $\rho = \phi^{-1} \circ \rho_N \circ \phi$, l'insieme finito di segmenti del tipo $\phi^{-1}([(\frac{p}{NM}, \frac{s}{NM}), (\frac{q}{NM}, \frac{s}{NM})])$

e la mappa biLipschitziana $f = \phi^{-1} \circ f' \circ \phi$. Possiamo fissare opportuni valori di ε' , A' e L' (dipendenti da ϕ) che facciano sì che la funzione f abbia $Jac(f) = \rho$ su un insieme di misura al più ε , sia L -biLipschitziana e che dilati i punti x, y di un fattore almeno A . Siccome ϕ è una trasformazione affine, ed esiste un segmento $[(\frac{p}{NM}, \frac{s}{NM}), (\frac{q}{NM}, \frac{s}{NM})]$ i cui estremi sono $(1 + k')A'$ -dilatati, esiste sicuramente un $k > 0$ per cui il segmento $\phi^{-1}([(\frac{p}{NM}, \frac{s}{NM}), (\frac{q}{NM}, \frac{s}{NM})])$ ha gli estremi $(1 + k)A$ -dilatati. \square

Sia ora $n \in \mathbb{N}$; cerchiamo funzioni misurabili $\rho_n : I^2 \rightarrow [1, 1 + c]$, insiemi finiti di segmenti disgiunti $S_n = \{[l_i, r_i] \subset I^2\}$ e una costante $\varepsilon_n > 0$ tali che ogni funzione $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ L -biLipschitziana con $Jac(f) = \rho_n$ eccetto su un insieme di misura ε_n dilati uno dei segmenti di S_n di un fattore $\frac{1}{L}(1 + k)^n$.

Procediamo per induzione. Per $n = 0$ la proprietà richiesta è banale: è la disuguaglianza di biLipschitzianità per la funzione f

$$d(f(x), f(y)) > \frac{1}{L}d(x, y)$$

Possiamo quindi prendere $\rho_0 = 1$, come insieme finito di segmenti S_0 quello contenente un qualsiasi segmento $[x, y]$, e un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario.

Supponiamo ora di avere ottenuto una tale funzione ρ_n e consideriamo l'insieme finito di segmenti S_n . Tra di essi ce n'è uno dilatato di un fattore $\frac{1}{L}(1 + k)^n$, che chiameremo $[\tilde{l}_n, \tilde{r}_n]$. Consideriamo U_n un'unione di intorno di questi segmenti tale che $Area(U_n) < \frac{\varepsilon_n}{3}$ e tale che $U_n \subset [0, 1] \times (a_n, b_n)$ per una coppia di ascisse a_n, b_n con $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{L}$.

Applichiamo il lemma precedente con $A = \frac{1}{L}(1 + k)^n$ per ottenere una funzione $\tilde{\rho}_n : U_n \rightarrow \{1, 1 + c\}$, un $\tilde{\varepsilon}_n > 0$ e un insieme \tilde{S}_n di segmenti disgiunti. Sappiamo che, data una funzione f L -biLipschitziana tale che $Jac(f) = \tilde{\rho}_n$ su U_n eccezion fatta per un insieme di misura al più $\tilde{\varepsilon}_n$, allora un qualche segmento di \tilde{S}_n è dilatato di un fattore $(1 + k) \cdot \frac{1}{L}(1 + k)^n = \frac{1}{L}(1 + k)^{n+1}$.

La funzione $\rho_{n+1} : I^2 \rightarrow [1, 1 + c]$ che rispetta la proprietà richiesta sarà costruita nel seguente modo. Prendiamo ρ_n su I^2 , consideriamo la striscia $[0, 1] \times (a_n, b_n)$ contenente U_n per costruzione e definiamo $\rho_{n+1}(x) = \rho_n(x)$ per $x \in I^2 \setminus [0, 1] \times (\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}})$. Per la striscia $[0, 1] \times (\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}})$ consideriamo una traslazione $\tau_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che porta la striscia (più piccola) $[0, 1] \times (a_n, b_n)$ e in particolare il suo sottinsieme U_n all'interno della prima. Per esempio, ci basta traslare il piano lungo l'asse y di $\frac{2^n-1}{2^n} - a_n$. Definiamo $\rho_{n+1}(x) = \tilde{\rho}_n \circ \tau_n^{-1}(x)$ su $\tau_n(U_n)$, e $\rho_{n+1}(x) = 1$ su $[0, 1] \times (\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}) \setminus \tau_n(U_n)$.

Resta ora da costruire una funzione continua ρ a partire dalle funzioni misurabili così ottenute.

Notiamo che per costruzione tutte queste funzioni misurabili sono funzioni semplici, e che per ogni $n \in \mathbb{N}$ la costruzione di ρ_n è finita. In particolare, esistono un insieme finito di aperti con frontiere C^∞ a tratti su cui la funzione ρ_n è costante. Le frontiere di questi aperti sono insiemi di misura nulla, e l'unione finita di queste frontiere è pertanto di misura nulla. Possiamo quindi costruire delle funzioni continue ρ'_n che

differiscono dalle rispettive ρ_n solo su un insieme di misura al più $\frac{\varepsilon_n}{3}$, raccordando le funzioni misurabili con un argomento standard.

Per quanto affermato sopra, ogni funzione $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ L -biLipschitziana con $Jac(f) = \rho'_n$ eccetto su un insieme di misura $\frac{2}{3}\varepsilon_n$ dilata uno dei segmenti di S_n di un fattore $\frac{1}{L}(1+k)^n$.

Esiste un n_0 tale che $\frac{1}{L}(1+k)^{n_0} > L$. Chiaramente la funzione $\rho = \rho'_{n_0}$ è quella che cerchiamo. \square

Ci si potrebbe chiedere se esista una funzione continua ρ indipendente da L , cioè tale che nessuna funzione f biLipschitziana per una qualsiasi costante di Lipschitz L sia tale che $Jf(x) = \rho(x)$ per quasi ogni $x \in I^2$. In generale la domanda rimane aperta, ma con la costruzione usata in questa tesi non si può in generale garantire la continuità in ogni punto. Si può ottenere però il seguente risultato:

Corollario 2.9. *Esiste una funzione $\rho : I^2 \rightarrow [1, 1+c]$ continua su $I^2 \setminus \{x_0\}$ per un qualche $x_0 \in I^2$ tale che per ogni $L > 0$ non esiste una soluzione L -biLipschitziana $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dell'equazione:*

$$Jf(x) = \rho(x)$$

per L^2 -q.o. $x \in I^2$.

Dimostrazione. Estendiamo la dimostrazione precedente considerando il limite delle funzioni ρ'_n costruite nella dimostrazione del teorema 2.1.

Consideriamo ora $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho'_n$. Per costruzione le funzioni ρ'_n differiscono da ρ'_{n+1} solo nella striscia $[0, 1] \times (\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}})$. Questo significa che per ogni punto $x \in I^2$ tale che esiste un n per cui $x \notin [0, 1] \times (\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}})$, la successione $\rho'_n(x)$ è definitivamente costante.

Si ha chiaramente che la successione ρ'_n converge uniformemente su $I^2 \setminus [0, 1] \times (\frac{2^{n_0}-1}{2^{n_0}}, 1)$ per ogni $n_0 \in \mathbb{N}$. Questi insiemi hanno chiaramente misura di Lebesgue infinitesima. Per ogni punto $x \in [0, 1] \times [0, 1)$ abbiamo dunque dimostrato la continuità della funzione limite per convergenza uniforme.

Possiamo ora adoperare il seguente accorgimento per limitare la discontinuità ad un singolo punto: ad ogni passaggio la funzione ρ'_n viene ridefinita su un'intera striscia, ma è costantemente 1 fuori da un insieme $\tau_n(U_n)$ di diametro tendente a 0. Chiamiamo $d_n = d(\tau_n(U_n), \{1\} \times [0, 1])$. Definiamo $\rho''_n(x) = \rho'_n(x - (d_n, 0))$ sulla porzione di striscia $[d_n, 1] \times (\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}})$, e $\rho''_n(x) = 1$ sul resto della striscia $[0, d_n] \times (\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}})$ (abbiamo traslato la regione interessante vicino al lato destro del quadrato). In questo modo per ogni $x \in [0, 1) \times \{1\}$ esiste un intorno di x su cui la successione è definitivamente 1, e quindi la funzione limite è continua in x per convergenza uniforme.

Fissata una qualsiasi costante di Lipschitz L_0 esiste un n per cui $L_0 < \frac{1}{L}(1+k)^n$. Per costruzione, qualsiasi funzione L_0 -biLipschitziana f tale che $Jac(f) = \rho$ eccetto su un insieme di misura al più ε dilata il segmento $[\tilde{l}_n, \tilde{r}_n]$ almeno di un fattore $\frac{1}{L}(1+k)^n$, che è assurdo per la disuguaglianza di Lipschitz.

In conclusione, per qualsiasi costante di Lipschitz L_0 non può esistere una funzione L_0 -biLipschitziana tale che $Jac(f) = \rho$ quasi ovunque.

Facciamo notare che la funzione ρ così definita è discontinua nel punto $(1, 1)$. Infatti basta considerare la regione $\tau_n(U_n) + d_n$. All'interno di questa regione la funzione ρ assume valore 1 in almeno un punto, e valore $1 + c$ in almeno un punto. Siano y_n e z_n questi punti. Siccome il diametro degli insiemi $\tau_n(U_n) + d_n$ è infinitesimo, queste successioni convergono allo stesso punto, cioè $(1, 1)$, che sarà un punto di discontinuità per ρ . \square

3. RETI SEPARATE NEL PIANO EUCLIDEO

In questa sezione dimostreremo il risultato sulle reti separate nel piano euclideo. Richiamiamo la definizione di rete separata data nell'introduzione.

Definizione 3.1. Sia (M, d) uno spazio metrico. Si dice *rete separata* in M un insieme $X \subseteq M$ per cui valgono le seguenti due proprietà:

(1) esiste una costante positiva $a \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $x_1, x_2 \in X$:

$$d(x_1, x_2) > a$$

(2) esiste una costante positiva $b \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $y \in M$:

$$d(y, X) < b$$

Le costanti a e b si chiameranno *costanti caratteristiche* di X .

Nel seguito considereremo come spazio metrico $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, e come misura su \mathbb{R}^2 prenderemo la misura di Lebesgue dL .

Usando il Teorema 2.1 dimostreremo ora il seguente risultato:

Teorema 3.2 (Burago-Kleiner). *Esistono reti separate in \mathbb{R}^2 che non sono bilipschitzianamente equivalenti a \mathbb{Z}^2 .*

Dimostrazione. Vogliamo costruire una rete separata X che non può essere trasportata su \mathbb{Z}^2 con una mappa biLipschitziana. Per costruire questa rete, ci serviremo di una funzione misurabile $\rho : I^2 \rightarrow [1, 1 + c]$ che non è il determinante dello Jacobiano di alcuna mappa biLipschitziana $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Questa funzione esiste per il Teorema 2.1.

Consideriamo una successione di quadrati $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^2 disgiunti, tali che i vertici siano in \mathbb{Z}^2 , i lati siano paralleli agli assi e la lunghezza dei lati sia una successione $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = \infty \tag{3.6}$$

Operiamo una prima suddivisione di questi quadrati, tagliando ciascun quadrato S_k con delle linee parallele agli assi ed equidistanti tra loro, che lo ripartiscano in m_k^2 quadratini di lato l_k/m_k . Chiameremo i quadrati così ottenuti T_{ki} (con $1 \leq i \leq m_k^2$).

Vogliamo inoltre fare sì che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \infty \tag{3.7}$$

ma che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{l_k} = 0 \tag{3.8}$$

Ad esempio, possiamo prendere $l_k = 2^k$ e $m_k = k$. Come vedremo in seguito queste ipotesi sono fondamentali per far sì che la nostra rete sia effettivamente separata.

Indichiamo con $\phi_k : I^2 \rightarrow S_k$ l'omeomorfismo affine tra i due quadrati, e con

$$\begin{aligned} \rho_k : S_k &\rightarrow [1, 1 + c] \\ \rho_k(x) &= \rho \circ \phi_k^{-1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

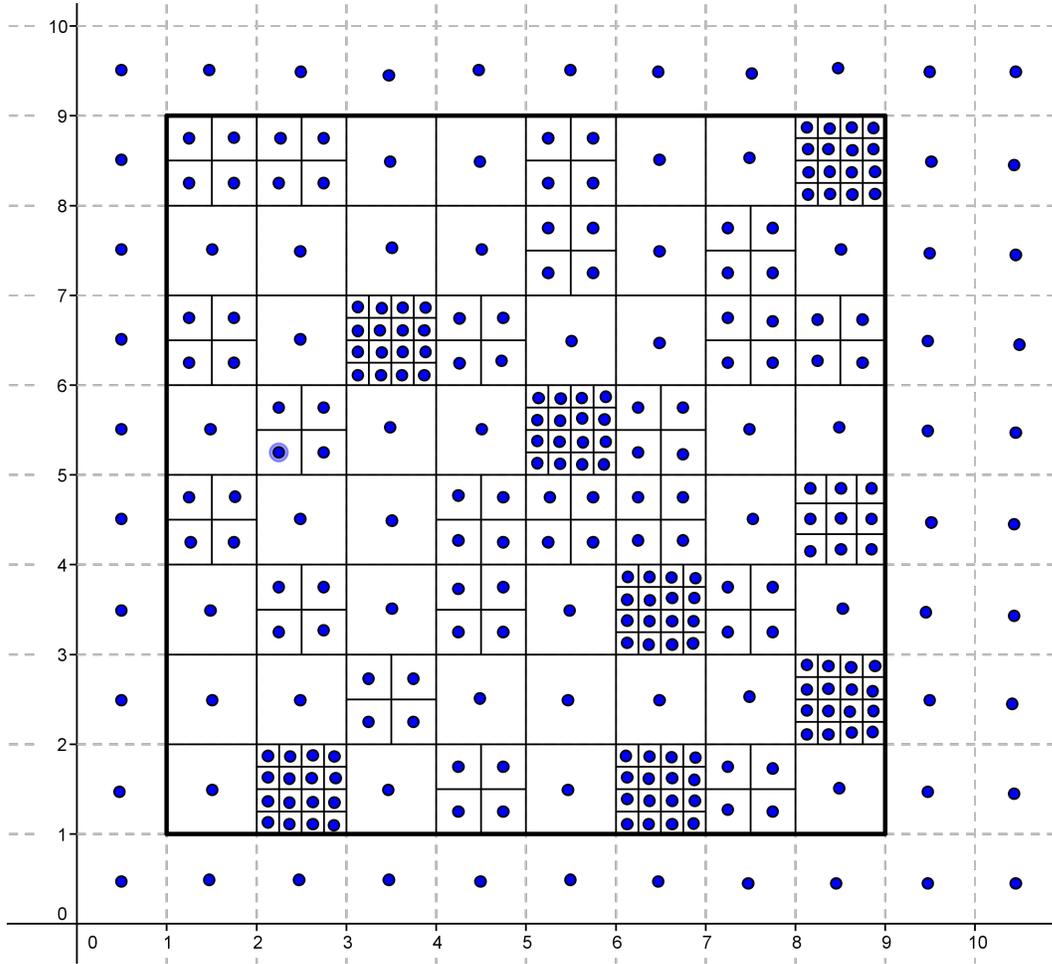


Figura 4: rete X

Notiamo che

$$\frac{1}{\rho_k}(x) = \frac{1}{\rho} \circ \phi_k^{-1}(x) \in \left[\frac{1}{1+c}, 1 \right]$$

Operiamo ora una seconda suddivisione dei quadrati T_{ki} , sempre con linee parallele agli assi ed equidistanti tra loro. Chiameremo i quadratini ottenuti con la seconda suddivisione U_{kij} , con $1 \leq j \leq n_{ki}^2$. Il numero di quadrati che vogliamo ottenere in ciascun T_{ki} è quindi n_{ki}^2 , dove

$$n_{ki} = \left[\sqrt{\int_{T_{ki}} \frac{1}{\rho_k} dL} \right] \quad (3.10)$$

Questa scelta di n_{ki} è da intendersi nel seguente modo. L'area di un quadrato T_{ki} pesata con la funzione misurabile $\frac{1}{\rho_k}$ è proprio $\int_{T_{ki}} \frac{1}{\rho_k} dL$. Supponendo di poter ignorare l'approssimazione dovuta alla parte intera (che è necessaria per avere un numero intero di quadrati), n_{ki} è quindi il lato di un quadrato con area pari a questa area pesata.

Possiamo ora costruire la rete separata non bilipschitzianamente equivalente a \mathbb{Z}^2

che cerchiamo. Sia X l'insieme dei centri dei quadrati U_{kij} al variare di k, i e j unito all'insieme dei centri dei quadrati del reticolo \mathbb{Z}^2 non contenuti in $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$.

Lemma 3.3. X è una rete separata.

Dimostrazione. Per ogni $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$, si ha: $\text{dist}(z, X) \leq 1$. Inoltre vale $\text{dist}(x, x') \geq 1$ per ogni $x, x' \in X \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$.

Notiamo che il lato di ciascun quadrato U_{kij} si stima nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \frac{l_k}{m_k n_{ki}} &= \frac{l_k}{m_k \left[\sqrt{\int_{T_{ki}} \frac{1}{\rho_k} dL} \right]} \leq \frac{l_k}{m_k \left[\sqrt{\int_{T_{ki}} \frac{1}{1+c} dL} \right]} = \frac{l_k}{m_k \left[\frac{1}{\sqrt{1+c}} \frac{l_k}{m_k} \right]} \\ \frac{l_k}{m_k n_{ki}} &= \frac{l_k}{m_k \left[\sqrt{\int_{T_{ki}} \frac{1}{\rho_k} dL} \right]} \geq \frac{l_k}{m_k \left[\sqrt{\int_{T_{ki}} 1 dL} \right]} = \frac{l_k}{m_k \left[\frac{l_k}{m_k} \right]} \end{aligned}$$

Ricordando che per (3.8) il rapporto tra $\left[\frac{l_k}{m_k} \right]$ e $\frac{l_k}{m_k}$ tende ad 1, abbiamo che:

$$1 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{l_k}{m_k n_{ki}} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{l_k}{m_k n_{ki}} \leq \sqrt{1+c} \quad (3.11)$$

Pertanto esistono due costanti positive a e b tali che:

(1) per ogni $x_1, x_2 \in X \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$:

$$d(x_1, x_2) > a$$

(2) per ogni $y \in \mathbb{R}^2 \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$:

$$d(y, X) < b$$

Basta ora prendere $\min\{a, 1\}$ e $\max\{b, 1\}$ per l'intera rete X . \square

Vogliamo dimostrare che questa rete separata X non è biLipschitzianamente equivalente a \mathbb{Z}^2 . Procediamo per assurdo.

Supponiamo che $g : X \rightarrow \mathbb{Z}^2$ sia una mappa L -biLipschitziana. Denotiamo con $X_k = \phi_k^{-1}(X) \subset I^2$, e con $\alpha_k \in X_k$ un punto fissato. Definiamo poi $f_k : X_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ come:

$$f_k(x) = \frac{1}{l_k} (g \circ \phi_k(x) - g \circ \phi_k(\alpha_k)) \quad (3.12)$$

A partire da queste funzioni f_k vogliamo definire una funzione f su tutto I^2 da intendersi come l'estensione Lipschitziana del limite delle f_k . Per farlo useremo il teorema di Ascoli-Arzelà nel seguente modo.

Siccome ϕ_k è un omeomorfismo affine e g è L -biLipschitziana, per (3.12) f_k è L -biLipschitziana. Notiamo che la costante di Lipschitz non dipende da k , pertanto $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di funzioni equicontinue.

La funzione g è biLipschitziana, quindi:

$$|f_k(x)| = \frac{1}{l_k} |g(\phi_k(x)) - g(\phi_k(\alpha_k))| \leq \frac{L}{l_k} |\phi_k(x - \alpha_k)| \leq \frac{L}{l_k} \sqrt{2} l_k \leq \sqrt{2} L$$

Le f_k sono quindi uniformemente limitate.

Estendiamo le f_k a delle funzioni $F_k : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ costruite nel seguente modo. Sia T triangolazione contenuta in I^2 con vertici i punti di X_k e i vertici di I^2 stesso. Possiamo costruire T di modo che ricopra tutto I^2 . Su ciascun triangolo di T definiamo F_k come la funzione lineare affine che passa per i vertici. I valori nei punti di X_k sono già fissati, e come valori per i vertici di I^2 prendiamo i valori del più vicino punto di X_k .

Per costruzione le F_k sono uniformemente limitate. Siccome X_k è finito sono anche funzioni Lipschitziane. Inoltre la costante di Lipschitz di F_k è al più L per costruzione. Quindi le F_k sono ancora equicontinue.

Per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste una funzione f che è limite uniforme delle F_k . Questa funzione è definita su I^2 ed è biLipschitziana. Inoltre $\sup_{x \in X_k} |f(x) - f_k(x)| \rightarrow 0$.

Per la nostra scelta di ρ , non esiste alcuna funzione biLipschitziana \tilde{f} (in particolare continua) tale che $Jac(\tilde{f}) = \rho$. Per ottenere un assurdo e dimostrare il teorema ci basta provare quindi il seguente lemma:

Lemma 3.4. *La funzione f è tale che $Jac(f) = \rho$ quasi ovunque in I^2 .*

Dimostrazione. Denotiamo con μ_k la *counting measure* χ_k su X_k riscalata di un fattore $1/l_k^2$: dimostriamo che essa converge debolmente a $\frac{1}{\rho} dL$.

Devo dimostrare che per ogni f continua

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{I^2} f d\mu_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{l_k^2} \sum_{x \in X_k} f(x) = \int_{I^2} \frac{1}{\rho(x)} f(x) dx$$

Consideriamo la differenza:

$$\left| \int_{I^2} \frac{1}{\rho(x)} f(x) dx - \frac{1}{l_k^2} \sum_{x \in X_k} f(x) \right|$$

X_k è l'insieme di tutti i centri dei quadrati U_{kij} al variare di i e j , trasportato in I^2 con l'omeomorfismo ϕ_k^{-1} . Quindi si ha:

$$\frac{1}{l_k^2} \sum_{x \in X_k} f(x) = \frac{1}{l_k^2} \sum_{i,j} f(\phi_k^{-1}(x_{kij})) \frac{L^2(U_{kij})}{L^2(U_{kij})} = \frac{1}{l_k^2} \sum_{i,j} f(\phi_k^{-1}(x_{kij})) \frac{l_k^2}{m_k^2 n_k^2} \frac{m_k^2 n_k^2}{l_k^2}$$

dove x_{kij} è il centro di U_{kij} , e L^2 è la misura di Lebesgue in \mathbb{R}^2 .

Definiamo $f_{ik} : T_{ki} \rightarrow \mathbb{R}^2$ come la funzione semplice che su U_{kij} assume il valore $f(\phi_k^{-1}(x_{kij}))$. Allora si ha:

$$\frac{1}{l_k^2} \sum_{x \in X_k} f(x) = \frac{1}{l_k^2} \sum_i \frac{n_{ki}^2 m_k^2}{l_k^2} \int_{T_{ki}} f_{ik}(x) dx$$

Ricordando che $n_{ki} = \left[\sqrt{\int_{T_{ki}} \frac{1}{\rho_k} dL} \right]$, possiamo stimare:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l_k^2} \sum_i \frac{n_{ki}^2 m_k^2}{l_k^2} \int_{T_{ki}} f_{ik}(x) dx \leq \frac{1}{l_k^2} \sum_i m_k^2 \int_{T_{ki}} f_{ik}(x) dx \int_{T_{ki}} \frac{1}{\rho} \circ \phi_k^{-1}(x) \frac{1}{l_k^2} dx = \\ & = \frac{1}{l_k^2} \sum_i m_k^2 \int_{T_{ki}} f_{ik}(x) dx \int_{\phi_k^{-1}(T_{ki})} \frac{1}{\rho(x)} dx \leq \frac{1}{l_k^2} \sum_i \frac{(n_{ki}^2 + 1) m_k^2}{l_k^2} \int_{T_{ki}} f_{ik}(x) dx \end{aligned}$$

Notiamo che per $k \rightarrow \infty$, $n_{ki} \rightarrow \infty$ per (3.11); possiamo quindi affermare che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{l_k^2} \sum_i \frac{n_{ki}^2 m_k^2}{l_k^2} \int_{T_{ki}} f_{ik}(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{l_k^2} \sum_i m_k^2 \int_{T_{ki}} f_{ik}(x) dx \int_{\phi_k^{-1}(T_{ki})} \frac{1}{\rho(x)} dx$$

Chiamiamo $d\lambda = \frac{1}{\rho} dL^2$. Definiamo inoltre un'altra funzione a gradini, $g_k : S_k \rightarrow \mathbb{R}$, $g_k(y) = \int_{T_{ki}} f_{ki}(x) dx$ per ogni y nel quadrato T_{ki} .

Ritornando alla differenza iniziale abbiamo ottenuto:

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{I^2} \frac{1}{\rho(x)} f(x) dx - \frac{1}{l_k^2} \sum_{x \in X_k} f(x) \right| = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{I^2} f(x) d\lambda(x) - \frac{m_k^2}{l_k^2} \sum_i \int_{\phi_k^{-1}(T_{ki})} g_k(\phi_k^{-1}(y)) d\lambda(y) \right| = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{I^2} f(x) d\lambda(x) - \frac{m_k^2}{l_k^2} \int_{I^2} g_k(\phi_k^{-1}(y)) d\lambda(y) \right| \end{aligned}$$

Ci basta dimostrare che per quasi ogni $x \in I^2$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| f(x) - \frac{m_k^2}{l_k^2} g_k \circ \phi_k^{-1}(x) \right| = 0$$

Sia $x \in \phi_k^{-1}(U_{kij}) \subset I^2$, $\varepsilon > 0$ fissato. Allora per k sufficientemente grande:

$$\begin{aligned} |f(x) - \frac{m_k^2}{l_k^2} g_k \circ \phi_k^{-1}(x)| &= \left| f(x) - \frac{m_k^2}{l_k^2} \int_{T_{ki}} f_{ik}(x) dx \right| = \left| f(x) - \frac{m_k^2}{l_k^2} \sum_{j=1}^{n_{ki}^2} f_{ijk} \cdot L^2(U_{kij}) \right| = \\ &= \left| \frac{n_{ki}^2}{n_{ki}^2} f(x) - \frac{1}{n_{ki}^2} \sum_{j=1}^{n_{ki}^2} f_{ijk} \right| = \frac{1}{n_{ki}^2} \left| \sum_{j=1}^{n_{ki}^2} f(x) - f(\phi_k^{-1}(x_{ijk})) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n_{ki}^2} \sum_{j=1}^{n_{ki}^2} |f(x) - f(\phi_k^{-1}(x_{ijk}))| \leq L \frac{n_{ki}^2}{n_{ki}^2} \varepsilon = L\varepsilon \end{aligned}$$

perchè f è Lipschitziana, e per (3.11) se $x \in \phi_k^{-1}(U_{kij})$ si ha:

$$|x - \phi_k^{-1}(x_{ijk})| = \frac{1}{l_k} |\phi_k(x) - x_{ijk}| \leq \frac{1}{l_k} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{l_k}{m_k n_{ki}} \leq \frac{1}{l_k} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+c} \rightarrow 0$$

Consideriamo ora la *counting measure* $d\mu_k$ su $Y_k := f_k(X_k)$, normalizzata con un fattore $\alpha_k = |Y_k|$, vale a dire il numero di punti della rete. Dimostriamo che essa converge debolmente alla misura di Lebesgue. La convergenza ci è suggerita dalla seguente constatazione: $Y_k = f_k(X_k) \subset \mathbb{Z}^2/l_k$, e il fattore di riscaldamento l_k tende a ∞ con k . Questo insieme quindi si “addensa” sempre di più in I^2 . Vogliamo far vedere che questo insieme è abbastanza regolare da poter stimare la sua *counting measure* con la misura di Lebesgue.

Ricordiamo che $X_k = \phi_k^{-1}(X) \subset I^2$, che $f_k(x) = \frac{1}{l_k} g \circ \phi_k(x) + c_k$ per un’opportuna costante c_k , e che quindi $f_k(X_k) = Y_k \subseteq \mathbb{Z}^2/l_k$. Nel seguito assumeremo $c_k = 0$ per semplicità; i ragionamenti di seguito sono infatti del tutto analoghi nel caso in cui si debba considerare una ulteriore traslazione. Mostriamo che Y_k è una rete separata in I^2 .

$X_k \subset \mathbb{Z}^2/l_k$ è una rete separata con costanti caratteristiche a/l_k e b/l_k . ϕ_k è un’affinità e g è un omeomorfismo biLipschitziano, quindi $f_k = \frac{1}{l_k} g \circ \phi_k$ è omeomorfismo biLipschitziano con costante di Lipschitz $L_k = \frac{1}{l_k} \cdot L \cdot l_k = L$. Per ogni $x, x' \in Y_k$:

$$d(x, x') \geq \frac{1}{L} d(f_k^{-1}(x), f_k^{-1}(x')) \geq \frac{a}{Ll_k}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^2$:

$$d(x, f_k(X_k)) \leq Ld(f_k^{-1}(x), X_k) \leq \frac{Lb}{l_k}$$

Quindi Y_k è una rete separata con costanti caratteristiche $\frac{a}{Ll_k}$ e $\frac{Lb}{l_k}$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Definiamo ora $R := \{x \in f(I^2) | d(x, \partial f(I^2)) > \varepsilon\}$. Vogliamo far vedere che per k sufficientemente grande nessun punto di X al di fuori del quadrato S_k viene mandato in R , vale a dire che siccome $g : X \rightarrow \mathbb{Z}^2$ è omeomorfismo biiettivo, la funzione $g/l_k : X \cap S_k \rightarrow R$ è suriettiva.

Sia per assurdo $x \in X \setminus S_k$ tale che $\frac{g(x)}{l_k} \in R$. Poichè Y_k è una rete separata in I^2 , lo è anche in $R \subset I^2$. In particolare esiste $z \in Y_k \subset \mathbb{Z}^2/l_k$, tale che:

$$d(z, \frac{g(x)}{l_k}) \leq \frac{Lb}{l_k} \tag{3.13}$$

e anzi questo z può essere scelto in R .

Consideriamo ora $S = f^{-1}(R) \subset I^2$. Senza dubbio esiste un $w \in S$ tale che $f(w) = z$. Inoltre per la biLipschitzianità di f la distanza di w dalla frontiera di I^2 è:

$$\frac{\varepsilon}{L} \leq d(w, \partial I^2) \leq L\varepsilon \tag{3.14}$$

Siccome $S_k = \phi_k(I^2)$, esiste un $v \in S_k$ tale che $z = f(w) = f \circ \phi_k^{-1}(v) = \frac{1}{l_k} g(v)$. Per

la stima (3.13), abbiamo quindi:

$$d(g(v), g(x)) \leq l_k \cdot \frac{Lb}{l_k} = Lb$$

Per la stima (3.14) invece abbiamo che:

$$d(v, \partial S_k) = l_k \cdot d(w, \partial I^2) \geq \frac{l_k \varepsilon}{L}$$

In particolare, siccome $x \notin S_k$ e $v \in S_k$:

$$d(x, v) \geq d(v, \partial S_k) \geq \frac{l_k \varepsilon}{L}$$

Ricordiamo che g è un omeomorfismo biLipschitziano, quindi:

$$Lb \geq d(g(v), g(x)) \geq \frac{1}{L} d(v, x) \geq \frac{l_k \varepsilon}{L^2} \quad (3.15)$$

Naturalmente siccome $l_k \rightarrow \infty$ per (3.8), per k sufficientemente grande la (3.15) è impossibile. Ne consegue che tutti i punti di $\mathbb{Z}^2/l_k \cap R$ devono essere immagini di punti di S_k , e in particolare di punti di $X \cap S_k$. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un k_0 tale che, per ogni $k > k_0$, la funzione f_k è suriettiva su $R = R(\varepsilon)$.

Siamo ora pronti per dimostrare la convergenza in misura. Vogliamo far vedere che per ogni funzione ψ continua a supporto compatto nell'interno di I^2 , $\psi : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{I^2} \psi(x) \frac{1}{\alpha_k} d\mu_k = \int_{I^2} \psi(x) dx \quad (3.16)$$

Data ψ , scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $\text{Supp}(\psi) \subset R = R(\varepsilon)$. Questo significa che ci basta dimostrare:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_R \psi(x) \frac{1}{\alpha_k} d\mu_k = \int_R \psi(x) dx$$

Nell'insieme R la *counting measure* $d\mu_k$ è uguale alla *counting measure* dell'insieme $\mathbb{Z}^2/l_k \cap R$. Infatti $Y_k \cap R = \mathbb{Z}^2/l_k \cap R$ per doppia inclusione: $Y_k \subset \mathbb{Z}^2/l_k$ e $\mathbb{Z}^2/l_k \cap R \subset g(X \cap S_k)/l_k = f_k(X_k) = Y_k$. Quindi dividendo $d\mu_k$ per l'opportuna costante $\alpha_k = l_k^2$ essa converge alla misura di Lebesgue per costruzione dell'integrale di Lebesgue.

Abbiamo quindi ottenuto che la *counting measure* su X_k ($d\chi_k$) normalizzata tende alla misura $\frac{1}{\rho} dL$, mentre la *counting measure* su $Y_k = f_k(X_k)$ ($d\mu_k$) normalizzata tende alla misura di Lebesgue. Quest'ultima è anche la misura immagine della prima secondo la funzione f_k , cioè $d\mu_k = (f_k)^* d\chi_k$. Siccome f_k converge uniformemente ad f , possiamo concludere che:

$$dL = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{l_k^2} d\mu_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{l_k^2} f_k^* d\chi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k^* \left(\frac{1}{l_k^2} d\chi_k \right) = f^* \frac{1}{\rho} dL,$$

Per il teorema di cambiamento di variabile in integrali multivariati (1.1), questo significa che $Jf(x) = \rho(x)$ per quasi ogni $x \in I^2$.

□

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] D. Burago - B. Kleiner, *Separated nets in Euclidean space and Jacobian of biLipschitz maps*, 1998, Geometric & Functional Analysis GAFA, Volume 8, pp 273-282
- [2] B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations*, 1989, Applied Mathematical Sciences, Springer
- [3] B. Dacorogna - J. Moser, *On a partial differential equation involving the Jacobian determinant*, 1990, Annales de l'Institut Henri Poincaré Analyse non linéaire, Volume 7, pp 1-26
- [4] J. Fischer - O. Kneuss, *Bi-Lipschitz solutions to the prescribed Jacobian Inequality in the plane and applications to nonlinear elasticity*, 2014, Cornell University Library
- [5] M. Gromov, *Asymptotic invariants in infinite groups*, in "Geometric Group Theory, 1993, Cambridge University Press, Volume 2
- [6] C.T. McMullen, *Lipschitz maps and nets in Euclidean space*, 1998, Geometric & Functional Analysis GAFA, Volume 8, pp 304-314
- [7] J. Moser, *On the volume elements on a manifold*, 1965, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 120, pp 286-294
- [8] T. Rivière - D. Ye, *Une résolution de l'équation à forme volume prescrite*, 1994, Comptes rendus de l'Académie des sciences Série 1 Mathématique, Volume 319, pp 25-28
- [9] D. Ye, *Prescribing the Jacobian determinant in Sobolev spaces*, 1994, Annales de l'institut Henri Poincaré Analyse non linéaire, Volume 11, pp 275-296