



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea Triennale in Matematica

TESI DI LAUREA IN MATEMATICA

**Contenuto di Minkowski
e misure di Hausdorff in \mathbb{R}^n**

Laureando:
Mattia Vedovato
Matricola 1074032

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Anno Accademico 2015-2016
22 Luglio 2016

Indice

Introduzione	v
1 Dimensione di Minkowski	1
1.1 Prime definizioni	1
1.2 Caratterizzazioni equivalenti	3
1.3 Alcuni esempi	8
1.3.1 Un compatto numerabile a dimensione frazionaria	8
1.3.2 Un insieme di Cantor	9
1.3.3 La curva di Von Koch	11
2 Contenuto di Minkowski	15
2.1 Insiemi a dimensione intera	15
2.2 Rademacher e formula dell'area	16
2.3 Rettificabilità	19
2.4 Rettificabilità e contenuto di Minkowski	20
2.5 Alcuni teoremi preparatori	21
2.6 Funzioni Lipschitz e contenuto di Minkowski	28
Bibliografia	35

Introduzione

Per i pionieri della Teoria della Misura, agli inizi del Novecento, la necessità di misurare “aree k -dimensionali” in spazi di dimensione $n \geq k$ e di assegnare una “dimensione” ai sottoinsiemi di \mathbb{R}^n rappresentava un problema aperto: i lavori di C. Carathéodory (*Über das lineare Maß von Punktmengen*, 1914) e F. Hausdorff (*Dimension und äußeres Maß*) posero le basi dell’approccio classico al problema, con la definizione di misura di Hausdorff k -dimensionale.

La nozione di *contenuto di Minkowski*, anch’essa inizialmente teorizzata nel primo Novecento e successivamente sviluppata da H. Federer in [4], risponde alla stessa necessità, presentandosi dunque come alternativa alla misura \mathcal{H}^k : ci proponiamo in questa tesi di studiare le relazioni significative tra le due nozioni.

L’intuizione geometrica. Presentiamo qui in maniera *naïf* l’idea alla base della definizione che daremo, idea che renderemo rigorosa e svilupperemo nel testo.

Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva nel piano, e supponiamo di voler determinare (ed anzi definire) la lunghezza $L(S)$ di $S = \gamma([0, 1])$. Consideriamo fissato $\varrho > 0$, l’insieme $I_\varrho(S)$ dei punti che distano meno di ϱ da S . Se S risulta essere un segmento, per ϱ abbastanza piccolo $I_\varrho(S)$ avrà forma approssimativamente rettangolare, e la sua area sarà $2\varrho L(S) + \pi\varrho^2$ (si veda la Figura 1a). Dunque vogliamo che $L(S)$ soddisfi

$$\mathcal{L}^2(I_\varrho(S)) = 2\varrho L(S) + o(\varrho) \quad \Rightarrow \quad L(S) = \lim_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^2(I_\varrho(S))}{2\varrho}.$$

Nel caso in cui S sia una linea curva (Figura 1b), l’insieme $I_\varrho(S)$ è apparentemente una deformazione del (quasi) rettangolo precedente: possiamo aspettarci che il rapporto $\frac{\mathcal{L}^2(I_\varrho(S))}{2\varrho}$ dia ancora una buona stima della lunghezza di S per ϱ che tende a zero.

Si osservi che tale intuizione si adatta facilmente a curve in \mathbb{R}^3 : qui se S è un tratto di linea retta l’insieme $I_\varrho(S)$ assomiglierà ad un cilindro di altezza $L(S)$ e base $\pi\varrho^2$; dunque per ϱ infinitesimo si avrà $L(S) \sim \frac{\mathcal{L}^3(I_\varrho(S))}{\pi\varrho^2}$. D’altro canto, in \mathbb{R}^3 questo metodo sembra poter stimare anche l’area $A(S)$

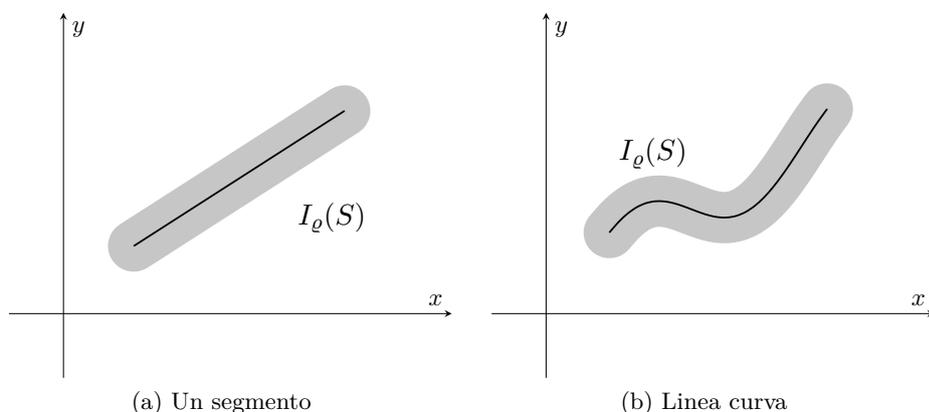


Figura 1: Idea geometrica per la definizione di *contenuto di Minkowski*

di superficie 2-dimensionali: ad esempio, se S è un compatto contenuto in un piano, $I_\varrho(S)$ ha l'aspetto di un cilindro alto 2ϱ la cui sezione approssima $A(S)$.

Dunque in generale, dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e un intero $k \leq n$, definiremo il contenuto di Minkowski k -dimensionale superiore ed inferiore rispettivamente come

$$\mathcal{M}^{*k}(S) = \limsup_{\varrho} \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-k}\varrho^{n-k}} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_*^k(S) = \liminf_{\varrho} \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-k}\varrho^{n-k}},$$

dove $I_\varrho(S) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, S) < \varrho\}$, e ω_{n-k} è la misura di Lebesgue della palla unitaria di \mathbb{R}^{n-k} . Tale definizione si estende in maniera naturale a parametri dimensionali non interi; sarà dunque possibile definire la dimensione di Minkowski (superiore ed inferiore) in analogia alla dimensione di Hausdorff.

Si può osservare già da ora che il contenuto di Minkowski *non* è una misura nel senso tradizionale del termine, neppure quando i due limiti coincidono. È immediato vedere che \mathcal{M}^k non soddisfa l'additività per insiemi disgiunti: infatti si ha $I_\varrho(\bar{S}) = I_\varrho(S)$, e pertanto il contenuto di Minkowski di un insieme coincide con quello della sua chiusura; quindi ad esempio se $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ vale $\mathcal{M}^k(S) = \mathcal{M}^k([0, 1]) = \mathcal{M}^k([0, 1] \setminus S)$. Per questa ragione, nella definizione che daremo al Capitolo 1 ci limiteremo ad insiemi chiusi.

Punti essenziali. Nel Capitolo 2 vedremo alcune caratterizzazioni della dimensione di Minkowski che ne agevoleranno notevolmente il calcolo. Determineremo quindi esplicitamente la dimensione di alcuni frattali noti, ma mostreremo anche un esempio in cui la dimensione inferiore non coincide con la dimensione superiore (nella sottosezione 1.3.2), ed un suo comportamento inaspettato: la nostra definizione assegna dimensione non intera al compatto numerabile $\{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\}$, che ha dimensione di Hausdorff 0.

Dedicheremo invece il Capitolo 2 allo studio dettagliato delle relazioni tra \mathcal{M}^k e \mathcal{H}^k nel caso in cui k sia intero. Stimando $\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))$ da sotto e da sopra con la misura di due n -parallelepipedi, il Teorema di Fubini-Tonelli permette di rendere rigorosa l'intuizione geometrica che ha portato alla definizione di \mathcal{M}^k :

Teorema. *Per sottoinsiemi compatti di k -piani, \mathcal{M}^k e \mathcal{H}^k coincidono.*

Adattando l'argomentazione usata, affronteremo anche il caso di insiemi \mathcal{H}^k -rettificabili: per essi la misura di Hausdorff è data da

$$\mathcal{H}^k(S) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \mathcal{L}^k(\pi_i(K_i)) \left| \begin{array}{l} m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ \pi_i \subseteq \mathbb{R}^n \text{ } k\text{-piani} \\ K_i \subseteq S \text{ compatti disgiunti} \end{array} \right. \right\},$$

in cui abbiamo denotato con $\pi(K)$ la proiezione di K su π ; otterremo la disuguaglianza $\mathcal{M}_*^k(S) \geq \mathcal{H}^k(S)$ mostrando che $\mathcal{M}_*^k(K) \geq \mathcal{L}^k(\pi(K))$ per ogni compatto $K \subseteq S$ e ogni k -piano π .

Indagheremo infine il comportamento di \mathcal{M}^k sull'immagine di funzioni lipschitziane: il nostro risultato finale e più importante sarà il teorema che qui preannunciamo.

Teorema. *Sia $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione Lipschitz e sia $K \in \mathbb{R}^k$ compatto. Allora $\mathcal{M}^k(f(K)) = \mathcal{H}^k(f(K))$.*

Capitolo 1

Dimensione di Minkowski

1.1 Prime definizioni

Nel seguito, dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$, denoteremo con $I_\varrho(S)$ il ϱ -allargamento di S (o ϱ -corpo parallelo), cioè l'insieme

$$I_\varrho(S) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, S) < \varrho \} = \bigcup_{y \in S} B_\varrho(y)$$

dei punti distanti meno di ϱ da S .

Notazione. Dati $0 \leq s \leq n$, con n intero, indichiamo con \mathcal{L}^n la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n e con \mathcal{H}^s la misura di Hausdorff s -dimensionale. Ricordiamo che quest'ultima è definita come il limite per $\delta \downarrow 0$ di

$$\mathcal{H}_\delta^s(S) = \inf \left\{ \omega_s \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\text{diam } S_i}{2} \right)^s \mid \begin{array}{l} \text{diam } S_i < \delta \\ S \subseteq \bigcup_i S_i \end{array} \right\},$$

in cui per ogni $s \geq 0$

$$\omega_s = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}.$$

La funzione di Eulero $\Gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ che compare nella formula precedente è definita da

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx, \quad a > 0.$$

Si noti che per $s = k$ intero ω_k è la misura di Lebesgue della palla unitaria in \mathbb{R}^k (si veda ad esempio [7], §7.18).

Definizione 1.1 (Contenuto di Minkowski). Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso, e sia $0 \leq s \leq n$. Definiamo il **contenuto di Minkowski** s -dimensionale

inferiore e superiore di S rispettivamente come

$$\mathcal{M}_*^s(S) = \liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-s}\varrho^{n-s}},$$

$$\mathcal{M}^{*s}(S) = \limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-s}\varrho^{n-s}}.$$

Se i due valori coincidono, denotiamo il valore comune con $\mathcal{M}^k(S)$.

Idealmente, il contenuto di Minkowski s -dimensionale misura il volume s -dimensionale di S . Dunque, fissato $S \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso, ci chiediamo se esista una definizione naturale di *dimensione* legata alla nozione appena introdotta. A tal fine, mostriamo che vale il seguente lemma.

Lemma 1.1.1. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso, e siano $0 \leq s < t \leq n$.*

- (i) *Se $\mathcal{M}_*^s(S) < \infty$, allora $\mathcal{M}_*^t(S) = 0$.*
- (ii) *Se $\mathcal{M}_*^t(S) > 0$, allora $\mathcal{M}_*^s(S) = \infty$.*
- (iii) *Valgono le stesse implicazioni per \mathcal{M}^* .*

Dimostrazione. Dimostriamo solo (i) e (ii), essendo la strategia identica per (iii).

Nel primo caso, si ha

$$\mathcal{M}_*^t(S) = \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-t}\varrho^{n-t}} = \liminf_{\varrho \downarrow 0} \underbrace{\frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-s}\varrho^{n-s}}}_{(*)} \frac{\omega_{n-s}\varrho^{t-s}}{\omega_{n-t}}.$$

Per l'ipotesi esiste una successione $\varrho_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ per cui la prima frazione $(*)$ converge a un valore finito; poiché $t > s$, per tali ϱ_j vale

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^n(I_{\varrho_j}(S))}{\omega_{n-s}\varrho_j^{n-s}} \frac{\omega_{n-s}\varrho_j^{t-s}}{\omega_{n-t}} = 0,$$

e dunque necessariamente $\mathcal{M}_*^t(S) = 0$.

Nel caso (ii), vale similmente

$$\mathcal{M}_*^s(S) = \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-s}\varrho^{n-s}} = \liminf_{\varrho \downarrow 0} \underbrace{\frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-t}\varrho^{n-t}}}_{(*)} \frac{\omega_{n-t}\varrho^{s-t}}{\omega_{n-s}}.$$

e qui per ϱ abbastanza piccolo $(*)$ è maggiore di una costante $\bar{m} > 0$. Quindi da $s - t < 0$ segue

$$\mathcal{M}_*^s(S) \geq \lim_{\varrho \downarrow 0} \bar{m} \cdot \frac{\omega_{n-t}\varrho^{s-t}}{\omega_{n-s}} = \infty.$$

□

Il lemma precedente giustifica la seguente definizione, analoga alla definizione di dimensione di Hausdorff.

Definizione 1.2. Sia $S \in \mathbb{R}^n$. Definiamo la **dimensione di Minkowski** inferiore e superiore di S rispettivamente come

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_M(S) &= \inf \{ 0 \leq s \leq n \mid \mathcal{M}_*^s(S) = 0 \} = \\ &= \sup \{ 0 \leq s \leq n \mid \mathcal{M}_*^s(S) > 0 \}, \\ \overline{\dim}_M(S) &= \inf \{ 0 \leq s \leq n \mid \mathcal{M}^{*s}(S) = 0 \} = \\ &= \sup \{ 0 \leq s \leq n \mid \mathcal{M}^{*s}(S) > 0 \}. \end{aligned}$$

1.2 Caratterizzazioni equivalenti

Ai fini di calcolare agevolmente la dimensione di Minkowski, daremo in questa sezione alcune caratterizzazioni equivalenti. Introduciamo preliminarmente alcune notazioni.

Notazione. Sia S un insieme limitato in \mathbb{R}^n , e sia $\varrho > 0$.

- Chiamiamo $N(S, \varrho) \in \mathbb{N}$ il **numero di ricoprimento** di S , cioè il minimo numero di palle di raggio ϱ necessario a ricoprire S :

$$N(S, \varrho) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid S \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_\varrho(x_i), \quad \text{esistono } x_i \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

- Chiamiamo $P(S, \varrho) \in \mathbb{N}$ il **numero di impacchettamento** di S , cioè il massimo numero di palle *disgiunte* di raggio ϱ centrate in S :

$$P(S, \varrho) = \max \{ k \in \mathbb{N} \mid \text{esistono } k \text{ palle disgiunte } B_\varrho(x_i), \\ i = 1, \dots, k, \text{ con } x_i \in S \}.$$

Lemma 1.2.1. Sia S un insieme limitato e sia $\varrho > 0$. Valgono allora le seguenti disuguaglianze:

$$N(S, 2\varrho) \leq P(S, \varrho) \leq N\left(S, \frac{\varrho}{2}\right).$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $N(S, 2\varrho) \leq P(S, \varrho)$: sia $p = P(S, \varrho)$ e siano $B_\varrho(x_1), \dots, B_\varrho(x_p)$ palle disgiunte con centri in S . Mostriamo che

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^p B_{2\varrho}(x_i).$$

Infatti se $x \in S \setminus \bigcup_{i=1}^p B_{2\varrho}(x_i)$, allora per ogni $y \in B_\varrho(x)$ e per ogni i vale

$$|x_i - y| = |(x_i - x) - (y - x)| \geq |x_i - x| - |y - x| > 2\varrho - \varrho = \varrho$$

e dunque $B_\varrho(x)$ è disgiunta dalle altre p e centrata in S . Ciò contraddice la massimalità di p ; abbiamo allora trovato p palle di raggio 2ϱ che ricoprono S .

Dimostriamo ora che $P(S, \varrho) \leq N(S, \frac{\varrho}{2})$. Siano $p = P(S, \varrho)$, $N = N(S, \varrho/2)$, e siano

$$\begin{aligned} B_\varrho(x_1), \dots, B_\varrho(x_p) & \text{ palle disgiunte centrate in } S, \\ B_{\frac{\varrho}{2}}(y_1), \dots, B_{\frac{\varrho}{2}}(y_N) & \text{ palle che ricoprono } S. \end{aligned}$$

Ogni x_i appartiene ad una $B_{\frac{\varrho}{2}}(y_j)$; e inoltre ciascuna delle $B_{\frac{\varrho}{2}}(y_j)$ contiene al più un punto tra gli x_i (altrimenti si avrebbe $|x_i - x_l| < \text{diam } B_{\frac{\varrho}{2}}(y_j) = \varrho$). Se ne conclude che dev'essere $p \leq N$. \square

Caratterizzazione 1 (Ricoprimento). *Sia $S \subseteq R^n$ limitato. Valgono:*

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_M(S) &= \inf \left\{ s \geq 0 \mid \liminf_{\varrho \downarrow 0} N(S, \varrho) \varrho^s = 0 \right\}, \\ \overline{\dim}_M(S) &= \inf \left\{ s \geq 0 \mid \limsup_{\varrho \downarrow 0} N(S, \varrho) \varrho^s = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che vale l'uguaglianza di insiemi

$$\left\{ s \in \mathbb{R} \mid \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-s} \varrho^{n-s}} = 0 \right\} = \left\{ s \geq 0 \mid \liminf_{\varrho \downarrow 0} N(S, \varrho) \varrho^s = 0 \right\}.$$

PASSO 1. Se $N = N(S, \varrho)$ e $S \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\varrho(x_i)$, allora

$$I_\varrho(S) \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{2\varrho}(x_i).$$

Infatti, sia $y \in I_\varrho(S)$; allora esistono un $x \in S$ che dista meno di ϱ da y e un x_i che dista meno di ϱ da x : segue che $|y - x_i| < 2\varrho$. Allora vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(I_\varrho(S)) &\leq \sum_{i=1}^N \mathcal{L}^n(B_{2\varrho}(x_i)) = N(S, \varrho) \omega_n (2\varrho)^n \\ &\Rightarrow \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-s} \varrho^{n-s}} \leq \frac{2^n \omega_n}{\omega_{n-s}} N(S, \varrho) \varrho^s \\ &\Rightarrow \mathcal{M}_*^s(S) \leq \frac{2^n \omega_n}{\omega_{n-s}} \liminf_{\varrho \downarrow 0} N(S, \varrho) \varrho^s, \end{aligned}$$

che dà l'inclusione \supseteq .

PASSO 2. Se $p = P(S, \varrho)$ e $\{B_\varrho(y_j)\}_{1 \leq j \leq p}$ sono palle disgiunte con centri in S , allora vale banalmente $I_\varrho(S) \supseteq \bigcup_{j=1}^p B_\varrho(y_j)$. Dunque si ha, usando il

Lemma 1.2.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(I_\varrho(S)) &\geq \sum_{j=1}^p \mathcal{L}^n(B_\varrho(y_j)) = P(S, \varrho) \omega_n \varrho^n \geq N(S, 2\varrho) \omega_n \varrho^n \\ &\Rightarrow \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-s} \varrho^{n-s}} \geq \frac{\omega_n}{2^s \omega_{n-s}} N(S, 2\varrho) (2\varrho)^s \\ &\Rightarrow \mathcal{M}_*^s(S) \geq \frac{\omega_n}{2^s \omega_{n-s}} \liminf_{\varrho \downarrow 0} N(S, 2\varrho) (2\varrho)^s, \end{aligned}$$

che fornisce l'inclusione \subseteq .

La dimostrazione per la dimensione superiore è ovviamente identica. \square

Osservazione 1. Dalla dimostrazione precedente otteniamo un'altra informazione, che stima il contenuto di Minkowski senza ulteriori ipotesi. Nel Capitolo 2 introdurremo la nozione di rettificabilità di un insieme: in tale condizione sarà possibile migliorare la stima fatta.

Ricordiamo la definizione di (pre)misura di Hausdorff, adattata al caso in questione:

$$\mathcal{H}_{4\varrho}^s(S) = \inf \left\{ \omega_s \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\text{diam } S_i}{2} \right)^s \mid \begin{array}{l} \text{diam } S_i < 4\varrho \\ S \subseteq \bigcup_i S_i \end{array} \right\}.$$

La famiglia di $N(S, 2\varrho)$ palle di raggio 2ϱ che ricoprono S è conteggiata nel calcolo dell'inf: dunque $\mathcal{H}_{4\varrho}^s(S) \leq \omega_s N(S, 2\varrho) (2\varrho)^s$, da cui, prendendo il $\liminf_{\varrho \downarrow 0}$,

$$\mathcal{H}^s(S) \leq \omega_s \liminf_{\varrho \downarrow 0} N(S, 2\varrho) (2\varrho)^s.$$

D'altro canto il PASSO 2 della dimostrazione ha fornito

$$\mathcal{M}_*^s(S) \geq \frac{\omega_n}{2^s \omega_{n-s}} \liminf_{\varrho \downarrow 0} N(S, 2\varrho) (2\varrho)^s,$$

da cui

$$\mathcal{M}_*^s(S) \geq \frac{\omega_n}{2^s \omega_{n-s} \omega_s} \mathcal{H}^s(S).$$

Caratterizzazione 2. Sia $S \subseteq R^n$ limitato. Valgono:

$$\underline{\dim}_M(S) = \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log N(S, \varrho)}{-\log \varrho} \quad e \quad \overline{\dim}_M(S) = \limsup_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log N(S, \varrho)}{-\log \varrho}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo che, se vale

$$s > \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log N(S, \varrho)}{-\log \varrho},$$

allora $\liminf_{\varrho \downarrow 0} N(S, \varrho) \varrho^s = 0$. In tal caso in effetti esistono $\varepsilon > 0$ e una successione infinitesima $\{\varrho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tali che

$$\frac{\log N(S, \varrho_k)}{-\log \varrho_k} < s - \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Allora (purché ϱ_k sia abbastanza piccolo)

$$\log N(S, \varrho_k) < -(s - \varepsilon) \log \varrho_k \quad \Rightarrow \quad N(S, \varrho_k) \varrho_k^{s-\varepsilon} < 1.$$

Segue che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(S, \varrho_k) \varrho_k^{s-\varepsilon} \varrho_k^\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \liminf_{\varrho \downarrow 0} N(S, \varrho) \varrho^s = 0.$$

Mostriamo poi che se invece

$$s < \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log N(S, \varrho)}{-\log \varrho},$$

allora $\liminf_{\varrho \downarrow 0} N(S, \varrho) \varrho^s = \infty$. Infatti esistono $\varepsilon > 0$ e un $\hat{\varrho} > 0$ per cui, per ogni $\varrho < \hat{\varrho}$,

$$\frac{\log N(S, \varrho)}{-\log \varrho} > s + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad N(S, \varrho) \varrho^{s+\varepsilon} > 1,$$

e dunque vale addirittura

$$\lim_{\varrho \downarrow 0} N(S, \varrho) \varrho^s = \lim_{\varrho \downarrow 0} N(S, \varrho) \varrho^{s+\varepsilon} \varrho^{-\varepsilon} = \infty.$$

□

Osservazione 2. Si noti che in questa caratterizzazione possiamo equivalentemente utilizzare

$$\tilde{N}(S, \varrho) = \text{minimo numero di } \varrho\text{-palle chiuse che ricoprono } S$$

anziché $N(S, \varrho)$. Infatti per $\varepsilon > 0$ (e $0 < \varrho < 1$) vale

$$\begin{aligned} N(S, (1 + \varepsilon)\varrho) &\leq \tilde{N}(S, \varrho) \leq N(S, \varrho) \\ \Rightarrow \frac{\log N(S, (1 + \varepsilon)\varrho)}{-\log \varrho} \frac{1}{1 - \frac{\log(1+\varepsilon)}{\log(1+\varepsilon)\varrho}} &\leq \frac{\log \tilde{N}(S, \varrho)}{-\log \varrho} \leq \frac{\log N(S, \varrho)}{-\log \varrho}, \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_M(S) &= \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\tilde{N}(S, \varrho)}{-\log \varrho}, \\ \overline{\dim}_M(S) &= \limsup_{\varrho \downarrow 0} \frac{\tilde{N}(S, \varrho)}{-\log \varrho}. \end{aligned}$$

Osservazione 3. È altrettanto equivalente considerare palle (chiuse o aperte) di diametro ϱ : se

$$\widehat{N}(S, \varrho) = \text{minimo numero di palle di diametro } \varrho \text{ che ricoprono } S$$

si ha $\widehat{N}(S, \varrho) = N(S, \varrho/2)$ e dunque

$$\frac{\log \widehat{N}(S, \varrho)}{-\log \varrho} = \frac{\log N(S, \frac{\varrho}{2})}{-\log \frac{\varrho}{2}} \frac{1}{1 - \frac{\log 2}{\log(\varrho/2)}},$$

che al limite per $\varrho \downarrow 0$ dà quanto voluto.

Alla luce del Lemma 1.2.1, otteniamo anche le rispettive formulazioni in termini del numero di impacchettamento:

Caratterizzazione 3 (Impacchettamento). *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato. Valgono:*

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_M(S) &= \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log P(S, \varrho)}{-\log \varrho}, \\ \overline{\dim}_M(S) &= \limsup_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log P(S, \varrho)}{-\log \varrho}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Si tratta di usare un argomento standard di confronto:

$$\begin{aligned} \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log P(S, \varrho)}{-\log \varrho} &\leq \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log N(S, \frac{\varrho}{2})}{-\log \frac{\varrho}{2} - \log 2} \leq \\ &\leq \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log N(S, \frac{\varrho}{2})}{-\log \frac{\varrho}{2}} \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\log 2}{\log \frac{\varrho}{2}}}}_{\xrightarrow{\varrho \rightarrow 0} 1} = \underline{\dim}_M(S), \\ \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log P(S, \varrho)}{-\log \varrho} &\geq \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log N(S, 2\varrho)}{-\log 2\varrho + \log 2} \geq \\ &\geq \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log N(S, 2\varrho)}{-\log 2\varrho} \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{\log 2}{\log 2\varrho}}}_{\xrightarrow{\varrho \rightarrow 0} 1} = \underline{\dim}_M(S). \end{aligned}$$

□

Terminiamo con un'ultima formulazione. Consideriamo, per ϱ fissato, la ϱ -griglia di \mathbb{R}^n formata dai cubi del tipo

$$\prod_{i=1}^n [m_i \varrho, (m_i + 1) \varrho] = [m_1 \varrho, (m_1 + 1) \varrho] \times \cdots \times [m_n \varrho, (m_n + 1) \varrho]$$

con m_1, \dots, m_n interi. Chiamiamo $M(S, \varrho)$ il numero di cubi intersecati dall'insieme S . È possibile esprimere la dimensione di Minkowski in termini di $M(S, \varrho)$:

Caratterizzazione 4. *Le dimensioni di Minkowski di un insieme limitato S sono uguali a:*

$$\underline{\dim}_M(S) = \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log M(S, \varrho)}{-\log \varrho} \quad e \quad \overline{\dim}_M(S) = \limsup_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log M(S, \varrho)}{-\log \varrho},$$

dove $M(S, \varrho)$ è il numero di cubi della ϱ -griglia che intersecano S .

Dimostrazione. Chiamiamo C l'insieme dei cubi che intersecano S .

Ciascuno dei cubi in C è contenuto in una palla di raggio $\frac{\varrho\sqrt{n}}{2}$, avendo essi spigoli di lunghezza ϱ , e dunque si ottiene un ricoprimento di S tramite $M(S, \varrho)$. Pertanto $N(S, \frac{\varrho\sqrt{n}}{2}) \leq M(S, \varrho)$, che fornisce

$$\frac{\log N(S, \frac{\varrho\sqrt{n}}{2})}{-\log \frac{\varrho\sqrt{n}}{2}} \leq \frac{\log M(S, \varrho)}{-\log \varrho - \log \frac{\sqrt{n}}{2}} = \frac{\log M(S, \varrho)}{-\log \varrho} \frac{1}{1 + \frac{\log(\sqrt{n}/2)}{\log \varrho}},$$

da cui, prendendo il lim inf e usando la Caratterizzazione 2

$$\underline{\dim}_M(S) \leq \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log M(S, \varrho)}{-\log \varrho}.$$

D'altro canto ogni palla B di raggio $\varrho/2$ è contenuta in al più 3^n cubi di C : basta prendere il cubo che contiene un punto x qualsiasi di B , e i suoi limitrofi; allora ogni altro punto di B dista da x meno di ϱ , ed è dunque contenuto in uno di tali cubi. Quindi $M(S, \varrho) \leq 3^n N(S, \frac{\varrho}{2})$, che implica

$$\begin{aligned} \frac{\log N(S, \frac{\varrho}{2}) + \log 3^n}{\log \frac{\varrho}{2}} &\geq \frac{\log M(S, \varrho)}{-\log \varrho + \log 2} \\ \Rightarrow \frac{\log N(S, \frac{\varrho}{2})}{\log \frac{\varrho}{2}} + \frac{\log 3^n}{\log \frac{\varrho}{2}} &\geq \frac{\log M(S, \varrho)}{-\log \varrho} \frac{1}{1 - \frac{\log 2}{\log \varrho}}. \end{aligned}$$

Allora per $\varrho \rightarrow 0$ otteniamo la disuguaglianza opposta:

$$\underline{\dim}_M(S) \geq \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log M(S, \varrho)}{-\log \varrho}.$$

□

1.3 Alcuni esempi

1.3.1 Un compatto numerabile a dimensione frazionaria

Sia $\alpha > 0$ un numero reale, e definiamo

$$\mathcal{A}_\alpha = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \dots \right\} = \left\{ \frac{1}{n^\alpha} \mid n \geq 1 \right\} \cup \{0\}.$$

Ci proponiamo di determinarne le dimensioni di Minkowski; in particolare, cerchiamo di stimare $N(\mathcal{A}_\alpha, \varrho)$ e di utilizzare la Caratterizzazione 2 (con l'Osservazione 3 per semplicità, ma manterremo la notazione più leggera $N(\mathcal{A}_\alpha, \varrho)$). Per comodità, d'ora in poi chiameremo $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

STIMA DAL BASSO. Scelto $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, stimiamo la distanza $|x_{n-1} - x_n|$:

$$\begin{aligned} |x_{n-1} - x_n| &= \left| \frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} \right| = \frac{n^\alpha - (n-1)^\alpha}{n^\alpha(n-1)^\alpha} \\ &= \frac{1 - (1 - \frac{1}{n})^\alpha}{(n-1)^\alpha} = \frac{1}{(n-1)^\alpha} \left(\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

e quindi, fissato d'ora in poi un qualsiasi $\gamma \in (0, \alpha)$, per ogni n da un certo \bar{n} in poi si ha

$$\frac{\alpha - \gamma}{n(n-1)^\alpha} < |x_{n-1} - x_n| < \frac{\alpha + \gamma}{n(n-1)^\alpha}.$$

Dunque se

$$\frac{\alpha - \gamma}{(n+1)n^\alpha} \leq \varrho < \frac{\alpha - \gamma}{n(n-1)^\alpha}$$

sono necessarie almeno n palle di diametro ϱ per coprire \mathcal{A}_α (una per ciascun x_j , $j = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_M(\mathcal{A}_\alpha) &= \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log N(\mathcal{A}_\alpha, \varrho)}{-\log \varrho} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{-\log \frac{\alpha - \gamma}{(n+1)n^\alpha}} = \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \frac{1}{\alpha - \gamma}}{\log n} + \frac{1}{\log n} \log \left[n^{\alpha+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \right)^{-1} \geq \\ &\geq \frac{1}{\alpha + 1}. \end{aligned}$$

STIMA DALL'ALTO. D'altronde, ancora nel caso in cui

$$\frac{\alpha - \gamma}{(n+1)n^\alpha} \leq \varrho < \frac{\alpha - \gamma}{n(n-1)^\alpha},$$

per coprire l'intervallo $[0, x_{n+1}] = \left[0, \frac{1}{n+1} \right]$ (e dunque tutti gli x_k rimanenti) sono sufficienti M palle di diametro ϱ , dove M è il più piccolo intero maggiore di $\frac{n^\alpha}{(\alpha - \gamma)(n+1)^{\alpha-1}}$, e quindi certamente $N(\mathcal{A}_\alpha, \varrho) \leq n + \hat{\kappa}(n+1) \leq \kappa n$ con κ costante: conti analoghi ai precedenti porgono

$$\overline{\dim}_M(\mathcal{A}_\alpha) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \kappa n}{-\log \frac{\alpha - \gamma}{n(n-1)^\alpha}} = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Dunque da quanto visto esiste la dimensione di Minkowski di \mathcal{A}_α e vale $\frac{1}{\alpha+1}$; in particolare, comunque scelto $\lambda \in (0, 1)$ si è così costruito un insieme di dimensione λ .

1.3.2 Un insieme di Cantor

Prendendo spunto dalla costruzione classica dell'insieme di Cantor, definiamo ora un insieme $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$ con la proprietà che $\underline{\dim}_M(\mathcal{C}) \leq \overline{\dim}_M(\mathcal{C})$. Siano

d'ora in poi s e t tali che $0 < s < t < 1$: l'insieme che costruiremo avrà $\underline{\dim}_M(\mathcal{C}) \leq s < t \leq \overline{\dim}_M(\mathcal{C})$.

Data una sequenza $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $0 < \alpha_k < \frac{1}{2}$ (che specificheremo in seguito in base all'obiettivo preannunciato), definiamo:

- $\mathcal{C}_0 = [0, 1] = I_0$;
- $\mathcal{C}_1 = [0, \alpha_1] \cup [1 - \alpha_1, 1] = I_{11} \cup I_{12}$ l'unione dei due intervalli chiusi di lunghezza $L(1) = \alpha_1$ ottenuti rimuovendo la parte centrale di I_0 ;
- $\mathcal{C}_2 = I_{21} \cup I_{22} \cup I_{23} \cup I_{24}$ l'unione dei quattro intervalli chiusi di lunghezza $L(2) = \alpha_2 L(1)$ ottenuti da \mathcal{C}_1 rimuovendo la parte centrale di ciascun I_{1j} ;
- Dato $\mathcal{C}_k = I_{k1} \cup \dots \cup I_{k2^k}$ con I_{kj} intervalli chiusi di lunghezza

$$L(k) = \alpha_1 \cdots \alpha_k,$$

definiamo $\mathcal{C}_{k+1} = I_{k+1,1} \cup \dots \cup I_{k+1,2^{k+1}}$ come l'unione dei 2^{k+1} intervalli chiusi di lunghezza $L(k+1) = \alpha_{k+1} L(k)$ ottenuti rimuovendo la parte centrale di ciascun I_{kj} .

Infine, definiamo l'insieme $\mathcal{C} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_k$: è compatto perché intersezione (non vuota) di compatti di \mathbb{R} ; inoltre è chiaro dalla costruzione che \mathcal{C} contiene gli estremi di tutti gli intervalli I_{kj} utilizzati nella costruzione: chiameremo $x_{kj} < y_{kj}$ gli estremi di I_{kj} . Si noti, per inciso, che in ogni caso $L(k)$ tende a 0 per $k \rightarrow \infty$, essendo maggiorata dalla successione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$.

Utilizzeremo la Caratterizzazione 2 con le Osservazioni 2 e 3 per valutare le dimensioni di Minkowski di \mathcal{C} : considereremo dunque suoi ricoprimenti tramite palle chiuse (mantenendo però la notazione $N(\mathcal{C}, \varrho)$).

Osserviamo che per $\varrho_k = L(k)$ sono sufficienti 2^k palle di diametro ϱ_k per coprire \mathcal{C} : infatti $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_k$, che è proprio l'unione disgiunta di 2^k intervalli lunghi ϱ_k . Sono però anche necessarie: abbiamo già osservato che \mathcal{C} contiene tutti i 2^{k+1} punti x_{kj}, y_{kj} al variare di $j = 1, \dots, 2^k$; e una palla di diametro ϱ_k ricopre al più due di tali punti. Dunque conosciamo il valore esatto:

$$N(\mathcal{C}, L(k)) = 2^k \quad \Rightarrow \quad R_k := \frac{\log N(\mathcal{C}, \varrho_k)}{-\log \varrho_k} = \frac{k \log 2}{-\log L(k)}.$$

Ci proponiamo dunque di determinare la sequenza $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in modo che (al variare di k) R_k assuma infinite volte valori più piccoli di s e infinite volte valori più grandi di t .

PASSO 1. Scegliamo $\alpha_1 = 2^{-1/s}$: allora $L(1) = \alpha_1$ e

$$R_1 = R_{k_1} = \frac{\log 2}{-\log 2^{-\frac{1}{s}}} = s.$$

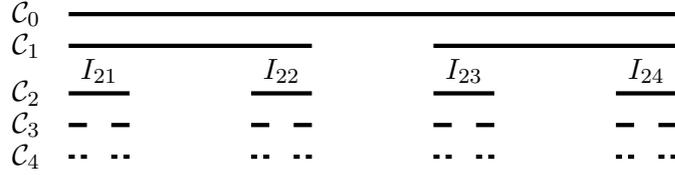


Figura 1.1: Costruzione dell'insieme di Cantor \mathcal{C} .

PASSO 2. Allo stesso modo, per ottenere $R_{k_2} \geq t$ è necessario che valga $L(k_2) \geq 2^{-k_2/t}$. A tal fine, si sceglie $t < \tau < 1$ e $\alpha_k = 2^{-1/\tau}$ per un numero sufficiente di k , nel senso seguente: vale

$$L(k) = 2^{-\frac{1}{s}} \cdot 2^{-\frac{k-1}{\tau}} = 2^{-\frac{1}{s} - \frac{k-1}{\tau}},$$

e dunque opereremo tale scelta di α_k finché tale esponente non è $\geq -\frac{k}{t}$. Un k_2 per cui tale condizione si verifica esiste, poiché

$$-\frac{1}{s} - \frac{k-1}{\tau} \geq -\frac{k}{t} \iff \frac{1}{s} + \frac{k-1}{\tau} \leq \frac{k}{t} \iff k \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right) \geq \frac{1}{s} - \frac{1}{\tau},$$

che ammette soluzione: sia l'espressione tra parentesi che il secondo membro sono positivi.

PASSO 3. Cerchiamo $k_3 > k_2$ e $\alpha_{k_2+1}, \dots, \alpha_{k_3}$ tali che $L(k_3) \leq 2^{-k_3/s}$. Come al PASSO 1, qui è sufficiente una sola iterazione: basta prendere ($k_3 = k_2 + 1$ e)

$$\alpha_{k_2+1} \leq \frac{2^{-\frac{k_2+1}{s}}}{L(k_2)} \implies L(k_2 + 1) \leq 2^{-\frac{k_2+1}{s}}.$$

PASSO 4. Per il successivo, procediamo come in PASSO 2, usiamo $\alpha_k = 2^{-1/\tau}$ un numero sufficiente di volte e scegliamo $k_4 > k_3$ tale che $R_{k_4} \geq t$. È dunque chiaro come proseguire induttivamente questo procedimento, alternando le due strategie.

Abbiamo dunque costruito la sequenza $\{\alpha_k\}_k$ e il relativo insieme di tipo Cantor \mathcal{C} con la proprietà seguente: esistono due successioni $\{\varrho_{1j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ e $\{\varrho_{2j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, entrambe convergenti a zero, e tali che

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\log N(\mathcal{C}, \varrho_{1j})}{-\log \varrho_{1j}} \leq s \\ \frac{\log N(\mathcal{C}, \varrho_{2j})}{-\log \varrho_{2j}} \geq t \end{array} \right\} \forall j \in \mathbb{N}.$$

e dunque $\underline{\dim}_M(\mathcal{C}) \leq s < t \leq \overline{\dim}_M(\mathcal{C})$ come voluto.

1.3.3 La curva di Von Koch

Si tratta di uno degli insiemi frattali più noti; per una costruzione rigorosa si rimanda a Mattila [2].

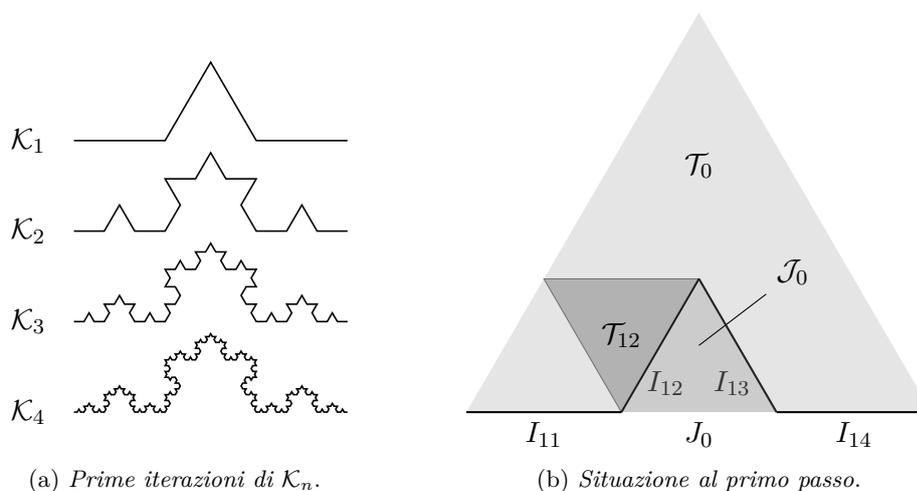


Figura 1.2: Costruzione della curva di Koch

Facendo riferimento per le notazioni alla figura 1.2, si costruisce \mathcal{K} a partire da un segmento unitario $\mathcal{K}_0 = I_0$ nel piano; si ottiene \mathcal{K}_1 rimuovendo il terzo centrale J_0 di \mathcal{K}_0 e sostituendolo con gli altri due lati del triangolo equilatero \mathcal{J}_0 avente per base J_0 : si tratta dunque di quattro segmenti I_{11}, \dots, I_{14} di lunghezza $\frac{1}{3}$. In generale, \mathcal{K}_n sarà una curva formata da 4^n segmenti I_{n1}, \dots, I_{n4^n} lunghi $\frac{1}{3^n}$, e si otterrà \mathcal{K}_{n+1} rimuovendo il terzo centrale J_{nj} di ciascun segmento e rimpiazzandolo coi due lati rimanenti del triangolo equilatero \mathcal{J}_{nj} su J_{nj} , come in figura 1.2a.

In questo procedimento ogni \mathcal{K}_n si può rappresentare come una curva continua da $[0, 1]$ in \mathbb{R}^2 , e per opportune parametrizzazioni la successione $\{\mathcal{K}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy per la convergenza uniforme: dunque converge alla curva continua \mathcal{K} .

Vogliamo valutarne la dimensione di Minkowski; introduciamo brevemente un'ultima caratterizzazione per sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 :

Caratterizzazione 5. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato. Valgono:

$$\underline{\dim}_M(S) = \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log T(S, \varrho)}{-\log \varrho},$$

$$\overline{\dim}_M(S) = \limsup_{\varrho \downarrow 0} \frac{\log T(S, \varrho)}{-\log \varrho}.$$

dove $T(S, \varrho)$ è il minimo numero di triangoli equilateri di lato ϱ che ricoprono S .

Dimostrazione. Un tale triangolo è contenuto in una palla di raggio $\frac{\sqrt{3}}{3}\varrho$ e ne contiene una di raggio $\frac{\sqrt{3}}{6}\varrho$: dunque $N(S, \frac{\sqrt{3}}{3}\varrho) \leq T(S, \varrho) \leq N(S, \frac{\sqrt{3}}{6}\varrho)$, e si giunge a conclusione tramite tecniche standard di cui si è già fatto uso. \square

Ora chiamando \mathcal{T}_{nj} il triangolo equilatero chiuso costruito sul lato I_{nj} (come in figura 1.2b), si può notare che per ogni n la curva \mathcal{K} è contenuta nell'unione dei triangoli $\mathcal{T}_{n1}, \dots, \mathcal{T}_{n4^n}$. La costruzione geometrica suggerisce infatti che $\mathcal{T}_{1j} \subset \mathcal{T}_0$ per ogni j , e procedendo per induzione

$$\bigcup_{j=1}^{4^{n+1}} \mathcal{T}_{n+1,j} \subseteq \bigcup_{j=1}^{4^n} \mathcal{T}_{n,j}.$$

Ciò implica che per ogni $m > n$ vale $\mathcal{K}_m \subset \bigcup_{j=1}^{4^n} \mathcal{T}_{n,j}$, da cui $\mathcal{K} \subset \bigcup_{j=1}^{4^n} \mathcal{T}_{n,j}$ per la chiusura di quest'ultimo.

Dunque $T(\mathcal{K}, \frac{1}{3^n}) \leq 4^n$; ma d'altro canto tali triangoli sono anche necessari per ricoprire \mathcal{K} , poiché gli estremi dei segmenti I_{nj} rimangono in posizione fissa dall'iterazione n in poi e distano tra loro proprio 3^{-n} .

Si noti infine che se $3^{-n-1} < \varrho < 3^{-n}$, allora $4^n \leq T(\mathcal{K}, \varrho) \leq 4^{n+1}$, e dunque

$$\frac{\log 4^n}{-\log 3^{-n-1}} \leq \frac{\log T(\mathcal{K}, \varrho)}{-\log \varrho} \leq \frac{\log 4^{n+1}}{-\log 3^{-n}}.$$

La dimensione di Minkowski di \mathcal{K} è dunque $\frac{\log 4}{\log 3}$.

Capitolo 2

Contenuto di Minkowski

2.1 Insiemi a dimensione intera

Ci proponiamo di studiare il comportamento del contenuto di Minkowski quando come parametro dimensionale si sceglie un intero $k \leq n$.

Usando la disuguaglianza di Minkowski si può provare il seguente fatto (si veda [1], Theorem 2.53, o [5], p.70):

Teorema 2.1.1. *Per ogni insieme $B \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile per la misura \mathcal{L}^n vale $\mathcal{H}^n(B) = \mathcal{L}^n(B)$. Ovvero: quando $s = n$ è la dimensione dello spazio, la misura di Hausdorff n -dimensionale coincide con la misura di Lebesgue.*

Nell'ottica di analizzare la relazione tra contenuto di Minkowski e misura di Hausdorff k -dimensionale, iniziamo considerando il caso semplice in cui l'insieme S sia contenuto in un k -piano.

Lemma 2.1.2. *Se S è un sottoinsieme compatto di un k -piano π , allora $\mathcal{M}^k(S)$ esiste e inoltre $\mathcal{M}^k(S) = \mathcal{H}^k(S)$.*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità possiamo supporre che il piano π sia quello descritto dalle equazioni $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$. Chiameremo y le prime k coordinate, z le ultime $n - k$, cosicché un generico punto di \mathbb{R}^n sarà $x = (y, z)$.

Sia $\varrho > 0$ fissato. Si faccia riferimento alla Figura 2.1 per i due insiemi su cui si lavorerà.

- Chiamiamo A_ϱ l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^n$ che distano meno di ϱ da π e la cui proiezione su π dista meno di ϱ da S

$$A_\varrho = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} d(x, \pi) < \varrho \\ \pi x \in I_\varrho S \cap \pi \end{array} \right. \right\}.$$

Il teorema di Fubini-Tonelli applicato ad A_ϱ asserisce che

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A_\varrho) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_\varrho} dx = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathcal{L}^k(I_\varrho S \cap \pi) \chi_{\{|z| < \varrho\}} dz = \\ &= \mathcal{H}^k(I_\varrho S \cap \pi) \omega_{n-k} \varrho^{n-k}.\end{aligned}$$

- Sia poi B_ϱ l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^n$ che distano meno di ϱ da π e la cui proiezione su π appartiene a S

$$B_\varrho = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} d(x, \pi) < \varrho \\ \pi x \in S \end{array} \right\}.$$

Ancora Fubini-Tonelli, ora applicato a B_ϱ , fornisce

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(B_\varrho) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_\varrho} dx = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathcal{L}^k(S) \chi_{\{|z| < \varrho\}} dz = \\ &= \mathcal{H}^k(S) \omega_{n-k} \varrho^{n-k}.\end{aligned}$$

Valgono inoltre le inclusioni $B_\varrho \subseteq I_\varrho(S) \subseteq A_\varrho$, e dunque

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(B_\varrho) &\leq \mathcal{L}^n(I_\varrho(S)) \leq \mathcal{L}^n(A_\varrho) \\ \implies \mathcal{H}^k(S) \omega_{n-k} \varrho^{n-k} &\leq \mathcal{L}^n(I_\varrho(S)) \leq \mathcal{H}^k(I_\varrho S \cap \pi) \omega_{n-k} \varrho^{n-k} \\ \implies \mathcal{H}^k(S) &\leq \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-k} \varrho^{n-k}} \leq \mathcal{H}^k(I_\varrho S \cap \pi).\end{aligned}$$

Si noti ora che per la compattezza di S

$$\bigcap_{\varrho > 0} I_\varrho(S) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, S) = 0 \} = S$$

e dunque per la continuità dall'alto della misura \mathcal{H}^k vale $\lim_{\varrho \downarrow 0} \mathcal{H}^k(I_\varrho S \cap \pi) = \mathcal{H}^k(S)$. Dunque facendo tendere ϱ a zero nella disuguaglianza precedente otteniamo il risultato voluto. \square

Vorremmo utilizzare questo procedimento per studiare la relazione tra \mathcal{M}^k e \mathcal{H}^k più in generale. Per ottenere risultati apprezzabili su classi più ampie di insiemi, si necessita della nozione di rettificabilità, introdotta nella sezione 2.3.

2.2 Rademacher e formula dell'area

Introduciamo ora senza dimostrazione alcuni risultati necessari al proseguimento della trattazione.

Teorema 2.2.1 (Rademacher). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione lipschitziana. Allora f è differenziabile \mathcal{L}^k -quasi ovunque.*

Per quest'ultimo teorema, si veda [2], Theorem 7.3 o [1], Theorem 2.14.

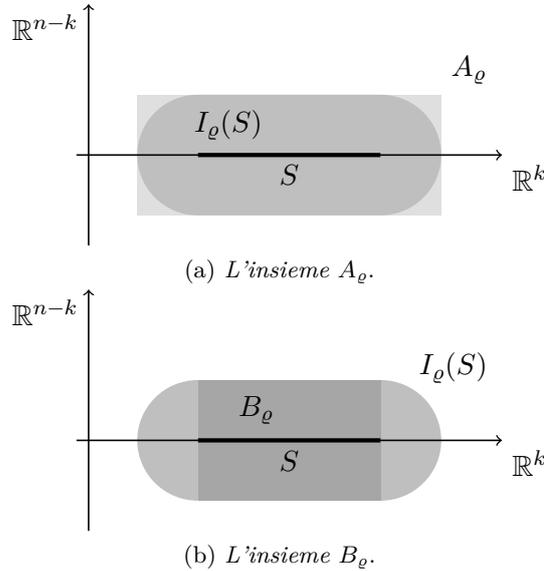


Figura 2.1: Gli insiemi utilizzati nella dimostrazione del Lemma 2.1.2.

Jacobiano

Sia ancora $k \leq n$, e siano fissate basi ortonormali \mathcal{B}_k e \mathcal{B}_n di \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^n . Data un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, sia $\mathbf{L} \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ la sua matrice rispetto alle basi fissate; chiamiamo **jacobiano k -dimensionale** di L il numero

$$J_k L = \sqrt{\det(\mathbf{L}^T \mathbf{L})}$$

che geometricamente rappresenta la misura k -dimensionale del parallelepipedo che ha per lati le colonne di \mathbf{L} . Si noti che la matrice \mathbf{L}^T è la rappresentazione rispetto alle basi $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_k$ dell'applicazione aggiunta $L^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, cioè l'unica mappa lineare di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^k tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^k, v \in \mathbb{R}^n$ valga $u \cdot L^*(v) = L(u) \cdot v$ (si veda ad esempio [6] al Cap.2, §8). Dunque si sta calcolando il determinante dell'endomorfismo $L^* \circ L$ di \mathbb{R}^k .

In particolare, se $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ è differenziabile nel punto $x \in \mathbb{R}^k$ e $\mathcal{J}_k Df(x)$ è la sua matrice jacobiana

$$\mathcal{J}_k Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_k f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n(x) & \cdots & \partial_k f_n(x) \end{pmatrix}$$

rimane definito lo jacobiano di $Df(x)$, ovvero, con un piccolo abuso di notazione,

$$J_k Df(x) = \sqrt{\det(Df(x)^T Df(x))}.$$

Il Teorema di Rademacher 2.2.1 assicura che, se f è lipschitziana, $J_k Df(x)$ è ben definito per \mathcal{L}^k quasi ogni $x \in \mathbb{R}^k$.

La formula di Cauchy-Binet semplifica notevolmente il calcolo di $J_k L$ (si veda [1], Prop. 2.69).

Teorema 2.2.2 (Cauchy-Binet). *Sia $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare, \mathbf{L} la sua rappresentazione matriciale rispetto a basi ortonormali qualunque. Vale*

$$J_k L = \sqrt{\sum_B \det(B)^2} \quad (\text{CB})$$

dove B sono tutte le sottomatrici $k \times k$ di \mathbf{L} .

Formula dell'area

Il seguente teorema, che sarà ampiamente utilizzato in futuro, permette di esprimere la misura \mathcal{H}^k di immagini di funzioni Lipschitz in termini dello jacobiano $J_k Df$, tenendo conto della molteplicità. Si veda [1], Theorem 2.71.

Teorema 2.2.3 (Formula dell'area). *Siano $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitziana, $E \subseteq \mathbb{R}^k$ insieme \mathcal{L}^k -misurabile. Vale allora:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{H}^k(y) = \int_E J_k Df(x) dx \quad (2.1)$$

La mappa $y \rightarrow \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(y))$ è detta **funzione molteplicità**.

Si noti in particolare che se f è iniettiva in E vale

$$\mathcal{H}^k(f(E)) = \int_E J_k Df(x) dx.$$

La dimostrazione della formula dell'area si basa sul seguente teorema di approssimazione di funzioni Lipschitz con funzioni lineari, per il quale si veda [1], Lemma 2.74.

Teorema 2.2.4 (Linearizzazione di funzioni Lipschitz). *Sia $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione Lipschitz e sia $E \subseteq \mathbb{R}^k$ un insieme \mathcal{L}^k -misurabile tale che $J_k Df(x) > 0$ per quasi ogni $x \in E$. Per ogni $t > 1$ esistono dei compatti $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a due a due disgiunti tali che:*

(i) $\mathcal{L}^k(E \setminus (\bigcup_i E_i)) = 0$

(ii) Per ogni i , $f|_{E_i}$ è iniettiva con inversa Lipschitz, differenziabile in tutto E_i e con $J_k Df|_{E_i}(x) > 0$ per ogni $x \in E_i$.

(iii) Per ogni i esiste un'applicazione lineare $L_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $J_k L_i > 0$ tale che

$$\begin{cases} \text{Lip}((f|_{E_i}) \circ L_i^{-1}) \leq t \\ \text{Lip}(L_i \circ (f|_{E_i})^{-1}) \leq t \end{cases}$$

Inoltre, vale anche

$$t^{-k} J_k L_i \leq J_k Df(x) \leq t^k J_k L_i \quad \forall x \in E_i \quad (2.2)$$

Useremo la linearizzazione fornita dal Teorema 2.2.4 anche nella dimostrazione della Proposizione 2.5.2.

2.3 Rettificabilità

Definizione 2.1 (Insiemi rettificabili). Sia E un insieme \mathcal{H}^k -misurabile in \mathbb{R}^n . Diciamo che E è **numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile** se esiste un insieme numerabile di funzioni lipschitziane $f_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che

$$\mathcal{H}^k \left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^k) \right) = 0.$$

Grazie al lemma seguente (una cui dimostrazione si trova in [1], Prop. 2.76), potremmo sostituire nella Definizione 2.1 le immagini di funzioni lipschitziane con k -grafici di funzioni lipschitziane. Dato un k -piano π di \mathbb{R}^n e $x \in \mathbb{R}^n$, denoteremo con πx la proiezione di x su π , con $\pi^\perp x$ la proiezione sul sottospazio ortogonale a π .

Lemma 2.3.1 (Caratterizzazione degli insiemi rettificabili). *Un insieme \mathcal{H}^k -misurabile E è numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile se e solo se esiste un insieme numerabile di Lipschitz k -grafici $\Gamma_i \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che*

$$\mathcal{H}^k \left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i \right) = 0$$

dove per ogni i

$$\Gamma_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \phi_i(\pi x) = \pi^\perp x \right\}$$

per qualche $\phi_i : \pi \rightarrow \pi^\perp$.

Per insiemi rettificabili la misura \mathcal{H}^k ammette una caratterizzazione maneggevole (si veda [1], Prop. 2.66):

Teorema 2.3.2 (Teorema delle proiezioni). *Se E è un insieme numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile, allora la sua misura di Hausdorff è*

$$\mathcal{H}^k(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \mathcal{L}^k(\pi_i(K_i)) \mid \begin{array}{l} m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ \pi_i \subseteq \mathbb{R}^n \text{ } k\text{-piani} \\ K_i \subseteq E \text{ compatti disgiunti} \end{array} \right\}$$

2.4 Rettificabilità e contenuto di Minkowski

Per insiemi rettificabili, la misura di Hausdorff \mathcal{H}^k limita inferiormente il contenuto di Minkowski inferiore senza l'introduzione di una costante come nell'Osservazione 1 del Capitolo 1.

Proposizione 2.4.1 (Stima dal basso). *Se S è un insieme chiuso e numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile, allora vale $\mathcal{H}^k(S) \leq \mathcal{M}_*^k(S)$.*

Dimostrazione. In vista del Teorema 2.3.2, mostreremo che, comunque fissati $m \geq 1$, $S_i \subseteq S$ compatti disgiunti, π_i k -piani in \mathbb{R}^n (con $1 \leq i \leq m$), vale

$$\mathcal{M}_*^k(S) \geq \sum_{i=1}^m \mathcal{L}^k(\pi_i(S_i)).$$

Per monotonia della misura di Lebesgue e del limite inferiore, $\mathcal{M}_*^k(S) \geq \mathcal{M}_*^k(\bigcup_{i=1}^m S_i)$. Inoltre, per ϱ sufficientemente piccolo, gli intorni $I_\varrho(S_i)$ sono anch'essi disgiunti, dunque per l'additività della misura

$$\mathcal{L}^n\left(I_\varrho\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)\right) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^m I_\varrho S_i\right) = \sum_{i=1}^m \mathcal{L}^n(I_\varrho S_i).$$

Dunque sfruttando il fatto che il lim inf di una somma è maggiore o uguale della somma dei lim inf si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_*^k\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right) &= \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^m \mathcal{L}^n(I_\varrho S_i)}{\omega_{n-k} \varrho^{n-k}} \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^m \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho S_i)}{\omega_{n-k} \varrho^{n-k}} = \sum_{i=1}^m \mathcal{M}_*^k(S_i). \end{aligned}$$

È quindi sufficiente verificare che per ogni i vale $\mathcal{M}_*^k(S_i) \geq \mathcal{H}^k(\pi_i S_i)$. Usiamo un argomento simile a quello utilizzato nella dimostrazione del Lemma 2.1.2. Per qualsiasi ϱ , $I_\varrho(S_i)$ contiene l'insieme

$$C_\varrho = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \pi_i x \in \pi_i S_i \\ d(x, S_i) < \varrho \end{array} \right\}$$

la cui misura \mathcal{L}^n verifica, per Fubini-Tonelli,

$$\mathcal{L}^n(C_\varrho) \geq \int_{\pi_i S_i} \omega_{n-k} \varrho^{n-k} dy = \mathcal{H}^k(\pi_i S_i) \omega_{n-k} \varrho^{n-k}.$$

Dunque, si conclude

$$\frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S_i))}{\omega_{n-k} \varrho^{n-k}} \geq \mathcal{H}^k(\pi_i S_i) \xrightarrow{\varrho \downarrow 0} \mathcal{M}_*^k(S_i) \geq \mathcal{H}^k(\pi_i S_i).$$

□

Esempio 2.1 (Assenza di stime dall'alto). Esistono insiemi numerabili in \mathbb{R}^n per cui si ha che \mathcal{M}_*^k è ∞ per ogni $k < n$ (mentre per insiemi numerabili \mathcal{H}^k è 0 se $k > 0$).

Per ogni $m \geq 1$, sia $S_m \subseteq B_{\frac{1}{m}}$ un insieme *finito* tale che $B_{\frac{1}{m}} \subseteq I_{\frac{1}{2^m}}(S_m)$; l'esistenza di un tale S_m è assicurata dalla totale limitatezza di $B_{\frac{1}{m}}$. Sia $S_0 = \{0\}$, ed infine $S = \bigcup_{m=0}^{\infty} S_m$.

Valgono allora:

- (i) S è numerabile, perché unione numerabile di insiemi finiti.
- (ii) L'unico punto di accumulazione è l'origine: per ogni $\varepsilon > 0$, i punti di S fuori da B_ε sono in quantità finita.
- (iii) S è compatto: infatti è limitato, ed è chiuso per il punto precedente.

Per $\frac{1}{2^{m+1}} < \varrho \leq \frac{1}{2^m}$, si ha che

$$I_\varrho(S) \supseteq I_\varrho(S_m) \supseteq I_{\frac{1}{2^{m+1}}}(S_m) \supseteq B_{\frac{1}{m}}$$

e dunque

$$\mathcal{L}^n(I_\varrho(S)) \geq \omega_n \left(\frac{1}{m} \right)^n. \quad (2.3)$$

D'altro canto $\varrho \leq 2^{-m}$ indica che $\varrho^{-1} \geq 2^m$, e quindi

$$\log \frac{1}{\varrho} \geq m \log 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m} \geq \frac{\log 2}{\log \frac{1}{\varrho}}.$$

Dalla (2.3) allora

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_*^k(S) &= \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho S)}{\mathcal{L}^{n-k}(B_\varrho)} \geq \\ &\geq \liminf_{\varrho \downarrow 0} \frac{1}{\varrho^{n-k}} \left(\frac{\log 2}{-\log \varrho} \right)^n = \infty \quad \text{se } k < n. \end{aligned}$$

□

2.5 Alcuni teoremi preparatori

In questa sezione presentiamo alcuni risultati di carattere perlopiù tecnico, che utilizzeremo ampiamente nella Sezione 2.6.

Dimostriamo ora due facili proprietà delle funzioni Lipschitz che saranno utili nella Proposizione 2.5.2.

Lemma 2.5.1 (Proprietà di funzioni Lipschitz). *Sia $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione lipschitziana con $L = \text{Lip}(f)$ e sia $E \subseteq \mathbb{R}^k$.*

(i) Fissato $m \leq k$ parametro dimensionale per la misura di Hausdorff, vale

$$\mathcal{H}^m(f(E)) \leq L^m \mathcal{H}^m(E). \quad (2.4)$$

(ii) Per ogni $\rho > 0$ vale

$$f(I_\rho(E)) \subseteq I_{L\rho}(f(E)). \quad (2.5)$$

Dimostrazione. Proviamo la (2.4). È sufficiente provare che per ogni $\delta > 0$ vale $\mathcal{H}_{c\delta}^m(f(E)) \leq L^m \mathcal{H}_\delta^m(E)$ per qualche costante c . Facendo tendere $\delta \downarrow 0$ otteniamo il risultato. Per definizione si ha

$$\mathcal{H}_\delta^m(E) = \inf \left\{ \frac{\omega_m}{2^m} \sum_{i=0}^{\infty} (\text{diam } E_i)^m \mid \begin{array}{l} \text{diam } E_i < \delta \\ E \subseteq \bigcup_i E_i \end{array} \right\}.$$

Fissato un tale ricoprimento $\{E_i\}_i$ di E , allora $\{f(E_i)\}_i$ ricopre $f(E)$; inoltre

$$\text{diam } f(E_i) = \inf_{x,y \in E_i} |f(x) - f(y)| \leq L \inf_{x,y \in E_i} |x - y| < \delta L.$$

Dunque $\{f(E_i)\}_i$ è uno dei ricoprimenti coinvolti in $\mathcal{H}_{\delta L}^m(f(E))$, e quindi

$$\mathcal{H}_{\delta L}^m(f(E)) \leq \frac{\omega_m}{2^m} \sum_{i=0}^{\infty} (\text{diam } f(E_i))^m \leq \frac{\omega_m L^m}{2^m} \sum_{i=0}^{\infty} (\text{diam } E_i)^m.$$

Allora la disuguaglianza vale anche prendendo l'estremo inferiore al variare dei δ -ricoprimenti $\{E_i\}_i$, cioè vale proprio $\mathcal{H}_{\delta L}^m(f(E)) \leq L^m \mathcal{H}_\delta^m(E)$.

Proviamo la (2.5). Sia $y_1 \in f(I_\rho(E))$; allora esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k$ tali che $y_1 = f(x_1)$, $x_2 \in E$ e $|x_1 - x_2| < \rho$. Allora si ha

$$|y_1 - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| < L\rho$$

e dunque $y_1 \in I_{L\rho}(f(E))$. □

Proposizione 2.5.2. *Sia $S \in \mathbb{R}^n$ numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile e sia $\tau > 1$. Allora esiste una successione di compatti S_i a due a due disgiunti tali che:*

(i) $\mathcal{H}^k(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i) = 0$

(ii) Per ogni i , vale

$$\mathcal{M}^k(S_i) \leq \tau \mathcal{H}^k(S_i). \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Articoleremo la dimostrazione in due passaggi.

STEP 1. Mostriamo inizialmente che è sufficiente dimostrare l'asserto con $S = f(E)$, dove $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ e $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ è funzione lipschitziana, iniettiva e con jacobiano positivo in E . Infatti, applicando il Lemma 2.3.1 a S , vale

$$\mathcal{H}^k\left(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i\right) = 0 \quad \text{con } \Gamma_i \text{ } k\text{-grafici lipschitz}$$

e si noti che se Γ_i è k -grafico di $g_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, si rappresenta come $\tilde{g}_i(\mathbb{R}^k)$ con $\tilde{g}_i(x) = (x, g_i(x))$; quest'ultima è iniettiva e $J_k D\tilde{g} > 0$ ovunque, poiché la sottomatrice $k \times k$ formata dalle prime k righe è l'identità. Si osservi poi che, se si accettano grafici di funzioni definite su *sottoinsiemi* di \mathbb{R}^k , si possono supporre i Γ_i disgiunti, a meno di porre $\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i \setminus (\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{i-1})$ ed eventualmente rimuovere i $\tilde{\Gamma}_i$ che risultassero vuoti. È possibile mostrare, adattando questo metodo, che S è ricoperto (a meno di un insieme di misura nulla) da grafici disgiunti di funzioni definite su *boreliani*; omettiamo però i dettagli.

Se la proprietà è vera per ciascun Γ_i , esistono cioè $\{\Gamma_{ij}\}_{j \in \mathbb{N}}$ che soddisfano la (2.6) e $\mathcal{H}^k(\Gamma_i \setminus \bigcup_j \Gamma_{ij}) = 0$, allora la famiglia $\{\Gamma_{ij}\}_{i,j}$ verifica

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k\left(S \setminus \bigcup_{i,j} \Gamma_{ij}\right) &= \mathcal{H}^k\left(\left(S \setminus \bigcup_i \Gamma_i\right) \cup \left(\bigcup_i (\Gamma_i \setminus \bigcup_j \Gamma_{ij})\right)\right) \leq \\ &\leq \mathcal{H}^k\left(S \setminus \bigcup_i \Gamma_i\right) + \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^k\left(\Gamma_i \setminus \bigcup_j \Gamma_{ij}\right) = 0 \\ \text{e } \mathcal{M}^k(\Gamma_{ij}) &\leq \tau \mathcal{H}^k(\Gamma_{ij}) \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

STEP 2. Sia dunque $S = f(E)$ come sopra; sia $t = \tau^{\frac{1}{2n}} > 1$. Consideriamo gli E_i, L_i forniti dal Teorema 2.2.4 e $S_i = f(E_i)$. Questi ultimi sono compatti perché immagini continue dei compatti E_i ; sono disgiunti perché abbiamo scelto f iniettiva; soddisfano, usando ancora l'iniettività e la proprietà della misura di Hausdorff 2.5.1 (2.4):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k\left(S \setminus \bigcup_i S_i\right) &= \mathcal{H}^k\left(f(E) \setminus \bigcup_i f(E_i)\right) = \mathcal{H}^k\left(f\left(E \setminus \bigcup_i E_i\right)\right) \leq \\ &\leq \text{Lip}(f)^k \mathcal{H}^k\left(E \setminus \bigcup_i E_i\right) = 0. \end{aligned}$$

Resta quindi da mostrare solo $\mathcal{M}^k(S_i) \leq \tau \mathcal{H}^k(S_i)$.

Utilizzando la proprietà 2.5.1 (2.5), e ricordando che $\text{Lip}(L_i \circ (f|_{E_i})^{-1}) \leq t$, otteniamo

$$\begin{aligned} (L_i \circ (f|_{E_i})^{-1})(I_\rho(S_i)) &\subseteq I_{t\rho}\left((L_i \circ (f|_{E_i})^{-1})(S_i)\right) \\ \implies I_\rho(S_i) &\subseteq (f|_{E_i}) \circ L_i^{-1}\left(I_{t\rho}\left((L_i \circ (f|_{E_i})^{-1})(S_i)\right)\right) \\ \implies \mathcal{L}^n(I_\rho(S_i)) &\leq \mathcal{L}^n\left(\left((f|_{E_i}) \circ L_i^{-1}\right)\left(I_{t\rho}\left((L_i \circ (f|_{E_i})^{-1})(S_i)\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Usando il fatto che, in \mathbb{R}^n , $\mathcal{L}^n = \mathcal{H}^n$ e ancora la proprietà 2.5.1 (2.4),

$$\mathcal{L}^n(I_\varrho(S_i)) \leq t^n \mathcal{L}^n\left(I_{t\varrho}\left((L_i \circ (f|_{E_i})^{-1})(f(E_i))\right)\right) = t^n \mathcal{L}^n(I_{t\varrho}(L_i(E_i)))$$

e dunque, dividendo per $\omega_{n-k}\varrho^{n-k}$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S_i))}{\omega_{n-k}\varrho^{n-k}} &\leq t^{n+n-k} \frac{\mathcal{L}^n(I_{t\varrho}(L_i(E_i)))}{\omega_{n-k}(t\varrho)^{n-k}} \\ \implies \mathcal{M}^{*k}(S_i) &\leq t^{2n-k} \mathcal{M}^{*k}(L_i(E_i)). \end{aligned}$$

Ma $L_i(E_i)$ è immagine di una mappa lineare di rango k , e dunque è contenuta in un k -piano. Per quanto visto nel Lemma 2.1.2, $\mathcal{M}^{*k}(L_i(E_i)) = \mathcal{H}^k(L_i(E_i))$; notando che il Teorema 2.2.4 assicura l'iniettività di L_i , e usando la formula d'area, si ha

$$\mathcal{M}^{*k}(S_i) \leq t^{2n-k} \mathcal{H}^k(L_i(E_i)) = t^{2n-k} \int_{E_i} J_k L_i dx.$$

Ora per la relazione (2.2) nel Teorema 2.2.4

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{*k}(S_i) &\leq t^{2n} \int_{E_i} t^{-k} J_k L_i dx \leq \tau \int_{E_i} J_k Df(x) dx = \\ &= \tau \mathcal{H}^k(f(E_i)) = \tau \mathcal{H}^k(S_i). \end{aligned}$$

□

Osservazione 4. Si noti che per gli S_i individuati dalla dimostrazione vale $\mathcal{H}^k(S_i) < \infty$: sono infatti immagini lipschitziane di compatti di \mathbb{R}^k ; qui $\mathcal{H}^k = \mathcal{L}^k$, e la misura di Lebesgue è finita sui compatti; per (2.4), $\mathcal{H}^k(S_i) \leq (\text{Lip}(f_i))^k \mathcal{H}^k(E_i) < \infty$.

Osservazione 5. Se l'insieme S è compatto, possiamo scegliere tali S_i interamente contenuti in S : nello STEP 1 è sufficiente definire $\tilde{\Gamma}' = \tilde{\Gamma} \cap S$. Nello STEP 2, si prendano $S'_i = S \cap S_i$, $E'_i = f_i^{-1}(S'_i)$: le f_i sono ancora biiezioni tra gli E_i e gli S_i ; gli E'_i sono sottoinsiemi chiusi di compatti, quindi compatti, e dunque anche gli S_i ; e ricoprono ancora S .

Presentiamo a parte un corollario diretto della Proposizione 2.5.2, che utilizzeremo in due delle dimostrazioni successive; diamo nell'occasione alcune definizioni necessarie.

Definizione 2.2 (Misure di Radon). Diciamo che una misura (positiva) ν su \mathbb{R}^n è **di Radon** se è di Borel regolare ed è finita sui compatti: $\nu(K) < \infty$ per ogni $K \in \mathbb{R}^n$ compatto.

Definizione 2.3 (Assoluta continuità di misure). Date μ e ν misure su uno spazio misurabile (X, \mathcal{A}) , diciamo che ν è **assolutamente continua** rispetto a μ se $\mu(A) = 0$ implica $\nu(A) = 0$. Scriveremo $\nu \ll \mu$.

Corollario 2.5.3. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e \mathcal{H}^k -rettificabile, e sia ν misura su \mathbb{R}^n assolutamente continua rispetto a \mathcal{H}^k . Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito N di compatti $S_i \subseteq S$ tali che*

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{*k}(S_i) \leq (1 + \varepsilon)\mathcal{H}^k(S_i) & \text{per ogni } i \\ \nu(S) \leq \sum_{i=1}^N \nu(S_i) + \varepsilon. \end{cases}$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, la Proposizione 2.5.2 con l'Osservazione 5 fornisce una famiglia numerabile di compatti disgiunti S_i tali che

$$\begin{cases} S_i \subseteq S & \text{per ogni } i \\ \mathcal{M}^{*k}(S_i) \leq (1 + \varepsilon)\mathcal{H}^k(S_i) & \text{per ogni } i \\ \mathcal{H}^k(S \setminus \bigcup_i S_i) = 0. \end{cases}$$

Allora per l'assoluta continuità di ν rispetto a \mathcal{H}^k e per l'additività della misura

$$\begin{aligned} \nu\left(S \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = 0 & \implies \nu(S) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \\ & \implies \nu(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(S_i) \end{aligned}$$

In particolare, esiste N tale che $\nu(S) \leq \sum_{i=1}^N \nu(S_i) + \varepsilon$. □

Ricordiamo il Teorema di Besicovitch sui ricoprimenti (si veda [1], Theorem 2.17):

Teorema 2.5.4 (Besicovitch). *Esiste un numero intero ξ_n , dipendente dalla dimensione dello spazio, con la proprietà seguente: se \mathcal{F} è una famiglia di palle chiuse in \mathbb{R}^n il cui insieme dei centri A è limitato, allora esistono ξ_n sottofamiglie $\mathcal{F}_h = \{C_{h,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, ciascuna numerabile e formata da palle disgiunte, tali che*

$$A \subseteq \bigcup_{h=1}^{\xi_n} \bigcup_{C \in \mathcal{F}_h} C.$$

In particolare, se $\mathcal{G} = \bigcup_{h=1}^{\xi_n} \bigcup_{C \in \mathcal{F}_h} C$, allora \mathcal{G} ricopre ancora A e ogni punto di A appartiene ad al più ξ_n palle di \mathcal{G} .

Teorema 2.5.5. *Sia $S \in \mathbb{R}^n$ numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile e compatto. Supponiamo esistano $\gamma > 0$ e ν misura di Radon su (gli \mathcal{H}^k -misurabili di) \mathbb{R}^n tali che:*

(i) $\nu \ll \mathcal{H}^k$;

(ii) $\nu(B_\varrho(x)) \geq \gamma\varrho^k$ per ogni $x \in S$, $\varrho \in (0, 1)$.

Allora $\mathcal{M}^k(S) = \mathcal{H}^k(S)$.

Dimostrazione. Essendo S numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile, per la Proposizione 2.4.1 dobbiamo verificare solo la disuguaglianza $\mathcal{M}^{*k}(S) \leq \mathcal{H}^k(S)$. Se $\mathcal{H}^k(S) = \infty$, allora la tesi è verificata; sia allora $\mathcal{H}^k(S) < \infty$.

Fissato $\varepsilon > 0$, utilizziamo il Corollario 2.5.3 per trovare N compatti $S_i \subseteq S$ tali che

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{*k}(S_i) \leq (1 + \varepsilon)\mathcal{H}^k(S_i) & \text{per ogni } i \\ \nu(S) \leq \sum_{i=1}^N \nu(S_i) + \varepsilon. \end{cases}$$

Consideriamo, per $\varrho, \lambda \in (0, 1)$ (λ costante che sceglieremo opportunamente alla fine), il sottoinsieme di S

$$S_{\varrho\lambda} = \left\{ x \in S \mid d\left(x, \bigcup_{i=1}^N S_i\right) \geq \varrho\lambda \right\}$$

che è limitato perché S è compatto e chiuso per continuità della distanza; la famiglia di palle chiuse

$$\mathcal{F} = \left\{ \bar{B}_{\varrho\lambda}(x) \mid x \in S_{\varrho\lambda} \right\}$$

soddisfa l'ipotesi del teorema di Besicovitch 2.5.4, dunque ne esistono ξ sottofamiglie $\{\bar{B}_{\varrho\lambda}(x_j)\}_{j \in J_h}$ numerabili e (internamente) disgiunte la cui unione ricopre ancora $S_{\varrho\lambda}$; si indicherà d'ora in poi $J = J_1 \cup \dots \cup J_\xi$. Per le rispettive palle aperte vale allora, sfruttando l'additività di ν e la disgiunzione,

$$\sum_{j \in J} \nu(B_{\varrho\lambda}(x_j)) = \sum_{h=1}^{\xi} \sum_{j \in J_h} \nu(B_{\varrho\lambda}(x_j)) = \sum_{h=1}^{\xi} \nu\left(\bigcup_{j \in J_h} B_{\varrho\lambda}(x_j)\right).$$

Si noti ora che tutte le palle $B_{\varrho\lambda}(x_j)$ sono contenute nell'insieme

$$I_{\varrho\lambda}(S) \setminus \bigcup_{i=1}^N S_i,$$

la cui misura ν , per compattezza di S , tende a $\nu(S \setminus \bigcup_{i=1}^N S_i) < \varepsilon$ per $\varrho \downarrow 0$; quindi per ϱ abbastanza piccolo

$$\sum_{j \in J} \nu(B_{\varrho\lambda}(x_j)) \leq \sum_{h=1}^{\xi} \nu\left(I_{\varrho\lambda}(S) \setminus \bigcup_{i=1}^N S_i\right) \leq \xi(\varepsilon + \varepsilon) = 2\xi\varepsilon. \quad (2.7)$$

D'altro canto per l'ipotesi sulla misura ν si ha $\nu(B_{\varrho\lambda}(x_j)) \geq \gamma(\varrho\lambda)^k$; dunque

$$2\xi\varepsilon \geq \sum_{j \in J} \nu(B_{\varrho\lambda}(x_j)) \geq |J|\gamma(\varrho\lambda)^k$$

che implica che l'insieme J è finito e $|J| \leq \frac{2\xi\varepsilon}{\gamma(\varrho\lambda)^k}$.

OSSERVAZIONE 1. Consideriamo ora l'insieme $I_{(1+\lambda)\varrho}(S_{\varrho\lambda})$. Per ogni suo punto x ne esiste uno in $S_{\varrho\lambda}$ da cui dista *strettamente* meno di $(1+\lambda)\varrho$; questo dista al più $\lambda\varrho$ da uno degli x_j , $j \in J$, poiché le palle chiuse ricoprono $S_{\lambda\varrho}$; allora per disuguaglianza triangolare $|x - x_j| < (1+2\lambda)\varrho$. Dunque

$$\begin{aligned} I_{(1+\lambda)\varrho}(S_{\varrho\lambda}) &\subseteq \bigcup_{j \in J} B_{(1+2\lambda)\varrho}(x_j) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{L}^n(I_{(1+\lambda)\varrho}(S_{\varrho\lambda})) \leq \frac{2\varepsilon\xi}{\gamma(\varrho\lambda)^k} \omega_n (1+2\lambda)^n \varrho^n. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 2. Sia poi $y \in I_\varrho(S)$. Per compattezza di S , esiste un $y_S \in S$ tale che $|y - y_S| < \varrho$; si presentano due casi:

(a) Se $d(y_S, S_{\varrho\lambda}) < \varrho\lambda$, allora essendo $S_{\varrho\lambda}$ compatto esiste $\bar{y} \in S_{\varrho\lambda}$ tale che $|y_S - \bar{y}| < \varrho\lambda$: per disuguaglianza triangolare,

$$|y - \bar{y}| \leq |y - y_S| + |y_S - \bar{y}| < \varrho(1+\lambda) \quad \Rightarrow \quad y \in I_{(1+\lambda)\varrho}(S_{\varrho\lambda}).$$

(b) Se invece $d(y_S, S_{\varrho\lambda}) \geq \varrho\lambda$, in particolare $y_S \notin S_{\varrho\lambda}$, che per definizione significa che $d(y_S, \bigcup_{i=1}^N S_i) < \varrho\lambda$; ancora la compattezza di tale unione implica che esistono un i e un $\hat{y} \in S_i$ tali che $|y_S - \hat{y}| < \varrho\lambda$. Come prima,

$$|y - \hat{y}| \leq |y - y_S| + |y_S - \hat{y}| < \varrho(1+\lambda) \quad \Rightarrow \quad y \in I_{(1+\lambda)\varrho}(S_i).$$

Vale dunque la seguente inclusione d'insiemi:

$$I_\varrho(S) \subseteq I_{(1+\lambda)\varrho}(S_{\varrho\lambda}) \cup \bigcup_{i=1}^N I_{(1+\lambda)\varrho}(S_i),$$

Ora la subadditività della misura implica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(I_\varrho(S)) &\leq \mathcal{L}^n(I_{(1+\lambda)\varrho}(S_{\varrho\lambda})) + \sum_{i=1}^N \mathcal{L}^n(I_{(1+\lambda)\varrho}(S_i)) \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon\xi}{\gamma(\varrho\lambda)^k} \omega_n (1+2\lambda)^n \varrho^n + \sum_{i=1}^N \mathcal{L}^n(I_{(1+\lambda)\varrho}(S_i)). \end{aligned}$$

Quindi dividendo per $\omega_{n-k}\varrho^{n-k}$ e ricordando che $\lambda < 1$

$$\frac{\mathcal{L}^n(I_\varrho(S))}{\omega_{n-k}\varrho^{n-k}} \leq \frac{3^{n+1}\xi\omega_n}{\gamma\omega_{n-k}} \frac{\varepsilon}{\lambda^k} + (1+\lambda)^{n-k} \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{L}^n(I_{(1+\lambda)\varrho}(S_i))}{\omega_{n-k} [(1+\lambda)\varrho]^{n-k}},$$

e per $\varrho \downarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{*k}(S) &\leq \frac{3^{n+1}\xi\omega_n}{\gamma\omega_{n-k}} \frac{\varepsilon}{\lambda^k} + (1+\lambda)^{n-k} \sum_{i=1}^N \mathcal{M}^{*k}(S_i) \leq \\ &\leq \frac{3^{n+1}\xi\omega_n}{\gamma\omega_{n-k}} \frac{\varepsilon}{\lambda^k} + (1+\lambda)^{n-k} (1+\varepsilon) \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^k(S_i). \end{aligned}$$

Alla luce di ciò, scegliamo ad esempio $\lambda = \varepsilon^{\frac{1}{n+1}}$; si noti che allora

$$(1 + \lambda)^{n-k}(1 + \varepsilon) = (1 + \varepsilon^{\frac{1}{n+1}})^{n-k}(1 + \varepsilon) = 1 + w(\varepsilon)$$

con $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} w(\varepsilon) = 0$. Vale pertanto, usando sugli $\mathcal{H}^k(S_i)$ l'additività disgiunta e la monotonia,

$$\mathcal{M}^{*k}(S) \leq \frac{3^{n+1}\xi\omega_n}{\gamma\omega_{n-k}}\varepsilon^{1-\frac{k}{n+1}} + (1 + w(\varepsilon))\mathcal{H}^k(S),$$

e questo per ogni $\varepsilon > 0$: poiché $1 - \frac{k}{n+1} > 0$, facendo tendere $\varepsilon \downarrow 0$ otteniamo proprio $\mathcal{M}^{*k}(S) \leq \mathcal{H}^k(S)$. \square

2.6 Funzioni Lipschitz e contenuto di Minkowski

Nell'ultima parte di questa tesi applicheremo i risultati ottenuti nella Sezione 2.5 allo studio del contenuto di Minkowski di immagini lipschitziane di compatti. Partiamo con un lemma in cui assumiamo che la funzione f sia bilipschitziana e iniettiva.

Lemma 2.6.1. *Sia $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione lipschitziana e iniettiva tale che $f^{-1} : f(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^k$ sia anch'essa lipschitziana, e sia $K \subseteq \mathbb{R}^k$ compatto. Allora $\mathcal{M}^k(f(K)) = \mathcal{H}^k(f(K))$.*

Dimostrazione. D'ora in poi sarà $L = \text{Lip}(f)$ e $M = \text{Lip}(f^{-1})$. Si noti che, dati x e y in \mathbb{R}^k valgono:

$$\begin{cases} |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \\ |x - y| \leq M|f(x) - f(y)| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - y| \geq \frac{1}{L}|f(x) - f(y)| \\ |f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{M}|x - y|. \end{cases}$$

Certamente $f(K)$ è numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile (è sottoinsieme di $f(\mathbb{R}^k)$) e compatto (è immagine continua di un compatto).

Verifichiamo che la misura restrizione $\nu = \mathcal{H}^k \llcorner f(\mathbb{R}^k)$ su \mathbb{R}^n soddisfa le ipotesi del Teorema 2.5.5 per qualche $\gamma > 0$. Ricordiamo che, fissato S misurabile, la misura restrizione è definita da

$$(\mathcal{H}^k \llcorner S)(B) = \mathcal{H}^k(S \cap B).$$

È assolutamente continua rispetto ad \mathcal{H}^k : infatti se $\mathcal{H}^k(B) = 0$ vale

$$B \supseteq B \cap f(\mathbb{R}^k) \Rightarrow \mathcal{H}^k(B) \geq \mathcal{H}^k(B \cap f(K)) \Rightarrow \nu(B) = 0.$$

Siano ora $y_0 = f(x_0) \in f(K)$ e $\varrho \in (0, 1)$ fissati. Valgono ora i seguenti fatti:

(i) Per la formula dell'area (2.1) vale

$$\nu(B_\varrho(y_0)) = \mathcal{H}^k(B_\varrho(y_0) \cap f(\mathbb{R}^k)) = \int_{f^{-1}(B_\varrho(y_0))} J_k Df(x) dx.$$

(ii) Per ogni $x \in \mathbb{R}^k$, vale $J_k Df(x) \geq \frac{1}{M^k}$. Infatti si ha che

$$J_k Df(x) = \sqrt{\det(Df(x)^\star \circ Df(x))}.$$

L'operatore $Df(x)^\star \circ Df(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ è autoaggiunto perché

$$\begin{aligned} (\mathcal{J} Df(x)^T \cdot \mathcal{J} Df(x))^T &= \mathcal{J} Df(x)^T \cdot \mathcal{J} Df(x)^{TT} = \\ &= \mathcal{J} Df(x)^T \cdot \mathcal{J} Df(x), \end{aligned}$$

dunque ammette una base ortonormale $\{u_1, \dots, u_k\}$ rispetto alla quale ha matrice diagonale \mathcal{D} . Il determinante è il prodotto dei termini in diagonale di \mathcal{D} , i quali sono determinati al variare di $i = 1, \dots, k$ da

$$\begin{aligned} d_{ii} &= u_i^T \mathcal{J} Df(x)^T \mathcal{J} Df(x) u_i = (\partial_{u_i} f(x))^T \partial_{u_i} f(x) = \\ &= |\partial_{u_i} f(x)|^2. \end{aligned}$$

Ora però si ha:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x + hu_i) - f(x)}{h} \right| &\geq \frac{|hu_i|}{|Mh|} = \frac{1}{M} \\ \Rightarrow |\partial_{u_i} f(x)| &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}} \left| \frac{f(x + hu_i) - f(x)}{h} \right| \geq \frac{1}{M}, \end{aligned}$$

e dunque, come si voleva:

$$J_k Df(x) = \left(\prod_{i=1}^k |\partial_{u_i} f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{M^k}.$$

(iii) Vale l'inclusione $f^{-1}(B_\varrho(y_0)) \supseteq B_{\frac{\varrho}{L}}(x_0)$. Infatti, se $|x - x_0| < \frac{\varrho}{L}$, allora

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L \cdot \frac{\varrho}{L} = \varrho.$$

Da ciò segue che

$$\nu(B_\varrho(y_0)) \geq \int_{B_{\varrho/L}} \frac{1}{M^k} = \frac{\omega_k}{L^k M^k} \varrho^k$$

che è ciò di cui necessitavamo. \square

Lemma 2.6.2. *Sia $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione lipschitziana, $K \subseteq \mathbb{R}^k$ un insieme compatto tale che $J_k Df(x) = 0$ per \mathcal{L}^k -quasi ogni $x \in K$. Allora $\mathcal{M}^k(f(K)) = 0$.*

Dimostrazione. D'ora in poi, sia $L = \text{Lip}(f)$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo la funzione $f_\varepsilon : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ definita da $f_\varepsilon(x) = (f(x), \varepsilon x)$. Dimostreremo dapprima che $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{M}^k(f_\varepsilon(K)) = 0$, ed infine che esiste C costante tale che $\mathcal{M}^k(f(K)) \leq C \mathcal{M}(f_\varepsilon(K))$ per ogni ε .

STEP 1. Utilizzeremo il Lemma 2.6.1 sulla funzione f_ε : verificiamo che soddisfa le ipotesi:

(a) f_ε è lipschitziana: se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k$ e $x_1 \neq x_2$:

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x_1) - f_\varepsilon(x_2)|^2 &= |(f(x_1) - f(x_2), \varepsilon(x_1 - x_2))|^2 = \\ &= |f(x_1) - f(x_2)|^2 + \varepsilon^2 |x_1 - x_2|^2 \leq (L^2 + \varepsilon^2) |x_1 - x_2|^2 \\ \Rightarrow |f_\varepsilon(x_1) - f_\varepsilon(x_2)| &\leq (L^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

(b) È banalmente iniettiva: se $x_1 \neq x_2$, allora $\varepsilon x_1 \neq \varepsilon x_2$ e dunque $f_\varepsilon(x_1) \neq f_\varepsilon(x_2)$.

(c) $f_\varepsilon^{-1} : f_\varepsilon(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^k$ è lipschitziana: siano $\xi_1 = f_\varepsilon(x_1) \neq \xi_2 = f_\varepsilon(x_2) \in f_\varepsilon(K)$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 |f_\varepsilon^{-1}(\xi_1) - f_\varepsilon^{-1}(\xi_2)|^2 &= \varepsilon^2 |x_1 - x_2|^2 \leq \\ &\leq |f(x_1) - f(x_2)|^2 + \varepsilon^2 |x_1 - x_2|^2 = |\xi_1 - \xi_2|^2 \\ \Rightarrow |f_\varepsilon^{-1}(\xi_1) - f_\varepsilon^{-1}(\xi_2)| &\leq \frac{1}{\varepsilon} |\xi_1 - \xi_2|. \end{aligned}$$

STEP 2. Dunque per il Lemma 2.6.1 e per la formula d'area (2.1)

$$\mathcal{M}^k(f_\varepsilon(K)) = \mathcal{H}^k(f_\varepsilon(K)) = \int_K J_k Df_\varepsilon(x) dx.$$

La matrice jacobiana $J_k Df_\varepsilon(x)$ è della forma

$$J_k Df_\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} J_k Df(x) \\ \varepsilon \mathbf{1}_k \end{pmatrix}$$

dove

$$\varepsilon \mathbf{1}_k = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

La formula di Cauchy-Binet (CB) indica che $(J_k Df_\varepsilon(x))^2$ si ottiene sommando i quadrati dei determinanti di tutti i minori $k \times k$ di $J_k Df_\varepsilon(x)$. Per

\mathcal{L}^k -quasi ogni x , la somma sui minori che coinvolgono solo le prime n righe dà zero, poiché $J_k Df(x) = 0$ \mathcal{L}^k -q.o. I minori rimanenti coinvolgono almeno una delle ultime k righe. Allora

$$(J_k Df_\varepsilon(x))^2 = a_1(x)\varepsilon^2 + a_2(x)\varepsilon^4 + \dots$$

Dunque vale

$$\mathcal{M}^k(f_\varepsilon(K)) = \varepsilon \int_K (a_1(x) + o(\varepsilon))^{\frac{1}{2}} dx,$$

da cui $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{M}^k(f_\varepsilon(K)) = 0$.

STEP 3. Consideriamo ora $I_{2\rho}(f_\varepsilon(K))$, l'intorno di raggio 2ρ attorno a $f_\varepsilon(K)$. Fissato $x \in K$, ogni punto $(y, z) \in \mathbb{R}^{n+k}$ tale che

$$\begin{cases} |y - f(x)| < \rho \\ |z - \varepsilon x| < \rho \end{cases}$$

verifica $|f_\varepsilon(x) - (y, z)|^2 < 2\rho^2$ e dunque $(y, z) \in I_{2\rho}(f_\varepsilon(K))$. Applicando il teorema di riduzione all'insieme

$$A = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid |y - f(x)| < \rho, |z - \varepsilon x| < \rho \text{ per qualche } x \in \mathbb{R}^k \right\}$$

ed indicando con A^y la sua y -sezione per $y \in \mathbb{R}^n$, otteniamo:

$$\mathcal{L}^{n+k}(I_{2\rho}(f_\varepsilon(K))) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(A^y) dy.$$

Ma A^y è vuoto se $y \notin I_\rho(f(K))$, e contiene (almeno) una k -palla di raggio ρ altrimenti (quella centrata in εx_0 se $|y - f(x_0)| < \rho$). Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n+k}(I_{2\rho}(f_\varepsilon(K))) &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{I_\rho(f(K))} \omega_k \rho^k dy = \\ &\geq \mathcal{L}^n(I_\rho(f(K))) \omega_k \rho^k. \end{aligned}$$

Allora, comunque fissati $\varepsilon > 0$ e $\rho > 0$,

$$\frac{\mathcal{L}^n(I_\rho(f(K)))}{\omega_{n-k} \rho^{n-k}} \leq \frac{2^n \omega_n}{\omega_k \omega_{n-k}} \frac{\mathcal{L}^{n+k}(I_{2\rho}(f_\varepsilon(K)))}{\omega_n (2\rho)^n},$$

che per $\rho \downarrow 0$ fornisce $\mathcal{M}^k(f(K)) \leq \frac{2^n \omega_n}{\omega_k \omega_{n-k}} \mathcal{M}^k(f_\varepsilon(K))$ per ogni ε , ed essendo il secondo membro infinitesimo per $\varepsilon \downarrow 0$, otteniamo il risultato. \square

Tramite il Lemma 2.6.2, possiamo indebolire le ipotesi del Lemma 2.6.1:

Teorema 2.6.3. *Sia $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione Lipschitz e sia $K \in \mathbb{R}^k$ compatto. Allora $\mathcal{M}^k(f(K)) = \mathcal{H}^k(f(K))$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Come nel Teorema 2.5.5, dimostreremo solo la disuguaglianza $\mathcal{M}^{*k}(f(K)) \leq \mathcal{H}^k(f(K))$, essendo l'altra assicurata da 2.4.1.

Introduciamo le notazioni che useremo nel seguito:

- Chiameremo F il sottoinsieme di K in cui f è differenziabile e $J_k Df > 0$.
- Sia $K_0 \subseteq K \cap F^c$ un insieme *compatto* tale che

$$\mathcal{L}^k(K \setminus (F \cup K_0)) < \varepsilon.$$

- Chiameremo $S = f(K)$, $S_0 = f(K_0)$.
- La costante di Lipschitz di f sarà detta L .

STEP 1. Definiamo su \mathbb{R}^n la misura $\nu = f_{\#}(\mathcal{L}^k \llcorner F)$, cioè se $B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\nu(B) = \mathcal{L}^k(f^{-1}(B) \cap F).$$

Si noti che è ben definita, in virtù del fatto che se $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono disgiunti allora $f^{-1}(\bigcup_n B_n) = \bigcup_n f^{-1}(B_n)$. Tale misura è assolutamente continua rispetto a \mathcal{H}^k : se vale $\mathcal{H}^k(B) = 0$ (e senza perdere di generalità $B \subseteq S$), allora la formula dell'area applicata a $f^{-1}(B) \cap F$ porge

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(f^{-1}(B) \cap F \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{H}^k(y) = \int_{f^{-1}(B) \cap F} J_k Df(x) d\mathcal{L}^k(x).$$

La funzione molteplicità nell'integrale a destra vale zero se $y \notin B$, cioè vale zero al di fuori di un insieme di misura nulla; allora entrambi gli integrali sono nulli, ma in F lo jacobiano è positivo: l'unica situazione possibile è che $\mathcal{L}^k(f^{-1}(B) \cap F) = 0$.

Siamo dunque nella situazione descritta dal Corollario 2.5.3: osservando che $\nu(S_0) = 0$ e utilizzando il Corollario su un insieme compatto H tale che $\nu(S \setminus (H \cup S_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$, esistono N compatti disgiunti S_1, \dots, S_N contenuti in $S \setminus S_0$ tali che

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{*k}(S_i) \leq (1 + \varepsilon) \mathcal{H}^k(S_i) & \text{per ogni } i \\ \nu(S) \leq \sum_{i=1}^N \nu(S_i) + \varepsilon. \end{cases}$$

Siano ora

$$\begin{aligned} E &= S \setminus \bigcup_{i=0}^N S_i = S \setminus (S_0 \cup \bigcup_{i=1}^N S_i) \\ A &= K \cap f^{-1}(E). \end{aligned}$$

Si può notare subito che $\mathcal{L}^k(A) < 2\varepsilon$, infatti:

- $A \cap F \subseteq f^{-1}(E) \cap F$, e $\varepsilon \geq \nu(E) = \mathcal{L}^k(f^{-1}(E) \cap F)$;
- $A \setminus F \subseteq K \setminus (F \cup K_0)$, perché dalla definizione di E si ha $E \cap S_0 = \emptyset$.

STEP 2. Fissiamo $\hat{\rho} > 0$ tale che $\mathcal{L}^k(I_{\hat{\rho}/L}(K) \setminus K) < \varepsilon$: tale $\hat{\rho}$ esiste per la continuità dall'alto della misura e perché $K = \bigcap_{\rho} I_{\rho}(K)$ essendo K chiuso. Procediamo dunque in maniera analoga al Teorema 2.5.5: per ogni $\rho \in (0, \hat{\rho})$ e $\lambda \in (0, 1)$ sia

$$S_{\rho\lambda} = \left\{ y \in S \mid d\left(y, \bigcup_{i=0}^N S_i\right) \geq \rho\lambda \right\};$$

considerata la famiglia di palle *chiuse*

$$\mathcal{F} = \left\{ \bar{B}_{\rho\lambda}(y) \mid y \in S_{\rho\lambda} \right\},$$

per il teorema di Besicovitch 2.5.4 ne esistono ξ sottofamiglie $\{\bar{B}_{\rho\lambda}(y_j)\}_{j \in J_h}$ numerabili e ciascuna formata da palle disgiunte la cui unione ricopre ancora $S_{\rho\lambda}$; indicheremo con J l'unione $J_1 \cup \dots \cup J_{\xi}$ anche in questa circostanza, e tramite stime opportune vedremo che $|J| < \infty$.

Osserviamo che fissato $j \in J$ l'insieme

$$I_{\frac{\rho}{L}}(K) \cap f^{-1}(B_{\lambda\rho}(y_j)) \subseteq \mathbb{R}^k$$

contiene certamente una palla di raggio $\frac{\lambda\rho}{L}$: infatti esiste $x_j \in K$ che viene mandato in y_j da f , e per la lipschitzianità si ha

$$x \in B_{\lambda\rho/L}(x_j) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_j)| < L \frac{\lambda\rho}{L}.$$

Dunque, sfruttando la disgiunzione interna delle famiglie J_h , vale la disuguaglianza:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \omega_k \left(\frac{\lambda\rho}{L} \right)^k &\leq \sum_{j \in J} \mathcal{L}^k(I_{\frac{\rho}{L}}(K) \cap f^{-1}(B_{\lambda\rho}(y_j))) = \\ &= \sum_{h=1}^{\xi} \sum_{j \in J_h} \mathcal{L}^k(I_{\frac{\rho}{L}}(K) \cap f^{-1}(B_{\lambda\rho}(y_j))) = \\ &= \sum_{h=1}^{\xi} \mathcal{L}^k\left(I_{\frac{\rho}{L}}(K) \cap \bigcup_{j \in J_h} f^{-1}(B_{\lambda\rho}(y_j))\right). \end{aligned}$$

Ora però

$$\bigcup_{j \in J_h} f^{-1}(B_{\lambda\rho}(y_j)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_{\lambda\rho}(y_j)\right)$$

e inoltre l'intersezione di ciascuna $B_{\lambda\rho}(y_j)$ con S è contenuta in E : separando l'area interna a K da quella contenuta in $I(K) \setminus K$,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \omega_k \left(\frac{\lambda\rho}{L} \right)^k &\leq \xi \mathcal{L}^k\left(I_{\frac{\rho}{L}}(K) \cap f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_{\lambda\rho}(y_j)\right)\right) \leq \\ &\leq \xi \left[\mathcal{L}^k(K \cap f^{-1}(E)) + \mathcal{L}^k(I_{\hat{\rho}/L}(K) \setminus K) \right] \leq 3\xi\varepsilon. \end{aligned}$$

da cui

$$|J| \leq \frac{3\xi\varepsilon L^k}{\omega_k \lambda^k \varrho^k}.$$

STEP 3. Confrontando con il contesto attuale le ipotesi effettivamente utilizzate nelle OSSERVAZIONE 1 e OSSERVAZIONE 2 del Teorema 2.5.5, si osserva che valgono anche in questo caso le inclusioni di insiemi

$$\begin{cases} I_{(1+\lambda)\varrho}(S_{\varrho\lambda}) \subseteq \bigcup_{j \in J} B_{(1+2\lambda)\varrho}(y_j) \\ I_{\varrho}(S) \subseteq I_{(1+\lambda)\varrho}(S_{\varrho\lambda}) \cup \bigcup_{i=0}^N I_{(1+\lambda)\varrho}(S_i). \end{cases}$$

Dunque valgono le disuguaglianze seguenti:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^n(I_{(1+\lambda)\varrho}(S_{\varrho\lambda})) \leq \frac{3\xi\varepsilon L^k}{\omega_k \lambda^k \varrho^k} \omega_n (1+2\lambda)^n \varrho^n \\ \mathcal{L}^n(I_{\varrho}(S)) \leq \mathcal{L}^n(I_{(1+\lambda)\varrho}(S_{\varrho\lambda})) + \sum_{i=0}^N \mathcal{L}^n(I_{(1+\lambda)\varrho}(S_i)) \end{cases}$$

che combinate forniscono

$$\mathcal{L}^n(I_{\varrho}(S)) \leq \frac{3^{n+1}\xi\varepsilon L^k \omega_n \varrho^{n-k}}{\omega_k \lambda^k} + \mathcal{L}^n(I_{(1+\lambda)\varrho}(S_0)) + \sum_{i=1}^N \mathcal{L}^n(I_{(1+\lambda)\varrho}(S_i)).$$

Dividendo per $\omega_{n-k}\varrho^{n-k}$ e valutandone il $\limsup_{\varrho \downarrow 0}$, otteniamo:

$$\mathcal{M}^{*k}(S) \leq \frac{3^{n+1}\xi L^k \omega_n}{\omega_k \omega_{n-k}} \frac{\varepsilon}{\lambda^k} + (1+\lambda)^{n-k} \mathcal{M}^{*k}(S_0) + (1+\lambda)^{n-k} \sum_{i=1}^N \mathcal{M}^{*k}(S_i).$$

Ora però $\mathcal{M}^{*k}(S_0) = 0$ per il Lemma 2.6.2, e la situazione è quindi analoga a quella del Teorema 2.5.5: scegliendo $\lambda = \varepsilon^{\frac{1}{n+1}}$, per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\mathcal{M}^{*k}(S) \leq \frac{3^{n+1}\xi L^k \omega_n}{\omega_k \omega_{n-k}} \varepsilon^{1-\frac{k}{n+1}} + (1+w(\varepsilon)) \mathcal{H}^k(S)$$

con $w(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$: allora $\mathcal{M}^{*k}(f(K)) \leq \mathcal{H}^k(f(K))$.

□

Bibliografia

- [1] AMBROSIO L., FUSCO N., PALLARA D.: *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Clarendon Press, 2000
- [2] MATTILA P.: *Geometry of Sets and Measures*, Cambridge University Press, 1995
- [3] FALCONER K.: *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, 1990
- [4] FEDERER H.: *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, 1969
- [5] EVANS L.C., GARIEPY R.F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992
- [6] KOSTRIKIN A.I., MANIN Y.: *Linear Algebra and Geometry*, Moskow University Press, 1981
- [7] DE MARCO G.: *Analisi Due*, Decibel editrice, 1999