Università degli studi di Padova

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di laurea triennale

# Le ipersuperfici immerse in $\mathbb{R}^n$ compatte e stabili sono sfere

**Relatore:**
Prof. Roberto Monti

**Laureando:**
Giacomo Vecchiato
**Matricola:**
1070133

22 luglio 2016

# INDICE

# INTRODUZIONE

Basandosi sugli studi di H. Hopf [8], M. do Carmo, J.L. Barbosa [5], e soprattutto sulle pagine di H.C. Wente pubblicate nel 1991 nel *Pacific journal of mathematichs* [4], questa tesi esamina un teorema legato al problema isoperimetrico in $\mathbb{R}^n$: trovare l'insieme che racchiude un volume fissato ed ha perimetro (area di bordo) minimo.
La soluzione è la sfera. In questo problema il bordo è un'ipersuperficie embedded orientabile e compatta.
La minimalità dell'area col vincolo del volume è legata alla curvatura ed alla stabilità.
La condizione necessaria del primo ordine per la minimalità è che la frontiera deve essere un'ipersuperficie con curvatura media costante.
La condizione necessaria del secondo ordine è che la variazione del seconda dell'area con vincolo del volume deve essere non negativa.
Nel 1958 A.D. Alexandrov ha mostrato che le sfere sono le uniche ipersuperfici embedded in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ compatte a curvatura media costante [7]. Non ha usato la stabilità. Hopf ha congetturato la validità di questo risultato anche per il caso immersed [8], tuttavia nel 1982, Wente [3] e l'anno successivo Hsiang, Teng and Yu [9] hanno trovato dei controesempi a tale congettura. In particolare esistono tori immersi in $\mathbb{R}^3$ con curvatura media costante.
Nel 1984 do Carmo e Barbosa [5] hanno dimostrato che una ipersuperficie immersed in $\mathbb{R}^n$ compatta, orientabile, con curvatura media costante e stabile deve essere una sfera.
Nel 1991 Wente ha fornito una dimostrazione alternativa e più elementare di questo risultato.
In questa tesi presenteremo la dimostrazione di questo teorema. Il primo capitolo è allora dedicato alle definizioni fondamentali ed agli esempi. Il secondo capitolo studia i legami fra area e volume e si conclude con la dimostrazione del teorema di Wente.

# 1. IPERSUPERFICI EMBEDDED ED IMMERSED CON CURVATURA MEDIA COSTANTE

Questo primo capitolo si apre con dei richiami sulle sottovarietà e spazi tangenti. Si sofferma poi sul campo normale e sulla mappa di Weingarten. Vengono dati infine alcuni esempi di sottovarietà a curvatura media costante.

## *1.1 Superfici embedded ed immersed in $\mathbb{R}^n$*

**Definizione** 1.1 (Sottovarietà embedded): Siano $k \in \{1, 2, \cdots, \infty\}$, $n \in \mathbb{N}$ e $d \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$. Un insieme $M \subset \mathbb{R}^n$ si dice *sottovarietà (embedded) differenziabile* di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^k$ e di dimensione $d$, se per ogni $\bar{x} \in M$ esistono $\delta > 0$ ed $f \in C^k(B_\delta(\bar{x}); \mathbb{R}^{n-d})$ tali che:

1. $B_\delta(\bar{x}) \cap M = \{x \in B_\delta(\bar{x}) \mid f(x) = 0\}$;
2. $\text{rango}(J_f(x)) = n - d$ per ogni $x \in B_\delta(\bar{x})$.

L'equazione $f = 0$ si dice *equazione locale* di $M$ in un intorno di $\bar{x}$.

Sopra $B_\delta(\bar{x})$ è la palla aperta di $\mathbb{R}^n$ di raggio $\delta$ centrata in $\bar{x}$, $J_f(x)$ è la matrice Jacobiana di $f$ calcolata in $x$.

**Definizione** 1.2 (Parametrizzazione regolare): Siano $k \in \{1, 2, \cdots, \infty\}$, $n \in \mathbb{N}$, $d \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme, $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto. Una funzione $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ si dice *parametrizzazione regolare* di $X$ di classe $C^k$ e di rango $d$ se:

1. $\varphi \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$;
2. $\varphi : A \to X$ è bigettiva;
3. $\text{rango}(J_\varphi(\xi)) = d$ per ogni $\xi \in A$;
4. $\varphi^{-1} : X \to A$ e continua (quindi $\varphi$ è aperta).

Vi è un'identificazione tra sottovarietà e sottoinsiemi che ammettono localmente una parametrizzazione regolare grazie al seguente teorema.

**Teorema** 1.1: Siano $M \subset \mathbb{R}^n$, $k \geq 1$ e $1 \leq d \leq n-1$; sono equivalenti:

1. $M$ è sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $d$ e classe $C^k$;

2. per ogni $\bar{x} \in M$ esiste $r > 0$ tale che $M \cap B_r(\bar{x})$ ha una parametrizzazione regolare di classe $C^k$ e rango $d$.

Una tale parametrizzazione si dice *parametrizzazione locale* di $M$.
Se nella Definizione 1.2 si lasciano cadere le richieste 2 e 4 si ottiene la definizione di varietà immersed. Come dominio dei parametri al posto di $A$ si può prendere una varietà embedded, si veda la Definizione 1.4

**Definizione** 1.3 (Spazio tangente per varietà embedded): Sia $M$ una sottovarietà differenziablie di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^k$ e dimensione $d$. Lo *spazio tangente* ad $M$ in un punto $x \in M$ è l'insieme $T_xM$ costituito da tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^n$ per i quali esiste una curva $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$, $\delta > 0$, di classe $C^1$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$.

Lo spazio tangente $T_xM$ è uno spazio vettoriale (reale) di dimensione $d$. Infatti può essere descritto nei seguenti modi:

1. Se $f = 0$ è un'equazione locale per $M$ in un intorno di $x$, si ha:

$$T_xM = \ker(df) = \{v \in \mathbb{R}^n \ \mid \ df(x)(v) = 0\}$$

   dove $df(x)$ è il differenziale di $f$ calcolato in $x$;

2. Se $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^d$ aperto, è una parametrizzazione locale di $M$ per cui esiste $\xi \in A$ tale che $\varphi(\xi) = x$, allora:

$$T_xM = \mathrm{im}(d\varphi(\xi)) = \{d\varphi(\xi)(w) \in \mathbb{R}^n \ \mid \ w \in \mathbb{R}^d\}$$

Per definire le sottovarietà immersed, bisogna estendere la nozione di differenziabilià a funzioni che come dominio non hanno necessariamente un aperto di $\mathbb{R}^n$
Siano $D \subset \mathbb{R}^d$ un insieme e $f : D \to \mathbb{R}^n$. Si dice che $f$ è di classe $C^k$, $k \geq 1$, se esistono un aperto $A \subset \mathbb{R}^d$ ed una funzione $g \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$ tali che $D \subset A$ e $g|_D = f$.
Poi, diremo che $f$ è un *diffeomorfismo* di classe $C^k$ se è di classe $C^k$, bigettiva sull'immagine e con inversa di classe $C^k$.

Siano $M$ una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^k$ e dimensione $d$, $p \in M$, $v \in T_pM$, $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ una curva in $M$ tale che

$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = v$ e sia $X : M \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Si può allora definire, se esiste, la derivata di $X$ rispetto a $v$ in $p$:

$$D_v X(p) = \lim_{t \to 0} \frac{X(\gamma(t)) - X(\gamma(0))}{t}.$$

Se $X \in C^k(M; \mathbb{R}^n)$ allora per ogni $p \in M$ e per ogni $v \in T_pM$ è ben definita la derivata direzionale $D_v X(p)$.
Si definisce allora il *differenziale* di $X$ come la seguente applicazione lineare:

$$dX(p) : T_pM \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto D_v X(p).$$

Il differenziale $dX(p)$ è lineare perché se $\bar{X}$ è un'estensione locale di $X$ in $p$ allora per ogni $v \in T_pM$ vale $dX(p)(v) = d\bar{X}(p)(v)$.
Se $dX(p)$ è iniettivo per ogni $p \in M$ allora si dice che $X$ è un'*immersione*.

**Definizione** 1.4 (Sottovarietà immersed): Sia $M$ una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^k$ e dimensione $d$ e sia $\varphi \in C^k(M; \mathbb{R}^n)$ un'immersione. La coppia $(M, \varphi)$ è detta sottovarietà *immersed* di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^k$ e dimensione $d$.

Con il Teorema 1.1 e con la caratterizzazione data dello spazio tangente, si trova il legame tra sottovarietà embedded ed immersed espresso nella seguente osservazione.

**Osservazione** 1.1: Sia $M$ una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^n$ e sia $(M, \varphi)$ una corrispondente sottovarietà immersed. Allora per ogni $p \in M$ e per ogni parametrizzazione locale $\psi$ di $M$ attorno a $p$ esiste un aperto $U$ di $M$ tale che $\varphi(U)$ è sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^n$ con parametrizzazione regolare $\varphi \circ \psi \in C^k(\tilde{U}, \varphi(U))$, con $\tilde{U} := \psi^{-1}(U)$.

**Osservazione** 1.2: Sulla base dell'Osservazione 1.1 si può definire lo spazio tangente ad una varietà immersed $(M, \varphi)$ nel seguente modo:

$$T_{\varphi(p)}(M, \varphi) = \mathrm{im}(d\varphi(p)).$$

La *prima forma fondamentale* di una sottovarietà $M \subset \mathbb{R}^n$ calcolata in un punto $p \in M$ è il prodotto scalare (standard) di $\mathbb{R}^n$ ristretto a $T_pM$:

$$I_p(\cdot, \cdot) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle.$$

Per una sottovarietà immersed $(M, \varphi)$ si considera $I_{\varphi(p)}$ con $p \in M$, grazie all'Osservazione 1.1.

## 1.2 Mappa di Weingarten e curvatura media

Da ora saranno considerate solo sottovarietà differenziali (embedded ed immersed) di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-1$, chiamate *ipersuperfici.* Inoltre si considera $\mathbb{R}^n$ come spazio euclideo, ossia dotato del prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Per definire la mappa di Weingarten, è necessario introdurre preliminarmente il campo normale ad un'ipersuperficie. Si parte col caso embedded.
Dato $p \in M$, $T_pM$ è uno spazio vettoriale di dimensione $n-1$, di conseguenza esiste $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $T_pM^\perp = \langle v \rangle$ (spazio generato da $v$).
Quindi per ogni $p \in M$ si può definire $N(p)$ come uno dei due vettori ortogonali a $T_pM$ di norma 1. Fatta questa scelta per ogni punto di $M$, è ben definito un campo vettoriale $N : M \to \mathbb{R}^n$ detto *campo normale.*

Se è possibile fare una scelta di $N(x)$ di modo che il campo normale sia continuo, si dice che l'ipersuperficie è *orientabile.* In questo caso, quando si considera un suo campo normale s'intende uno continuo.

Data un'equazione locale $f = 0$ e una parametrizzazione locale $\varphi$ di $M$ per uno stesso punto $p \in M$, fissata una base ordinata $(u_1, ..., u_{n-1})$ del dominio di parametrizzazione e posto $q := \varphi^{-1}(p)$, si ha:

$$N(p) \in \langle \nabla f(p) \rangle = \langle \partial_1 \varphi(q) \wedge ... \wedge \partial_{n-1} \varphi(q) \rangle$$

Dove $v_1 \wedge ... \wedge v_{n-1}$ indica il prodotto esterno di vettori di $\mathbb{R}^n$ e $\partial_i$ è la derivata parziale rispetto a $u_i$
Di conseguenza, nei due casi, è vera una della due alternative:

- Per l'equazione locale:

$$N(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} \quad \text{oppure} \quad N(p) = -\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}.$$

- Per la parametrizzazione locale:

$$N(p) = \frac{\partial_1\varphi(q) \wedge ... \wedge \partial_{n-1}\varphi(q)}{\|\partial_1\varphi(q) \wedge ... \wedge \partial_{n-1}\varphi(q)\|} \quad \text{oppure}$$
$$N(p) = -\frac{\partial_1\varphi(q) \wedge ... \wedge \partial_{n-1}\varphi(q)}{\|\partial_1\varphi(q) \wedge ... \wedge \partial_{n-1}\varphi(q)\|}.$$

Si possono sempre prendere delle parametrizzazioni e delle equazioni locali che diano le formule col segno $+$. Infatti se l'equazione locale soddisfa il caso del segno $-$, è sufficiente prendere come nuova equazione locale $-f = 0$.
Se è invece la parametrizzazione locale ad avere il segno $-$, per la proprietà alternante del prodotto esterno prendendo come nuova base del dominio di parametrizzazione $\{w_1 = u_2, w_2 = u_1, w_3 = u_3, ..., w_{n-1} = u_{n-1}\}$ si rientra nel caso desiderato.

Il campo normale ad una ipersufercie immersed può essere definito in modo analogo.

Sia $(M, \varphi)$ sottovarietà immersed di $\mathbb{R}^n$. Dato $p \in M$, si definisce come $N(\varphi(p))$ uno dei due vettori ortogonali a $T_{\varphi(p)}(M)$ di norma 1; in questo modo è ben definito il campo normale a $(M, \varphi)$ $N : (M, \varphi) \to \mathbb{R}^n$.

Sia $M$ è orientabile, $p \in M$ e $\psi$ una parametrizzazione locale di $M$ attorno a $p$ (con base opportuna del dominio) tale che, posto $q := \psi^{-1}(p)$, si abbia $N(p) = \frac{\partial_1\psi(q) \wedge ... \wedge \partial_{n-1}\psi(q)}{\|\partial_1\psi(q) \wedge ... \wedge \partial_{n-1}\psi(q)\|}$ e che $\varphi \circ \psi$ sia parametrizzazione locale per $\varphi(p)$. Allora si ha:

$$N(\varphi(p)) = \frac{\partial_1(\varphi \circ \psi)(q) \wedge ... \wedge \partial_{n-1}(\varphi \circ \psi)(q)}{\|\partial_1(\varphi \circ \psi)(q) \wedge ... \wedge \partial_{n-1}(\varphi \circ \psi)(q)\|}. \tag{1.1}$$

Segue ora una formula che servirà a mostrare come la derivata direzionale del campo normale stia nello spazio tangente.
Siano $M$ una ipersuperficie di $\mathbb{R}^n$, $p \in M$, $v \in T_pM$, $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ una curva tale che $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ e siano $X : M \to \mathbb{R}^n$, $Y : M \to \mathbb{R}^n$ campi vettoriali per cui la derivata direzionale è ben definita. Allora si ha:

$$[\langle X(\gamma(t)), Y(\gamma(t))\rangle]'(0) = \langle D_vX(p), Y(p)\rangle + \langle X(p), D_vY(p)\rangle \tag{1.2}$$

Infatti,

$$
\begin{aligned}
[\langle X(\gamma(t)), Y(\gamma(t))\rangle]'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\langle X(\gamma(t)), Y(\gamma(t))\rangle - \langle X(\gamma(0)), Y(\gamma(0))\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{X(\gamma(t)) - X(\gamma(0))}{t}, Y(\gamma(t)) \right\rangle \\
&+ \lim_{t\to 0} \left\langle X(\gamma(0)), \frac{Y(\gamma(t)) - Y(\gamma(0))}{t} \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Passando al limite si ottiene proprio la (1.2)

Se $X, Y \in C^1(M; \mathbb{R}^n)$ la (1.2) diventa $D_v\langle X, Y\rangle(p) = \langle D_v X(p), Y(p)\rangle + \langle X(p), D_v Y(p)\rangle$. In altre parole la (1.2) afferma che la connessione lineare standard (connessione di Levi-Civita) rende la metrica parallela, è cioé una connessione metrica.

Se $M$ è almeno di classe $C^2$, derivando l'identità $\langle N(p), N(p)\rangle = 1$ per $p \in M$, con la formula (1.2) si ricava:

$$\langle D_v N(p), N(p)\rangle = 0 \quad \forall p \in M, v \in T_pM.$$

Ossia $D_v N(p) \in T_pM$ per ogni $v \in T_pM$. Quindi si può definire la *mappa di Weingarten*:

$$L_p : T_pM \to T_pM, \quad v \mapsto D_v N(p).$$

**Osservazione** 1.3: La mappa di Weigarten è autoaggiunta rispetto alla prima forma fondamentale.

Infatti, se $v$ e $w$ sono vettori (campi) tangenti ad $M$ si ha:

$$
\begin{aligned}
\langle D_v N, w\rangle &= D_v\langle N, w\rangle - \langle N, D_v w\rangle = -\langle N, D_w v + [v, w]\rangle \\
&= -\langle N, D_w v\rangle = -D_w\langle N, v\rangle + \langle D_w N, v\rangle = \langle D_w N, v\rangle
\end{aligned}
$$

Si è usata la formula (1.2) ed il fatto che $[v, w]$ è un vettore dello spazio tangente.

**Definizione** 1.5: Per l'Osservazione 1.3 gli autovalori di $L_p$ sono reali e si chiamano *curvature principali* di $M$ nel punto $p$. La media di tali autovalori è detta *curvatura media* di $M$ in $p$ :

$$H_p = \frac{1}{n-1} \mathrm{tr}(L_p)$$

## 1.3 Esempi di ipersuperfici in $\mathbb{R}^n$ con curvatura media costante

**Esempi di ipersuperfici embedded**

- **Iperpiano**
  Un iperpiano $M$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ può essere parametrizzato da:
  $$\psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0), \quad x_i \in \mathbb{R} \;\; \forall i \in \{1, ..., n\}$$
  I vettori tangenti sono i vettori del piano stesso, di conseguenza si può prendere come campo normale il vettore $N = (0, ..., 0, 1)$.
  Il differenziale del vettore normale è allora la funzione costantemente nulla, di conseguenza tutte le curvature dell'iperpiano sono 0.
  Quindi la curvatura media di $M$ è 0.

- **Palla**
  Data una palla $M$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ centrata in 0 e di raggio $R$, una sua regione può essere parametrizzata da:
  $$\psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, \sqrt{R - (x_1^2 + ... + x_n^2)})$$
  con $(x_1, ..., x_n) \in B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$.
  Se $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ è la base usata per $\mathbb{R}^{n+1}$, una base per i vettori tangenti è data da:
  $$\partial_i \psi = e_i - \frac{x_i}{\sqrt{R - (x_1^2 + ... + x_n^2)}} e_{n+1}$$
  Come campo normale $N(x_1, ....x_{n+1})$ ad una sfera si può prendere allora l'identità divisa per $R$, funzione che coincide con il suo differnziale.
  Quindi le sue curvature sono tutte pari a $\frac{1}{R}$ e così pure la sua curvatura media.

- **Cilindri**
  Data la palla $B_R(0) \subset \mathbb{R}^{k+1}$, sia $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ il prodotto cartesiano $B_R(0) \times \mathbb{R}^{n-k}$.
  Una regione di $M$ può essere allora parametrizzata da:
  $$\psi(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_{n-k}) = (x_1, ..., x_k, \sqrt{R - (x_1 + ... + x_k)}, y_1, ..., y_{n-k})$$
  con $(x_1, ..., x_k \in B_R(0))$ e $y_i \in \mathbb{R}$.
  Se $\{e_1^x, ..., e_k^x, e_{k+1}, e_1^y, ..., e_{n-k}^y\}$ è la base usata per $\mathbb{R}^{n+1}$, una base per i

vettori tangenti è data da:

$$\partial_{x_i}\psi = e_i^x - \frac{x_i}{\sqrt{R-(x_1+...+x_k)}}e_{k+1}, \quad \partial_{y_i}\psi = e_i^y$$

Quindi si può prendere come campo normale

$$N(u_1,...,u_{n+1}) = \frac{1}{R}(u_1,...,u_k,0,...,0)$$

che coincide con il suo differenziale. Di conseguenza le curvature sono 0 oppure $\frac{1}{R}$, la curvatura media è costantemente $\frac{k}{nR}$.

- **Onduloide**.
  L'onduloide in $\mathbb{R}^3$ è una superficie di rotazione ottenuta guardando alla traccia di un fuoco di un ellisse che ruota senza strisciare lungo un asse e facendo ruotare attorno a tale asse tale traccia. Sia $sn(u,k)$ il seno di Jacobi, $dn(u,k)$ la funzione ellittica di Jacobi e siano $F(z,k)$ l'integrale ellittico del primo tipo e $E(z,k)$ l'integrale ellittico del secondo tipo con $k$ un valore fissato tra 0 ed 1. Sia $a$ la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse ed $e$ la sua eccentricità.
  Allora il profilo dell'onduloide è parametrizzato da $\psi(u) = (x(u), y(u))$ con $u \in \mathbb{R}$ e

$$x(u) = -a(1-e)(F(sn(u,k),k)+F(1,k))-a(1+e)(E(sn(u,k),k)+E(1,k))$$

$$y(u) = a(1+e)dn(u,k).$$

  Ciò che si ottiene è una superfice orientabile, a curvatura media costante, ma non compatta.

Tra gli esempi presentati, solo la palla è compatta. Vale infatti il seguente teorema dimostrato da Alexandrov [7] con la famosa tecnica dei "primi mobili".

**Teorema** 1.2: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un aperto limitato con frontiera $M = \partial\Omega$ di classe $C^2$.
Se $M$ ha curvatura media costante, allora è una palla.

La frontiera $M = \partial\Omega$ è una ipersuperficie embedded orientabile.
L'estensione del Teorema 1.2 alle ipersuperfici immersed (orientabili e compatte) è falsa. Controesempi sono i "tori di Wente" [3].

**Teorema** 1.3: Esiste un'immersione $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(\mathbb{R}^2)$ sia un toro topologico con curvatura media costante.

Nel prossimo capitolo si vedrà che aggiungendo l'ipotesi di stabilità, il risultato di Alexandrov si estende alle ipersuperfici immersed.

# 2. TEOREMA DI WENTE, BARBOSA E DO CARMO

In questo secondo capitolo si richiamano le definizioni di area e di volume per ipersuperfici immersed e si studia in quale modo siano in relazione l'una con l'altra. Si ottiene quindi la caratterizzazione dell'area come derivata del volume.
Si passa poi alla definizione di stabilità ed a dei risultati preliminari alla dimostrazione del teorema di Wente, Barbosa e do Carmo. Si chiude con la dimostrazione del teorema.

## 2.1 *Definizioni di Area*

Sia $(M, \varphi)$ una ipersuperficie immersed compatta di $\mathbb{R}^n$.
Per l'Osservazione 1.1, per ogni $p \in M$ esiste una sua parametrizzazione locale $\psi_p \in C^k(U_p; V_p)$ con $V_p$ aperto di $M$ tale che $\varphi \circ \psi_p \in C^k(U_p; \varphi(V_p))$ è una parametrizzazione regolare. $(V_p)_{p\in M}$ è un ricoprimento aperto di $M$ che è compatta, dunque possiede un sottoricoprimento finito $(V_i)_{i=1,\dots,\ell}$. Esso può essere disgiunto considerando $B_1 = V_1$ e $B_i := V_i \setminus \{\bigcup_{j=1}^{i-1} V_j\}$ per $2 \leq i \leq \ell$.
Le restrizioni $\psi_i|_{\psi_i^{-1}(B_i)}$ e $\varphi \circ \psi_i|_{\psi^{-1}(B_i)}$ sono ancora parametrizzazioni regolari.
La definizione geometrica di area per $(M, \varphi)$ è allora:

$$A(M, \varphi) = \int_M dS := \sum_{i=1}^{\ell} \int_{D_i} \sqrt{\det((J_{\varphi\circ\psi_i}(x))^t (J_{\varphi\circ\psi_i}(x)))}\, dx,$$

dove $dx$ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ e $D_i := \psi^{-1}(B_i)$.
Questa definizione di area è ben posta, ossia se $\omega_i : E_i \to D_i$ con $E_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aperto è un diffeomorfismo, allora usare $\psi_i$ o $\psi_i \circ \omega_i$ è indifferente.

Un altro modo per misurare sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ è mediante le misure di Hausdorff.

**Definizione** 2.1 (Misura di Hausdorff): Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$, $0 < \delta \leq \infty$. Si definisce

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \omega_s \left( \frac{\operatorname{diam} C_j}{2} \right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ \operatorname{diam} C_j \leq \delta \right\}$$

dove $\omega_s := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$, con $\Gamma$ funzione di Eulero. Si pone

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

$\mathcal{H}^s(A)$ è detta *misura di Hausdorff s-dimensionale* di $A$.

Le misure di Hausdorff sono legate alla definizione geometrica di area tramite la "formula dell'area" (si veda [2]).

**Teorema** 2.1 (Formula dell'area): Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $n \leq m$ una funzione Lipschitziana iniettiva. Allora per ogni insieme Lebesgue-misurabile $A \subset \mathbb{R}^n$ vale:

$$\int_A \sqrt{\det\left((J_f(x))^t (J_f(x))\right)}\; dx = \mathcal{H}^n(f(A)).$$

Da questa formula segue che se $(M, \varphi)$ è una ipersuperficie immersed con $\varphi$ iniettiva, allora $A(M, \varphi) = \mathcal{H}^{n-1}(\varphi(M))$.

## 2.2 Area come derivata del volume

Si vuole vedere l'area di una ipersuperficie come derivata del volume che essa racchiude. Quando si tratta della frontiera $\partial B$ di un insieme $B \subset \mathbb{R}^n$, allora la nozione di volume è chiara, è la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n(B)$.
Nel caso di una ipersuperficie immersed la definizione di "volume della regione racchiusa" può essere data nel seguente modo.
Siano $(M, \varphi)$ un'ipersuperficie immersed di $\mathbb{R}^n$ orientabile, $(V_i)_{i=1,\dots,\ell}$ un ricoprimento disgiunto di $M$ tale che ciascun $V_i$ sia parametrizzato regolarmente da una $\psi_i \in C^k(D_i; V_i)$ e ciascun $\varphi(V_i)$ sia parametrizzato regolarmente da $\varphi_i \circ \psi_i$ e per ogni $i$, per ogni $q \in D_i$ valga la formula (1.1). Allora si definisce *volume* di $(M, \varphi)$:

$$V(M, \varphi) = \frac{1}{n} \int_M \langle \varphi, N \rangle \; dS := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} \int_{D_i} \langle (\varphi \circ \psi_i)(x), N((\varphi \circ \psi_i)(x)) \rangle \; dS$$

dove $dS := \sqrt{\det((J_{\varphi \circ \psi_i}(x))^t (J_{\varphi \circ \psi_i}(x)))}\; dx$ è l'elemento geometrico d'area.

In questo modo si estende la nozione naturale di volume. Sia infatti $\partial B$ la frontiera (regolare) di un aperto limitato $B \subset \mathbb{R}^n$. Con $\varphi(x) = x$ identità, per il Teorema della divergenza si ha ($N$ è la normale esterna):

$$A(\partial B, \varphi) = \frac{1}{n} \int_{\partial B} \langle \varphi, N \rangle \; dS = \frac{1}{n} \int_B \operatorname{div}(\varphi)(x) \; dx = \frac{1}{n} \int_B n \; dx = \mathcal{L}^n(B).$$

**Osservazione** 2.1: Siano $(M, \varphi)$ un'ipersuperficie immersed di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^k$ con $k \geq 2$, $M$ compatta ed orientabile, ed $N$ campo normale di $(M, \varphi)$. Allora esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $(M, \varphi + t(N \circ \varphi))$ è ancora una ipersuperficie immersed di $\mathbb{R}^n$, ma di classe $C^{k-1}$.

La dimostrazione è elementare e può essere omessa.
Si può ora esprimere il legame tra area e volume.

**Teorema** 2.2 (Area come derivata del volume): Sia $(M, \varphi)$ una ipersuperficie immersed orientabile compatta di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^k$ con $k \geq 2$, allora si ha:

$$\frac{dV(M, \varphi + tN \circ \varphi)}{dt}|_{t=0} = A(M, \varphi).$$

È sufficiente dimostare il Teorema 2.2 nel caso di una ipersuperficie embedded.
Nel seguito $M$ è un'ipersuperficie di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^k$ con $k \geq 2$, compatta ed orientabile. È inoltre fissato un campo normale (continuo) $N$ su $M$.

Servono alcuni fatti preliminari sulla funzione distanza da $M$ (i seguenti Teoremi sono tratti da [1]). Sia $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione

$$x \mapsto d(x) = \inf\{\|y - x\| \ : \ y \in M\}.$$

La funzione distanza $d$ è Lipschitaziana con costante di Lipschitz 1.

**Teorema** 2.3: Esiste un intorno $U$ di $M$ tale che per ogni $x \in U$ esiste un unico $y \in M$ tale che $d(x) = \|x - y\|$ e inoltre $d \in C^k(U \setminus M)$.

Si veda [1] Teorema 4.4.10.

**Teorema** 2.4: Per ogni $p \in M$ esistono $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aperto, $\epsilon > 0$ e $\psi_p : \tilde{W} \to M$ parametrizzazione locale tali che la funzione $\Phi_p : \tilde{W} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definita da $\Phi_p(u, t) = \psi_p(u) + tN(\psi_p(u))$ verifica:

1. $V_p := \Phi_p(\tilde{W} \times (-\epsilon, \epsilon))$ è aperto di $\mathbb{R}^n$;
2. $\Phi_p : \tilde{W} \times (-\epsilon, \epsilon) \to V_p$ è diffeomorfismo di classe $C^{k-1}$.

Si veda [1] Lemma 4.4.7. Date $\pi_1$ la proiezione sulle prime $n - 1$ coordinate e $\pi_2$ la proiezione sull'$n$-esima coordinata, si definisce:

$$\varrho_p : V_p \to (-\epsilon, \epsilon), \quad x \mapsto (\pi_2 \circ \Phi_p^{-1})(x),$$

$$\xi_p : V_p \to M, \quad x \mapsto (\psi_p \circ \pi_1 \circ \Phi_p^{-1})(x).$$

Allora si ha il seguente Teorema (si veda [1] Teorema 4.4.15)

**Teorema** 2.5: Si ha $\varrho_p \in C^k(V_p;\mathbb{R})$ e $|\varrho_p(x)| = d(x)$ per ogni $x \in V_p$.

Sia $U$ l'intorno dato dal Teorema 2.3 e sia $V := U \cap (\bigcup_{p\in M} V_p)$. Dato $x \in V$ esiste $p$ tale che $x \in V_p$, quindi si possono definire (perché siano buone definizioni servono i Teoremi 2.5 e 2.3):

$$\varrho(x) := \varrho_p(x), \quad \xi(x) := \xi_p(x), \quad x \in V,$$

che sono funzioni di classe $C^k$ e $C^{k-1}$, rispettivamente.
Inoltre esiste $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $y \in M$, $y + tN(y)$ è un elemento di $V$ e vale:

$$\varrho(y + tN(y)) = t, \quad \xi(y + tN(y)) = y.$$

Allora grazie all'invertibilità di $\Phi_p$ (Teorema 2.4) ogni $x \in V$ può essere scritto come:

$$x = \xi(x) + \varrho(x)N(\xi(x)). \tag{2.1}$$

Conseguentemente si ha:

$$\varrho(x) = \langle x - \xi(x), N(\xi(x))\rangle. \tag{2.2}$$

Nel seguito $V$ è l'insieme sopra definito ed $\epsilon$ è il minimo tra quello dell'Osservazione 2.1 e l'ultimo $\epsilon$ usato.

**Osservazione** 2.2: Sia $x \in V$ e sia $v \in \mathbb{R}^n$, allora vale:

$$\nabla\varrho(x)(v) = \langle v, N(\xi(x))\rangle.$$

*Dimostrazione*
Grazie alla formula (2.1) si ha $x = y + hN(y)$, per opportuni $h \in \mathbb{R}$ ed $y \in M$. Allora $\varrho(x) = h$ e dati $v \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo, si ha per la formula (2.2):

$$\begin{aligned}\frac{\varrho(x+tv) - \varrho(x)}{t} &= \frac{\langle N(\xi(x+tv)), (y + hN(y) + tv - \xi(x+tv))\rangle - h}{t} \\ &= \langle v, N(\xi(x+tv))\rangle + \left\langle N(\xi(x+tv)), \frac{y - \xi(x+tv)}{t} \right\rangle \\ &+ h\left[\frac{\langle N(y), N(\xi(x+tv))\rangle - 1}{t}\right].\end{aligned}$$

Per continuità $\lim_{n\to\infty} N(\xi(x+tv)) = N(y)$ e dal momento che $\xi(x+tv) = \gamma(t)$ è una curva su $M$ tale che $\gamma(0) = y$ e $\gamma'(0) = w \in T_yM$ allora:

$$\lim_{t\to 0} \frac{y - \xi(x+tv)}{t} = \gamma'(0) = w.$$

Inoltre, poiché $\langle N(y), N(y)\rangle = 1$ si ha:

$$\frac{\langle N(y), N(\xi(x+tv))\rangle - 1}{t} = \left\langle N(y), \frac{N(\xi(x+tv)) - N(y)}{t} \right\rangle.$$

e

$$\lim_{t\to 0} \frac{N(\xi(x+tv)) - N(y)}{t} = dN(y)(w) \in T_pM.$$

Riassumendo:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varrho(x+tv) - \varrho(x)}{t} = \langle v, N(y)\rangle.$$

□

Per l'Osservazione 2.2, per ciascun $x \in V$ si ha:

$$\nabla\varrho(x) = N(\xi(x)). \tag{2.3}$$

Per per la compattezza di $M$ e per il Teorema 2.5 esiste $\epsilon$ tale che per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$M_t := \{x \in V \mid \varrho(x) = t\}$$

è un'ipersuperficie contenuta in $V$. Questa ipersuperficie è di classe $C^k$, è orientabile perché per ogni $x \in M_t$ è ben definito il campo normale $\nabla\varrho(\cdot) = N(\xi(\cdot))$ (Formula 2.3) ed è compatta perchè antimmagine tramite una funzione continua di un chiuso. Chiaramente $M_0 = M$.
Dato $t \in (0, \epsilon)$ si definisce:

$$\Omega_t = \{x \in V \mid 0 \le \varrho(x) \le t\}.$$

Allora $\partial\Omega_t = M_t \cup M$. Si definisce la funzione

$$\mathcal{A} : [0, \epsilon) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \mathcal{H}^{n-1}(M_t),$$

che è continua in 0. Infatti per il Teorema della divergenza, per la formula (2.3) e per la fomula dell'area (Teorema 2.1):

$$\left| \int_{\Omega_t} \Delta\varrho \; dx \right| = \left| \int_{M_t} \langle N(\xi(x)), \nabla\varrho(x)\rangle \; dS + \int_M \langle -N(x), \nabla\varrho(x)\rangle \; dS \right| = \left| \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(0) \right|.$$

Allora per il criterio della convergenza dominata:

$$\lim_{t\to 0} |\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(0)| = \lim_{t\to 0} \int_{\Omega_t} \Delta\varrho \; dx = 0.$$

$M_t$ può essere considerata come la superficie immersed $(M, \mathrm{id} + tN)$, per $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.
Si userà

**Teorema** 2.6 (Formula di coarea): Sia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $D$ aperto, $n \geq m$, una funzione Lipschitziana di classe $C^1$. Allora per ogni insieme $A \subset D$ $\mathcal{L}^n$-misurabile vale:

$$\int_A \sqrt{\det((J_f(x))^t(J_f(x)))} \; dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(y)) \; dy$$

Questa formula è tratta da [2], Teorema ???
Si può ora dimostrare il Teorema 2.2 nel caso di ipersuperfici embedded. Basta mostare che:

$$\frac{dV(M, \mathrm{id} + tN)}{dt}|_{t=0} = A(M).$$

Per il Teorema della divergenza si ha:

$$\frac{1}{t}(V(M, id + tN) - V(M)) = \frac{1}{t}\int_{\Omega_t} dx.$$

$\Omega_t$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile e per il Teorema 2.5 e per la formula (2.1), $\varrho = d : \Omega_t \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana. Si usa allora la formula di coarea con $A = \Omega_t$ (Teorema 2.6), tenendo conto che per la formula (2.3) $|\nabla\varrho(x)| = 1$ e che $\varrho^{-1}(y) = M_y$ e $\Omega_t \cap M_y \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \leq y \leq t$. Quindi si ottiene:

$$\frac{1}{t}(V(M, id + tN) - V(M)) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{A}(t)dt.$$

Per la continuità di $\mathcal{A}$ in $t = 0$ allora, passando al limite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(V(M, id + tN) - V(M)) = \mathcal{A}(0) = A(M)$$

Questo termina la prova del Teorema 2.2.

## 2.3 Definizione di stabilità e formula per l'area

Sia $(M, \varphi)$ una ipersuperficie immersed compatta ed orientabile di $\mathbb{R}^n$ e sia, per un fissato $\epsilon > 0$, $(\varphi_t)_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ una famiglia di immersioni tale che $\varphi_0 = \varphi$ e con $t \mapsto \varphi_t(x)$ "regolare" per ogni $x$ fissato.
Si definisce $M_t = (M, \varphi_t)$.

**Definizione** 2.2: Si dice che $(M, \varphi)$ è un punto critico del funzionale dell'area con vincolo di volume se

$$\frac{d}{dt}A(M_t)|_{t=0} = 0$$

per ogni famiglia di immersioni $(\varphi_t)_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ che conservano il volume.

Una condizione necessaria e sufficiente affinché $(M, \varphi)$ sia un punto critico dell'area con vincolo di volume è che abbia curvatura media costante. In tal caso l'immersione $\varphi$ è detta *stabile* se:

$$\frac{d^2}{dt^2}(A(M_t))|_{t=0} \geq 0$$

Nel seguito si considera un'ipersuperficie immersed compatta orientabile $(M, \varphi)$ con curvatura media costante in $\mathbb{R}^n$. Allora per $t$ sufficientemente piccoli, $\varphi + tN \circ \varphi$ è, per l'Osservazione 2.1, ancora un'immersione.

Sia $M$ un'ipersuperficie orientabile immersed di $\mathbb{R}^n$ e sia $\psi$ una parametrizzazione regolare di una sua regione. Allora si ha:

$$\begin{aligned}\langle \partial_i(\psi + tN \circ \psi), \partial_j(\psi + tN \circ \psi)\rangle =& \langle \partial_i\psi, \partial_j\psi\rangle + t\langle \partial_i\psi, \partial_j(N \circ \psi)\rangle \\ &+ \langle \partial_i(N \circ \psi), \partial_j\psi\rangle \\ &+ t^2\langle \partial_i(N \circ \psi), \partial_j(N \circ \psi)\rangle.\end{aligned}$$

Per l'Osservazione 1.3 si ha:

$$\begin{aligned}\langle \partial_i(\psi + tN \circ \psi), \partial_j(\psi + tN \circ \psi)\rangle =& \langle \partial_i\psi, \partial_j\psi\rangle + 2t\langle \partial_i\psi, L_p(\partial_j\psi)\rangle \\ &+ t^2\langle \partial_i\psi, L_p(L_p(\partial_j\psi))\rangle.\end{aligned}$$

Si definisce la matrice $P = \langle \partial_i\psi, \partial_j\psi\rangle$ e la matrice $W$ della funzione $L_p$ rispetto alla base $\{\partial_1\psi, ..., \partial_{n-1}\psi\}$. Allora si ha:

$$\begin{aligned}(J_{\psi+tN\circ\psi})^t(J_{\psi+tN\circ\psi}) &= P + 2tPW + t^2PW^2 \\ &= P(\mathbb{I} + 2tW + t^2W^2) \\ &= P(\mathbb{I} + tW)^2.\end{aligned}$$

Indicando con $k_i$ le curvature di $M$ allora vale la relazione

$$\det{(J_{\psi+tN\circ\psi})^t(J_{\psi+tN\circ\psi})} = \det P \prod_{i=1}^{n-1}(1-k_i t)^2. \tag{2.4}$$

**Proposizione** 2.7: L'area $A(M_t)$ è pari a

$$A(M_t) = \int_M \prod_{i=1}^{n-1}(1-k_i t)dS.$$

*Dimostrazione* Sia $(B_i)_{i=1,\ldots,\ell}$ un ricoprimento disgiunto di $M$ e siano $\psi_i \in C^k(D_i, B_i)$ parametrizzazioni regolari. Per definizione si ha:

$$A(M_t,\varphi) = \sum_{i=1}^{\ell}\int_{D_i}\sqrt{\det((J_{\varphi\circ\psi_i+N\circ\varphi\circ\psi_i}(x))^t(J_{\varphi\circ\psi_i+N\circ\varphi\circ\psi_i}(x)))}\,dx.$$

Per l'Osservazione 1.1 e la (2.4) vale:

$$\sqrt{\det((J_{\varphi\circ\psi_i+N\circ\varphi\circ\psi_i}(x))^t(J_{\varphi\circ\psi_i+N\circ\varphi\circ\psi_i}(x)))} = \sqrt{\det P}\prod_{i=1}^{n-1}(1-k_i t),$$

da cui segue la tesi.

$\square$

**Proposizione** 2.8: Se $(M,\varphi)$ ha solo punti ombelicali (cioè punti in cui tutte le curvature sono uguali) con curvature non nulle, allora è una sfera.

*Dimostrazione* Sia $\psi$ la parametrizzazione di una regione di $M$ con dominio $D$ di modo che, posto $\sigma := \varphi\circ\psi$, $\sigma(D)$ sia un'ipersuperficie embedded (si usa l'Osservazione 1.1). Che ci siano solo punti ombelicali comporta che $k_1 = ... = k_{n-1} = \lambda$; allora ogni vettore di $T_pM$ è autovettore di $L_p$. Se si definiscono $\sigma_i := \partial_i\sigma$ e $\xi_i := D_{\sigma_i}N$ (quindi è $\xi_{ij} = D_{\sigma_i}D_{\sigma_j}N$), si ha $\xi_i = \lambda\sigma_i$. Derivando opportunamente si ottiene

$$\begin{cases} \xi_{1,2} = \lambda_2\sigma_1 + \lambda\sigma_{1,2} \\ \xi_{2,1} = \lambda_1\sigma_2 + \lambda\sigma_{2,1} \\ \vdots \\ \xi_{1,(n-1)} = \lambda_{n-1}\sigma_1 + \lambda\sigma_{1,(n-1)} \\ \xi_{(n-1),1} = \lambda_1\sigma_{n-1} + \lambda\sigma_{(n-1),1} \end{cases}$$

sottraendo membro a membro opportunamente

$$\begin{cases} \lambda_2\sigma_1 - \lambda_1\sigma_2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1}\sigma_1 - \lambda_1\sigma_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Per l'indipendenza dei vettori tangenti allora deve essere $\lambda_1 = ... = \lambda_{n-1} = 0$, quindi $\lambda$ deve essere costante.
Per ipotesi $\lambda \neq 0$ allora $d := \sigma - \frac{1}{\lambda}\xi$ risulta essere costante, dal momento che

$$d_i = \sigma_i - \frac{1}{\lambda}\xi_i, \quad i = 1, ..., n-1.$$

segue che

$$\sigma = d + \frac{1}{\lambda}\xi$$

è una porzione di sfera di centro $d$ e raggio $\frac{1}{\lambda}$ .

$\square$

## 2.4 Teorema di Wente, Barbosa e do Carmo

In questa sezione si dimostra il teorema principale della tesi.

**Teorema** 2.9: Sia $(M, \varphi)$ una ipersuperficie immersed in $\mathbb{R}^n$ di classe $C^k$ con $k \geq 2$, orientabile a curvatura media costante (non nulla) e compatta. Se $\varphi$ è stabile, allora $\varphi(M)$ è una sfera di $\mathbb{R}^{n+1}$.

*Dimostrazione* Considerando $\varphi_t = \varphi + tN \circ \varphi$, l'area di superficie di $M_t$ risulta essere per la Proposizione 2.7

$$A(M_t) = a_0 + a_1 t + ... + a_{n-1}t^{n-1},$$

dove

$$a_0 := \int_M dS = A(M),$$

$$a_1 := -\int_M (k_1 + ... + k_{n-1})dS = -(n-1)Ha_0 \quad \text{perché } \ H \text{ è costante},$$

$$a_j := (-1)^j \int_M H_j dS, \quad H_j := \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_j \leq n-1} k_{i_1}...k_{i_j}, \quad j = 2, ..., n-1.$$

Per il Teorema 2.2 si ha:

$$V(M_t) = v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + ... + v_n t^n$$

con $v_0 = V(M_0)$, $v_1 = a_0$, $2v_2 = a_1$ e cosí via.
Le immersioni $\varphi_t$ non preservano il volume. Si introduce allora un parametro $s := s(t)$ in modo che l'immersione $\Phi_t^s := s\varphi_t$ preservi il volume. Indicando con $M_t^s$ l'ipersuperficie $(M, \Phi_t^s)$ si ha:

$$A(M_t^s) = s^{n-1} A(M_t)$$

$$V(M_t^s) = s^n V(M_t)$$

Per definizione di $s$ si ha $V(M_t^s) = v_0$, quindi deve essere

$$s = \left(1 + \frac{v_1}{v_0} t + ... + \frac{v_n}{v_0} t^n\right)^{-\frac{1}{n}}$$

Sviluppando in serie $s^n$ allora si ottiene:

$$\begin{aligned} s^{n-1} &= 1 - \frac{n-1}{n}\left(\frac{v_1}{v_0}t + \frac{v_2}{v_0}t^2 + ... + \frac{v_n}{v_0}t^n\right) \\ &+ \frac{n(2n-1)}{2n^2}\left(\frac{v_1}{v_0}t + \frac{v_2}{v_0}t^2 + ... + \frac{v_n}{v_0}t^n\right)^2 + ... \\ &= 1 + \left[-\frac{n-1}{n}\left(\frac{v_1}{v_0}\right)\right] t + \left[-\frac{n-1}{n}\left(\frac{v_2}{v_0}\right) + \frac{n(2n-1)}{2n^2}\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2\right] t^2 + ... \end{aligned}$$

Sostituendo quanto trovato nella fomula dell'area si ha:

$$\begin{aligned} A(M_t^s) = a_0 &+ \left[-\frac{n-1}{n}\left(\frac{v_1}{v_0}\right) a_0 + a_1\right] t + \\ &+ \left\{\left[\frac{n(2n-1)}{2n^2}\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 - \frac{n-1}{n}\left(\frac{v_2}{v_0}\right)\right] a_0 + -\frac{n-1}{n}\left(\frac{v_1}{v_0}\right) a_1 + a_2\right\} t^2 + ... \end{aligned}$$

Si definisce $A(t) := A(M_t^s)$. Deve essere $A'(0) = 0$ perchè $M_0$ è punto critico dell'area con vincolo di volume. Da ciò si ricava:

$$a_0 + nHv_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_0}{v_0} = -nH.$$

Sostituendo allora tutte le relazioni trovate nella derivata seconda dell'area, $A''(0)$, si trova:

$$A''(0) = -\int_M \left[\left(\frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2} H^2\right) - H_2\right] dS.$$

Esplicitando la funzione integranda si ha

$$\begin{aligned}
&(n-2)(n-1)^2H^2 - 2(n-1)H_2 = \\
&= (n-2)\left(\sum_{i=1} n-1k_i\right)^2 - 2(n-1)\left(\sum_{1\le i<j\le n-1} k_ik_j\right) \\
&= (n-2)\left(\sum_i k_i^2\right) + 2(n-2)\left(\sum_{i<j} k_ik_j\right) - 2(n-1)\left(\sum_{i<j} k_ik_j\right) \\
&= (n-2)\left(\sum_i k_i^2\right) - 2\left(\sum_{i<j} k_ik_j\right).
\end{aligned}$$

Ma vale anche

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j}(k_i^2 + k_j^2) &= \sum_{j=2}^{n-1}\sum_{i=1}^{j-1}(k_i^2 + k_j^2) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}(j-1)k_j^2 + \sum_{j=2}^{n-1}\sum_{i=1}^{j-1} k_i^2 = \sum_{j=1}^{n-1}(j-1)k_j^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1} k_i^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}(j-1)k_j^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(n-1-i)k_i^2 = (n-2)\sum_{j=1}^{n-1} k_j^2,
\end{aligned}$$

e sostituendo si ottiene

$$(n-2)(n-1)^2H^2 - 2(n-1)H_2 = (n-2)\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2 - 2\left(\sum_{i<j} k_ik_j\right) = \sum_{i<j}(k_i - k_j)^2.$$

Dunque usando l'ipotesi di stabilità si trova

$$A''(0) = -\frac{1}{2(n-1)}\int_M \left(\sum_{i<j}(k_i - k_j)^2\right) dS \ge 0.$$

Dal momento che la funzione integranda è non negativa, deve essere $A''(0) \le 0$ e l'unica possibilità è che la funzione integranda sia pari a 0; ciò è possibile se e solo se tutte le curvature $k_i$ sono uguali ossia tutti i punti di $M$ sono ombelicali. Essendo la curvatura media non nulla, si conclude con la Proposizione 2.8.

$\square$

# BIBLIOGRAFIA


[1] Steven G. Krantz e Harold R. Parks, 2002. *The Implicit Function Theorem*. Birkhäuser.

[2] Lorence C. Evans e Ronald F. Gariepy, 1992. *Measure Theory and fine proprieties of functions*. CRC Press.

[3] Henry C. Wente, 1982. *Counterexaple to a conjecture of H. Hopf*. Pacific journal of mathematics, Vol.121, No.1., 193-243.

[4] Henry C. Wente, 1991. *A note on the stability theorem of J.L.Barbosa and M. Do Carmo for closed surfaces of constant mean curvature*. Pacific journal of mathematics, Vol. 147, No. 2., 375-379.

[5] J.L. Barbosa e M. do Carmo, 1984. *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*. Mathematische Zeitshrift 185, 339-353.

[6] J.L. Stoker, 1969. *Differential Geometry*. Wiley-Interscience.

[7] A. D. Alexandrov. *Uniqueness theorems for surfaces in the large*. V. Vestnik, Leningrad Univ. 13, No. 19 (1958), 5-8. Amer. Math. Soc. Trans. (Series 2) 21, 412-416.

[8] H. Hopf, *Differential Geometry in the Large (Seminar Lectures New York University 1946 and Stanford University 1956)*, Lecture Notes in Mathematics 1000, Springer Verlag (1983).

[9] Hsiang, W.Y., Teng, Z.H., Yu, W. *New examples of constant mean curvature immersions of (2k- 1)-spheres into euclidean 2k-space*. Ann. of Math. 117, 609-625 (1983)