UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

# STRUTTURA DI INSIEMI DI MISURA NULLA

Relatore:
Prof. ROBERTO MONTI

Laureando:
ANDREA MERLO

ANNO ACCADEMICO 2013-2014

There is no dark side of the moon really.
Matter of fact it's all dark.

# Introduzione

In questa tesi si studierà la struttura degli insiemi di misura nulla nel piano seguendo il lavoro di Alberti, Csörnyei e Preiss [2].

Più precisamente tutto ciò che verrà provato nei capitoli 1 e 2 sarà volto a dimostrare il seguente

**Teorema 0.1.** *Sia $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^2$, con $F$ un insieme $F_\sigma$ di misura nulla. Fissato $\epsilon > 0$ $E$ può essere scritto come $E^{x_1} \cup E^{x_2}$ con $E^{x_i}$ che soddisfano alle seguente condizione: per ogni $\epsilon > 0$ e per $i = 1, 2$ $E^{x_i}$ può essere ricoperto da un numero numerabile di $x_i - tubi$ $T_j^{x_i}$ di larghezza $\delta_j^i$ tali che $\sum_{j \geq 1} \delta_j^i < \epsilon$.*

Dove con $x_i - tubi$ $T_j^{x_i}$ di larghezza $\delta_j^i$ si intendono intorni chiusi di raggio $\delta_j^i$ di grafici di funzioni 1-Lipshitziane nell' incognita $x_i$.

Da notare è il fatto che nel Teorema 0.1 si ottiene una partizione $E^{x_1} \cup E^{x_2}$ di $E$ dipendente da $\epsilon$, e che il risultato richiede un ipotesi tecnica piuttosto vincolante, ovvero che $E$ sia contenuto in un $F_\sigma$ di misura nulla. Nel lavoro [2] infatti si enuncia, senza dimostrarlo, il seguente:

**Teorema 0.2.** *Un insieme di misura nulla $E \subseteq \mathbb{R}^2$ può essere scritto come $E^{x_1} \cup E^{x_2}$ con $E^{x_i}$ che soddisfano alle seguente condizione: per ogni $\epsilon > 0$ e per $i = 1, 2$ $E^{x_i}$ può essere ricoperto da un numero numerabile di $x_i - tubi$ $T_j^{x_i}$ di larghezza $\delta_j^i$ tali che $\sum_{j \geq 1} \delta_j^i < \epsilon$.*

La dimostrazione del Teorema 0.1 innanzi tutto prende in considerazione il caso compatto e grazie ad un processo di discretizzazione, possibile solo grazie alle proprietà di compattezza in cui ci si è posti, ci si riduce ad un problema di ricoprimento di insiemi finiti. Il quale però si risolve grazie al seguente:

**Teorema 0.3.** *Un insieme $S$ di $N$ punti in $\mathbb{R}^2$ puó essere ricoperto usando al piú $\sqrt{N}$ $x_1 - curve$ e $\sqrt{N}$ $x_2 - curve$.*

Dove le $x_i$-curve sono grafici di funzioni 1-Lipshitziane nella incognita $x_i$.

Nel capitolo 3 invece si introduce il concetto di spazio tangente debole:

**Definizione 0.4.** Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo. Dato un Boreliano $E \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice *spazio tangente debole* ad $E$ una mappa Boreliana $\tau : E \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$se

$$\tau_S(p) = \tau(p) \text{ per } \mathcal{H}^1 - q.o.\ p \in \operatorname{supp}(S) \cap E \tag{1}$$

per ogni curva $S$ di classe $\mathcal{C}^1$, dove $\tau_S$ è la retta tangente non orientata ad $S$.

Questa definizione coincide con quella classica nel caso di varietà $\mathcal{C}^1$ nel piano e si dimostra che è sufficentemente debole da garantire il seguente:

**Teorema 0.5.** *Ogni insieme* $E \subseteq \mathbb{R}^2$ *di misura nulla ammette uno spazio tangente debole.*

I metodi utilizzati per dimostrare i Teoremi riportati sopra hanno poco a che fare con le tecniche standard della Teoria della Misura, e sono invece intrisi di ragionamenti di tipo combinatorico e topologico. Dunque intimamente legati alla struttura di $\mathbb{R}^2$, piuttosto che alla misura di Lebesgue. Infatti, quando si tenta di aumentare la dimensione dello spazio, l'estensione naturale del Teorema 0.2 è falsa, come riportato in [2]. Se versioni indebolite del teorema 0.2 in dimensione più alta siano vere è ancora un problema insoluto.

# Indice

# Capitolo 1

# Teoria della misura

## 1.1 Preliminari

Si introdurranno di seguito le notazioni e i concetti base della teoria della misura utilizzati. A meno che non venga diversamente specificato lo spazio ambiente sarà sempre indicato con $X$.

**Definizione 1.1.** Si definisce misura (esterna) $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ una funzione tale che:

(i) $\nu(\emptyset) = 0$;

(ii) per ogni $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ e ogni $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ allora $\nu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$.

*Osservazione* 1.2. La misura esterna è monotona, infatti se $A \subseteq B$ (e allora $A \subseteq B \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots$) si ha per definizione $\nu(A) \leq \nu(B) + 0 \ldots = \nu(B)$.

**Definizione 1.3** (Insiemi misurabili)**.** Sia $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ una misura, allora $E \in \mathcal{P}(X)$ si dice *insieme misurabile* per $\nu$ se e solo se per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ si ha che:

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c).$$

*Osservazione* 1.4. Per la subadditività della misura esterna la disuguaglianza $\nu(A) \leq \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c)$ è soddisfatta per ogni $E \in \mathcal{P}(X)$, quindi la misurabilità equivale alla disuguaglianza opposta. La simmetria della definizione implica che $A$ è misurabile se e solo se $A^c$ lo è. Inoltre se $\nu(E) = 0$ allora $\nu(A) \geq \nu(A \cap E^c) \geq \nu(A \cap E^c) + \nu(A \cap E)$, e dunque $E$ è misurabile.

**Definizione 1.5.** Sia $\nu$ una misura su $X$ ed $A \subseteq X$. Allora $\nu$ ristretta ad A, scritto

$$\nu \llcorner A$$

è la misura definita per ogni $B \subseteq X$ da:

$$(\nu \llcorner A)(B) := \nu(A \cap B).$$

*Osservazione* 1.6. Se $E$ è $\nu$-misurabile, allora $\nu(B) = \nu(B \cap E) + \nu(B \cap E^c)$ per ogni $B \subseteq X$, in particolare:

$$\begin{aligned}(\nu \llcorner A)(B) &= \nu(B \cap A) = \nu((B \cap A) \cap E) + \nu((B \cap A) \cap E^c) \\ &= \nu(A \cap (B \cap E)) + \nu(A \cap (B \cap E^c)) = (\nu \llcorner A)(B \cap E) + (\nu \llcorner A)(B \cap E^c).\end{aligned}$$

**Teorema 1.7.** *Data $\nu$ una misura su $X$, sia $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi $\nu$-misurabili.*

*(i) Gli insiemi $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ e $\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ sono $\nu$-misurabili;*

*(ii) se gli $A_k$ sono disgiunti, allora:*

$$\nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(A_k);$$

*(iii) se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, allora*

$$\nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \nu(A_k);$$

*(iv) se $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ e $\nu(A_1) < \infty$, allora*

$$\nu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \nu(A_k).$$

*Dimostrazione.* Sia $B \subseteq X$

$$\begin{aligned}\nu(B) &= \nu(A_1 \cap B) + \nu(B \cap A_1^c) = \nu(B \cap A_1) + \nu((B \cap A_1^c) \cap A_2) + \nu((B \cap A_1^c) \cap A_2^c) \\ &\geq \nu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \nu(B \cap (A_1 \cup A_2)^c)\end{aligned}$$

e quindi $A_1 \cup A_2$ è misurabile. Per induzione le unioni finite sono misurabili. Dunque anche le intersezioni finite (per complementazione) sono misurabili. Si supponga ora che gli insiemi $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ siano a due a due disgiunti, e si definisca per ogni $j \in \mathbb{N}$:

$$B_j := \bigcup_{k=1}^{j} A_k.$$

Allora per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$\nu(B_{j+1}) = \nu(B_{j+1} \cap A_{j+1}) + \nu(B_{j+1} \cap A_{j+1}^c) = \nu(A_{j+1}) + \nu(B_j),$$

per cui induttivamente su $j \in \mathbb{N}$:

$$\nu(\bigcup_{k=1}^{j} A_k) = \nu(B_j) = \sum_{k=1}^{j} \nu(A_k).$$

Allora segue che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

da cui segue la $(ii)$. Da quanto sopra, per provare la $(iii)$:

$$\lim_{k\to\infty} \nu(A_k) = \nu(A_1) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(A_{k+1} \setminus A_k) = \nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right).$$

L'affermazione $(iv)$ segue dalla $(iii)$, infatti:

$$\begin{aligned}\nu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \nu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \nu(A_1 \setminus A_k) &= \nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_1 \setminus A_k)\right) \\ &\geq \nu(A_1) - \nu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right).\end{aligned}$$

Rimane da provare $(i)$. Fissato $B \subseteq X$, si ha:

$$\begin{aligned}\nu\left(B \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\right) + \nu\left(B \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)^c\right) &= (\nu \llcorner B)\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) + (\nu \llcorner B)\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus B_k)\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} (\nu \llcorner B)(B_k) + \lim_{k\to\infty} (\nu \llcorner B)(X \setminus B_k) = \nu(B).\end{aligned}$$

Per complementazione si conclude la dimostrazione di $(i)$. □

**Definizione 1.8** (Algebra)**.** Dato un insieme $X$ un sottoinsieme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ non vuoto si dice algebra se:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

(iii) per ogni $\{A_n\}_{n=1,\dots,m} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1,\dots,m} A_n \in \mathcal{A}$.

**Definizione 1.9** ($\sigma$-algebra)**.** Un'algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice $\sigma$-algebra se per ogni $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

*Osservazione* 1.10. Per il Teorema 1.7 gli insiemi misurabili per una misura $\nu$ si $X$ formano una $\sigma$-algebra.

L'osservazione precedente spiega perché una coppia $(X, \mathcal{A})$ formata da $X$ e da una sua $\sigma$-algebra si dice *spazio misurabile*.

*Osservazione* 1.11. L'insieme $\Sigma := \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A}\ \sigma\text{-algebra}\}$ è chiuso per intersezioni, infatti, sia $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ con $I$ insieme arbitrario, una famiglia di $\sigma$-algebre. Poiché $\emptyset \in \mathcal{A}_i$ per ogni $i \in I$ allora $\emptyset \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Se $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ allora $A \in \mathcal{A}_i$ per ogni $i \in I$ ma per definizione di $\sigma$-algebra si ha $A^c \in \mathcal{A}_i$, e dunque $A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Del tutto analoga l'ultima proprietà: $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_i$ per ogni $i \in I$ per la definizione di $\sigma$-algebra, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i$ perciò $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

**Definizione 1.12.** Sia $U \subseteq \mathcal{P}(X)$. Posto $\Sigma(U) := \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A}\ \sigma\text{-algebra ed } U \subseteq \mathcal{A}\}$ si definisce:

$$\mathcal{M}(U) := \bigcap_{\mathcal{A}\in\Sigma(U)} \mathcal{A}.$$

$\mathcal{M}(U)$ è detta la $\sigma$-algebra generata da $U$.

*Osservazione* 1.13. La definizione predente è ben data per l'osservazione 1.11.

Osservo inoltre che $\mathcal{M}(U)$ è la piú piccola $\sigma$-algebra contenente $U$. Infatti, per definizione $\mathcal{M}(U)$ contiene $U$, viceversa, se una $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ contiene $U$ allora è contemplata nell'intersezione che definisce $\mathcal{M}(U)$ e dunque quest'ultima è contenuta in $\mathcal{A}$.

**Definizione 1.14** ($\sigma$-algebra dei boreliani)**.** Sia $(X, \tau_X)$ uno spazio topologico. La $\sigma$-algebra $\mathcal{M}(\tau_X)$ è detta la $\sigma$-algebra dei boreliani di $X$ e la si indica con $\mathcal{B}(X) := \mathcal{M}(\tau_X)$.

**Definizione 1.15.** Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è $\sigma$-finito rispetto a $\nu$ se si può scrivere come $A = \cup_{k\in\mathbb{N}} B_k$, dove i $B_k$ sono $\nu$-misurabili e $\nu(B_k) < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

**Definizione 1.16.** (i) Una misura $\nu$ su $X$ si dice *regolare* se per ogni insieme $A \subseteq X$ esiste un insieme misurabile $B$ tale che $A \subseteq B$ e $\nu(A) = \nu(B)$.

(ii) Una misura $\nu$ su $\mathbb{R}^n$ è detta *Boreliana* se ogni insieme Boreliano è $\nu$-misurabile.

(iii) Una misura $\nu$ su $\mathbb{R}^n$ è detta *Borel regolare* se $\nu$ è una misura Boreliana e per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ esiste un Boreliano $B$ tale che $A \subseteq B$ e $\nu(A) = \nu(B)$.

(iv) Una misura $\nu$ su $\mathbb{R}^n$ è detta *misura di Radon* se $\nu$ è Borel regolare e $\nu(K) < \infty$ per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

**Teorema 1.17.** *Sia $\nu$ una misura Boreliana su $\mathbb{R}^n$. Si supponga $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\nu$-misurabile e $\nu(A) < \infty$. Allora $\nu \llcorner A$ è una misura di Radon.*

*Dimostrazione.* Posto $\mu := \nu \llcorner A$, si ha chiaramente che $\mu(K) < \infty$ per ogni compatto $K$. Dato che ogni insieme $\nu$-misurabile è pure $\mu$-misurabile per l'osservazione 1.6 si ha che $\mu$ è misura di Borel.

Rimane da mostrare che $\mu$ è Borel regolare. Dato che $\nu$ è Borel regolare, esiste un Boreliano $B$ tale che $A \subseteq B$ e $\nu(A) = \nu(B) < \infty$. Allora dato che $A$ è $\nu$-misurabile,

$$\nu(B \setminus A) = \nu(B) - \nu(A) = 0$$

Scelto $C \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$(\nu \llcorner B)(C) = \nu(C \cap B) = \nu(C \cap B \cap A) + \nu((C \cap B) \cap A^c)$$
$$\leq \nu(C \cap A) + \nu(B \cap A^c) = (\nu \llcorner A)(C).$$

Allora $(\nu \llcorner A) = (\nu \llcorner B)$, dunque si può assumere senza perdita di generalità che A sia un Boreliano.

Dato che $\nu$ è misura Boreliana regolare, esiste un Boreliano E tale che $A \cap C \subseteq E$ e $\nu(E) = \nu(A \cap C)$. Sia allora $D := E \cup A^c$. Dato che $A$ ed $E$ sono insiemi Boreliani, lo è pure $D$. Inoltre $C \subseteq (A \cap C) \cup A^c \subseteq D$. Infine, dato che $D \cap A = E \cap A$,

$$\mu(D) = \nu(D \cap A) = \nu(E \cap A) \leq \nu(E) = \nu(A \cap C) = \nu(C).$$

□

**Proposizione 1.18.** *La $\sigma$-algebra dei boreliani di $\mathbb{R}^n$ con la topologia usuale è generata dai plurirettangoli a lati ad estremi razionali:*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}\left(\left\{\prod_{i=1}^{n} ]a_i, b_i[ : a_i, b_i \in \mathbb{Q}\right\}\right)$$

*Dimostrazione.* È sufficiente mostrare che i plurirettangoli aperti a lati razionali sono una base per la topologia usuale di $\mathbb{R}^n$. La topologia standard di $\mathbb{R}^n$ è a base numerabile e dunque essa sarà contenuta nella $\sigma$-algebra generata, poiché ogni aperto è unione numerabile di plurirettangoli.

Sarà indicato come cubo di centro $c \in \mathbb{R}^n$ e semilato $\epsilon > 0$ l'insieme

$$Q^\epsilon(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : |c_i - x_i| < \epsilon \ \forall i = 1, ..., n\}$$

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si ha che

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} Q^{\epsilon_x}(x)$$

per $\epsilon_x$ opportunamente piccolo. Precisamente, detta

$$d(x, \Omega^c) := \min_{\omega \in \Omega^c} |\omega - x| > 0$$

la distanza di $x$ da $\Omega^c$, si scelga $0 < \epsilon_x \leq d(x, \Omega^c)$.
Posto allora

$$\Omega_d = \bigcup_{q \in \Omega \cap \mathbb{Q}^n} Q^{\epsilon_q}(q)$$

con $\epsilon_q = \frac{d(q,\Omega^c)}{2}$, si ha che $\Omega_d \subseteq \Omega$.
Viceversa, dato che $\Omega$ è aperto, per ogni $x \in \Omega$ esiste una palla $B_\epsilon(x) \subseteq \Omega$.
Scelto allora $q \in \mathbb{Q}^n$ ed $\epsilon > 0$ tale che $|q - x| < \frac{\epsilon}{4}$ si avrà che $B_{\frac{\epsilon}{3}}(q) \subseteq \Omega$ e perciò $\epsilon_q \geq \frac{\epsilon}{3}$ e se ne conclude che $\Omega \subseteq \Omega_d$ poiché avremo che $x \in B_{\frac{\epsilon}{3}}(q)$ ed a sua volta $B_{\frac{\epsilon}{3}}(q) \subseteq Q^\epsilon(q) \subseteq \Omega_d$. □

*Osservazione* 1.19. Si noti che il ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema precedente prescinde dal fatto che i cubi usati siano aperti o chiusi. Dato che la proposizione richiede di mostrare che gli aperti sono unione numerabile di plurirettangoli aperti, dovranno essere aperti. Tuttavia se nella stessa dimostrazione fossero considerati chiusi, la costruzione fatta resterebbe ancora valida, e quindi è stato anche mostrato che gli aperti di $\mathbb{R}^n$ con la topologia usuale possono scritti come unione numerabile di (cubi) chiusi.

Nel seguito, quando si tratterà di $\mathbb{R}^n$ come spazio topologico, sarà sempre considerato con la topologia usuale.

**Lemma 1.20.** *Sia $\nu$ una misura Boreliana su $\mathbb{R}^n$ e sia $B$ una Boreliano.*

*(i) Se $\nu(B) < \infty$, esiste per ogni $\epsilon > 0$ un chiuso $C$ tale che $C \subseteq B$ e $\nu(B \backslash C) < \epsilon$.*

*(ii) Se $\nu$ è misura di Radon, esiste per ogni $\epsilon > 0$ un aperto $U$ tale che $B \subseteq U$ e $\nu(C \setminus B) < \epsilon$.*

*Dimostrazione.* Sia $\mu := \nu \llcorner B$. Dato che $\nu$ è di Borel ed $\nu(B) < \infty$, $\nu$ è una misura di Borel. Sia:

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ sia } \nu\text{-misurabile e per ogni } \epsilon > 0$$
$$\text{esiste un chiuso } C \subseteq A \text{ tale che } \mu(A \setminus C) < \epsilon\}.$$

Banalmente $\mathcal{F}$ contiene tutti i chiusi.
Se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, allora $A = \cap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Si fissi $\epsilon > 0$. Dato che $A_i \in \mathcal{F}$ esiste un chiuso $C_i \subseteq A_i$ con $\nu(A_i \setminus C_i) < \frac{\epsilon}{2^i}$ per $i \in \mathbb{N}$. Sia $C := \cap_{i\in\mathbb{N}}$. Allora $C$ è chiuso e

$$\mu(A \setminus C) = \mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \setminus C_i)\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i \setminus C_i) < \epsilon.$$

Quindi $A \in \mathcal{F}$.
Se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, allora $A = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Si fissi $\epsilon > 0$ e si scelgano $C_i$ come sopra. Dato che $\mu(A) < \infty$ si ha

$$\lim_{m\to\infty} \mu\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{m} C_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \setminus C_i)\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i \backslash C_i) < \epsilon.$$

Di conseguenza, esiste un intero $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{m} C_i\right) < \epsilon;$$

ma $\cup_{i=1}^{m} C_i$ è chiuso e quindi anche $A \in \mathcal{F}$.

Come notato nell'osservazione 1.19, ogni aperto può essere scritto come unione numerabile di chiusi. Ma allora quanto provato sopra mostra che $\mathcal{F}$ contiene tutti gli aperti. Si consideri ora

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} : A^c \in \mathcal{F}\}.$$

Banalmente per quanto sopra $\mathcal{G}$ contiene tutti gli aperti e i chiusi.
Se $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}$, allora $A = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{G}$. Infatti per quanto sopra $A \in \mathcal{F}$. Ma allora pure $\{A_i^c\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, che implica che $A^c = \cap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c \in \mathcal{F}$.
Perciò $\mathcal{G}$ è una $\sigma$-algebra contenente gli aperti e quindi tutti i Boreliani. Questo prova $(i)$.

Posto $U_m = U(0, m)$, la palla aperta di centro 0 e raggio $m$. Allora $U_m \setminus B$ è un Boreliano con $\nu(U_m \setminus B) < \infty$, e quindi possiamo applicare $(i)$ per trovare $C_m \subseteq U_m \setminus B$ tale che $\nu((U_m \setminus C_m) \setminus B) = \nu((U_m \setminus B) \setminus C_m) < \frac{\epsilon}{2^m}$. Sia $U = \cup_{i\in\mathbb{N}}(U_m \setminus C_m)$; $U$ è ovviamente aperto. Ora sia $B \subseteq C_m^c$, e quindi $U_m \cap B \subseteq U_m \setminus C_m$. Di conseguenza:

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} (U_m \cap B) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} (U_m \setminus C_m) = U.$$

Inoltre,

$$\nu(U \setminus B) = \nu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} ((U_m \setminus C_m) \setminus B)\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \nu((U_m \setminus C_m) \setminus B) < \epsilon.$$

□

**Teorema 1.21.** *Sia $\nu$ una misura di Radon di $\mathbb{R}^n$. Allora*

*(i) per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$,*

$$\nu(A) = \inf\{\nu(U) : A \subseteq U, U \text{ aperto}\},$$

*(ii) per ogni $\nu$-misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^n$,*

$$\nu(A) = \sup\{\nu(K) : K \subseteq A, K \text{ compatto}\}.$$

*Dimostrazione.* Se $\nu(A) = \infty$ $(i)$ è ovvia, e quindi si può supporre senza perdita di generalità $\nu(A) < \infty$. Supponi innanzi tutto che $A$ sia Boreliano. Si fissi $\epsilon > 0$, allora per il Lemma 1.20, esiste un aperto $U \supseteq A$ con $\nu(U \setminus A) < \epsilon$. Dato che $\nu(U) = \nu(A) + \nu(U \setminus A) < \infty$, e quindi vale $(i)$. Sia $A$ un insieme arbitrario. Dato che $\nu$ è Borel regolare, esiste un Boreliano $B \supseteq A$ con $\nu(A) = \nu(B)$. Allora

$$\nu(A) = \nu(B) = \inf\{\nu(U) : B \subseteq U, U \text{ aperto}\} \geq \inf\{\nu(U) : A \subseteq U, U \text{ aperto}\}.$$

La disuguaglianza opposta è ovvia. La $(i)$ è dimostrata.

Sia ora $A$ $\nu$-misurabile, con $\nu(A) < \infty$. Posto $\mu := \nu \llcorner A$; allora $\mu$ è misura di Radon in accordo al teorema 1.17. Fissato $\epsilon > 0$, applicando $(i)$ a $\nu$ e a $A^c$, si ottiene un insieme aperto $U$ con $A^c \subseteq U$ ed $\nu(U) \leq \epsilon$. Sia $C := U^c$. $C$ è chiuso e $C \subseteq A$. Inoltre,

$$\nu(A \setminus C) = \mu(C^c) = \mu(U) \leq \epsilon.$$

Allora

$$0 \leq \nu(A) - \nu(C) \leq \epsilon,$$

e quindi

$$\nu(A) = \sup\{\nu(C) : C \subseteq A, C \text{ chiuso}\}. \tag{1.1}$$

Si supponga ora che $\nu(A) = \infty$. Si definisca $D_k = \{x \in \mathbb{R}^n : k - 1 \leq \{x\} < k\}$. Allora $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(D_k \cap A)$; quindi $\infty = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(A \cap D_k)$. Poiché $\nu$ è misura di Radon, $\nu(D_k \cap A) < \infty$. Allora come sopra esistono dei chiusi $C_k \subseteq D_k \cap A$ con $\nu(C_k) \geq \nu(D_k \cap A) - \frac{1}{2^k}$. Ora $\cup_{k\in\mathbb{N}} C_k \subseteq A$ e

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} C_k\right) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(C_k) \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left[\nu(D_k \cap A) - \frac{1}{2^k}\right] = \infty.$$

Ma $\cup_{k=1}^{n} C_k$ è chiuso per ogni $n$, e quindi in questo caso abbiamo anche la (1.1).

Infine, considerata $B_m = B(0, m)$, ovvero la palla chiusa di centro l'origine e raggio $m$, si ponga $C_m := C \cap B_m$. Ogni $C_m$ è compatto e $\nu(C) = \lim_{k\to\infty} \nu(C_m)$. Quindi per ogni insieme $\nu$-misurabile $A$,

$$\sup\{\nu(K) : K \subseteq A, K \text{ compatto}\} = \sup\{\nu(C) : C \subseteq A, C \text{ chiuso}\}.$$

$\square$

**Definizione 1.22.** Si definisce misura di Lebesgue $n$-dimensionale, la funzione $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$ tale che per $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_k) : A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k, \text{ con } R_k \text{ plurirettangoli aperti}\right\},$$

dove la misura $n$-dimensionale di Lebesgue di un plurirettangolo $\prod_{i=1}^{n} ]a_i, b_i[$ è per definizione $\mathcal{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} ]a_i, b_i[\right) := \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

È necessario ora mostrare che la precedente definizione è ben data.

**Proposizione 1.23.** *La funzione $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$ definita sopra è una misura.*

*Dimostrazione.* Poiché $\emptyset \subseteq \prod_{i=1}^{n}]-\epsilon,\epsilon[$, allora $\mathcal{L}^n(\emptyset) \leq \epsilon^n$ per ogni $\epsilon > 0$, dunque $\mathcal{L}^n(\emptyset) = 0$.

Sia ora $A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Se $\mathcal{L}^n(A_k) = \infty$ oppure $\mathcal{L}^n(A) = \infty$ allora la tesi è banale. Allora si può supporre senza perdita di generalità che $\mathcal{L}^n(A_k) < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e che $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. Fissato $\epsilon > 0$, si considerino $\{R_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$ ricoprimento di rettangoli aperti di $A_k$ tali che $\mathcal{L}^n(A_k) \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_i^k) - \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$. Quindi dato che gli $\{R_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$ al variare di $i$ e $k$ in $\mathbb{N}$ ricoprono $A$:

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{i,k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_i^k) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_i^k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{L}^n(A_k) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(A_k) + \epsilon,$$

per ogni $\epsilon > 0$ e quindi $\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(A_k)$. □

**Teorema 1.24** (Criterio di Carathéodory)**.** *Sia $\nu$ una misura su $\mathbb{R}^n$. Se $\nu(A\cup B) = \nu(A)+\nu(B)$ per ogni $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\operatorname{dist}(A,B) > 0$, allora $\nu$ è una misura Boreliana.*

*Dimostrazione.* Si supponga $C \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso. È sufficiente mostrare che

$$\nu(A) \geq \nu(A\cap C) + \nu(A \cap C^c) \tag{1.2}$$

poichè la disuguaglianza opposta è garantita dalla subadditività. Se $\nu(A) = \infty$, allora (1.2) è ovvia, dunque si può assumere senza perdita di generalità che $\nu(A) < \infty$. Si definisca:

$$C_n = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n}\right\}$$

per $n \in \mathbb{N}$. Allora $\operatorname{dist}(A \setminus C_n, A\cap C) \geq \frac{1}{n} > 0$. Per ipotesi quindi

$$\nu(A\setminus C_n) + \nu(A\cap C) = \nu((A\setminus C_n)\cup(A\cap C)) \leq \nu(A). \tag{1.3}$$

Si deve avere allora che $\lim_{n\to\infty} \nu(A\setminus C_n) = \nu(A\setminus C)$. Infatti posto

$$R_k = \left\{x \in A : \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x,C) \leq \frac{1}{k}\right\}$$

con $k \in \mathbb{N}$, si ha che $A\setminus C_n = (A\setminus C_n)\cup(\cup_{k=n}^{\infty} R_k)$, in modo tale che

$$\nu(A\setminus C_n) \leq \nu(A\setminus C) \leq \nu(A\setminus C_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \nu(R_k).$$

Una volta mostrato che $\sum_{k=n}^{\infty} \nu(R_k) < \infty$, allora si avrà

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A\setminus C_n) \leq \nu(A\setminus C) \leq \lim_{n\to\infty} \nu(A\setminus C_n) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \nu(R_k) = \lim_{n\to\infty} \nu(A\setminus C_n),$$

il che proverebbe quanto voluto.

Per definizione $\operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0$ se $j \geq i+2$. Quindi per induzione si trova che

$$\sum_{k=1}^{m} \nu(R_{2k}) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k}\right) \leq \nu(A)$$

ed analogamente

$$\sum_{k=0}^{m} \nu(R_{2k+1}) = \nu\left(\bigcup_{k=0}^{m} R_{2k+1}\right) \leq \nu(A).$$

Unendo questi due fatti e facendo tendere $m \to \infty$, si ha che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(R_k) \leq 2\nu(A) < \infty.$$

Dunque:

$$\nu(A \setminus C) + \nu(A \cap C) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \setminus C_n) + \nu(A \cap C) \leq \nu(A),$$

in accordo con (1.3), se ne deduce che $C$ è $\nu$-misurabile. □

Ora si enuncerà e dimostrerà un Lemma fondamentale nel seguito:

**Lemma 1.25.** *Sia $R = \prod_{k=1}^{n} ]a_k, b_k[ \subseteq \mathbb{R}^n$ un plurirettangolo aperto. Esiste una costante $C > 0$ indipendente da $\epsilon$ tale che se $\mathcal{R}^\epsilon := \prod_{k=1}^{n} ]a_k - \frac{\epsilon}{2}n, b_k + \frac{\epsilon}{2}[$, allora $\mathcal{L}^n(\mathcal{R}^\epsilon \setminus R) \leq C\epsilon$.*

*Dimostrazione.* Si può procedere per induzione sulla dimensione $n$ dello spazio.

Se $n = 1$ la tesi è ovvia con $C = 1$. Altrimenti si supponga che la tesi valga in dimensione $n$. Posto $b_k - a_k = l_k$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(\mathcal{R}^\epsilon \setminus R_i) &= \mathcal{L}^n(\mathcal{R}^\epsilon) - \mathcal{L}^n(R) = \prod_{k=1}^{n+1}(l_k + \epsilon) - \prod_{k=1}^{n+1} l_k \\
&= \prod_{k=1}^{n+1}(l_k + \epsilon) - \prod_{k=1}^{n} l_k \,(l_{n+1} + \epsilon) + \prod_{k=1}^{n} l_k \,(l_{n+1} + \epsilon) - \prod_{k=1}^{n+1} l_k \\
&= (l_{n+1} + \epsilon)\left(\prod_{k=1}^{n}(l_k + \epsilon) - \prod_{k=1}^{n} l_k\right) + \epsilon \prod_{k=1}^{n} l_k,
\end{aligned}$$

applicando ora l'ipotesi induttiva si ottiene

$$\begin{aligned}
(l_{n+1} + \epsilon)\left(\prod_{k=1}^{n}(l_k + \epsilon) - \prod_{k=1}^{n} l_k\right) + \epsilon \prod_{k=1}^{n} l_k &\leq \epsilon\,(l_{n+1} + \epsilon) + \epsilon \prod_{k=1}^{n} l_k \\
&= \epsilon\left((l_{n+1} + \epsilon)C + \prod_{k=1}^{n} l_k\right).
\end{aligned}$$

Scelto $\epsilon \leq 1$ si ha che $((l_{n+1} + \epsilon)C^{+} \prod_{k=1}^{n} l_k) \leq ((l_{n+1} + 1)C + \prod_{k=1}^{n} l_k) =: C'$. □

**Definizione 1.26.** Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Fissato $\delta > 0$ si indica con $E_\delta$ la $\delta$-discretizzazione di $E$, ovvero l'insieme definito nel seguente modo:

$$E_\delta := \left\{((2h_1+1)\delta/2, \ldots, (2h_n+1)\delta/2) \in \mathbb{R}^n : h_i \in \mathbb{Z} \text{ tali che } E \cap \prod_{i=1}^n [h_i\delta, (h_i+1)\delta] \neq \emptyset\right\}.$$

$E_\delta$ è l'insieme dei centri dei cubi

$$\prod_{i=1}^n [h_i\delta, (h_i+1)\delta] = [h_1\delta, (h_1+1)\delta] \times \ldots \times [h_n\delta, (h_n+1)\delta]$$

che intersecano $E$.

Con abuso di linguaggio si userà la parola discretizzazione, sia per l'insieme $E_\delta$, sia per indicare il partizionamento di $\mathbb{R}^n$ nelle celle della Proposizione 1.2: $\prod_{i=1}^n [h_i\delta, (h_i+1)\delta]$.

**Proposizione 1.27.** *Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e ogni $\delta > 0$ si ha che*

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_i) : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i, \text{ con } R_i \text{ rettangoli aperti e } \operatorname{diam}(R_i) < \delta\right\}.$$

*Dimostrazione.* Per definizione di misura di Lebesgue, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ricoprimento numerabile di $A$ con rettangoli aperti $R_i$ tali che $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_i) - \frac{\epsilon}{2} \leq \mathcal{L}^n(A)$. Una volta determinato un ricoprimento di $R_i$ con rettangoli $R_j(i)$ di diametro minore di $\delta$ tale per cui $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_j(i)) - \frac{\epsilon}{2^{i+2}} \leq \mathcal{L}^n(R_i)$, si avrà $\mathcal{L}^n(A) \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_i) - \frac{\epsilon}{2} \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_j(i)) - \frac{\epsilon}{2^{i+2}}\right) - \frac{\epsilon}{2} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_j(i)) - \epsilon$. Sarà allora sufficiente provare che dato un rettangolo aperto $R = \prod_{i=1}^n ]a_i, b_i[$

$$\mathcal{L}^n(R) = \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(Q_i) : R \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i, \text{ con } Q_i \text{ cubi aperti con } \operatorname{diam}(Q_i) < \delta\right\}.$$

Sia allora $R_{\frac{\epsilon}{2}}$ la $\epsilon$-discretizzazione di $R$ con $\epsilon < \min\{\frac{\delta}{4}, \frac{1}{2}\}$. Supposto $R$ limitato, $R_{\frac{\epsilon}{2}}$ è finito, perchè è un insieme discreto contenuto in un insieme limitato. Si considerino allora i cubi $\mathcal{Q}^{\epsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{i+1}}\right)}(x_i)$ di centri $x_i \in R_{\frac{\epsilon}{2}}$ e di semilato $\epsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{i+1}}\right)$. Tali $\mathcal{Q}^{\epsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{i+1}}\right)}(x_i)$ formano un ricoprimento di $R$. Infatti per ogni $x \in R$ esiste un $x_i \in R_{\frac{\epsilon}{2}}$ tale che $|x - x_i| < \epsilon$, e quindi $x \in \mathcal{Q}^{\epsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{i+1}}\right)}(x_i)$. Applicando il Lemma 1.25 ad ogni $\mathcal{Q}^{\epsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{i+1}}\right)}(x_i)$ si ottiene:

$$\sum_{x_i\in R_{\frac{\epsilon}{2}}} \mathcal{L}^n(\mathcal{Q}^{\epsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{i+1}}\right)}(x_i)) \leq \sum_{x_i\in R_{\frac{\epsilon}{2}}} \mathcal{L}^n\left(\mathcal{Q}^{\frac{\epsilon}{2}}(x_i) + C\frac{\epsilon}{2^{i+1}}\right) \leq \sum_{x_i\in R_{\frac{\epsilon}{2}}} \mathcal{L}^n(\mathcal{Q}^{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)) + C\epsilon,$$

dove si è potuta scegliere la stessa costante $C$ perché essa è indipendente per traslazioni (si veda la dimostrazione del Lemma 1.25). Inoltre per costruzione i cubi $\mathcal{Q}^{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$ sono disgiunti al variare di $i$, e perciò si ottiene:

$$\sum_{x_i \in R_{\frac{\epsilon}{2}}} \mathcal{L}^n(\mathcal{Q}^{\epsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{i+1}}\right)}(x_i)) \leq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{x_i \in R_{\frac{\epsilon}{2}}} \mathcal{Q}^{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)\right) + C\epsilon.$$

Con le stesse notazioni usate nella dimostrazione del Lemma 1.25 si conclude che:

$$\sum_{x_i \in R_{\frac{\epsilon}{2}}} \mathcal{L}^n(\mathcal{Q}^{\epsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{i+1}}\right)}(x_i)) \leq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{x_i \in R_{\frac{\epsilon}{2}}} \mathcal{Q}^{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)\right) + C\epsilon \leq \mathcal{L}^n(\mathcal{R}^\epsilon) + C\epsilon \leq \mathcal{L}^n(R) + (C+D)\epsilon.$$

Se $R$ non è limitato, allora $\mathcal{L}^n(R) = \infty$ quindi qualsiasi ricoprimento va bene. $\square$

**Proposizione 1.28.** *La misura di Lebesgue è una misura di Radon.*

*Dimostrazione.* La misura $\mathcal{L}^n$ è Boreliana, infatti, dati $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi tali che $d(A, B) = \delta > 0$, si ha per la Proposizione 1.27 che:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(A \cup B) &= \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_i) : A \cup B \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i,\ \text{con } R_i \text{ rettangoli aperti e } \operatorname{diam}(R_i) < \frac{\delta}{4}\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_i) : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i,\ \text{con } R_i \text{ rettangoli aperti e } \operatorname{diam}(R_i) < \frac{\delta}{4}\right\} \\
&+ \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_i) : B \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i,\ \text{con } R_i \text{ rettangoli aperti e } \operatorname{diam}(R_i) < \frac{\delta}{4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B).
\end{aligned}$$

e dunque per il Teorema 1.24 si ha che $\mathcal{L}^n$ è una misura Boreliana.

Che sia limitata sui compatti è ovvio, manca quindi da mostrare che è Borel regolare. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un ricoprimento di rettangoli aperti di $A$ tali che

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i(k)\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(R_i(k)) \leq \mathcal{L}^n(A) + \frac{1}{k}.$$

Ma allora $A \subseteq B_k \cup_{i\in\mathbb{N}} R_i(k)$ è aperto per ogni $k \in \mathbb{N}$, e dunque è Boreliano. Posto allora $B := \cap_{k\in\mathbb{N}} B_k$, si otterrà ancora un Boreliano, tale per cui $A \subseteq B$ e

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(A) + \frac{1}{k},$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, e quindi $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(B)$

$\square$

## 1.2 Discretizzazioni di insiemi di misura nulla

In questa sezione a meno che non venga specificato altrimenti, la $\sigma$-algebra considerata è quella dei Lebesgue misurabili di $\mathbb{R}^n$ e la misura considerata è quella di Lebesgue.

**Proposizione 1.29.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme compatto e di misura di Lebesgue nulla. Sia $E_\delta$ la $\delta$-discretizzazione di $E$, allora*

$$\lim_{\delta \to 0} \delta^n \mathrm{Card}(E_\delta) = 0.$$

*Dimostrazione.* Fissato $\epsilon > 0$ sarà necessario trovare $\delta_0 > 0$ tale che se $0 < \delta < \delta_0$, allora si abbia $\delta^n \mathrm{Card}(E_\delta) < \epsilon$. Poichè $E$ ha misura nulla, dato $\epsilon > 0$ esistono degli ipercubi $\{Q_i\}_{i \in \{1, \dots N\}}$ tali che:

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q_i,$$

ed inoltre

$$\sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}^n(Q_i) < \epsilon.$$

Infatti per la Proposizione 1.21 esiste un aperto contenente $E$ di misura $m(\Omega) < \epsilon$ tale che $E \subseteq \Omega$. Ma nella dimostrazione della Proposizione 1.18 si è visto come $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ con i $Q_i$ ipercubi aperti. Ma per la compattezza di $E$ si può estrarre un sottoricoprimento finito che risponde alle richieste.

A questo punto vorrei sarebbe desiderabile che ogni ipercubo $C^\delta$ della discetizzazione di $\mathbb{R}^n$ (ovvero del tipo $\prod_{i=1}^{n} [h_i\delta, (h_i + 1)\delta]$ che interseca $E$, fosse contenuto in un elemento del ricoprimento $Q_i$ per ottenere una stima sulla cardinalità della discretizzazione. Questo è in generale falso. Quello che invece è vero è che esiste un $Q_i$ tale che $Q_i \cap C^\delta \neq \emptyset$. Se però le celle della discretizzazione hanno semilato minore di $\delta_0$ allora si ha che:

$$Q_i \cap C^\delta \neq \emptyset \Rightarrow C^\delta \subseteq \mathcal{Q}_i^{\delta_0},$$

dove $\mathcal{Q}_i^{\delta_0}$ è l'ipercubo aperto centrato nel centro di $Q_i$ e di semilato $s(Q_i) + 2\delta_0$, dove si indica con $s(\#)$ il semilato di un ipercubo $\#$.

A questo punto si è ottenuto un nuovo ricoprimento $\left\{ \mathcal{Q}_i^{\delta_0} \right\}$, con $i = 1, \dots N$ di $E$. Per la Proposizione 1.25 si ha che esistono $C_i \in \mathbb{R}$ tali che $\mathcal{L}^n(\mathcal{Q}_i^{\delta_0} \setminus Q_i) \leq C_i \delta_0$. Posto allora $M = \max_{i=1,\dots,N} C_i$ si ottiene che

$$\sum_{i=1}^{N} m(\mathcal{Q}_i^{\delta_0}) \leq NM\delta_0 + \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}^n(Q_i),$$

Imponendo $NM\delta_0 + \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}^n(Q_i) < \epsilon$ si ottiene il $\delta_0 > 0$ desiderato. Scelto $\delta < \delta_0$ si ha che $C^\delta \cap Q_i \neq \emptyset \Rightarrow Q \subseteq \mathcal{Q}_i^{\delta_0}$ e quindi:

$$\mathrm{Card}(E_\delta)\delta^n = \sum_{C^\delta \cap E \neq \emptyset} \mathcal{L}^n(C^\delta) \leq \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}^n(\mathcal{Q}_i^{\delta_0}) < \epsilon.$$

$\square$

# Capitolo 2

# Struttura di insiemi di misura nulla nel piano

In questo capitolo si dimostrerà un teorema di struttura per insiemi di misura di Lebesgue nulla nel piano. La prova si articolerà in due momenti: la dimostrazione di un teorema tecnico di calcolo combinatorico, ed il teorema di struttura.

## 2.1 Un risultato di ricoprimento per insiemi finiti di $\mathbb{R}^2$

**Definizione 2.1.** Si definisce $x_i - curva$ in $\mathbb{R}^n$ $i = 1, \dots, n$, il supporto di una curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ del tipo

$$\gamma(t) = te_i + \sum_{j \neq i} \gamma_j(t) e_j$$

tale che la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ definita da:

$$f(t) = \sum_{j \neq i} \gamma_j(t) e_j$$

sia 1-Lipshitziana.

**Teorema 2.2.** *Un insieme $S$ di $N$ punti in $\mathbb{R}^2$ puó essere ricoperto usando al piú $\sqrt{N}$ $x_1 - curve$ e $\sqrt{N}$ $x_2 - curve$.*

*Dimostrazione.* Si consideri il seguente ordine su $S$:

$$a \preceq b \;\Leftrightarrow\; b^{x_2} - a^{x_2} > |b^{x_1} - a^{x_1}|.$$

per ogni $a, b \in S$ con $a = (a^{x_1}, a^{x_2})$ e $b = (b^{x_1}, b^{x_2})$. Di seguito si costruirà un procedimento induttivo per creare un opportuno partizionamento di $S$.

Se esiste una catena $C_1$ di $(S, \preceq)$ tale che $\mathrm{Card}(C_1) \geq \sqrt{N}$ si ponga $S_1 := S \setminus C_1$. Se esiste una catena $C_2$ di $(S_1, \preceq)$ tale che $\mathrm{Card}(C_2) \geq \sqrt{N}$ si ponga $S_2 := S_1 \setminus C_2$. Se al passo $k$-esimo non esistono catene in $(S_k, \preceq)$ con $\mathrm{Card}(C_k) \geq \sqrt{N}$ si ponga

$S' := S_k$, altrimenti esiste una catena $C_k$ di cardinalità maggiore od uguale di $\sqrt{N}$ e quindi si ponga $S_{k+1} := S_k \setminus C_k$.

Si noti che il procedimento è ben definito perché l'insieme $S$ è finito.
Se $S' \neq \emptyset$, si consideri l'insieme $M_1 \subseteq S'$ degli elementi massimali di $S'$, che esistono perché è finito, e si ponga $S'_1 := S' \setminus M_1$.
Se $S'_1 \neq \emptyset$ si consideri $M_2$ l'insieme degli elementi massimali e $S'_2 := S'_1 \setminus M_2$ e cosí via induttivamente fino a che al passo $h+1$-esimo risulti $S'_{h+1} = \emptyset$. Per costruzione gli insiemi $C_1, \ldots, C_k, M_1, \ldots, M_h$ formano una partizione di $S$.
Si ha inoltre che $k, h \leq \sqrt{N}$. Infatti $N \geq \mathrm{Card}(\cup_{i=1}^k C_i) \geq k\sqrt{N}$ e quindi $k\sqrt{N} \leq N$ e allora $k \leq \sqrt{N}$. Per quanto riguarda $h$, esso non può superare $\sqrt{N}$ poiché. Se cosí fosse, si consideri un elemento $a_k$ di $M_k$. Esiste perciò un elemento di $M_{k-1}$ tale che $a_{k-1} \preceq a_k$, poiché se cosi non fosse $a_{k-1}$ sarebbe massimale per $S'_k$. Cosí però si costruisce una catena di lunghezza maggiore di $\sqrt{N}$, il che è assurdo.

Per concludere la dimostrazione si deve dimostrare che le catene sono contenute in $x_2$-curve e gli strati in $x_1$-curve.

A tale scopo si fissi uno strato $M$. Per assurdo si abbiano due elementi di $M$ con la stessa coordinata $x_1$. Infatti siano $a, b \in M$ distinti con $a = (a^{x_1}, a^{x_2})$, $b = (b^{x_1}, b^{x_2})$, $a^{x_1} = b^{x_1}$ e $a^{x_2} < b^{x_2}$. Allora $b^{x_2} - a^{x_2} > 0 = |b^{x_1} - a^{x_1}|$ e quindi $a \preceq b$, il che è assurdo, perchè $a$ e $b$ sono massimali. Quindi si può scrivere $M$ come:

$$M = \left\{ (a_1^{x_1}, a_2^{x_2}), \ldots, (a_j^{x_1}, a_j^{x_2}) \right\}$$

con $a_1^{x_1} < \ldots < a_j^{x_1}$.

Si consideri il luogo di punti formato dai segmenti in $\mathbb{R}^2$ ad estremi $(a_i^{x_1}, a_i^{x_2})$ e $(a_{i+1}^{x_1}, a_{i+1}^{x_2})$ per $i = 1, \ldots, j-1$. Per mostrare che tale luogo di punti è contenuto in un grafico di una funzione 1-Lipschitziana di $x_1$ si definisca:

$$f(t) := \begin{cases} a_i^{x_2} + \frac{t - a_i^{x_1}}{a_{i+1}^{x_1} - a_i^{x_1}} (a_{i+1}^{x_2} - a_i^{x_2}) & \text{se } x \in [a_i^{x_1}, a_{i+1}^{x_1}] \\ a_1^{x^1} & \text{se } t < a_1^{x^1} \\ a_j^{x^1} & \text{se } t > a_j^{x^1} \end{cases} .$$

Chiaramente il luogo dei punti costruito è contenuto per costruzione nel grafico di $f$. Rimane da provare che $f$ sia 1-Lipschitziana. Infatti:

$$|f(t_1) - f(t_2)| = \left| a_i^{x_2} + \frac{t_1 - a_i^{x_1}}{a_{i+1}^{x_1} - a_i^{x_1}} (a_{i+1}^{x_2} - a_i^{x_2}) - b_i^{x_2} + \frac{t_2 - b_i^{x_1}}{b_{i+1}^{x_1} - b_i^{x_1}} (b_{i+1}^{x_2} - b_i^{x_2}) \right| ,$$

assumendo che $t_1, t_2 \in [a_1^{x_1}, a_j^{x_1}]$. Procedendo con delle manipolazioni algebriche si ottiene:

$$
\begin{aligned}
|f(t_1)-f(t_2)| &= \left| a_i^{x_2} - a_{i+1}^{x_2} + \frac{t_1 - a_i^{x_1}}{a_{i+1}^{x_1} - a_i^{x_1}}(a_{i+1}^{x_2} - a_i^{x_2}) + a_{i+1}^{x_2} - b_i^{x_2} + \frac{t_2 - b_i^{x_1}}{b_{i+1}^{x_1} - b_i^{x_1}}(b_{i+1}^{x_2} - b_i^{x_2}) \right| \\
&\leq \left| \left( \frac{t_1 - a_i^{x_1}}{a_{i+1}^{x_1} - a_i^{x_1}} - 1 \right)(a_{i+1}^{x_2} - a_i^{x_2}) \right| - |a_{i+1}^{x_2} - b_i^{x_2}| + \left| \frac{t_2 - b_i^{x_1}}{b_{i+1}^{x_1} - b_i^{x_1}}(b_{i+1}^{x_2} - b_i^{x_2}) \right| \\
&= |t_1 - a_{i+1}^{x_1}| \frac{|a_{i+1}^{x_1} - a_i^{x_1}|}{|a_{i+1}^{x_1} - a_i^{x_1}|} + |a_{i+1}^{x_2} - b_i^{x_2}| + |t_2 - b_{i+1}^{x_1}| \frac{|b_{i+1}^{x_1} - b_i^{x_1}|}{|b_{i+1}^{x_1} - b_i^{x_1}|}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Ricordando che gli $a_i, a_{i+1}, b_i$ e $b_{i+1}$ sono massimali per l'ordine $\preceq$, e quindi non confrontabili, si ottengono le seguenti relazioni:

$$
\begin{cases}
|a_{i+1}^{x_2} - a_i^{x_2}| \leq |a_{i+1}^{x_1} - a_i^{x_1}| \\
|b_{i+1}^{x_2} - b_i^{x_2}| \leq |b_{i+1}^{x_1} - b_i^{x_1}|
\end{cases},
$$

ottenendo quindi nella (2.1):

$$
|f(t_1)-f(t_2)| \leq |t_1 - a_i^{x_1}| + |a_{i+1}^{x_2} - b_i^{x_2}| + |t_2 - b_{i+1}^{x_1}| = |t_1 - t_2|,
$$

che dimostra quanto voluto. Se $t_1, t_2 \notin [a_1^{x_1}, a_j^{x_1}]$ la tesi è banale. Senza perdita di generalità si può considerare $t_1 \notin [a_1^{x_1}, a_j^{x_1}]$ e $t_2 \geq a_j^{x_1}$. Allora $|f(t_1) - f(t_2)| = |f(t_1) - f(a_j^{x_1})|$. Ma per quanto mostrato sopra $|f(t_1) - f(t_2)| = |f(t_1) - f(a_j^{x_1})| \leq |t_1 - a_j^{x_1}| \leq |t_1 - t_2|$, il che termina la dimostrazione del fatto che gli strati sono contenuti in $x_1$-curve.

Rimane da dimostrare che le catene sono contenute in $x_2$-curve. A tale scopo si induca un nuovo ordine su $S$:

$$
a \trianglelefteq b \text{ se e solo se } b^{x_1} - a^{x_1} > |b^{x_2} - a^{x_2}|
$$

con $a = (a^{x_1}, a^{x_2})$ e $b = (b^{x_1}, b^{x_2})$. Si proverà ora che una catena per l'ordine $\preceq$ è formata da elementi non confrontabili per l'ordine $\trianglelefteq$. Si consideri $C = \{(a_1, \ldots, a_l)\}$ una catena, con $a_i \preceq a_{i+1}$ per ogni $i = 1, \ldots, l-1$. Allora dati $i \leq j$ si avrà che $a_j^{x_2} - a_i^{x_2} > |a_j^{x_1} - a_i^{x_1}|$. Se si avesse $a_i \trianglelefteq a_j$ allora si avrebbe $a_j^{x_1} - a_i^{x_1} > |a_j^{x_2} - a_i^{x_2}|$, ma allora

$$
a_j^{x_2} - a_i^{x_2} > |a_j^{x_1} - a_i^{x_1}| > a_j^{x_1} - a_i^{x_1} > |a_j^{x_2} - a_i^{x_2}|,
$$

il che è assurdo. Analogamente se si avesse $a_j \trianglelefteq a_i$. Ma allora le catene di $\preceq$ sono formate da elementi non confrontabili per $\trianglelefteq$. Questo conclude la dimostrazione del caso $n = 2$, perchè la simmetria tra $\preceq$ e $\trianglelefteq$ assicura che le catene siano $x_2$-curve semplicemente ripercorrendo la dimostrazione degli strati scambiando $x_1$ con $x_2$. □

## 2.2 Struttura di insiemi di misura nulla nel piano

**Definizione 2.3.** Si definisce $x_i - tubo$ di larghezza $\delta > 0$ un insieme di $\mathbb{R}^n$ della forma

$$
T = T^{x_i}(S, \delta) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, S) \leq \frac{\delta}{2} \right\}
$$

dove $S$ è una $x_i$-curva.

**Teorema 2.4** (di struttura)**.** *Sia $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^2$, con $F$ un insieme $F_\sigma$ di misura nulla. Fissato $\epsilon > 0$ $E$ può essere scritto come $E^{x_1} \cup E^{x_2}$ con $E^{x_i}$ che soddisfano alle seguente condizione: per ogni $\epsilon > 0$ e per $i = 1, 2$ $E^{x_i}$ può essere ricoperto da un numero numerabile di $x_i - tubi$ $T_j^{x_i}$ di larghezza $\delta_j^i$ tali che $\sum_{j \geq 1} \delta_j^i < \epsilon$.*

*Dimostrazione.* Si supponga per semplicità che $E$ sia compatto. Si fissi un $\delta > 0$, e si consideri la $\delta$-discretizzazione di $E$, $E_\delta$ introdotta nella Definizione 1.26. Dato che $E$ è compatto e ha misura di Lebesgue nulla, si ha per la Proposizione 1.2 che $\mathrm{Card}(E_\delta) = o\left(\frac{1}{\delta^2}\right)$ e quindi $\mathrm{Card}(E_\delta) \leq \frac{C^2}{\delta^2}$ per una costante $C$ opportuna. Inoltre per il Teorema 2.2 si ha che l'insieme $E_\delta$ puó essere ricoperto da $\frac{C}{\delta}$ $x_1$-curve $\gamma_{x_1}^i$ e $\frac{C}{\delta}$ $x_2$-curve $\gamma_{x_2}^j$.

Considerati allora i tubi $T^{x_1}(\gamma_{x_1}^i, 2\delta)$ e $T^{x_1}(\gamma_{x_2}^i, 2\delta)$, si ha che

$$\bigcup_i T^{x_1}(\gamma_{x_1}^i, 2\delta) \cup \bigcup_j T^{x_2}(\gamma_{x_2}^j, 2\delta) \supset E.$$

Inoltre la somma della larghezza delle strisce puó essere stimata con:

$$2\delta\sqrt{E_\delta} = 2\delta\sqrt{o\left(\frac{1}{\delta^2}\right)} = o(1),$$

per cui tale quantitá tende a 0 per $\delta \to 0$ e quindi si puó scegliere $\delta$ tale per cui $o(1) \leq \epsilon$. Quindi ora si è provato il caso compatto. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^2$ insieme chiuso. Allora $C = \bigcup_k C \cap [-k, k]^2$ e quindi essendo $C \cap [-k, k]^2$ compatto $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha che il risultato è ancora vero un gli insiemi chiusi. Infatti siano $T_i^k(x_j)$ gli $x_j - tubi$ che ricoprono $C \cap [-k, k]^2$ la cui somma degli spessori è $\frac{\epsilon}{2^k}$ e quindi l'insieme dei tubi $\{T_i^k(x_j) : k \in \mathbb{N}\}$ ricoprono $E$ (una volta fatta l'unione sui $j$) con spessore limitato da $2\epsilon$. Quindi il risultato è provato per insiemi chiusi. Analogamente a sopra si dimostra per insiemi $F_\sigma$. □

Nel lavoro [2] si enuncia il seguente teorema che estende il Teorema 2.4 ad un qualsiasi insieme di misura nulla nel piano e che rende indipendente da $\epsilon$ la scelta degli insiemi $E_1^x$ ed $E_2^x$:

**Teorema 2.5.** *Un insieme di misura nulla $E \subseteq \mathbb{R}^2$ può essere scritto come $E^{x_1} \cup E^{x_2}$ con $E^{x_i}$ che soddisfano alle seguente condizione: per ogni $\epsilon > 0$ e per $i = 1, 2$ $E^{x_i}$ può essere ricoperto da un numero numerabile di $x_i - tubi$ $T_j^{x_i}$ di larghezza $\delta_j^i$ tali che $\sum_{j \geq 1} \delta_j^i < \epsilon$.*

# Capitolo 3

# Spazi tangenti ad insiemi di misura nulla nel piano

## 3.1 Misure di Hausdorff

**Definizione 3.1.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se $0 \leq s < \infty$, $0 \leq \delta < \infty$. Si definisca

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2}\right)^s : A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j, \operatorname{diam}(C_j) \leq \delta\right\},$$

dove

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}.$$

e $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$, $0 < s < \infty$, è l'usuale funzione gamma di Eulero. Si definisce poi

$$\mathcal{H}^s(A) := \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A). \tag{3.1}$$

$\mathcal{H}^s$ si dice misura $s$-dimensionale di Hausdorff su $\mathbb{R}^n$.

**Teorema 3.2.** *$\mathcal{H}^s$ è una misura di Borel regolare* $(0 < s < \infty)$.

*Dimostrazione.* Preliminarmente si procederà a mostrare che $\mathcal{H}^s_\delta$ è una misura. Infatti, sia $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ e si supponga che $A_k \subseteq \cup_{k\in\mathbb{N}} C^k_j$, con $\operatorname{diam}(C^k_j) \leq \delta$; allora $\{C^k_j\}_{j,k\in\mathbb{N}}$ è ricoprimento di $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Quindi

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C^k_j)}{2}\right)^s.$$

Prendendo l'inf ad ambo i membri su tutti i ricoprimenti che soddisfano alle richieste imposte sopra si ottiene:

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s_\delta(A_k).$$

Quindi $\mathcal{H}^s_\delta$ è una misura. Ora si può procedere a mostrare che $\mathcal{H}^s$ è una misura.

Infatti sia come sopra $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_k).$$

Facendo tendere $\delta \to 0$ si ottiene la tesi. Si mostrerà ora che $\mathcal{H}^s$ è misura di Borel. Scelti $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, tali che $\mathrm{dist}(A, B) > 0$, si scelga $0 < \delta < \frac{1}{4}\mathrm{dist}(A, B)$. Si supponga inoltre che $A \cup B \subseteq \cup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ e $\mathrm{diam}(C_k) \leq \delta$.

Sia $\mathcal{A} := \{C_j : C_j \cap A \neq \emptyset\}$ e $\mathcal{B} := \{C_j : C_j \cap B \neq \emptyset\}$. Allora si avrà che $A \subseteq \cup_{C_j\in\mathcal{A}} C_j$ e $B \subseteq \cup_{C_j\in\mathcal{B}} C_j$, ma per costruzione $C_i \cap C_j = \emptyset$ se $C_i \in \mathcal{A}$ e $C_j \in \mathcal{B}$. Dunque:

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(s)\left(\frac{\mathrm{diam}(C_j)}{2}\right)^s \geq \sum_{C_j\in\mathcal{A}} \alpha(s)\left(\frac{\mathrm{diam}(C_j)}{2}\right)^s + \sum_{C_j\in\mathcal{B}} \alpha(s)\left(\frac{\mathrm{diam}(C_j)}{2}\right)^s \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).$$

Prendendo l'inf tra tutti questi ricoprimenti, si trova che $\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$, se $0 < 4\delta < \mathrm{dist}(A, B)$. Facendo tendere $\delta \to 0$ si ottiene $\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$, il che con la subadditività della misura ed il Teorema 1.24 fa concludere che $\mathcal{H}^s$ è misura di Borel.

Si noti che $\mathrm{diam}(C) = \mathrm{diam}(\mathrm{cl}(C))$ per ogni $C \subseteq \mathbb{R}^n$, quindi

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(s)\left(\frac{\mathrm{diam}(C_j)}{2}\right)^s : A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j, \mathrm{diam}(C_j) \leq \delta, C_j \text{ chiusi}\right\}.$$

Scelto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{H}^s(A) \leq \infty$; allora $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \infty$ per ogni $\delta > 0$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si scelgano dei chiusi $\{C^k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $\mathrm{diam}(C^k_j) \leq \frac{1}{k}$, $A \subseteq \cup_{j\in\mathbb{N}} C^k_j$, e

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(s)\left(\frac{\mathrm{diam}(C^k_j)}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}} + \frac{1}{k}.$$

Sia $A_k := \cup_{j\in\mathbb{N}} C^k_j$, $B_k := \cup_{j\in\mathbb{N}} A_k$; $B$ è Boreliana. Inoltre $A \subseteq A_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi $A \subseteq B$. Inoltre,

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(B) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(s)\left(\frac{\mathrm{diam}(C^k_j)}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}.$$

Facendo tendere $k \to \infty$, si ha che $\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A)$. Ma $A \subseteq B$, e quindi $\mathcal{H}^s(B) = \mathcal{H}^s(A)$. □

**Proposizione 3.3.** *Ogni insieme $N \subseteq \mathbb{R}^n$ numerabile ha misura $\mathcal{H}^s$ nulla per ogni $0 < s \leq n$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $\epsilon > 0$ si ha:

$$N \subseteq \bigcup_{x_i \in N} B_{\frac{\epsilon}{2^{i+1}}}(x_i).$$

Ma allora:

$$\mathcal{H}^s_\delta(N) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(s) \left(\frac{\epsilon}{2^{i+1}}\right)^s \leq \epsilon^s \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2^s)^{i+1}} = \frac{\epsilon^s}{2^s - 1}.$$

Fissato $\delta > 0$, si avraà per quanto sopra che $\mathcal{H}^s_\delta(N) = 0$. Perciò $\mathcal{H}^s(N) = 0$. □

## 3.2 Spazio tangente ad insiemi di misura nulla nel piano

**Definizione 3.4.** Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo. Dato un Boreliano $E \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice *spazio tangente debole* ad $E$ una mappa Boreliana $\tau : E \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$se

$$\tau_S(p) = \tau(p) \text{ per } \mathcal{H}^1 - q.o.\ p \in \operatorname{supp}(S) \cap E \tag{3.2}$$

per ogni curva $S$ di classe $\mathcal{C}^1$, dove $\tau_S$ è la retta tangente non orientata ad $S$.

**Proposizione 3.5.** *Date due curve $S_1, S_2$ di classe $\mathcal{C}^1$, gli spazi tangenti classici corrispondenti coincidono su* $\operatorname{supp}(S)_1 \cap \operatorname{supp}(S)_2$ $\mathcal{H}^1$ *quasi ovunque.*

*Dimostrazione.* Si consideri l'insieme

$$\mathcal{F} = \{x \in \operatorname{supp}(S)_1 \cap \operatorname{supp}(S)_2 : \tau_{S_1}(x) \neq \tau_{S_2}(x)\},$$

degli elementi di $S_1 \cap S_2$ dove gli spazi tangenti alle due curve non coincidono. I campi tangenti alle curve $S_1$ ed $S_2$ sono funzioni continue, quindi, dato $x \in \mathcal{F}$, esiste un intorno $U$ di $x$ dove le curve hanno spazi tangenti sempre distinti, e possiamo assumerli, senza perdita di generalità, linearmente indipendenti. Dato che $S_1$ ed $S_2$ sono curve $\mathcal{C}^1$, se ne può fare lo sviluppo di Taylor in $x$:

$$S_1(t) = x + \dot{S}_1(0)t + o(t),$$
$$S_2(t) = x + \dot{S}_2(0)t + o(t),$$

Dove $\dot{S}_1(0)$ ed $\dot{S}_2(0)$ sono linearmente indipendenti. Sottraendo allora membro a membro:

$$S_1(t) - S_2(t) = (\dot{S}_1(0) - \dot{S}_2(0))t + o(t) = (\dot{S}_1(0) - \dot{S}_2(0) + o(1))t.$$

Allora esiste un intorno $V \subseteq U$ di $x$ tale che $|\dot{S}_1(0) - \dot{S}_2(0) + o(1)| > 0$, e quindi in $V \setminus \{x\}$ le curve $S_1$ ed $S_2$ non coincidono. Quindi l'insieme $\mathcal{F}$ è discreto, e ha misura $\mathcal{H}^1$ nulla. □

*Osservazione* 3.6. Dalla proposizione precedente segue che la nozione di spazio tangente classico e debole coincidono nel caso di curve $\mathcal{C}^1$.

**Definizione 3.7.** Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice:

(i) 1-*rettificabile* se è contenuto in un unione numerabile di curve $\mathcal{C}^1$ a meno di un insieme $E_0$ di misura $\mathcal{H}^1$ nulla.

(ii) *puramente non rettificabile* se per ogni curva $S$ di classe $\mathcal{C}^1$ si ha $\mathcal{H}^1(S \cap E) = 0$.

*Osservazione* 3.8. È chiaro che qualunque spazio tangente si definisca su un insieme puramente non rettificabile, soddisfa alla condizione (3.2).

**Proposizione 3.9.** *Lo spazio tangente debole ad un insieme $E$, se esiste, è unico a meno di insiemi puramente non rettificabili.*

*Dimostrazione.* Siano $\tau_1$ e $\tau_2$ due spazi tangenti deboli di $E$. Si consideri l'insieme $\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}^2 : \tau_1(x) \neq \tau_2(x)\}$ e si fissi una curva $S \in \mathcal{C}^1$. Gli insiemi $\mathcal{F}_1 := \{x \in S : \tau_S(x) \neq \tau_1(x)\}$ e $\mathcal{F}_2 := \{x \in S : \tau_S(x) \neq \tau_2(x)\}$ hanno misura di Hausdorff nulla, quindi la loro unione ha misura nulla. Chiaramente però $\mathcal{F} \cap S \subseteq \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, che ha quindi misura nulla, e perciò $\mathcal{F}$ è puramente non rettificabile. $\square$

**Proposizione 3.10.** *Un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^2$ con misura di Lebesgue positiva non ammette alcuno spazio tangente debole.*

*Dimostrazione.* Infatti, si fissi una direzione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Usando come curve $\mathcal{C}^1$ nel test (3.2) le rette parallele a tale direzione fissata, si ottiene per il teorema di Fubini-Tonelli che lo spazio tangente ad $E$ coincide $\mathcal{L}^2$ quasi ovunque con la direzione fissata. Ma questo vale per ogni direzione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e si ottiene un assurdo. $\square$

**Definizione 3.11.** Dati $e \in \mathbb{R}^2$ con $|e| = 1$ ed un angolo $\alpha \in [0, \pi]$, si definisce il cono a due falde chiuso di asse $e$ e ampiezza $\alpha$ l'insieme:

$$C(e, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x \cdot e| \geq |x| \cos(\alpha/2)\}.$$

Si indicherà Cone $:= \{C(e, \alpha) : e \in \mathbb{R}^2, \alpha \in [0, \pi]\}$ l'insieme di tutti i coni centrati nell'origine.

**Definizione 3.12.** Si dice *spazio tangente conico* una mappa $\mathcal{C} : E \to \text{Cone}$ tale che per ogni curva $S$ di classe $\mathcal{C}^1$:

$$\mathcal{C}(p) \supseteq \tau_S(p) \text{ per } \mathcal{H}^1 - q.o.\ p \in S \cap E, \tag{3.3}$$

in perfetto parallelismo con la (3.2).

**Lemma 3.13.** *Intersezione numerabile di spazi tangenti conici ad $E$ è ancora uno spazio tangente conico.*

*Dimostrazione.* Se $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sono spazi tangenti conici ad $E$ si ha che per ogni $i \in \mathbb{N}$ e per ogni $S$ curva di classe $\mathcal{C}^1$ si ha $\tau_S(p) \subseteq \mathcal{C}_i(p)$ per $\mathcal{H}^1$ quasi ogni $p \in S \cap E$. Ma allora ovviamente $\tau_S(p) \subseteq \cap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_i(p)$ per $\mathcal{H}^1$ quasi ogni $p \in S \cap E$ (l'unione degli insiemi dove l'inclusione non vale è numerabile e quindi ha ancora misura $\mathcal{H}^1$ nulla). $\square$

Se si assume per vero il Teorema 2.5, vale il seguente risultato:

**Teorema 3.14.** *Ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ di misura nulla ammette uno spazio tangente debole.*

*Dimostrazione.* Si fissino $e^{x_1} := (1,0)$ ed $e^{x_2} := (0,1)$. Scrivendo $E = E^{x_1} \cup E^{x_2}$ come nel Teorema 2.5, si definisce il candidato spazio tangente conico ad $E$, preso $\alpha \in ]\pi/2, \pi]$:

$$\mathcal{C}_\alpha(p) := \begin{cases} C(e^{x_1}, \alpha) & \text{se } p \in E^{x_1}, \\ C(e^{x_2}, \alpha) & \text{se } p \in E^{x_2} \setminus E^{x_1}. \end{cases}$$

Si verificherà ora che $\mathcal{C}_\alpha(p)$ è uno spazio tangente conico. A tale scopo si fissi $S \in \mathcal{C}^1$, e si definisca la funzione

$$\begin{aligned} S' :& \mathrm{supp}(S) \longrightarrow [-\infty, \infty] \\ & p \longmapsto \frac{\tau_S(p) \cdot e^{x_2}}{\tau_S(p) \cdot e^{x_1}} \end{aligned}$$

Si dimostrerà che $\mathcal{H}^1(\{p \in S : |S'(p)| > 1\} \cap E^{x_1}) = 0$ ed analogamente che $\mathcal{H}^1(\{p \in S : |S'(p)| < 1\} \cap E^{x_2}) = 0$ e quindi la condizione (3.3) è soddisfatta per l'arbitrarietà di $S$.

Si consideri allora $p \in \{p \in S : |S'(p)| > 1\} \cap E^{x_1}$. Per la continuità di $\tau_S$ ($S$ è una curva $\mathcal{C}^1$), esiste un intorno $B_r(p)$ di $p$ di raggio $r > 0$ tale che $r = \frac{1}{2}\sup\{R > 0 : \text{se } p \in S \cap B_R(p) \text{ allora } |S'(p)| > 1\}$. L'insieme $E^{x_1}$ può essere ricoperto con $x_1$-tubi $T_i(\epsilon)$ di larghezza $2\delta_i$ tali per cui $\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i < \epsilon$.

Ora si procederà a stimare la quantità $\mathrm{diam}(T_i(\epsilon) \cap \mathrm{supp}(S) \cap B_r(p))$. L'insieme

$$\mathcal{F}_i := \bigcup_{t \in [-2\delta_i, 2\delta_i]} \left( C\left(e^{x_1}, \frac{\pi}{2}\right) + p + te^{x_2} \right)$$

contiene l' $x_1$-tubo $T_i(\epsilon)$, per definizione stessa di $x_1$-tubo. Inoltre posto $m := \inf_{p \in S \cap B_r(p)} S'(p)$ si ha che $S \subseteq p + C(e^{x_2}, 2(\pi/2 - \arctan(m)) =: \mathcal{V}$. Quindi si ha banalmente che $\mathrm{diam}(T_i(\epsilon) \cap S \cap B_r(p)) \leq \mathrm{diam}(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{V} \cap B_r(p))$. Per quest'ultimo insieme la stima del diametro è facile. Infatti per la regola dei seni si ottiene:

$$\frac{\mathrm{diam}(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{V} \cap B_r(p))}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{2\delta_i}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4} - \theta)} = \frac{2\sqrt{2}\delta_i}{\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta)} = \frac{2\delta_i\sqrt{1+m^2}}{m-1},$$

da cui si segue che

$$\mathrm{diam}(T_i(\epsilon) \cap S \cap B_r(p)) \leq \mathrm{diam}(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{V} \cap B_r(p)) = \frac{4\delta_i\sqrt{1+m^2}}{m-1}.$$

Allora si può stimare la misura $\mathcal{H}^1_\delta(E^{x_1} \cap S \cap B_r(p))$ con $\epsilon > \delta > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1_\delta(E^{x_1} \cap S \cap B_r(p)) &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(T_i(\epsilon) \cap \mathrm{supp}(S) \cap B_r(p)) \\ &\leq \frac{4\delta_i\sqrt{1+m^2}}{m-1} \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i \leq 2\frac{4\delta_i\sqrt{1+m^2}}{m-1}\epsilon. \end{aligned}$$

Quindi per ogni $\delta > 0$ risulta che $\mathcal{H}^1_\delta(E^{x_1} \cap S \cap B_r(p)) = 0$ e quindi passando al sup su $\delta > 0$ si ha che $\mathcal{H}^1(E^{x_1} \cap S \cap B_r(p)) = 0$.

Considero un insieme denso $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $\{p \in S : |S'(p)| > 1\} \cap E^{x_1}$. Allora si ha che:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_i}(p_i) \supseteq \{p \in S : |S'(p)| > 1\} \cap E^{x_1}. \tag{3.4}$$

Infatti, dato un $p \in \{p \in S : |S'(p)| > 1\} \cap E^{x_1}$, come osservato sopra esiste una palla $B_r(p)$ dove $S'(x) > 1$ per ogni $x \in B_r(p) \cap S$. Ma per la densità di per ogni $\epsilon > 0$ in $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ esiste un $p_i$ tale che $|p_i - p| < \epsilon$. Ma allora si può stimare $r_i$ con $r_i > (2r - 2\epsilon)/2 = r - \epsilon > 0$, e quindi la (3.4) è dimostrata. Quindi risulta che $\mathcal{H}^1(\{p \in S : |S'(p)| < 1\} \cap E^{x_2}) = 0$.

Si ruotino allora gli assi di un angolo $\theta$ e si proceda con la stessa costruzione dello spazio tangente conico con gli assi ruotati, ottenendo un nuovo spazio tangente $\mathcal{C}_{\alpha,\theta}$ che è uguale per ogni $p \in E$ ad $C(e^{x_1}_\theta, \alpha)$ oppure a $C(e^{x_2}_\theta, \alpha)$, dove $e^{x_1}_\theta = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$ ed $e^{x_2}_\theta = (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))$.

Ponendo:

$$\mathcal{C}(p) := \bigcap_{\alpha\in[\pi/2,\pi]\cap\mathbb{Q}} \bigcap_{\theta\in[0,2\pi]\cap\mathbb{Q}} \mathcal{C}_{\alpha,\theta}(p)$$

Si ottiene ancora uno spazio tangente conico per il Lemma 3.13.

Sicuramente per ogni $p \in E$ si avrà che $p \in \mathcal{C}(p)$. Per assurdo $\mathcal{C}(p)$ contenga due rette di direzioni $r^1$ ed $r^2$ distinte. Fissato $\alpha \in [\pi/2, \pi] \cap \mathbb{Q}$ sia $\gamma \in ]0, \pi/2]$ l'angolo formato dalle due rette. Ma allora fissato $C(r_1, \alpha)$, uno tra $C(r^1_{\alpha-\frac{\gamma}{2}}, \alpha)$ e $C(r^1_{-\alpha+\frac{\gamma}{2}}, \alpha)$ contiene una sola retta e di conseguenza si ottiene un assurdo. Perciò $\mathcal{C}(p)$ contiene una retta o un punto. Definendo ora $\tau : E \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come:

$$\tau(p) := \begin{cases} \mathcal{C}(p) & \text{se } \mathcal{C}(p) \text{ è una retta} \\ e_1 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

si ottiene per come costruito $\tau$ uno spazio tangente debole. $\square$

# Bibliografia

[1] L.C.Evans ed R.F.Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Function.* CRC Press, (1992), 1–63.

[2] G.Alberti, M. Csörnyei, D. Preiss, *Structure of null sets in the plane and applications.* (2005) 1–7.

[3] G.Alberti, M. Csörnyei, D. Preiss, *Differentiability of Lipschitz funcitions, structure of null sets, and other problems.* (2010)

Nel Capitolo 1 si è fatto riferimento principalmente ad [1]. Le fonti per i Teoremi 2.4 e 3.14 sono [2] e [3].