UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Dipartimento di Matematica "Tullio-Levi Civita"
Laurea triennale in Matematica

Uniforme Rettificabilità e Operatore Integrale di Cauchy

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Candidato:
Vizzari Giacomo

Anno Accademico 2020/2021

Introduzione

Le pagine seguenti si basano sulla prima parte dell'articolo "Rectifiable Sets, Cauchy Integral and Analytic Capacity" del Professor Pertti Mattila, risalente agli anni in cui era docente del Dipartimento di Matematica dell'Università di Jyväskylä, Finlandia. L'elaborato tratta argomenti di teoria geometrica della misura e analisi armonica.

Non è stato facile rielaborare gli appunti in questione, poiché lo scritto del Professor Mattila, come sottolinea egli stesso, è più volto ad un fine divulgativo e fornisce quindi solo poche dimostrazioni dei teoremi enunciati. La mancanza di dimostrazioni da poter studiare ha portato ad un altro problema, ovvero trovare un filo conduttore per questa tesi.

Inizialmente ritenevo infatti che dai primi tre capitoli dell'articolo del Professor Mattila sarebbe stato possibile ottenere la dimostrazione del Teorema 4.3, che permette di studiare il comportamento degli integrali singolari sugli insiemi del piano. Per visualizzare l'idea che vi è alla base di ciò possiamo considerare l'operatore più comune che utilizza i valori principali, ovvero la trasformata di Hilbert, definita per funzioni Lipschitziane a supporto compatto nel modo seguente:

$$Hf(x) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int\limits_{|x-\xi|>\varepsilon} \frac{f(\xi)}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{\pi\xi} * f(x).$$

La buona definizione della trasformata di Hilbert su tali funzioni deriva dalla proprietà di cancellazione del suo nucleo singolare $\frac{1}{z}$ ($\frac{1}{z} = -\frac{1}{-z}$) negli integrali a valori principali. D'altra parte è possibile estendere la trasformata di Hilbert a L^2 usando la trasformata di Fourier:

$$||Hf||_2 = c||\widehat{Hf}||_2 = c||\widehat{f}||_2 \left|\left|\frac{1}{\pi\xi}\right|\right|_2 = c||f||_2.$$

Abbiamo infatti ottenuto che l'operatore H è limitato su $\mathcal{C}_c^\infty$, che è denso in L^2, e vi è quindi un'unica estensione lineare di H su L^2 per il Teorema del Prolungamento Lineare Continuo.

I passaggi precedenti si basano sulla proprietà di cancellazione dell'integrale singolare di $g(\xi) = \frac{1}{x-\xi}$ su $\mathbb{R}$. È anche possibile estendere tale definizione integrando su una curva $\mathcal{C}^1$, in quanto in un intorno sufficientemente piccolo di un suo punto x la curva in questione è approssimabile alla retta tangente in x e la proprietà di cancellazione è nuovamente soddisfatta. Viene dunque naturale chiedersi se sia possibile andare oltre e definire gli integrali singolari su insiemi più generici del piano, che è proprio l'obiettivo del Teorema 4.3 sopra accennato.

Tuttavia, in seguito ad ulteriori ricerche, mi è sovvenuto che non solo la maggior parte degli argomenti trattati dall'articolo non era necessaria allo studio degli integrali singolari, ma una dimostrazione completa del Teorema 4.3 trascendeva di gran lunga (per complessità degli argomenti trattati e tempo necessario per la sua stesura) il lavoro di una tesi triennale. Era effettivamente venuto a mancare un protagonista per questo elaborato, per cui è stato necessario trovarne uno nuovo.

Solo in seguito, dagli articoli citati dal Professor Mattila, mi risultò evidente un tema ricorrente nelle dimostrazioni ed enunciati, un perfetto filo conduttore che era sempre stato davanti ai miei occhi: la curvatura di Menger, che introdurremo nel capitolo 2. È grazie alla curvatura di Menger che potremo trovare definizioni alternative per l'm-rettificabilità nel capitolo 3, grazie all'introduzione delle misure tangenti, ed è sempre grazie alla curvatura di Menger che, nel capitolo 4, vedremo come le varie proprietà di regolarità degli insiemi del piano influiscano sulla limitatezza in L^2 dell'integrale singolare. Poter riscontrare come ciascuno dei risultati precedenti sia intrinsecamente correlato con la geometria di insiemi del piano, e in particolare con la loro curvatura, sarà proprio l'obiettivo finale che ci proporremo nelle pagine a seguire.

Alla fine ci chiederemo se sia possibile, partendo da un buon comportamento dell'operatore integrale di Cauchy, dedurre delle proprietà geometriche sulla regolarità dell'insieme di integrazione, arrivando a dare una dimostrazione se non altro parziale del Teorema 4.3.

1. m-Rettificabilità

In questa sezione introdurremo alcune nozioni geometriche necessarie per i capitoli successivi. Lo scopo di questo capitolo è arrivare a definire una nuova classe di insiemi detti m-rettificabili, che studieremo più ampiamente in seguito. Per far ciò, in primo luogo dovremo definire misura e dimensione di Hausdorff.

Definizione 1.1. (Misura di Hausdorff s-dimensionale)

Definiamo, per $A \subset \mathbb{R}^n$ la misura di Hausdorff s-dimensionale di A (per $0 \leq s < \infty$) nel modo seguente:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, d(E_i) < \delta \right\}.$$

Dalla definizione è possibile osservare come per $s = n$ la misura di Hausdorff s-dimensionale è uguale a un multiplo della misura di Lebesgue n-dimensionale e, in particolare, per $n = 1$ le due misure coincidono. Per $s = m \in \mathbb{N}$ se A è una superficie m-dimensionale di classe $\mathcal{C}^1$, allora la sua misura di Hausdorff m-dimensionale è un multiplo della sua area m-dimensionale, in particolare per $m = 1$, $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ fornisce la lunghezza della curva Γ.

Per s generici, la misura di Hausdorff ci permette di studiare le proprietà di particolari classi di insiemi autosimilari. A tal proposito forniamo il seguente esempio.

Esempio 1.2. (Insiemi di d-Cantor in $\mathbb{R}^2$)

Sia $0 < d < \frac{1}{2}$, Q un quadrato chiuso di lato 1, $Q_{1,1}, \ldots, Q_{1,4}$ quadrati chiusi di lato d dentro Q, ciascuno di essi avente un angolo retto in comune con uno degli angoli di Q. Reiterando per ogni n poniamo $Q_{n,1}, \ldots, Q_{n,4^n}$ quadrati chiusi di lato d^n dentro i quadrati $Q_{n-1,1}, \ldots, Q_{n-1,4^{n-1}}$, ciascuno di essi avente un angolo retto in comune con uno degli angoli di $Q_{n-1,1}, \ldots, Q_{n-1,4^{n-1}}$. Poniamo quindi

$$C_d = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{4^k} Q_{k,j}.$$

È possibile osservare che per $s_d = \frac{\log 4}{\log(1/d)}$, si ha:

$$0 < \mathcal{H}^{s_d}(C_d) = 4^n(\sqrt{2}d^n)^{s_d} = \sqrt{2}^{s_d} < \infty.$$

In particolare per $d = 1/4$ si ha $s_d = 1$ e $\mathcal{H}^{1/4}(C_{1/4}) = \sqrt{2}$. Come osserveremo tra poco s_d è la dimensione di Hausdorff dell'insieme C_d e che se esiste un tale valore per cui C_d ha misura finita e non nulla, tale valore è unico.

Lemma 1.3. *Sia* $0 \leq s < t$.

(1) Se $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ *allora* $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

(2) Se $\mathcal{H}^t(A) > 0$ *allora* $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Dimostrazione: Osserviamo che le due affermazioni sono equivalenti. Dimostriamo dunque (1).

Siano $\varepsilon, \delta > 0$ fissati. Per ogni $r > 0$ definiamo la seguente:

$$\mathcal{H}^r_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^r : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, d(E_i) < \delta \right\},$$

quindi esiste una famiglia di insiemi E_i tale che $\mathcal{H}^s_\delta(A) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^s$ e $d(E_i) < \delta$ per ogni i. D'altra parte:

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^t \leq \sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^s d(E_i)^{t-s} \leq \delta^{t-s}(\mathcal{H}^s_\delta(A) + \varepsilon).$$

Facendo tendere δ a zero in questa disuguaglianza e osservando che $\lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^r_\delta(A) = \mathcal{H}^r(A)$ e $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, si ha la tesi.

Con il Lemma 1.3 risulta quindi ben definita la seguente:

Definizione 1.4. (Dimensione di Hausdorff)

La dimensione di Hausdorff di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è

$$\begin{aligned} \dim A &= \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\} \\ &= \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\} \\ &= \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) < \infty\} \\ &= \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\}. \end{aligned}$$

Nell'Esempio 1.2 la dimensione di Hausdorff di ciascun C_d è proprio s_d, e in particolare vi è un unico insieme C_d 1-dimensionale, e ciò si verifica per $d = 1/4$.

Introduciamo ora alcuni risultati che utilizzeremo nel capitolo 4, sulle misure tangenti. In primo luogo affinché una misura tangente sia definita, la misura di partenza deve essere una misura di Radon su $\mathbb{R}^n$, ovvero una misura Borel-regolare finita sui compatti.

Teorema 1.5. *$\mathcal{H}^s$ è una misura Borel-regolare. Se $E \subset \mathbb{R}^n$ è $\mathcal{H}^s$-misurabile con $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, allora la misura ristretta $\mathcal{H}^1|_E$,*

$$\mathcal{H}^1|_E(A) = \mathcal{H}^1(E \cap A) \text{ per ogni } A \subset \mathbb{R}^n$$

è una misura di Radon.

La dimostrazione di questo teorema può essere trovata in [M] o [F]. Grazie ad esso potremo applicare la teoria delle misure tangenti a un'adeguata restrizione della misura di Hausdorff.

Utilizzeremo in seguito anche i seguenti risultati sulle densità.

Definizione 1.6. (s-densità)

Sia $0 \leq s \leq r$. Definiamo come s-densità superiore e inferiore di $A \subset \mathbb{R}^n$ in $x \in \mathbb{R}^n$ le seguenti espressioni:

$$\theta^{*s}(A,x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(x,r))}{(2r)^s},$$
$$\theta^s_*(A,x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(x,r))}{(2r)^s}.$$

Se coincidono (ovvero esiste il limite), chiamiamo tale limite la s-densità di A:

$$\theta^s(A,x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(x,r))}{(2r)^s}$$

Teorema 1.7. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Allora per quasi ogni $x \in A$ vale*

$$2^{-s} \leq \theta^{*s}(A,x) \leq 1.$$

La dimostrazione di questo teorema può essere trovata in [M] (Teorema 6.2) o [F] (sezione 2.2).

Possiamo infine utilizzare la misura di Hausdorff per definire un insieme m-rettificabile. Tale nozione non va confusa con la rettificabilità delle curve, neanche nel caso $m = 1$ (tuttavia una curva rettificabile è un esempio di un insieme 1-rettificabile).

Definizione 1.8. (Insieme m-rettificabile)

Sia $0 < m < n$ un intero ed $E \subset \mathbb{R}^n$. E è m-rettificabile se esiste una famiglia numerabile di superfici m-dimensionali $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che:

$$\mathcal{H}^m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = 0.$$

Nei prossimi capitoli ci occuperemo di studiare più a fondo gli insiemi 1-rettificabili, fornendone definizioni equivalenti mediante nuovi strumenti come la curvatura di Menger e le misure tangenti, per poi studiare le relazioni tra le proprietà geometriche di questi insiemi e gli integrali singolari.

2. Curvatura di Menger

Introduciamo in questa sezione il concetto di Curvatura di Menger che consente di stabilire il grado di collinearità di tre punti in $\mathbb{R}^2$. Nei capitoli seguenti mostreremo come essa sia utile per dimostrare importanti risultati sull'1-rettificabilità di sottoinsiemi del piano e sugli integrali singolari di Cauchy.

Definizione 2.1. Siano $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ punti distinti. Definiamo la Curvatura di Menger relativa alla terna (x, y, z) nel modo seguente:

$$c(x, y, z) := 1/R(x, y, z),$$

dove $R(x, y, z)$ è il raggio dell'unica circonferenza passante per x, y e z (che stabiliamo essere infinito se i tre punti sono allineati).

La curvatura di Menger è invariante per traslazioni, inoltre $c(x, y, z) = 0$ se e solo se x, y, z sono allineati. Osserviamo inoltre che, definita $A(x, y, z)$ come l'area del triangolo con vertici x, y e z, vale la seguente relazione:

Proposizione 2.2. *Siano x, y, z tre punti distinti di $\mathbb{R}^2$, allora:*

$$c(x, y, z) = \frac{4A(x, y, z)}{|x - y||x - z||y - z|}$$

Dimostrazione: Chiamando $\widehat{x}$ l'angolo in x del triangolo in questione, si ha

$$A(x, y, z) = \frac{1}{2}|x - y||x - z| \sin(\widehat{x}), \tag{2.2.1}$$

mentre per il Teorema del seno vale:

$$\frac{|y - z|}{\sin(\widehat{x})} = 2R(x, y, z), \text{ da cui: } \sin(\widehat{x}) = \frac{1}{2}|y - z|c(x, y, z).$$

Sostituendo questa espressione a $\sin(\widehat{x})$ nella formula 2.2.1 per l'area si ottiene la relazione cercata. $\square$

La curvatura di Menger con x, y, z tutti distinti risulta quindi essere continua.

Inoltre, troviamo la seguente relazione per ogni $r > 0$:

$$c(rx, ry, rz) = \frac{1}{r}c(x, y, z). \tag{2.2.2}$$

Definizione 2.3. Definiamo la curvatura di un insieme $\mathcal{H}^1$-misurabile $A \in \mathbb{R}^2$ nel modo seguente:

$$c^2(A) := \int_A \int_A \int_A c(x,y,z)^2 d\mathcal{H}^1 x d\mathcal{H}^1 y d\mathcal{H}^1 z.$$

Tale funzione descrive la curvatura dell'insieme A, ed è nulla se e solo se A coincide quasi ovunque con un sottoinsieme di una retta. Dalla definizione 2.1 si osserva che la curvatura di Menger risulta non definita solo un insieme di misura nulla in $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2)$ in cui due o più punti della terna coincidono, quindi il precedente integrale è ben definito.

Dimostriamo ora un lemma che troverà utilizzo nell'ultima sezione di questo elaborato. Nella dimostrazione seguente chiameremo S_3 il gruppo delle permutazioni agenti su tre elementi e C_3 il suo sottogruppo costituito dai cicli di ordine 3.

Lemma 2.4. *(Melnikov) Siano $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, allora vale la seguente:*

$$\sum_{\sigma \in S_3} \frac{1}{(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(3)})\overline{(z_{\sigma(2)} - z_{\sigma(3)})}} = c(z_1, z_2, z_3)^2.$$

Dimostrazione: Dalla Proposizione 2.2 si ha:

$$c(z_1, z_2, z_3)^2 = \frac{16A(z_1, z_2, z_3)^2}{|z_1 - z_2|^2 |z_2 - z_3|^2 |z_1 - z_3|^2}.$$

Inoltre sommando i termini con denominatori coniugati otteniamo:

$$\sum_{\sigma \in S_3} \frac{1}{(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(3)})\overline{(z_{\sigma(2)} - z_{\sigma(3)})}} = \sum_{\sigma \in C_3} \frac{2\Re((z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(3)})\overline{(z_{\sigma(2)} - z_{\sigma(3)})})}{|z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(3)}|^2 |z_{\sigma(2)} - z_{\sigma(3)}|^2} =$$

$$= \frac{\sum_{\sigma \in C_3} 2|z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(2)}|^2 |z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(3)}||z_{\sigma(2)} - z_{\sigma(3)}| \cos(\widehat{z_{\sigma(3)}})}{|z_1 - z_2|^2 |z_2 - z_3|^2 |z_2 - z_3|^2}.$$

Uguagliando le due espressioni ottenute in precedenza, resta quindi da mostrare che, per un triangolo di lati a, b, c, angoli α, β, γ (con α opposto ad a e via dicendo) e area A, vale la seguente:

$$16A^2 = 2a^2 bc \cos\alpha + 2b^2 ac \cos\beta + 2c^2 ab \cos\gamma.$$

Dalla formula di Erone si ha:

$$16A^2 = (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b+c) = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4),$$

mentre con il Teorema del coseno otteniamo:

$$2a^2 bc \cos\alpha + 2b^2 ac \cos\beta + 2c^2 ab \cos\gamma = a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2).$$

Osserviamo che le due espressioni algebriche così ottenute sono uguali, da cui segue la tesi. □

Riportiamo infine i seguenti risultati di David e Léger, fondamentali per comprendere la relazione tra 1-rettificabilità e curvatura, la cui dimostrazione è complessa e può essere trovata in [L]. Dimostreremo in seguito una versione più debole di questo teorema, utilizzando il concetto di misura tangente.

Teorema 2.5. *(Condizioni sufficienti per l'1-rettificabilità)*

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ *un insieme* $\mathcal{H}^1$*-misurabile tale che* $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$ *e* $c^2(E) < +\infty$*, allora* E *è un insieme 1-rettificabile.*

Corollario 2.6. *(Condizioni equivalenti per l'1-rettificabilità)*

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ *un insieme* $\mathcal{H}^1$*-misurabile tale che* $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$*, allora* E *è un insieme 1-rettificabile se e solo se esistono numerabili insiemi* $E_i \subset \mathbb{R}^2, i \in \mathbb{N}$ *tali che* $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ *con* $c^2(E_i) < +\infty$ *per ogni* $i \in \mathbb{N}$*.*

3. Misure Tangenti

Questa sezione espone alcuni dei risultati geometrici sulla 1-rettificabilità dei sottoinsiemi del piano ottenuti con la curvatura di Menger. Ricordiamo di aver visto nel capitolo precedente che tale caratterizzazione è possibile (Teorema 2.5 e Corollario 2.6), ma ha dimostrazione complessa. Cerchiamo ora, attraverso il concetto di misura tangente di fornire una dimostrazione completa di una versione più debole di tali risultati.

Definizione 3.1. (Misura Tangente) Data una misura di Radon μ su $\mathbb{R}^n$, $r > 0$ e $a \in \mathbb{R}^n$ consideriamo le mappe su $\mathbb{R}^n$ $T_{a,r}(x) = \frac{(x-a)}{r}$ e definiamo di conseguenza le misure

$$\mu_{a,r}(A) = \mu(T_{a,r}^{-1}(A)) = \mu(rA + a) \text{ per ogni } A \subset \mathbb{R}^n.$$

La misura ν è *misura tangente* di μ nel punto a se ν è misura di Radon non banale ed esistono delle successioni (r_i) e (c_i) di reali positivi tali che $r_i \to 0$ per $i \to \infty$ e

$$c_i \mu_{a,r_i} \xrightarrow{*} \nu,$$

ovvero per ogni φ continua a supporto compatto si ha:

$$\lim_{i\to\infty} c_i \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi((x-a)/r_i) d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi d\nu.$$

In generale la misura tangente a μ in un punto non è unica, neanche a meno di costante. Definiamo quindi per ogni misura di Radon μ e per ogni $a \in \mathbb{R}^n$ $\operatorname{Tan}(\mu, a)$ come l'insieme delle misure tangenti a μ nel punto a.

Se la misura μ da noi utilizzata si comporta sufficientemente bene sui compatti, ovvero se ha una s-densità superiore e inferiore finita per qualche $0 < s < n$ e quindi vale

$$0 < \liminf_{r\to 0} \frac{\mu(B(a,r))}{(2r)^s} \leq \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(a,r))}{(2r)^s} < \infty, \tag{3.1.1}$$

allora per ogni $\nu \in \operatorname{Tan}(\mu, a)$ esiste una successione $r_i \to 0$ e $0 < c < \infty$ tale che:

$$\nu = c \lim_{i\to\infty} r_i^{-s} \mu_{a,r_i}. \tag{3.1.2}$$

La disuguaglianza superiore della condizione 3.1.1 è soddisfatta per una qualsiasi restrizione di $\mathcal{H}^1$ a un insieme di misura finita, per quanto visto nel Teorema 1.7. Non si può in generale dire nulla sulla densità inferiore. Una dimostrazione formale dei passaggi precedenti può essere trovata in [M] e [P].

La condizione 3.1.1 ci permette di ottenere altre proprietà interessanti per le misure tangenti, come il seguente teorema, una cui dimostrazione è presente in [DL].

Teorema 3.2. *Sia μ una misura di Radon che soddisfa la condizione 3.1.1 per μ-quasi ogni $a \in \mathbb{R}^n$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(1) μ è m-rettificabile

(2) Per μ quasi ogni $a \in \mathbb{R}^n$,

$$Tan(\mu, a) = \{c\mathcal{H}^m|_V : 0 < c < \infty\}$$

per qualche m-iperpiano V passante per 0.

(3) Per μ quasi ogni $a \in \mathbb{R}^n$,

$$Tan(\mu, a) \subset \{c\mathcal{H}^m|_V : 0 < c < \infty, \text{ dove } V \text{ è un } m\text{-iperpiano passante per } 0\}.$$

Il precedente teorema fornisce condizioni equivalenti per mostrare che un insieme sia m-rettificabile. In generale tali condizioni sono difficili da dimostrare. Grazie ad esso è stato possibile tuttavia raggiungere alcuni dei risultati fondamentali della teoria geometrica della misura. Un esempio è il seguente teorema, che, pur non essendo necessario per le dimostrazioni successive, è qui riportato per la sua rilevanza.

Teorema 3.3. *(Preiss)*

Sia μ misura di Radon in $\mathbb{R}^n$ tale che

$$0 < \lim_{r \to 0} r^{-m} \mu(B(x,r)) < \infty$$

per μ-quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ (ovvero μ ammette m-densità positiva e finita). Allora μ è m-rettificabile nel senso che esiste una famiglia numerabile $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di superfici m-dimensionali di classe $\mathcal{C}^1$ tali che

$$\mu\left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = 0.$$

Nel precedente teorema non abbiamo dovuto specificare che m fosse un intero: per un risultato di Marstrand l'esistenza dell'm-densità per una misura non nulla implica m intero. La dimostrazione del teorema precedente, estremamente complessa, è stata fornita da Preiss in [P].

Da qui in avanti dimostreremo diversi risultati sugli insiemi 1-dimensionali nel piano. Da una parte abbiamo bisogno che tali insiemi siano sufficientemente regolari dal punto di vista geometrico, mentre dall'altra vorremmo poter considerare insiemi più generici rispetto alle curve. Introduciamo quindi una nuova nozione di regolarità:

Definizione 3.4. (Insieme AD-regolare)

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$. E è detto insieme *Ahlfors-David-regolare* (AD-regolare) se è chiuso ed esiste $0 < C < \infty$ tale che

$$r/C \leq \mathcal{H}^1(E \cap B(x,r)) < Cr \text{ per ogni } x \in E, 0 < r < d(E)$$

Questa definizione estende una proprietà di linearità locale della misura di Hausdorff a insiemi diversi da curve. L'insieme $C_{1/4}$, ad esempio, è un insieme AD-regolare: per $r < \frac{1}{4^n}$, $\mathcal{H}^1(E \cap B(x,r)) < \frac{\sqrt{2}}{4^n}$, quindi in particolare per per $\frac{1}{4^{n+1}} < r < \frac{1}{4^n}$, $\mathcal{H}^1(E \cap$

$B(x,r)) < \frac{\sqrt{2}}{4^n} < 4\sqrt{2}r$ e per $C = 4\sqrt{2}$ la disuguaglianza di destra è verificata (mostrare che per tale C sia dimostrata anche quella di sinistra è analogo).

Un'osservazione fondamentale è che per un insieme AD-regolare E la condizione sulla densità inferiore di 3.1.1 è soddisfatta. Quindi in particolare $\mathcal{H}^1|_E$ soddisfa le ipotesi del Teorema 3.2.

Procediamo ora con la dimostrazione di uno dei teoremi fondamentali per questo elaborato, che lega la curvatura di un insieme AD-regolare alla caratterizzazione delle misure tangenti per quasi ogni suo punto. Per dimostrare tale teorema sarà necessario effettuare alcuni passaggi preliminari. In primo luogo enunciamo il seguente teorema:

Teorema 3.5. *(5r-Ricoprimento) Sia X spazio metrico in cui le palle chiuse siano compatte e $\mathcal{B}$ una famiglia di palle chiuse in X tali che* $\sup\{d(B) : B \in \mathcal{B}\} < \infty$*, allora esiste una famiglia al più numerabile $B_i \in \mathcal{B}$ di palle disgiunte tali che:*

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \bigcup_i 5B_i.$$

Una dimostrazione di questo teorema può essere trovata in [M] (Teorema 2.1). Grazie a tale risultato possiamo ora dimostrare un lemma preliminare:

Lemma 3.6. *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ insieme AD-regolare limitato tale che $c^2(E) < +\infty$, allora per $\mathcal{H}^1$-quasi ogni $a \in E$ vale*

$$\lim_{r\to 0} r^{-1}c^2(E \cap B(a,r)) = 0.$$

Dimostrazione: Procediamo per assurdo: supponiamo esistano $b > 0$ e $A \subset E$ insieme di Borel tali che $\mathcal{H}^1(A) > 0$ e $\limsup_{r\to 0} r^{-1}c^2(E \cap B(a,r)) > b$ per ogni $a \in A$. In particolare:

$$\text{per ogni } a \in A, \text{ esiste } r(a) < \frac{d(E)}{5} \text{ tale che } c^2(E \cap B(a,r(a))) > br(a). \tag{3.6.1}$$

Applicando quindi il Teorema 3.5 sulle palle $B(a,r(a))$ al variare di $a \in A$, ricordando che $\sup\{r(a) : a \in A\} < \frac{d(E)}{5} < \infty$, otteniamo quindi una famiglia al più numerabile $(a_{1,i})_i \in A$ tale che gli insiemi $B(a_{1,i}, r(a_{1,i}))$ siano due a due disgiunti e $A \subset \bigcup_{a\in A} B(a,r(a)) \subset \bigcup_i 5B(a_{1,i}, r(a_{1,i})) = \bigcup_i B(a_{1,i}, 5r(a_{1,i}))$, quindi $\sum_i \mathcal{H}^1(A \cap B(a_{1,i}, 5r(a_{1,i}))) \geq \mathcal{H}^1(A)$ ed esiste k_1 tale che:

$$\sum_{i=1}^{k_1} \mathcal{H}^1(A \cap B(a_{1,i}, 5r(a_{1,i}))) > \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A). \tag{3.6.2}$$

Osserviamo inoltre che per ogni $a \in E, r > 0$ vale:

$$c^2(E \cap B(a,r)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\substack{x,y,z \in E \cap B(a,r) \\ |x-y|,|y-z|,|x-z|>\varepsilon}} c(x,y,z)^2 d\mathcal{H}^1 x d\mathcal{H}^1 y d\mathcal{H}^1 z. \tag{3.6.3}$$

Dato $\varepsilon_1 > 0$ da fissare in seguito, definiamo:

$$T_1 = \bigcup_{i=1}^{k_1} \{(x,y,z) : x,y,z \in E \cap B(a_{1,i}, r(a_{1,i})), |x-y|, |y-z|, |x-z| > \varepsilon_1\}.$$

Per ε_1 sufficientemente piccolo vale, ricordando che, essendo E AD-regolare, si ha $\mathcal{H}^1(E \cap B(x,r)) \leq Cr$ per ogni $x \in E$ per qualche $0 < C < +\infty$:

$$\iiint\limits_{T_1} c(x,y,z)^2 d\mathcal{H}^1 x d\mathcal{H}^1 y d\mathcal{H}^1 z \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_1} c^2(E \cap B(a_{1,i}, r(a_{1,i}))) \geq \frac{b}{2} \sum_{i=1}^{k_1} r(a_{1,i}) =$$

$$= \frac{b}{10C} \sum_{i=1}^{k_1} 5Cr(a_{1,i}) \geq \frac{b}{10C} \sum_{i=1}^{k_1} \mathcal{H}^1(E \cap B(a_{1,i}, 5r(a_{1,i}))) \geq \frac{b}{20C} \mathcal{H}^1(A).$$

Dove nella prima disuguaglianza abbiamo usato la linearità dell'integrale (scrivendo T_1 come unione di insiemi disgiunti) e la 3.6.3 fissando ε_1 sufficientemente piccolo, nella seconda abbiamo usato la disuguaglianza 3.6.1 su ciascun termine della sommatoria, nella terza abbiamo usato la proprietà di AD-regolarità per E e nell'ultima ci siamo serviti della disuguaglianza 3.6.2.

Ripetiamo il procedimento, tuttavia questa volta utilizziamo la seguente restrizione iniziale al posto della 3.6.1:

$$\text{per ogni } a \in A, \text{ esiste } r(a) < \min\left(\frac{d(E)}{5}, \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \quad \text{tale che} \quad c^2(E \cap B(a, r(a))) > br(a). \tag{3.6.4}$$

Ripetendo i passaggi successivi, otteniamo come sopra una famiglia al più numerabile $(a_{2,i})_i \in A$ e un insieme T_2 definito per un certo $\varepsilon_2 > 0$ che fissiamo in modo da ottenere:

$$\iiint\limits_{T_2} c(x,y,z)^2 d\mathcal{H}^1 x d\mathcal{H}^1 y d\mathcal{H}^1 z \geq \frac{b}{20C} \mathcal{H}^1(A).$$

Osserviamo che $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, in quanto se $(x,y,z) \in T_1$ allora $|x-y|, |y-z|, |x-z| > \varepsilon_1$, mentre $(x,y,z) \in T_2$ solo se per qualche i vale $x,y,z \in E \cap B(a_{2,i}, r(a_{2,i}))$, con $r(a_{2,i}) < \frac{\varepsilon_1}{2}$, e quindi $|x-y|, |y-z|, |x-z| < \varepsilon_1$.

Reiterando otteniamo degli insiemi disgiunti T_i su cui vale

$$\iiint\limits_{T_i} c(x,y,z)^2 d\mathcal{H}^1 x d\mathcal{H}^1 y d\mathcal{H}^1 z \geq \frac{b}{20C}\mathcal{H}^1(A),$$

da cui, poiché $\mathcal{H}^1(A) > 0$, si ha:

$$+\infty > c^2(E) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \iiint\limits_{T_i} c(x,y,z)^2 d\mathcal{H}^1 x d\mathcal{H}^1 y d\mathcal{H}^1 z = +\infty,$$

che è un assurdo. Quindi $\mathcal{H}^1(A) = 0$, da cui la tesi. □

Utilizzando il lemma precedente dimostriamo ora il risultato sopra accennato:

Teorema 3.7. *(Misure Tangenti e AD-regolarità) Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ insieme AD-regolare tale che $c^2(E) < +\infty$, allora per $\mathcal{H}^1$-quasi ogni $a \in E$ e per ogni $\nu \in Tan(\mathcal{H}^1|_E, a)$ il supporto di ν è contenuto in una retta.*

Dimostrazione: Osserviamo che, poiché studiamo una proprietà locale (in ogni punto a, la misura tangente ν dipende solo da come si comporta $\mathcal{H}^1|_E$ in un intorno di a), non è restrittivo supporre E limitato. Osserviamo inoltre che vale il lemma precedente, ovvero esiste $A \subset E$ tale che $\mathcal{H}^1(A) = 0$ e $\lim\limits_{r\to 0} r^{-1}c^2(E \cap B(a,r)) = 0,\ \forall a \in E \setminus A$.

Sia quindi $a \in E \setminus A$ (possiamo traslare E in modo da porre $a = 0$ in quanto la misura di Hausdorff e la curvatura sono invarianti per traslazioni), $\nu \in \mathrm{Tan}(\mathcal{H}^1|_E, 0)$ e chiamiamo $\mu = \mathcal{H}^1|_E$ allora, per la proprietà 3.1.2 esiste $k > 0$ e $r_i > 0$ tali che $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = 0$ e $\nu = k \lim\limits_{i\to\infty} \frac{\mu_{0,r_i}}{r_i}$. Chiamiamo infine $\mu_{0,r_i} = \mu_i$.

Mostriamo ora che vale la seguente:

$$\iiint c(x,y,z)^2 d\nu(x)d\nu(y)d\nu(z) \leq k^3 \liminf_{i\to\infty} \frac{1}{r_i^3} \iiint c(x,y,z)^2 d\mu_i(x)d\mu_i(y)d\mu_i(z).$$

Infatti le misure $\frac{k}{r_i}\mu_i$ convergono debolmente alla misura ν e quindi $\int \varphi d\nu = \lim\limits_{i\to\infty} \int \frac{k}{r_i}\varphi d\mu_i$ per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$.

D'altra parte sia φ continua non negativa e $(\psi_R)_{R\in\mathbb{N}}$ una famiglia di funzioni continue tali che $\chi_{[-R,R]}(x) \leq \psi_R(x) \leq \chi_{]-R-1,R+1[}(x)$ (la cui esistenza ci è garantita dal Lemma di Urysohn). Ovviamente $\varphi\psi_R \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ e $\varphi\psi_R \leq \varphi$, quindi $\int \varphi\psi_R d\nu = \lim\limits_{i\to\infty} \int \frac{k}{r_i}\varphi\psi_R d\mu_i \leq \liminf\limits_{i\to\infty} \int \frac{k}{r_i}\varphi d\mu_i,\ \forall R \in \mathbb{N}$, da cui, per il Lemma di Fatou, per ogni φ continua non negativa vale:

$$\int \varphi d\nu \leq \liminf_{R\to\infty} \int \varphi\psi_R d\nu \leq \liminf_{i\to\infty} \int \frac{k}{r_i}\varphi d\mu_i.$$

Quindi, ricordando che $c^2(x,y,z)$ è non negativa e continua tranne che su un insieme S di misura nulla, possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{T} c(x,y,z)^2 d\nu(x)d\nu(y)d\nu(z) &= \iiint\limits_{T\setminus S} c(x,y,z)^2 d\nu(x)d\nu(y)d\nu(z) = \\
&\le k^3 \liminf_{i\to\infty} \frac{1}{r_i^3} \iiint\limits_{T} c(x,y,z)^2 d\mu_i(x)d\mu_i(y)d\mu_i(z).
\end{aligned} \tag{3.7.1}
$$

Dove $T = B(0,M)\times B(0,M)\times B(0,M)$ per qualche M fissato e abbiamo usato tre volte il passaggio dimostrato in precedenza.

Osserviamo ora che, per invarianza alle traslazioni della curvatura di Menger e per la proprietà 2.2.2:

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{T} c(x,y,z)^2 d\mu_i(x)d\mu_i(y)d\mu_i(z) &= \iiint\limits_{T} c(x,y,z)^2 d\mu(T_{0,r_i}^{-1}(x))d\mu(T_{0,r_i}^{-1}(y))d\mu(T_{0,r_i}^{-1}(z)) = \\
= \iiint\limits_{r_iT} c\left(\frac{x}{r_i},\frac{y}{r_i},\frac{z}{r_i}\right)^2 d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z) &= \iiint\limits_{r_iT} r_i^2 c(x,y,z)^2 d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z) = \\
&= r_i^2 c^2(E\cap B(0,Mr_i)).
\end{aligned}
$$

Mettendo insieme questo risultato e la 3.7.1 otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{T} c(x,y,z)^2 d\nu(x)d\nu(y)d\nu(z) &\le k^3 \liminf_{i\to\infty} \frac{1}{r_i^3} \iiint\limits_{T} c(x,y,z)^2 d\mu_i(x)d\mu_i(y)d\mu_i(z) = \\
&= r_i^{-1} c^2(E\cap B(0,Mr_i)) \to 0 \text{ per } r_i \to 0,
\end{aligned}
$$

per il Lemma 3.6.

Quindi $\iiint\limits_{T} c(x,y,z)^2 d\nu(x)d\nu(y)d\nu(z) = 0$ per ogni $M>0$, ovvero

$\iiint\limits_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} c(x,y,z)^2 d\nu(x)d\nu(y)d\nu(z) = 0$ e quindi il supporto di ν è contenuto in una retta. $\square$

Utilizzando il Teorema 3.2 (applicabile per la restrizione di $\mathcal{H}^1$ a insiemi AD-regolari come osservato in precedenza) risulta che ciò si avvicina molto all'1-rettificabilità dell'insieme E. Se infatti tale supporto fosse una retta invece di essere contenuto in una retta, avremmo che E sarebbe 1-rettificabile (e otterremmo il Teorema 2.5).

4. Operatore Integrale di Cauchy

In questa sezione ci proponiamo di studiare integrali di Cauchy singolari (come quelli necessari per calcolare le trasformate di Hilbert) su sottoinsiemi 1-dimensionali del piano complesso. Studieremo i risultati riguardanti gli integrali sulle curve per poi ottenere da essi condizioni necessarie e sufficienti sulla geometria dell'insieme per l'esistenza dei valori singolari.

Osserviamo immediatamente che l'AD-regolarità non è condizione sufficiente affinché i valori singolari esistano, infatti nell'insieme $C_{1/4} \subset \mathbb{C}$, che abbiamo già osservato essere AD-regolare, possiamo prendere z come uno dei vertici del quadrato iniziale della costruzione e osservare che possiamo considerare degli m arbitrariamente piccoli tali che $z + m \in C_{1/4}$, mentre $z - m \notin C_{1/4}$.

Dobbiamo quindi innanzitutto definire un'operatore ausiliario per studiare tali integrali su insiemi 1-dimensionali diversi da curve; anche la limitatezza L^2 avrà una definizione differente per insiemi generici.

Definizione 4.1. (Operatore Integrale di Cauchy)

Per ogni sottoinsieme $E \subset \mathbb{C}$ $\mathcal{H}^1$-misurabile e per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo il seguente operatore:

$$C_{E,\varepsilon}g(z) := \int_{E \smallsetminus B(z,\varepsilon)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\mathcal{H}^1\zeta, \text{ per } g \in L^2(E) \text{ e } z \in E.$$

Da ora in avanti assumiamo avere $\mathcal{H}^1(E) < \infty$. Possiamo osservare che questo è sufficiente per l'esistenza di questi integrali, infatti con tali ipotesi si ha $g \in L^1(E)$ e quindi $\int_{E \smallsetminus B(z,\varepsilon)} \left|\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\right| d\mathcal{H}^1\zeta \le \frac{1}{\varepsilon} \int_{E \smallsetminus B(z,\varepsilon)} |g(\zeta)|\, d\mathcal{H}^1\zeta < \infty$.

Definizione 4.2. Diciamo inoltre che l'operatore integrale singolare di Cauchy C_E è limitato in L^2 se gli operatori $C_{E,\varepsilon}$ sono uniformemente limitati in $L^2(E)$, ovvero esiste $C < \infty$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$, $g \in L^2(E)$, si abbia:

$$\int_E \left| \int_{E \smallsetminus B(z,\varepsilon)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\mathcal{H}^1\zeta \right|^2 d\mathcal{H}^1 z \le C \int_E |g(\zeta)|^2\, d\mathcal{H}^1\zeta.$$

Se questo avviene nel caso della trasformata di Hilbert allora l'integrale a valori principali è ben definito, infatti, come visto nell'introduzione, $g \in L^2$ è condizione sufficiente affinché Hg esista in L^2.

Possiamo ora analizzare meglio la Definizione 4.2 studiando il comportamento degli integrali singolari su domini di integrazione sufficientemente regolari. Nel caso delle curve possiamo fare riferimento a un risultato di G. David, da lui dimostrato in [D].

Teorema 4.3. *(Limitatezza L^2 sulle curve) Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva rettificabile. Allora C_Γ è limitato in $L^2(\Gamma)$ se e solo se Γ è AD-regolare (ovvero $\mathcal{H}^1(\Gamma \cap B(z,r)) \le Cr$ per ogni $z \in \mathbb{C}, r > 0$ e per qualche $C < \infty$).*

Ora tuttavia vorremmo provare a spingerci oltre questo risultato iniziale per ottenere condizioni necessarie e sufficienti sulla geometria di un insieme E che ci permettano di studiare la limitatezza L^2 su insiemi diversi da curve. Per farlo, è prima necessario introdurre la seguente proprietà:

Teorema 4.4. *(Uniforme Rettificabilità)*

Sia E insieme AD-regolare. Allora esiste $C < \infty$ tale che $c^2(E \cap B(a,r)) \leq Cr$ per ogni $a \in E$, $r > 0$ se e solo se E è contenuto in una curva AD-regolare.

Un insieme che possiede tali proprietà è detto *uniformemente rettificabile.* Tali insiemi sono studiati approfonditamente da David e Semmes in [DS] e i loro risultati furono in seguito utilizzati da Mattila, Melnikov e Verdera in [MMV] per dimostrare il Teorema 4.4.

Possiamo dunque ora enunciare e dimostrare il teorema che avevamo accennato, che fornisce condizioni necessarie e sufficienti per la limitatezza L^2 di C_E. Con esso otterremo finalmente un legame indissolubile tra la buona definizione degli integrali singolari e le proprietà geometriche del dominio di integrazione.

Teorema 4.5. *(Limitatezza L^2 su insiemi AD-regolari) Sia $E \subset \mathbb{C}$ insieme AD-regolare. Allora C_E è limitato in $L^2(E)$ se e solo se E è uniformemente rettificabile.*

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare solo che se C_E è limitato in $L^2(E)$ allora E è uniformemente rettificabile, dato che il viceversa è già dato dal Teorema 4.3. Per dimostrare ciò utilizziamo il Teorema 4.4, ovvero mostriamo che esiste $C < \infty$ tale che:

$$c^2(E \cap B(a,r)) \leq Cr, \text{ per ogni } a \in E, r > 0.$$

Sia $\mu = \mathcal{H}^1|_E$. Dalle definizioni di limitatezza L^2 e di AD-regolarità otteniamo che esistono $C_1, C_2 < \infty$ tali che:

$$\int_E \left| \int_{E \setminus B(z,\varepsilon)} \frac{\chi_{B(a,r)}(\zeta)}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right|^2 d\mu(z) \leq C_1 \int_E \chi_{B(a,r)}(\zeta) d\mu(\zeta) =$$
$$= C_1 \mathcal{H}^1(E \cap B(a,r)) \leq C_1 C_2 r, \text{ per ogni } a \in E, r > 0, \varepsilon > 0.$$

Osserviamo inoltre che, detto $F = E \cap B(a,r) \setminus B(z,\varepsilon)$, $T_\varepsilon = \{(x,y,z) : x,y,z \in E \cap B(a,r),\ |x-y|, |x-z|, |y-z| > \varepsilon\}$ e $T = E \cap B(a,r) \times E \cap B(a,r) \times E \cap B(a,r)$:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_E \left| \int_{E \setminus B(z,\varepsilon)} \frac{\chi_{B(a,r)}(\zeta)}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right|^2 d\mu(z) \geq \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{E \cap B(a,r)} \left| \int_F \frac{1}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right|^2 d\mu(z) =$$
$$= \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{E \cap B(a,r)} \int_F \frac{1}{\zeta_1 - z} d\mu(\zeta_1) \overline{\int_F \frac{1}{\zeta_2 - z} d\mu(\zeta_2)} d\mu(z) \geq$$
$$= \limsup_{\varepsilon \to 0} \iiint_{T_\varepsilon} \frac{1}{(z_1 - z_3)\overline{(z_2 - z_3)}} d\mu(z_1) d\mu(z_2) d\mu(z_3) =$$

$$= \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{6} \iiint\limits_{T_\varepsilon} \sum_{\sigma \in S_3} \frac{1}{(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(3)})\overline{(z_{\sigma(2)} - z_{\sigma(3)})}} d\mu(z_1) d\mu(z_2) d\mu(z_3).$$

Sfruttando in quest'ultimo passaggio la simmetria del dominio di integrazione. Utilizzando il Lemma 2.4 e sfruttando i due risultati appena ottenuti abbiamo che:

$$c^2(E \cap B(a,r)) = \iiint\limits_{T} c(x,y,z)^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) d\mu(z_3) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{T_\varepsilon} c(x,y,z)^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) d\mu(z_3)$$

$$= \limsup_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{T_\varepsilon} \sum_{\sigma \in S_3} \frac{1}{(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(3)})\overline{(z_{\sigma(2)} - z_{\sigma(3)})}} d\mu(z_1) d\mu(z_2) d\mu(z_3) =$$

$$\leq 6 \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_E \left| \int_{E \setminus B(z,\varepsilon)} \frac{\chi_{B(a,r)}(\zeta)}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right|^2 d\mu(z) \leq 6 C_1 C_2 r, \ \forall a \in E, r > 0.$$

$\square$

Bibliografia

[M] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press 1995.

[F] K. J. Falconer, *Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985.

[L] J.-C. Léger, *Menger curvature and rectifiability*, Ann. of Math. (2) 149 (1999), no. 3, 831-869.

[P] D. Preiss, *Geometry of measures in* $\mathbb{R}^n$ *Distribution, rectifiability and densities*, Ann. of Math. 125 (1987), 537-643.

[D] G. David, *Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 17 (1984), 157-189.

[DL] C. De Lellis, *Rectifiable Sets, Densities, and Tangent Measures*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, EMS Publishing House, 2008.

[DS] G. David e S. Semmes, *Analysis of and on Uniformly Rectifiable Sets*, Mathematical Surveys and Monographs 38, Amer. Math Soc., 1993.

[MMV] P. Mattila, M. S. Melnikov and J. Verdera, *The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability*, Ann. of Math. 144 (1996), 127-136.

Ringraziamenti

Ringrazio il Professor Monti per la sua supervisione e per avermi aiutato nei momenti di maggiore incertezza;
i miei genitori per il loro continuo supporto durante quest'anno un po' anomalo di università;
i miei colleghi della Scuola Galileiana e dell'Università di Padova per la loro compagnia e il loro altruismo nonostante la distanza;
e la curvatura di Menger, per avermi permesso di rendere un po' più coerente la struttura di questa tesi.