Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Funzioni a gradiente prescritto

Candidato:
Michele Zaccaron

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Anno Accademico 2014/2015

Indice

1 Introduzione **1**

2 Inizio della dimostrazione della parte *(i)* del Teorema 1 **6**

3 Dimensione di Hausdorff dell'insieme C **6**

4 Funzioni di raccordo **9**

5 Costruzione di f_α **11**

6 Dimostrazione della parte *(ii)* del Teorema 1 **18**

1 Introduzione

Uno dei problemi molto interessanti in ambito matematico e fisico è quello di caratterizzare i campi vettoriali conservativi, cioè campi vettoriali che sono il gradiente di una funzione a valori in $\mathbb{R}$, che viene detta potenziale (scalare) del campo vettoriale. Avere un campo vettoriale conservativo è molto importante in ambito fisico, essendo che ammettere potenziale equivale ad avere integrale curvilineo dipendente solo dagli estremi della curva e non dal percorso, ed anche che l'integrale lungo un circuito chiuso è nullo.

Se ora F è un campo vettoriale di classe $\mathscr{C}^1$, $F : A \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$, definito su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, in generale esso non è conservativo. Una condizione necessaria affinché lo sia è che F abbia il rotore nullo, cioè soddisfi alle seguenti uguaglianze per ogni x in A e per ogni i, j che variano tra 1 ed n:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$$

Ciò è facilmente deducibile dal teorema di Schwarz, il quale afferma che se un funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha derivate parziali seconde continue in un punto x di $\mathbb{R}^n$, allora le derivazioni parziali seconde commutano in quel punto, cioè

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x)$$

per ogni $i, \ j = 1, ..., n$.

Invece una condizione sufficiente affinché un campo vettoriale F di classe $\mathscr{C}^1$ ammetta potenziale è l'avere il rotore nullo ed essere definito su un insieme semplicemente connesso.

Il lavoro della tesi, che è costuituito in uno studio dettagliato del Teorema 4.1 a pagina 76 dell'articolo [2], darà dei risultati sulla conservatività di campi vettoriali non più $\mathscr{C}^1$, bensì solamente lipschitziani. In particolare lavoreremo sul quadrato unitario di $\mathbb{R}^2$, acnhe se il teorema si può generalizzare al quadrato unitario di $\mathbb{R}^n$.

Sia $\mathbb{R}^2 \supset \boldsymbol{Q} = [0,1] \times [0,1]$. Dato un qualsiasi campo vettoriale $F : \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}^2$ ed una funzione $f : \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathscr{C}^1$, definiamo l'insieme dove il gradiente di f coincide con F:

$$\mathscr{A}_{f,F} = \{(x,y) \in \boldsymbol{Q} \mid \nabla f(x,y) = F(x,y)\}.$$

Teorema 1. *Sia $F : \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale lipschitziano.*

(i) Per ogni $0 < \alpha < 2$ esiste una funzione $f_\alpha : \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$, f_α di classe $\mathscr{C}^{1,1}$, tale che

$$\dim \mathscr{A}_{f_\alpha,F} \geq 2 - \alpha.$$

(ii) *Per ogni* $0 < \varepsilon < 1$ *esiste una funzione* $f_\varepsilon : \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$, $f_\varepsilon \in \bigcap_{0<\beta<1} \mathscr{C}^{1,\beta}$, *tale che*

$$\mathscr{L}^2(\mathscr{A}_{f_\varepsilon,F}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Ricordiamo adesso le definzioni usate nell'enunciato del teorema.

Definizione 1. *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto ed* α *un numero reale in* $[0,1]$. *Una funzione* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *è detta* ***hölderiana*** *di esponente di Hölder* α *se esiste una costante* $L \geq 0$ *tale che per ogni* x_1, x_2 *in* Ω *si ha che*

$$\left|g(x_1) - g(x_2)\right| \leq L \left\|x_1 - x_2\right\|^\alpha .$$

In particolare se $\alpha = 1$ *la funzione si dice* ***lipschitziana*** *e in questo caso la minima costante* $L \geq 0$ *per cui ciò si verifica è detta costante di Lipschitz della funzione* g.

Definizione 2. *Siano* Ω *ed* α *come sopra. Una funzione* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *si dice di classe* $\mathscr{C}^{1,\alpha}$ *se è una funzione* $\mathscr{C}^1$ *e le sue derivate sono hölderiane di esponente di Hölder* α.

Prima di introdurre la definizione di dimensione di Hausdorff è bene fare una piccola digressione. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ed $s \geq 0$. Per ogni $\rho > 0$ si definisce

$$\mathscr{H}^s_\rho(E) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} \operatorname{diam}(C_i)^s \mid \forall i \in \mathbb{N} \ \ C_i \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } \operatorname{diam}(C_i) \leq \rho,\ E \subseteq \bigcup_{i=0}^{+\infty} C_i \right\}.$$

Si verifica facilmente che $\mathscr{H}^s_\rho$ è una misura esterna

$$\mathscr{H}^s_\rho : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0,+\infty]$$

$$E \longmapsto H^s_\rho(E)$$

Inoltre se $\rho \leq \tau$ allora $\mathscr{H}^s_\rho \geq \mathscr{H}^s_\tau$.

Definizione 3. *Sia* $s \in [0,+\infty)$. *La* ***misura di Hausdorff*** *di dimensione* s *di un insieme* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *si definisce nel seguente modo*

$$\mathscr{H}^s(E) := \sup_{\rho \geq 0} \left\{ \mathscr{H}^s_\rho(E) \right\} = \lim_{\rho \to 0^+} \mathscr{H}^s_\rho(E).$$

Elenchiamo le principali proprietà della misura di Hausdorff:

- $\mathscr{H}^s$ è una misura di Borel;

- $\mathscr{H}^0(E) = \text{Card}(E)$, cioè è la misura che conta i punti;
- Per ogni $n \geq 1$, $\mathscr{H}^n \equiv \mathscr{L}^n$ su $\mathbb{R}^n$, dove $\mathscr{L}^n$ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$;
- Se $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ sono insiemi di Borel non vuoti, allora vale la seguente implicazione

$$\mathscr{H}^\rho(A) > 0,\ \mathscr{H}^\mu > 0 \Rightarrow \mathscr{H}^{\rho+\mu}(A \times B) > 0. \tag{1}$$

Tutte queste proprietà sono semplici da vedere, tranne la (1) la cui dimostrazione si trova in [1], Teorema 8.10 a pagina 115.

Possiamo ora dare la seguente definizione

Definizione 4. *La **dimensione di Hausdorff** di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è così definita:*

$$\dim(E) = \inf\left\{s \geq 0 \mid \mathscr{H}^s(E) = 0\right\} = \sup\left\{s \geq 0 \mid \mathscr{H}^s(E) = \infty\right\}.$$

La dimostrazione del Teorema 1 si svolge preliminarmente nel definire un insieme di Cantor C contenuto in $\boldsymbol{Q}$, che soddisferà alle richieste minime sulla dimensione di Hausdorff. Si procede ricorsivamente, costruendo ad ogni passo n un insieme, sia esso Q^n, formato da 4^n quadrati disgiunti, che chiameremo $Q_{i_1,\dots,i_n}$, con $i_j \in \{1,\dots,4\}$, per ogni j da 1 ad n. C sarà l'intersezione di questi insiemi Q^n.

Dopodiché si procederà nel costruire la funzione potenziale f, e si farà vedere che su $\boldsymbol{Q}$, essa avrà gradiente coincidente con F. Per far ciò, useremo delle funzioni di raccordo lisce $\phi_{i_1,\dots,i_n}$ che si comporteranno come delle specie di funzioni caratteristiche per i vari quadrati $Q_{i_1,\dots,i_n}$. È molto importante il fatto che avremo delle stime su gradiente ed hessiana di queste funzioni cut-off.

Definiremo dei vettori $a_{i_1,\dots,i_k}$ in modo che

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_k} = \fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} F\ .$$

Considereremo poi ad ogni passo $n \geq 1$ una funzione f_n che sarà così definita

$$f_n(x) = \sum_{i_1,\dots,i_n} \phi_{i_1,\dots,i_n}(x) < a_{i_1,\dots,i_n}, x - c_{i_1,\dots,i_n} >\ ,$$

dove $c_{i_1,\dots,i_n}$ è il centro del quadrato $Q_{i_1,\dots,i_n}$.

Possiamo subito notare il perché di questa scelta. Se si scrive il gradiente della funzione f_n si trova che per qualsiasi punto x in Q^n si ha che

$$\nabla f_n(x) = a_{i_1,\dots,i_n} \ .$$

Infatti la parte del gradiente corrispondente alle funzioni $\phi_{i_1,\dots,i_n}$ è nulla poichè il punto x si trova dentro ad un quadrato $Q_{i_1,\dots,i_n} \subset Q^n$, e dunque rimane solo la parte corrispondente al prodotto scalare, il cui gradiente è il vettore $a_{i_1,\dots,i_n}$, che è la media integrale di F sul quadrato $Q_{i_1,\dots,i_n}$. Se ora consideriamo la seguente sommatoria $\sum_{n=1}^{k} f_n$, e ne facciamo il gradiente si ha che per ogni punto x che sta in $Q^1 \cap \dots \cap Q^k$

$$\nabla \left(\sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{k} \nabla f_n(x) = \sum_{n=1}^{k} a_{i_1,\dots,i_n} = \fint_{Q_{i_1,\dots,i_k}} F \, dz \ .$$

Restringendo sempre più i quadrati $Q_{i_1,\dots,i_n}$ fino a farli collassare in un punto, che chiameremo $\hat{x}$, intuitivamente la media tenderà al valore $F(\hat{x})$.

Definiamo quindi la funzione $f = f_\alpha$ come la serie delle f_n,

$$f = \sum_{n \geq 1} f_n \ .$$

Si noti subito una cosa: se x appartiene C, per qualsiasi $n \geq 1$, esiste ed è unico il quadrato $Q_{i_1,\dots,i_n}$ della n-esima generazione tale che $x \in Q_{i_1,\dots,i_n}$, dunque $\nabla f_n(x) = a_{i_1,\dots,i_n}$. Inoltre, poiché il campo vettoriale F è continuo e i quadrati $Q_{i_1,\dots,i_n}$ si restringono ad x, la media $\fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} F$ tende ad $F(x)$ per n che tende ad infinito. Se quindi si può operare lo scambio tra gradiente e serie si può scrivere che per ogni x in C

$$\nabla f(x) = \sum_{n \geq 1} \nabla f_n(x) = \sum_{n \geq 1} a_{i_1,\dots,i_n} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_k} = \lim_{n \to +\infty} \fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} F \, dz = F(x) \ ,$$

cioè su C, f è il potenziale di F.

Ci proponiamo quindi di dimostrare che questo scambio è possibile, e per far ciò si mostrerà che la serie delle f_n converge nella topologia $\mathscr{C}^1$. Si mostrerà in particolare che la serie delle derivate converge uniformemente in $\boldsymbol{Q}$. Per mostrarlo si utlizzano le stime sulle derivate delle funzioni di raccordo che entrano nella definizione delle f_n, ed anche una stima sulla norma dei vettori $a_{i_1,\dots,i_n}$.

Abbiamo dunque visto che la funzione f è di classe $\mathscr{C}^1$ e che almeno sull'insieme C il suo gradiente coincide con il campo vettoriale. Ci manca solo da vedere che il gradiente di f è lipschitziano, cioè che essa è nella classe delle funzioni $\mathscr{C}^{1,1}$. Per la densità di C in $\boldsymbol{Q}$ basterà vedere la lipschitzianità in $\boldsymbol{Q} \setminus C$. Si farà inizialmente vedere che le f_n hanno la matrice hessiana maggiorata in tutto $\boldsymbol{Q}$ in norma infinito da una costante K indipendente da n, grazie alle stime sulle funzioni di raccordo e sui vettori $a_{i_1,\dots,i_n}$. Dopodiché procede a dimostrare che f è di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $\boldsymbol{Q} \setminus C$ e che per gli x non appartenenti a C succede che $\nabla^2 f(x) = \nabla^2 f_m(x)$ per un qualche m naturale dipendente da x. Dunque per ogni x in $\boldsymbol{Q} \setminus C$, $\left\|\nabla^2 f(x)\right\| \leq K$ e ciò permette di concludere.

Per quanto riguarda la seconda parte, l'insieme $\boldsymbol{Q}$ è definito mediante un simile procedimento, solo che adesso sarà costruito in modo tale da soddisfare la richiesta che la sua misura di Lebesgue sia $1 - \varepsilon$. Le funzioni di raccordo saranno definite in modo simile a quelle della prima parte. Le funzioni f_n e la funzione $f = f_\varepsilon$ saranno invece definite esattamente nella medesima maniera. Seguendo la stessa idea si fa vedere, mediante nuove stime sul gradiente e l'hessiana delle f_n e sui vettori $a_{i_1,\dots,i_n}$, che la serie $\sum_{n \geq 1} \nabla f_n$ converge uniformemente in $\boldsymbol{Q}$. Dunque si ha nuovamente che f è di classe $\mathscr{C}^1$ e che si può effettuare lo scambio tra derivata e serie, giungendo alla conclusione che sul nuovo insieme C il gradiente di f coincide col campo vettoriale di partenza. L'unico punto in cui la seconda parte differisce sostanzialmente dalla prima è che ora non si riesce più a vedere che il gradiente di f è lipschitziano. In compenso però si vedrà che $\nabla f \in \bigcap\limits_{0<\beta<1} \mathscr{C}^{1,\beta}$. Per vedere ciò si farà una stima sulla norma infinito dell'hessiana delle f_n, non più indipendente da n come nella prima parte. Difatti si trova che

$$\operatorname{lip}(\nabla f_n) \leq \left\|\nabla^2 f_n\right\|_\infty \leq K \cdot n^4 \ ,$$

dove K è una costante. Dopodiché, usando questa stima, si dimostra che per ogni $x, y \in \boldsymbol{Q}$

$$\left\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\right\| \leq K \left(\left|\log_2 \|x-y\|\right|\right)^5 \|x-y\| \ .$$

Ora fissiamo $0 < \beta < 1$ e riscriviamo $\|x-y\|$ come $\|x-y\|^\beta \|x-y\|^{1-\beta}$. Per risultati noti possiamo maggiorare $\left(\left|\log_2 \|x-y\|\right|\right)^5 \|x-y\|^\beta$ con una costante, e dunque concludere il teorema.

2 Inizio della dimostrazione della parte *(i)* del Teorema 1

Denotiamo con $0 < \delta = 2^{-\frac{2}{2-\alpha}}$. Si noti che $\delta < 1/2 \iff \alpha > 0$. Ora procederemo a costruire ricorsivamente un insieme C di Cantor che sarà contenuto nell'insime l'insieme $\mathscr{A}_{f_\alpha,F}$ del primo enunciato.

Al primo passo si divida $\boldsymbol{Q}$ in quattro quadrati uguali $\tilde{Q}_i$, $i = 1,...,4$. Definiamo Q_i come il quadrato avente lo stesso centro di $\tilde{Q}_i$, ma con lato lungo $\delta < 1/2$.

Al passo n-esimo si supponga di avere i quadrati $Q_{i_1,...,i_n}$; da ciascuno di questi, seguendo lo stesso ragionamento fatto al primo passo, costruiamo quattro quadrati $Q_{i_1,...,i_n,i}$, $i = 1,...,4$ di lato δ volte la lunghezza del lato di $Q_{i_1,...,i_n}$.

Dunque ad un generico passo n avremo 4^n quadrati chiusi disgiunti e ben staccati di lato δ^n. Per ogni $n \geq 1$, definiamo l'unione

$$Q^n := \bigcup_{\substack{i_1,...,i_n \\ i_j \in \{1,...,4\}}} Q_{i_1,...,i_n}$$

e sia quindi $C := \bigcap_{n \geq 1} Q^n$.

Sia poi $\hat{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{esiste } y \in \mathbb{R} \text{ tale che } (x,y) \in C\}$ la proiezione di C sull'asse delle ascisse. La proiezione sull'asse y è lo stesso insieme. Per $n \geq 1$, siano $I_{n,k}$, $k = 1,...,2^n$, le proiezioni su $\mathbb{R}$ dei vari $Q_{i_1,...,i_n}$. È facile vedere che $\hat{C}$ è un insieme di Cantor e che

$$\hat{C} = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k} \ .$$

Si noti inoltre che $\operatorname{diam}(I_{n,k}) = \delta^n$.

3 Dimensione di Hausdorff dell'insieme C

Il seguente lemma è utilizzato per dimostrare che la $\dim C \geq 2 - \alpha$.

Lemma 1. *Se* $s = \frac{2-\alpha}{2}$, $\mathscr{H}^s(\hat{C}) > 0$.

Dimostrazione. Procederemo col dimostrare che

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \operatorname{diam}(I_j)^s \geq \frac{1}{4} \tag{2}$$

per ogni successione di intervalli aperti $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ che ricoprono la proiezione $\hat{C}$. Infatti se dimostriamo la (2) allora la prova del Lemma 1 segue grazie al seguente ragionamento. Sia $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ un qualsiasi ricoprimento di $\hat{C}$ con insiemi di diametro al più $\rho > 0$. Per ogni $i \in \mathbb{N}$ consideriamo l'inviluppo convesso di C_i, che denoteremo D_i. Esso sarà un intervallo contenente C_i e tale che $\mathrm{diam}(D_i) = \mathrm{diam}(C_i)$. Dopodiché allarghiamo questo intervallo (per comodità, chiameremo ancora D_i questo nuovo intervallo) rendendolo aperto ed in modo tale che $\mathrm{diam}(D_i) \leq (1+\varepsilon)\,\mathrm{diam}(C_i)$, dove $\varepsilon > 0$ è generico. Ora i $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sono intervalli aperti che ricoprono $\hat{C}$. A questo punto si ha che

$$\sum_{i=i}^{+\infty} \mathrm{diam}(C_i)^s \geq \sum_{i=i}^{+\infty} \frac{\mathrm{diam}(D_i)^s}{(1+\varepsilon)^s} \geq \frac{1}{4}\,\frac{1}{(1+\varepsilon)^s} \; .$$

Per la genericità di $\varepsilon > 0$ deduciamo che $\sum\limits_{i=i}^{+\infty} \mathrm{diam}(C_i)^s \geq \dfrac{1}{4}$.

Da questa disuguaglianza si ha dunque che $\mathscr{H}^s(\hat{C}) > 0$.

Dimostriamo dunque la stima (2). Siccome $\hat{C}$ è compatto, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\hat{C} \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} I_j$, e d'ora in poi cosidereremo solo gli intervalli $I_1, ..., I_m$.

Poichè $\hat{C}$ non ha punti interni, si possono allargare un po' gli intervalli in modo che gli estremi di I_j appartengano ad $\mathbb{R} \setminus \hat{C}$, per ogni $j = 1, ..., m$. Specificamente, per ogni I_j prendiamo un intervallo aperto I'_j contenente I_j e tale che i suoi estremi non stiano in $\hat{C}$; inoltre fissato un qualsiasi $\varepsilon > 0$, questi I'_j si possono prendere in modo che il $\mathrm{diam}(I'_j) \leq (1+\varepsilon)\,\mathrm{diam}(I_j)$, poiché $\hat{C}$ è un insieme mai denso.

Se dimostriamo che

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{diam}(I'_j)^s \geq 1/4 \tag{3}$$

allora si avrà che

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{diam}(I_j)^s \geq \sum_{j=1}^{m} \mathrm{diam}(I_j)^s \geq \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathrm{diam}(I'_j)^s}{(1+\varepsilon)^s} \geq \frac{1}{4}\,\frac{1}{(1+\varepsilon)^s}$$

e dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario e non dipende dagli I_j, la disuguaglianza (2) segue.

Consideriamo dunque gli I'_j; per ogni $j = 1, ..., m$ siano a_j, b_j i suoi estremi. Dato che $\hat{C}$ è chiuso e gli intervalli sono in numero finito, esiste $r > 0$ tale che $\mathrm{dist}(a_j, \hat{C})$, $\mathrm{dist}(b_j, \hat{C}) \geq r$ per ogni j. Prendo $n \in \mathbb{N}$ grande tale che $\delta^n < r$. Allora per ogni k esiste un j tale che $I_{n,k} \subseteq I'_j$. Infatti siccome ogni

$I_{n,k}$ contiene un punto di $\hat{C}$, esisterà un I'_j tale che $I'_j \cap I_{n,k} \neq \varnothing$, e se fosse che $I_{n,k} \nsubseteq I'_j$, allora $\min\{\operatorname{dist}(a_j, \hat{C}), \operatorname{dist}(b_j, \hat{C})\} \leq \delta^n < r$, assurdo.

Mostreremo ora che per ogni intervallo aperto generico I e fissato ℓ

$$\sum_{I_{\ell,k} \subseteq I} \operatorname{diam}(I_{\ell,k})^s \leq 4 \operatorname{diam}(I)^s \,. \tag{4}$$

Questo dà la (3) poiché

$$4 \sum_j \operatorname{diam}(I'_j)^s \geq \sum_j \sum_{I_{n,k} \subseteq I'_j} \operatorname{diam}(I_{n,k})^s \underset{(\diamond)}{\geq} \sum_{k=1}^{2^\ell} \operatorname{diam}(I_{n,k})^s = 2^\ell \delta^{s\ell} = (2\delta^s)^\ell \underset{s=\frac{2-\alpha}{2}}{=} 1,$$

dove in $(\diamond)$ si è usato il fatto che per ogni k esiste un j tale che $I_{n,k} \subseteq I'_j$.

Per vedere la (4) si supponga che ci sia qualche intervallo $I_{\ell,k}$ dentro ad I e sia h il più piccolo intero per cui I contenga qualche $I_{h,k}$. Si ha che $h \leq \ell$ e che $\operatorname{diam}(I) \geq \operatorname{diam}(I_{h,k})$. Siano $I_{h,t_1}, ..., I_{h,t_p}$ tutti gli intervalli della h-esima generazione che hanno intersezione non vuota con I. Allora $p \leq 4$ altrimenti I conterrebbe qualche $I_{h-1,k}$. Quindi si ha

$$4 \operatorname{diam}(I)^s \geq \sum_{i=1}^{p} \operatorname{diam}(I_{h,t_i})^s \underset{(\triangle)}{=} \sum_{i=1}^{p} \sum_{I_{\ell,k} \subseteq I_{h,t_i}} \operatorname{diam}(I_{\ell,k})^s \geq \sum_{I_{\ell,k} \subseteq I} \operatorname{diam}(I_{\ell,k})^s \,.$$

L'identità $(\triangle)$ vale perché per ogni h, ℓ con $h \leq \ell$ $\operatorname{diam}(I_{h,t})^s = \sum_{I_{\ell,k} \subseteq I_{h,t}} \operatorname{diam}(I_{\ell,k})^s$. Infatti per costruzione $I_{h,t}$ conterrà $\ell - h$ intervalli della generazione ℓ-esima, e quindi bisogna vedere che $\delta^{sh} = 2^{\ell-h}\,\delta^{s\ell} = \delta^{sh}\,2^{\ell-h}\delta^{s(\ell-h)} = \delta^{sh}(2\delta^s)^{\ell-h}$, che è vera perché $2\delta^s = 1$.

$\square$

Proposizione 1. *La dimensione di Hausdorff di C è $\dim_E C = 2 - \alpha$.*

Dimostrazione. i) Per ogni $n \geq 1$, $C \subseteq Q^n$. Dunque si ha

$$\mathscr{H}^s_{\sqrt{2}\delta^n}(C) \leq \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \\ i_j \in \{1,\dots,4\}}} \left(\sqrt{2}\delta^n\right)^s = 4^n\, 2^{s/2}\, \delta^{ns} = 2^{s/2}(4\delta^s)^n \,.$$

Se vogliamo un limite superiore per la dimensione di Hausdorff, allora è necessario che il termine di destra stia limitato per $n \to +\infty$ ($\sqrt{2}\delta^n \to 0^+$). Il più piccolo s per cui ciò accade è dato da

$$4\delta^s = 1 \iff s = \frac{\log(4)}{\log(\frac{1}{\delta})} = 2 - \alpha \,.$$

Perciò se $s \leq 2 - \alpha$, si avrà $\mathscr{H}^s(C) \leq 2^{s/2} \cdot 1 < +\infty$, e quindi $\dim C \leq 2 - \alpha$.

ii) Se mostriamo che $\mathscr{H}^s(C) > 0$ per $s \geq 2 - \alpha$, avremo che $dim\, C \geq 2 - \alpha$ e dunque la tesi.

Siccome $C = \hat{C} \times \hat{C}$, per il teorema sulla dimensione del prodotto si ha che

$$H^s(C) \geq H^{s/2}(\hat{C}) \cdot H^{s/2}(\hat{C})$$

e per il Lemma 1 si ha che il secondo termine è strettamente positivo per $s \geq 2 - \alpha$.

$\square$

4 Funzioni di raccordo

Nella dimostrazione del Teorema 1 avremo bisogno di funzioni di raccordo lisce che ora procederemo a costruire.

Sia $\varepsilon > 0$ e $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiamo la funzione

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -(1+\varepsilon) \leq x \leq 1+\varepsilon \\ 0 & \text{se } x \leq -(2+\varepsilon) \vee x \geq 2+2\varepsilon \\ (1+2\varepsilon - x)/\varepsilon & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e sia $\chi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione pari $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, con $\mathrm{supp}(\chi) = [-1, 1]$ e tale che $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\, dx = 1$.

Per $0 < \eta < \varepsilon$ definiamo $\chi_\eta(x) := \frac{1}{\eta}\chi(\frac{x}{\eta})$. Allora si avrà $\mathrm{supp}(\chi_\eta) = [-\eta, \eta]$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_\eta(x)\, dx = 1$.

Ora definiamo la regolarizzazione di ψ

$$\psi_\eta(x) := \int_{\mathbb{R}} \chi_\eta(x-y)\, \psi(y)\, dy.$$

Si ha che ψ_η è di classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Sempre grazie allo stesso teorema, ed usando l'integrazione per parti, abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\psi_\eta(x) &= \frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}}\chi_\eta(x-y)\,\psi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x}\big(\chi_\eta(x-y)\big)\,\psi(y)\,dy = \\ &= -\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial y}\big(\chi_\eta(x-y)\big)\,\psi(y)\,dy = \int_{[-2,2]}\frac{\partial}{\partial y}\big(\chi_\eta(x-y)\big)\,\psi(y)\,dy = \\ &= -\underbrace{\chi_\eta(x-y)\,\psi(y)\Big|_{y=-2}^{y=2}}_{0 \text{ perché } \psi(-2)=\psi(2)=0} + \int_{[-2,2]}\chi_\eta(x-y)\,\psi'(y)\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}}\chi_\eta(x-y)\,\psi'(y)\,dy.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi che

$$\big|\psi_\eta'(x)\big| \le \int_{[a,b]}\chi_\eta(x-y)\underbrace{\big|\psi'(y)\big|}_{\le\frac{1}{\varepsilon}}\,dy \le \frac{1}{\varepsilon}\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\chi_\eta(x-y)\,dy}_{1} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

In $\mathbb{R}^2$ introduciamo le funzioni cut-off

$$\phi_\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \psi_\eta(x)\psi_\eta(y).$$

Si avrà che $\left\|\nabla\phi_\eta\right\|_\infty \le \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$.

Ora stimiamo la derivata seconda di ψ_η:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\psi_\eta(x) &= \frac{d^2}{dx^2}\int_{\mathbb{R}}\chi_\eta(x-y)\,\psi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(\chi_\eta(x-y)\big)\,\psi(y)\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(\chi_\eta(x-y)\big)\,\psi(y)\,dy = \int_{[-2,2]}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(\chi_\eta(x-y)\big)\,\psi(y)\,dy = \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\chi_\eta(x-y)\,\psi(y)\Bigg|_{y=-2}^{y=2}}_{0} - \int_{[-2,2]}\frac{\partial}{\partial y}\big(\chi_\eta(x-y)\big)\,\psi'(y)\,dy = \\ &= -\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial y}\big(\chi_\eta(x-y)\big)\,\psi'(y)\,dy.\end{aligned}$$

Dunque, si trova

$$\big|\psi_\eta''(x)\big| \le \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial}{\partial y}\big(\chi_\eta(x-y)\big)\right|\underbrace{\big|\psi'(y)\big|}_{\le\frac{1}{\varepsilon}}\,dy \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{x-\eta}^{x+\eta}\big|\chi_\eta'(x-y)\big|\,dy, \tag{5}$$

ed ora

$$\chi_\eta(x) = \frac{1}{\eta}\chi\left(\frac{x}{\eta}\right) \implies \chi'_\eta(x) = \frac{1}{\eta^2}\chi'\left(\frac{x}{\eta}\right) \implies \left\|\chi'_\eta\right\|_\infty \leq \frac{1}{\eta^2}\|\chi'\|_\infty .$$

Si noti che $\|\chi'\|_\infty < +\infty$ perchè χ' è $\mathscr{C}^\infty$ a supporto compatto.

Se quindi $\varepsilon/2 \geq \eta \geq \varepsilon/4$, allora $\left\|\chi'_\eta\right\|_\infty \leq \frac{16}{\varepsilon^2}\|\chi'\|_\infty$ e dunque tornando alla (5):

$$\left|\psi''_\eta(x)\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}\big(x+\eta-(x-\eta)\big)\frac{16}{\varepsilon^2}\|\chi'\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon}2\eta\frac{16}{\varepsilon^2}\|\chi'\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon\frac{16}{\varepsilon^2}\|\chi'\|_\infty = \frac{16}{\varepsilon^2}\|\chi'\|_\infty .$$

A meno di supporre $\|\chi'\|_\infty \leq \frac{1}{16}$, si ha che $\left\|\psi''_\eta\right\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$.

La matrice hessiana di ϕ_η è

$$\nabla^2\phi_\eta = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_\eta & \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\phi_\eta \\ \frac{\partial^2}{\partial y\partial y}\phi_\eta & \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi_\eta \end{pmatrix}.$$

Ora, dalle relazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_\eta(x,y) &= \psi''_\eta(x)\psi_\eta(y), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi_\eta(x,y) &= \psi_\eta(x)\psi''_\eta(y), \\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\phi_\eta(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\psi_\eta(x,y) = \psi'_\eta(x)\psi'_\eta(y), \end{aligned}$$

e da $\left\|\psi_\eta\right\|_\infty \leq 1$, $\left\|\psi'_\eta\right\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon}$, $\left\|\psi''_\eta\right\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$ si ha che tutte le derivate seconde parziali di ϕ_η sono in valore assoluto $\leq \frac{1}{\varepsilon^2}$, e quindi

$$\left\|\nabla^2\phi_\eta\right\|_\infty \leq \sqrt{4\frac{1}{\varepsilon^4}} = \frac{2}{\varepsilon^2} .$$

5 Costruzione di f_α

Definiamo su $\boldsymbol{Q}$ delle funzioni di raccordo tali che $0 \leq \phi_{i_1,\dots,i_n} \leq 1$ e

$$\phi_{i_1,\dots,i_n} = \begin{cases} 1 & \text{su}\,\big(1+(1/2-\delta)/3\big)\,Q_{i_1,\dots,i_n} \\ 0 & \text{fuori da}\,\big(1+(1/2-\delta)/2\big)\,Q_{i_1,\dots,i_n} \end{cases} .$$

L'ampiezza dell'intervallo dove la funzione si raccorda in modo $\mathscr{C}^\infty$ da 0 a 1 è $\varepsilon = \frac{1/2-\delta}{6}\,\delta^n$, dunque

$$\left\|\nabla\phi_{i_1,\dots,i_n}\right\|_\infty \le \frac{6\sqrt{2}}{(1/2-\delta)\delta^n} = \frac{K}{(1/2-\delta)\delta^n}\ , \tag{6}$$

$$\left\|\nabla^2\phi_{i_1,\dots,i_n}\right\|_\infty \le \frac{2\cdot 36}{(1/2-\delta)^2\delta^{2n}} = \frac{K}{(1/2-\delta)^2\delta^{2n}}\ . \tag{7}$$

Per qualunque insieme misurabile $A \subseteq \boldsymbol{Q}$ denotiamo la media di F su A:

$$\fint_A F\,dx = \frac{1}{\mu(A)}\int_A F(x)\,dx\ .$$

Ad ogni quadrato $Q_{i_1,\dots,i_n}$ associeremo un vettore $a_{i_1,\dots,i_n}$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} a_i &= \fint_{Q_i} F\,dx,\ \ i = 1,\dots,4\ , \\ a_{i_1 i_2} &= \fint_{Q_{i_1 i_2}} F\,dx - \fint_{Q_{i_1}} F\,dx\ , \\ a_{i_1,\dots,i_n} &= \fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} F\,dx - \fint_{Q_{i_1,\dots,i_{n-1}}} F\,dx\ . \end{aligned}$$

Dalla definizione di $a_{i_1,\dots,i_n}$ si ha che

$$\sum_{k=1}^n a_{i_1,\dots,i_k} = \fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} F\,dx\ .$$

Per ipotesi F è un campo vettoriale lipschitziano, e sia L la costante di Lipschitz di F. Proviamo che

$$\left\|a_{i_1,\dots,i_n}\right\| \le K\delta^n\ . \tag{8}$$

Infatti, se denotiamo con x_0 il centro di $Q_{i_1,\dots,i_n}$, e sapendo che il lato del generico quadrato $Q_{i_1,\dots,i_{n-1}}$ è δ^{n-1}

$$
\begin{aligned}
\|a_{i_1,\dots,i_n}\| =& \Big\| \fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} F(x)\,dx - \fint_{Q_{i_1,\dots,i_{n-1}}} F(y)\,dy \Big\| \\
=& \Big\| \fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} \big(\cancel{F(x_0)} + F(x) - F(x_0)\big)\,dx - \\
& \qquad - \fint_{Q_{i_1,\dots,i_{n-1}}} \big(\cancel{F(x_0)} + F(y) - F(x_0)\big)\,dy \Big\| \\
\le& \fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} \|F(x) - F(x_0)\| dx + \fint_{Q_{i_1,\dots,i_{n-1}}} \|F(y) - F(x_0)\| dy \\
\le& L\Big[\fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} \underbrace{\|x - x_0\|}_{\le \frac{\sqrt{2}}{2}\delta^{n-1}} dx + \fint_{Q_{i_1,\dots,i_{n-1}}} \underbrace{\|y - x_0\|}_{\le \frac{\sqrt{2}}{2}\delta^{n-1}} dy \Big] \\
\le& \underbrace{\frac{\sqrt{2}L}{\delta}}_{:=K<+\infty} \delta^n = K\delta^n \ .
\end{aligned}
$$

Definiamo la funzione f_α dell'enunciato del teorema nel seguente modo. Per ogni $n \ge 1$ sia

$$
f_n(x) = \sum_{i_1,\dots,i_n} \phi_{i_1,\dots,i_n}(x) < a_{i_1,\dots,i_n}, x - c_{i_1,\dots,i_n} > \ ,
$$

dove $c_{i_1,\dots,i_n}$ è il centro di $Q_{i_1,\dots,i_n}$ e con $< \cdot, \cdot >$ si intende il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^2$. Quindi definiamo $f = f_\alpha$ come

$$
f_\alpha = \sum_{n\ge1} f_n \ . \tag{9}
$$

Ora mostriamo che la serie $\sum\limits_{n\ge1} f_n$ converge nella topologia $\mathscr{C}^1$. Per far ciò mostreremo che

$$
\sum_{k\ge n} \|\nabla f_k\|_\infty \le \frac{K}{1/2 - \delta}\delta^n, \ \ n \ge 1 \ . \tag{10}
$$

Iniziamo con la convergenza puntuale della serie (9). Per ogni $x \in \boldsymbol{Q}$, esiste al massimo un $Q_{i_1,\dots,i_n} \subset Q^n$ della generazione n-esima tale che $\phi_{i_1,\dots,i_n}(x) \ne 0$, poiché le funzioni $\phi_{i_1,\dots,i_n}$ hanno supporto a due a due disgiunti. Perciò per ogni $n \ge 1$ esiste ed è unica la n-upla $i_1,\dots,i_n$ con $i_j \in \{1,\dots,4\}$ per cui $f_n(x) = \ \phi_{i_1,\dots,i_n}(x) < a_{i_1,\dots,i_n}, x - c_{i_1,\dots,i_n} >$.

Dunque $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} < a_{i_1,\dots,i_n}, x - c_{i_1,\dots,i_n} >$ e quindi

$$
|f(x)| \le \sum_{n\ge1}^{+\infty} \underbrace{|a_{i_1,\dots,i_n}|}_{\le K\delta^n} \underbrace{|x - c_{i_1,\dots,i_n}|}_{\le\sqrt{2}\delta^n} \le \sqrt{2}K \sum_{n\ge1}^{+\infty} \delta^{2n} < +\infty \quad (\text{perchè } 0 < \delta^2 < 1/4) \ .
$$

Proviamo ora la convergenza uniforme della serie delle derivate. Per $k \geq n+1$ si ha che $f_k \equiv 0$ fuori da Q^n e perciò nella dimostrazione di (10) consideriamo solo i punti $x \in Q^n$. Prendiamo in particolare $x \in Q^n \setminus C$ cosicché esistono al più finiti quadrati $Q^x_{i_1,\dots,i_j}$ tali che $x \in Q^x_{i_1,\dots,i_j}$ con $j = 1, \dots m-1$, dove $m \in \mathbb{N}$ dipende da x. Supponiamo inoltre che x stia nell'interno di $Q^x_{i_1,\dots,i_{m-1}}$ per non complicare ulteriormente la dimostrazione; il caso in cui x stia nel bordo è comunque analogo. Inoltre per ogni $k = n, \dots, m$, esiste ed è unica la k-upla $i^x_1, \dots, i^x_k$ per cui $\phi_{i^x_1,\dots,i^x_k}(x) \neq 0$ (è la k-upla associata al quadrato $Q^x_{i_1,\dots,i_j}$), perciò

$$\begin{aligned}
f_k(x) &= \sum_{i_1,\dots,i_k} \phi_{i_1,\dots,i_k}(x) < a_{i_1,\dots,i_n}, x - c_{i_1,\dots,i_k} > \\
&= \phi_{i^x_1,\dots,i^x_k}(x) < a_{i^x_1,\dots,i^x_n}, x - c_{i^x_1,\dots,i^x_k} > \\
&= \phi_{i_1,\dots,i_n}(x) < a_{i_1,\dots,i_n}, x - c_{i_1,\dots,i_k} > \ \text{(con abuso di notazione)}
\end{aligned}$$

e ciò vale anche per ogni $z \in U$, dove U è un qualche opportuno intorno di x, sicché

$$\nabla f_k(x) = \nabla\phi_{i_1,\dots,i_k}(x) < a_{i_1,\dots,i_k}, x - c_{i_1,\dots,i_k} > + \phi_{i_1,\dots,i_k}(x)\, a_{i_1,\dots,i_k} \ .$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq n} \left\| \nabla f_k(x) \right\| &= \sum_{k=n}^{m} \left\| \nabla f_k(x) \right\| \\
&= \sum_{k=n}^{m} \left\| \nabla\phi_{i_1,\dots,i_k}(x) < a_{i_1,\dots,i_k}, x - c_{i_1,\dots,i_k} > + \ \phi_{i_1,\dots,i_k}(x)\, a_{i_1,\dots,i_k} \right\| \\
&\leq \sum_{k=n}^{m} \Big(\left\| \nabla\phi_{i_1,\dots,i_k}(x) \right\| \left| < a_{i_1,\dots,i_k}, x - c_{i_1,\dots,i_k} > \right| + \\
&\qquad\qquad + \left\| \phi_{i_1,\dots,i_k}(x) \right\| \left\| a_{i_1,\dots,i_k} \right\| \Big) \\
&\underset{(\star)}{\leq} \left(\sum_{k=n}^{m} \underbrace{\left\| a^x_{i_1,\dots,i_k} \right\|}_{\underset{(8)}{\leq} K\delta^k} \right) + \underbrace{\left\| \nabla\phi_{i_1,\dots,i_m}(x) \right\|}_{\underset{(6)}{\leq} \frac{K}{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\delta^m}} \underbrace{\left\| a^x_{i_1,\dots,i_m} \right\|}_{\underset{(8)}{\leq} K\delta^m} \underbrace{\left\| x - c^x_{i_1,\dots,i_m} \right\|}_{\leq \left(1 + \frac{1/2-\delta}{2}\right)\delta^m} \\
&\leq \left(K \sum_{k=n}^{m} \delta^k \right) + \frac{\hat{K}\delta^m}{\frac{1}{2}-\delta} \underset{(\star\!\!\!\!\bigcirc)}{=} \frac{K\delta^n}{\frac{1}{2}-\delta} + \frac{\hat{K}\delta^n}{\frac{1}{2}-\delta} = \frac{\tilde{K}}{\frac{1}{2}-\delta}\delta^n \ .
\end{aligned}$$

In $(\star)$ si è usato il fatto che per ogni $k = n, \dots, m-1$, $\nabla\phi_{i_1,\dots,i_k}(x) = 0$, perchè x appartiene all'interno di $Q_{i_1,\dots,i_{m-1}}$ e dunque c'è tutto un intorno di x per cui $\phi_{i_1,\dots,i_k}(x) \equiv 1$ (è costante), ed in (☆) il fatto che se $m \geq n$ allora

$\delta^m \leq \delta^n$ e che

$$\sum_{k=n}^{m} \delta^k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \delta^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^k - \sum_{k=n}^{n-1} \delta^k = \frac{1}{1-\delta} - \frac{1-\delta^n}{1-\delta} = \frac{\delta^n}{1-\delta} \leq \frac{\delta^n}{\frac{1}{2}-\delta} \; .$$

Abbiamo dunque che in $\boldsymbol{Q} \setminus C$ vale la (10).

Sia ora $n \geq 1$ fissato. Per ogni $s \geq n$ e per ogni x $\in \boldsymbol{Q}$ definiamo la funzione $g_s(x) \coloneqq \sum_{k=n}^{s} \lVert \nabla f_k(x) \rVert$. Si ha che per ogni $s \geq n$, g_s è di classe $\mathscr{C}^\infty$ (nota: a noi basterebbe $\mathscr{C}^0$) perché per ogni $k \in \mathbb{N}$, $f_k \in \mathscr{C}^\infty$ (nota: a noi basterebbe $\mathscr{C}^1$).

Siccome l'insieme di Cantor C è totalmente disconnesso in $\boldsymbol{Q}$, per ogni $\hat{x} \in C$, esiste una successione $(x_t)_{t \in \mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{Q} \setminus C$ tale che $\lim\limits_{t \to +\infty} x_t = \hat{x}$. Inoltre sappiamo, per le stime fatte, che per ogni $s \geq n$ e per ogni $x \in \boldsymbol{Q} \setminus C$

$$g_s(x) \leq \sum_{k \geq n} \lVert \nabla f_k(x) \rVert \leq \frac{K}{\frac{1}{2}-\delta} \delta^n \; .$$

Dunque per continuità, passando al limite per $t \to +\infty$, si ha che per ogni $s \geq n$ e per ogni $\hat{x} \in C$

$$g_s(\hat{x}) \leq \frac{K}{\frac{1}{2}-\delta} \delta^n \; .$$

Passando ora al limite in s, si ha che per ogni $x \in \boldsymbol{Q}$,

$$\lim_{s \to +\infty} g_s(x) = \lim_{s \to +\infty} \sum_{k=n}^{s} \lVert \nabla f_k(x) \rVert = \sum_{k \geq n} \lVert \nabla f_k(x) \rVert \leq \frac{K}{\frac{1}{2}-\delta} \delta^n$$

perché la disuguaglianza viene preservata dal limite.

Dal momento che la stima (10) è una stima uniforme della serie delle derivate, f è di classe $\mathscr{C}^1$ e per di più è possibile effettuare lo scambio tra gradiente e sommatoria:

$$\nabla f(x) = \nabla \left(\sum_{n \geq 1} f_n(x) \right) = \sum_{n \geq 1} \nabla f_n(x) \; .$$

In particolare per $x \in C$ succede che

$$\nabla f(x) \underset{(\star)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{i_1,\ldots,i_n} = \lim_{n \to +\infty} \fint_{Q^x_{i_1,\ldots,i_n}} F \underset{(\text{\ding{73}})}{=} F(x) \; ,$$

dove in $(\star)$ si è usato il fatto che se $x \in C$, allora

$$\begin{aligned} \nabla f_n(x) &= \underbrace{\nabla \phi_{i_1,\ldots,i_n}(x)}_{=0} < a_{i_1,\ldots,i_n}, x - c_{i_1,\ldots,i_n} > + \underbrace{\phi_{i_1,\ldots,i_n}(x)}_{=1} \, a_{i_1,\ldots,i_n} \\ &= a_{i_1,\ldots,i_n} \end{aligned}$$

mentre in (☆) che F è un campo vettoriale continuo. Infatti per ogni $x \in \boldsymbol{Q}$ e per ogni $k \geq 1$, esiste $r_k > 0$ tale che

$$\|y - x\| \leq r_k \implies \left\|F(y) - F(x)\right\| \leq \frac{1}{k} \ .$$

Quindi per ogni $k \geq 1$ prendiamo n grande tale che $\operatorname{diam}(Q^x_{i_1,\dots,i_n}) = \sqrt{2}\delta^n \leq r_k$ cosicché

$$\begin{aligned}\left\| \fint_{Q^x_{i_1,\dots,i_n}} F(y)\,dy - F(x)\right\| &= \left\| \fint_{Q^x_{i_1,\dots,i_n}} \big(F(y) - F(x)\big)\,dy\right\| \\ &\leq \fint_{Q^x_{i_1,\dots,i_n}} \left\|F(y) - F(x)\right\| dy \\ &\leq \fint_{Q^x_{i_1,\dots,i_n}} \frac{1}{k}\,dy \ = \ \frac{1}{k} \ .\end{aligned}$$

Dimostriamo ora che il gradiente di f, ∇f, è lipschitziano. Poiché C è denso in $\boldsymbol{Q}$, basterà lavorare in $\boldsymbol{Q} \smallsetminus C$. Difatti se $x, y \in \boldsymbol{Q}$, esistono due successioni $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$, $(y_t)_{t\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{Q} \smallsetminus C$ tali che $\lim_{t\to+\infty} x_t = x$ e $\lim_{t\to+\infty} y_t = y$. Se quindi L è la costante di Lipschitz di ∇f in $\boldsymbol{Q} \smallsetminus C$ segue che

$$\left\|\nabla f(x_t) - \nabla f(y_t)\right\| \leq L\|x_t - y_t\| \xrightarrow[t\to+\infty]{f\in\mathscr{C}^1} \left\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\right\| \leq L\|x - y\| \ .$$

Dimostreremo che

$$\left\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\right\| \leq \frac{K}{\left(\frac{1}{2} - \delta\right)^2}\|x - y\|\,, \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{Q} \smallsetminus C. \tag{11}$$

Innanzitutto scriviamo la matrice hessiana di f_n con $n \geq 1$:

$$\nabla^2 f_n(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_n & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f_n \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f_n & \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} f_n \end{pmatrix} .$$

Per un generico vettore $a = (a_1, a_2)$ di $\mathbb{R}^2$ consideriamo la seguente funzione: $g(x) \coloneqq \phi(x) < a, x - y >$. Ora scriviamo per esteso le derivate parziali seconde di g:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} g(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\phi(x) < a, x-y > +2\,\frac{\partial}{\partial x_1}\phi(x)\, a_1 \ , \\
\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} g(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\phi(x) < a, x-y > + \frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x)\, a_1 \, + \, \frac{\partial}{\partial x_1}\phi(x)\, a_2 \ , \\
\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} g(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}\phi(x) < a, x-y > + \frac{\partial}{\partial x_1}\phi(x)\, a_2 \, + \, \frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x)\, a_1 \ , \\
\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} g(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\phi(x) < a, x-y > +2\,\frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x)\, a_2 \ .
\end{aligned}$$

Dunque

$$\nabla^2 g(x) = \nabla^2\phi(x) < a, x-y > + \begin{pmatrix} 2\frac{\partial}{\partial x_1}\phi(x)\, a_1 & \frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x)\, a_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\phi(x)\, a_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\phi(x)\, a_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x)\, a_1 & 2\frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x)\, a_2 \end{pmatrix} .$$

Indichiamo con

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & \frac{v_1 w_2 + v_2 w_1}{2} \\ \frac{v_1 w_2 + v_2 w_1}{2} & v_2 w_2 \end{pmatrix} .$$

Si noti che usando norma matriciale $\|A\| = \sqrt{\sum a_i^2}$, segue che $\|\underline{v} \otimes \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\|\,\|\underline{w}\|$; il fatto importante è che riusciamo a maggiorare con le norme dei due vettori a meno di moltiplicazione per una costante, e ciò sarebbe valso con qualsiasi norma matriciale. Dunque $\nabla^2 g(x) = \nabla^2\phi(x) < a, x-y > +2\big(\nabla\phi(x) \otimes a\big)$ e quindi

$$\nabla^2 f_n = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \nabla^2\phi_{i_1,\ldots,i_n} < a_{i_1,\ldots,i_n}, x - y_{i_1,\ldots,i_n} > +2 \sum_{i_1,\ldots,i_n} \nabla\phi_{i_1,\ldots,i_n} \otimes a_{i_1,\ldots,i_n} \ .$$

Effettuiamo ora una stima

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla^2 f_n(x)\right\|_\infty &= \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_n} \nabla^2\phi_{i_1,\ldots,i_n}(x) < a_{i_1,\ldots,i_n}, x - y_{i_1,\ldots,i_n} > +2 \sum_{i_1,\ldots,i_n} \nabla\phi_{i_1,\ldots,i_n}(x) \otimes a_{i_1,\ldots,i_n} \right\| \\
&\underset{(\star)}{=} \left\|\nabla^2\phi_{i_1,\ldots,i_n}(x) < a_{i_1,\ldots,i_n}, x - y_{i_1,\ldots,i_n} > +2\,\nabla\phi_{i_1,\ldots,i_n}(x) \otimes a_{i_1,\ldots,i_n}\right\| \\
&\leq \left\|\nabla^2\phi_{i_1,\ldots,i_n}\right\|_\infty \left\|a_{i_1,\ldots,i_n}\right\| \left\|x - y_{i_1,\ldots,i_n}\right\| + 2\left\|\nabla\phi_{i_1,\ldots,i_n}\right\|_\infty \left\|a_{i_1,\ldots,i_n}\right\| \\
&\underset{(\star\!\!\!\!\star)}{\leq} \frac{K}{(1/2-\delta)^2\delta^{2n}} \cdot K\delta^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\delta^n + 2\,\frac{K}{\underbrace{(1/2-\delta)}_{\geq (1/2-\delta)^2}\delta^n} \cdot K\delta^n \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{K^2}{(1/2-\delta)^2} + 2\frac{K^2}{(1/2-\delta)^2} = \frac{\hat{K}}{(1/2-\delta)^2}
\end{aligned} ,$$

dove $(\star)$ è dato dal fatto che $\nabla^2\phi_{i_1,\dots,i_n}(x)$ e $\nabla\phi_{i_1,\dots,i_n}(x)$ sono non nulli al massimo per una n-upla $(i_1,\dots,i_n)$ perché le funzioni $\phi_{i_1,\dots,i_n}$ di raccordo hanno supporto a due a due disgiunto e ben staccato, mentre in $(\star)$ si sono usate le stime (6), (7) e (8). Si ha perciò la seguente stima per ogni $n \geq 1$ e per ogni $x \in \boldsymbol{Q}$

$$\left\|\nabla^2 f_n(x)\right\|_\infty \leq \frac{\hat{K}}{(1/2-\delta)^2} \ . \tag{12}$$

Ora si noti che $\nabla^2 f : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ è di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $\boldsymbol{Q} \setminus C$. Difatti C è chiuso e dunque $\boldsymbol{Q} \setminus C$ è aperto, quindi se $x_0 \in \boldsymbol{Q} \setminus C$, esiste un intorno aperto U di x_0 tale che $U \cap C = \varnothing$. Per il modo in cui C è costruito, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $U \cap Q^n = \varnothing$, e quindi per ogni $z \in U$ ed ogni $k \geq n+1$

$$f_k(z) = 0,\ \nabla f_k(z) = 0,\ \nabla^2 f_k(z) = 0 \ .$$

Dunque per ogni $z \in U$, $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(z) = \sum_{k\leq n} f_k(x)$; le f_k sono di classe $\mathscr{C}^\infty$ e la sommatoria è finita, quindi $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$. Siccome il ragionamento non dipendeva da $x_0 \in \boldsymbol{Q} \setminus C$, si ha che $f \in \mathscr{C}^\infty(\boldsymbol{Q} \setminus C)$.

Ora se $x \in \boldsymbol{Q} \setminus C$, esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che $f_m(x) \neq 0$ e $f_k(x) = 0$ per ogni $k > m$ e quindi

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x) \implies \nabla^2 f(x) = \sum_{k=1}^{m} \nabla^2 f_k(x) = \nabla^2 f_m(x) \ .$$

Dunque per la (12) si ha che per ogni $x \in \boldsymbol{Q} \setminus C$

$$\left\|\nabla^2 f(x)\right\| = \left\|\nabla^2 f_m(x)\right\| \leq \frac{K}{1/2-\delta} \ ,$$

e ciò implica la (11) perché $f \in \mathscr{C}^2(\boldsymbol{Q} \setminus C)$. E dunque $f \in \mathscr{C}^{1,1}$.

6 Dimostrazione della parte *(ii)* del Teorema 1

Per la seconda parte dell'enunciato del teorema il procedimento è molto simile. Ora l'insieme di Cantor sarà definito ancora come l'intersezione di tutti i Q^n, dove però Q^n è l'insieme di 4^n quadrati di lato Δ_n (definiti come nel procedimento della prima parte) con

$$\Delta_n = \delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_n, \qquad \delta_i = \frac{1}{2} 2^{-\frac{c}{i^2}}, \quad i = 1,\dots,n \ .$$

Il valore di $c = c(\varepsilon) > 0$ sarà scelto in modo che la misura di Lebesgue dell'insieme di Cantor C sia quella desiderata ($\mathscr{L}^2(C) \geq 1 - \varepsilon$).

Si noti innanzitutto che

$$\mathscr{L}^2(Q^n) = 4^n \Delta_n^2 = 4^n \delta_1^2 \cdot \ldots \cdot \delta_n^2 = 4^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} 2^{-\frac{2c}{1^2}} \cdot \ldots \cdot 2^{-\frac{2c}{n^2}} = 2^{-2c \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}} \ .$$

Poiché $C = \bigcap_{n \geq 1} Q^n$ e $\mathscr{L}^2(Q^1) < +\infty$, per convergenza dall'alto si ha che

$$\mathscr{L}^2(C) = \lim_{n \to +\infty} \mathscr{L}^2(Q^n) = \lim_{n \to +\infty} 2^{-2c \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}} = 2^{-2c \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}} < 1 \ ,$$

che tende a 1 per c che tende a 0.

Ora prendiamo delle funzioni di raccordo lisce tali che

$$\phi_{i_1,\ldots,i_n} = \begin{cases} 1 & \text{su} \left(1 + (1/2 - \delta_n)/3\right) Q_{i_1,\ldots,i_n} \\ 0 & \text{fuori da } \left(1 + (1/2 - \delta_n)/2\right) Q_{i_1,\ldots,i_n} \ . \end{cases}$$

In questo caso l'ampiezza dell'intervallo dove la funzione si raccorda in modo $\mathscr{C}^\infty$ da 0 a 1 è $\varepsilon = \dfrac{1/2 - \delta_n}{6} \Delta_n$, dunque

$$\left\| \nabla \phi_{i_1,\ldots,i_n} \right\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} = \frac{6\sqrt{2}}{(1/2 - \delta_n)\Delta_n} = \frac{K}{(1/2 - \delta_n)\Delta_n} \leq \frac{Kn^2}{\Delta_n} \ , \tag{13}$$

$$\left\| \nabla^2 \phi_{i_1,\ldots,i_n} \right\|_\infty \leq \frac{2}{\varepsilon^2} = \frac{K}{(1/2 - \delta_n)^2 \Delta_n^2} \leq \frac{Kn^4}{\Delta_n^2} \ . \tag{14}$$

Similmente abbiamo che

$$\left\| a_{i_1,\ldots,i_n} \right\| \leq K \Delta_n \tag{15}$$

perché

$$\begin{aligned}
\|a_{i_1,\dots,i_n}\| =& \Big\| \fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} F(x)\,dx - \fint_{Q_{i_1,\dots,i_{n-1}}} F(y)\,dy \Big\| \\
=& \Big\| \fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} \big(\cancel{F(x_0)} + F(x) - F(x_0)\big)\,dx - \\
& \qquad - \fint_{Q_{i_1,\dots,i_{n-1}}} \big(\cancel{F(x_0)} + F(y) - F(x_0)\big)\,dy \Big\| \\
\le & \fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} \|F(x) - F(x_0)\| dx + \fint_{Q_{i_1,\dots,i_{n-1}}} \|F(y) - F(x_0)\| dy \\
\le & L\Big[\fint_{Q_{i_1,\dots,i_n}} \underbrace{\|x - x_0\|}_{\le \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta_{n-1}} dx + \fint_{Q_{i_1,\dots,i_{n-1}}} \underbrace{\|y - x_0\|}_{\le \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta_{n-1}} dy \Big] \\
\le & \underbrace{\frac{\sqrt{2}L}{\delta_1}}_{:=K<+\infty} \Delta_{n-1}\,\delta_1 = K\Delta_n \ .
\end{aligned}$$

La funzione $f_\varepsilon = f$ è definita sempre nello stesso modo, cioè

$$f_\varepsilon = \sum_{n\ge 1} f_n$$

dove $f_n(x) = \sum_{i_1,\dots,i_n} \phi_{i_1,\dots,i_n}(x) < a_{i_1,\dots,i_n}, x - c_{i_1,\dots,i_n} >, \quad x \in \boldsymbol{Q}$, e $c_{i_1,\dots,i_n}$ è il centro del quadrato $Q_{i_1,\dots,i_n}$.

Mostreremo, in modo simile alla prima parte, che vale la seguente stima:

$$\sum_{k\ge n} \|\nabla f_k\|_\infty \le Kn^2\Delta_n \le \frac{Kn^2}{2^n} \ . \tag{16}$$

Abbiamo usato la seguente disuguaglianza, $\Delta_n \le (1/2)^n$.

Basta verificare la stima (16) solo per gli $x \in \boldsymbol{Q} \setminus C$ e concludere poi per continuità (C è ancora totalmente disconnesso). Sia dunque $x \in \boldsymbol{Q} \setminus C$. Si ha che

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geq n}\left\|\nabla f_k(x)\right\| &= \sum_{k=n}^{m}\left\|\nabla f_k(x)\right\| \\
&= \sum_{k=n}^{m}\left\|\nabla\phi_{i_1,\dots,i_n}(x) < a_{i_1,\dots,i_k}, x - c_{i_1,\dots,i_k} > +\phi_{i_1,\dots,i_k}(x)\, a_{i_1,\dots,i_k}\right\| \\
&\leq \sum_{k=n}^{m}\Big(\left\|\nabla\phi_{i_1,\dots,i_k}(x)\right\|\left|< a_{i_1,\dots,i_k}, x - c_{i_1,\dots,i_k} >\right| + \\
&\qquad\qquad + \left\|\phi_{i_1,\dots,i_k}(x)\right\|\left\|a_{i_1,\dots,i_k}\right\|\Big) \\
&\leq \left(\sum_{k=n}^{m}\left\|a_{i_1,\dots,i_k}\right\|\right) + \underbrace{\left\|\nabla\phi_{i_1,\dots,i_m}(x)\right\|}_{\underset{(13)}{\leq}\frac{Km^2}{\Delta_m}}\underbrace{\left\|a_{i_1,\dots,i_m}\right\|}_{\underset{(15)}{\leq}K\Delta_m}\underbrace{\left\|x - c_{i_1,\dots,i_m}\right\|}_{\leq\left(1+\frac{1/2-\delta_m}{2}\right)\Delta_m} \\
&\underset{(\star)}{\leq} \left(\sum_{k=n}^{m}\left\|a_{i_1,\dots,i_k}\right\|\right) + \hat{K}m^2\Delta_m \\
&\leq 2K\Delta_n + \hat{K}m^2\Delta_m \leq \tilde{K}n^2\Delta_n \leq \frac{\tilde{K}n^2}{2^n}\ ,
\end{aligned}
$$

dove in $(\star)$ si è usato il fatto che $\sum\limits_{k=n}^{m}\left\|a^x_{i_1,\dots,i_k}\right\| \underset{(15)}{\leq} K\sum\limits_{k=n}^{m}\Delta_k \leq 2K\Delta_n$. Infatti, $\Delta_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k 2^{-c\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2}}$ e dunque per ogni $k \geq n$,

$$\Delta_k = \Delta_n\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} 2^{-c\sum_{i=n+1}^{k}\frac{1}{i^2}} \leq \Delta_n\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n}$$

e quindi

$$\sum_{k=n}^{m}\Delta_k \leq \Delta_n\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} \leq \Delta_n\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} = 2\,\Delta_n\ .$$

Siccome la stima (16) è una stima uniforme della serie delle derivate, f è di classe $\mathscr{C}^1$, e si ritrova che $\nabla f = F$ su C.

Rimane ora da vedere la maggiore regolarità di ∇f; in questo caso avremo una stima più debole della (12). Difatti si ha che

$$\operatorname{lip}(\nabla f_n) \leq \left\|\nabla^2 f_n\right\|_\infty \leq K\cdot n^4 \tag{17}$$

che, come si può notare, non è più una stima uniforme in n.

Per dimostrare la (17) basta notare che

$$\nabla^2 f_n = \sum_{i_1,\dots,i_n} \nabla^2 \phi_{i_1,\dots,i_n} < a_{i_1,\dots,i_n}, x - y_{i_1,\dots,i_n} > +2 \sum_{i_1,\dots,i_n} \nabla \phi_{i_1,\dots,i_n} \otimes a_{i_1,\dots,i_n}$$

e quindi usando le stime (13), (14) e (15) segue che

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla^2 f_n(x) \right\|_\infty &= \left\| \sum_{i_1,\dots,i_n} \nabla^2 \phi_{i_1,\dots,i_n} < a_{i_1,\dots,i_n}, x - y_{i_1,\dots,i_n} > +2 \sum_{i_1,\dots,i_n} \nabla \phi_{i_1,\dots,i_n} \otimes a_{i_1,\dots,i_n} \right\| \\
&= \left\| \nabla^2 \phi_{i_1,\dots,i_n} < a_{i_1,\dots,i_n}, x - y_{i_1,\dots,i_n} > +2 \, \nabla \phi_{i_1,\dots,i_n} \otimes a_{i_1,\dots,i_n} \right\| \\
&\le \left\| \nabla^2 \phi_{i_1,\dots,i_n} \right\|_\infty \left\| a_{i_1,\dots,i_n} \right\| \left\| x - y_{i_1,\dots,i_n} \right\| + 2 \left\| \nabla \phi_{i_1,\dots,i_n} \right\|_\infty \left\| a_{i_1,\dots,i_n} \right\| \\
&\le \frac{K n^4}{\Delta_n^2} \cdot K \Delta_n \cdot K \Delta_n + 2 \, \frac{K n^2}{\Delta_n} \cdot K \Delta_n \\
&= K^3 n^4 + 2 K^2 n^2 \le \hat{K} n^4 \ .
\end{aligned}$$

Adesso usando le disuguaglianze (16) e (17), troviamo che per $x, y \in \boldsymbol{Q}$, dopo aver preso n tale che $2^{-(n+1)} \le \|x - y\| \le 2^{-n}$, si ha la seguente stima sul gradiente di f:

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla f(x) - \nabla f(y) \right\| &= \left\| \nabla \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) - \nabla \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \right) \right\| \\
&\le \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(\nabla f_k(x) - \nabla f_k(y) \right) \right\| + \left\| \sum_{k \ge n+1} \left(\nabla f_k(x) - \nabla f_k(y) \right) \right\| \\
&\le \underbrace{\mathrm{lip} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right) \cdot \|x - y\|}_{\underset{(17)}{\le} K \sum_{k=1}^{n} k^4 \cdot \|x-y\|} + \underbrace{2 \sum_{k \ge n+1} \left\| \nabla f_k(x) \right\|_\infty}_{\underset{(16)}{\le} 2K(n+1)^2 2^{-(n+1)}} \\
&\underset{(\star)}{\le} K \left(n^5 \|x - y\| + 2 \, (n+1)^2 2^{-(n+1)} \right) \\
&\le \hat{K} n^5 \|x - y\| \underset{(\text{☆})}{\le} \hat{K} \left(\left| \log_2 \|x - y\| \right| \right)^5 \|x - y\| \ ,
\end{aligned}$$

dove in $(\star)$ si è usato il fatto che $\sum_{k=1}^{n} k^4 \le n^5$ ed in (☆) che $\left| log_2 \|x - y\| \right| \ge n$, poiché $\|x - y\| \le 2^{-n}$. Si noti soprattutto come ora si abbia una stima che non dipende più da n, cioè

$$\left\| \nabla f(x) - \nabla f(y) \right\| \le K \left(\left| \log_2 \|x - y\| \right| \right)^5 \|x - y\| \ .$$

Questa stima comporta che $f \in \bigcap_{0<\beta<1} \mathscr{C}^{1,\beta}$, poiché dati $x, y \in \boldsymbol{Q}$ si ha che

$$\left\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\right\| \leq K\left|\log_2\|x-y\|\right|^5 \|x-y\| = \underbrace{K\left(\left|\log_2\|x-y\|\right|\right)^5 \|x-y\|^{1-\beta}}_{\leq L} \|x-y\|^{\beta} \ .$$

Riferimenti bibliografici

[1] *Pertti Mattila*, Geometry of sets and measures in Euclidean spaces, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44, Cambridge University Press, 1995.

[2] *Zoltán M. Balogh*, Size of characteristic sets and functions with prescribed gradient, Journal für die reine und angewandte Mathematik 561(2003) 63-83.

[3] *Kenneth Falconer*, Fractal Geometry, John Wiley & Sons, 1990.

[4] *Giovanni Alberti*, A lusin type theorem for gradients, Journal of Functional Analysis 100 (1991), 110-119.