Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di laurea magistrale

Esistenza e unicità di soluzioni deboli per l'equazione di Monge-Ampère

Candidato:
Damiano Maragno

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Anno Accademico 2012-2013

Indice

Introduzione **1**

1 Mappa normale e misura di Monge-Ampère **3**
1.1 La mappa normale 3
1.2 Proprietà della mappa normale 7

2 Soluzioni deboli **23**
2.1 Soluzioni generalizzate 23
2.2 Soluzioni di viscosità 26

3 Principi di massimo e principio del confronto **33**
3.1 Confronto tra mappe normali 33
3.2 Il principio del massimo di Aleksandrov 35
3.3 Il principio del massimo di Aleksandrov, Bakelman e Pucci . . 40
3.4 Il principio del confronto 45

4 Il problema di Dirichlet **53**
4.1 Il problema di Dirichlet omogeneo 53
4.2 Proprietà di subarmonicità delle funzioni convesse 58
4.3 Il problema di Dirichlet non omogeneo 64
4.4 Ancora sulle soluzioni di viscosità 71

5 Regolarità **75**
5.1 Regolarità $C^{1,\alpha}$ 75
5.2 Regolarità $W^{2,p}$ 78
5.3 Controesempi alla regolarità 82

Bibliografia **89**

Introduzione

In questo lavoro di tesi abbiamo studiato le soluzioni dell'equazione di Monge-Ampère

$$\det D^2u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un dominio convesso. La tesi si divide in due parti, diverse tra loro per il metodo di lavoro utilizzato. La prima parte, quella principale, tratta dell'esistenza e dell'unicità delle soluzioni deboli (generalizzate e di viscosità) del problema di Dirichlet. Abbiamo seguito in modo sistematico la trattazione di Gutierrez (in [Gut01]), soprattutto i capitoli 1 e 3.

Nella parte finale della tesi, invece, abbiamo studiato alcuni recenti risultati di regolarità con un approccio diverso: senza fornire tutte le dimostrazioni, abbiamo cercato di dare una visione d'insieme su alcuni teoremi noti e di mettere in relazione tra loro i vari risultati. Per questa parte ci siamo basati sul capitolo 6 del testo di Gutierrez e sugli articoli di Caffarelli [Caf90] e [Caf91] e di Wang [Wan95].

Nel primo capitolo si danno le nozioni basilari, in particolare quella di mappa normale ∂u di una funzione u e di misura di Monge-Ampère. Dato un boreliano $E \subset \Omega$, la misura di Monge-Ampère $Mu(E)$ è la misura di Lebesgue dell'insieme $\partial u(E)$.

Nel secondo capitolo si introducono due definizioni di soluzione debole: la soluzione generalizzata, cioè la soluzione dell'equazione

$$Mu = \mu$$

in Ω, dove μ è una misura boreliana su Ω, e la soluzione di viscosità. Le soluzioni generalizzate sono, sotto determinate ipotesi, anche soluzioni di viscosità.

Nel terzo capitolo si dimostrano il principio del massimo di Aleksandrov, il principio del massimo di Aleksandrov, Bakelman e Pucci ed il principio del confronto. Il principio del massimo di Aleksandrov, in particolare, valido per funzioni nulle sulla frontiera di Ω, dà una stima del tipo

$$|u(x_0)|^n \leq C_n(\operatorname{diam}\Omega)^{n-1} \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)|\partial u(\Omega)|,$$

dove $x_0 \in \Omega$ e C_n è una costante geometrica che dipende solo dalla dimensione n. Questo teorema si usa per provare l'esistenza di soluzioni del problema di Dirichlet e viene anche usato da Caffarelli nella dimostrazione di un teorema di regolarità in [Caf91].

Nel quarto capitolo si presentano dei risultati di esistenza e unicità di soluzioni generalizzate per il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Mu = \mu \text{ in } \Omega, \\ u = g \text{ su } \partial\Omega, \end{cases}$$

prima nel caso in cui μ sia identicamente nulla e poi per μ generica. Nella dimostrazione dell'unicità si usa un corollario del principio del confronto (il Corollario 3.4.5). Alla fine del capitolo si dimostra che le due definizioni di soluzione generalizzata e soluzione di viscosità sono sostanzialmente equivalenti.

Il quinto capitolo, infine, è dedicato ai risultati di regolarità. Non sono presenti le dimostrazioni complete, che sono tecnicamente impegnative e vanno oltre gli scopi di questo lavoro. Nella Sezione 5.1 è discusso il teorema di regolarità $C^{1,\alpha}$, nella Sezione 5.2 il teorema di regolarità $W^{2,p}$, entrambi dovuti a Caffarelli. Nella Sezione 5.3 si esaminano infine alcuni controesempi (si veda [Wan95]) che provano l'ottimalità delle ipotesi nei vari teoremi di regolarità.

Capitolo 1

Mappa normale e misura di Monge-Ampère

Introduciamo in questo capitolo alcune definizioni e proprietà fondamentali che ci serviranno per studiare l'equazione di Monge-Ampère.

1.1 La mappa normale

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una mappa e $x_0 \in \Omega$ un punto in Ω. Cominciamo con il fornire alcune definizioni.

Definizione 1.1.1. *Un **iperpiano di supporto** alla funzione u nel punto $(x_0, u(x_0))$ è una funzione affine $\ell(x) = u(x_0) + p \cdot (x - x_0)$, $p \in \mathbb{R}^n$, tale che*

$$u(x) \geq \ell(x)$$

per ogni $x \in \Omega$.

Nota 1.1.2. La nozione di iperpiano di supporto è una nozione di tipo globale. Consideriamo però una funzione f convessa in un aperto convesso Ω e sia $U \subset \Omega$ un aperto. Se esiste un punto x_0 tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + p \cdot (x - x_0)$$

per ogni $x \in U$, allora la disuguaglianza vale per ogni $x \in \Omega$, altrimenti l'ipotesi di convessità sarebbe contraddetta. In questo caso un iperpiano di supporto "locale" è automaticamente in iperpiano di supporto "globale".

Definizione 1.1.3. *La **mappa normale** o **sottodifferenziale** di u è la funzione $\partial u : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ così definita:*

$$\partial u(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq u(x_0) + p \cdot (x - x_0) \ \forall x \in \Omega\} .$$

Dato $E \subseteq \Omega$, definiamo $\partial u(E) = \bigcup_{x \in E} \partial u(x)$.

In generale, l'insieme $\partial u(x_0)$ può essere l'insieme vuoto. Chiamiamo S l'insieme dei punti di Ω la cui immagine tramite la mappa normale non è l'insieme vuoto,

$$S = \{x \in \Omega : \partial u(x) \neq \varnothing\} .$$

Proposizione 1.1.4. *Se $u \in C^1(\Omega)$ e $x_0 \in S$, allora $\partial u(x) = \{Du(x)\}$.*

Dimostrazione. Se x_0 appartiene ad S, allora esiste $p \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$u(x) \geq u(x_0) + p \cdot (x - x_0) \tag{1.1}$$

per ogni $x \in \Omega$. Essendo $u \in C^1(\Omega)$, possiamo scrivere la sua espansione in serie di Taylor attorno al punto x_0,

$$u(x) = u(x_0) + Du(x_0) \cdot (x - x_0) + \mathrm{o}(\|x - x_0\|),$$

e, sostituendo quest'espressione per $u(x)$ in (1.1), raccogliendo e riordinando, otteniamo

$$(Du(x_0) - p) \cdot (x - x_0) + \mathrm{o}(\|x - x_0\|) \geq 0$$

per ogni x in un intorno di x_0.

Se ora chiamiamo $v := Du(x_0) - p$, abbiamo

$$v \cdot (x - x_0) + \mathrm{o}(\|x - x_0\|) \geq 0 \tag{1.2}$$

per ogni x in un intorno di x_0. Supponiamo per assurdo che v sia diverso da 0 e scegliamo $\alpha \in \mathbb{R}^n$ sufficientemente piccolo perché valgano i ragionamenti fatti finora, e tale che $x - x_0 = -\alpha^2 v$. Sostituendo in (1.2) otteniamo

$$-\alpha^2\|v\|^2 + \mathrm{o}(\alpha^2\|v\|) \geq 0,$$

dove

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\mathrm{o}(\alpha^2\|v\|)}{\alpha^2\|v\|} = 0.$$

Dividiamo ora per $\alpha^2\|v\|$ per ottenere

$$-\|v\| + \frac{\mathrm{o}(\alpha^2\|v\|)}{\alpha^2\|v\|} \geq 0,$$

da cui, facendo tendere α a 0, abbiamo l'assurdo $\|v\| \leq 0$. Quindi deve essere $v = 0$. □

Proposizione 1.1.5. *Se $u \in C^2(\Omega)$ e $x \in S$, allora $D^2u(x)$ è semidefinita positiva (in altre parole, se $u \in C^2(\Omega)$, allora S è l'insieme dei punti in cui il grafico di u ha concavità verso l'alto).*

Dimostrazione. Espandendo in serie di Taylor,

$$u(x+h) = u(x) + Du(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^t D^2 u(\xi) h,$$

con $\xi \in [x, x+h]$ (denotiamo così il segmento).
Notiamo che $u(x+h) \geq u(x) + Du(x) \cdot h$ per h sufficientemente piccolo (siamo in S); quindi $\frac{1}{2} h^t D^2 u(\xi) h \geq 0$, che è come dire

$$\frac{1}{2} \frac{h^t}{\|h\|} D^2 u(\xi) \frac{h}{\|h\|} \geq 0.$$

Scegliamo v vettore di norma unitaria e consideriamo una successione $h_m \to 0$ tale che

$$\frac{h_m}{\|h_m\|} \to v;$$

prendiamo inoltre una successione $\xi_m \to x$. Possiamo riscrivere la relazione precedente come

$$\frac{1}{2} \frac{h_m^t}{\|h_m\|} D^2 u(\xi_m) \frac{h_m}{\|h_m\|} \geq 0.$$

A questo punto possiamo passare al limite per $m \to \infty$ (abbiamo le ipotesi di regolarità sufficienti per u, che abbiamo preso in $C^2(\Omega)$); otteniamo quindi

$$\frac{1}{2} v^t D^2 u(x) v \geq 0.$$

Dal momento che v è il generico vettore di norma unitaria, ne concludiamo che

$$D^2 u(x) \geq 0.$$

□

Esempio 1.1.6. Consideriamo $\Omega = B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$, $h > 0$, e sia

$$u(x) = \frac{h}{R} \|x - x_0\|.$$

Il grafico di u, per $x \in \Omega$, è un cono rovesciato in $\mathbb{R}^{n+1}$ con vertice nel punto $(x_0, 0)$ e base sull'iperpiano $x_{n+1} = h$.

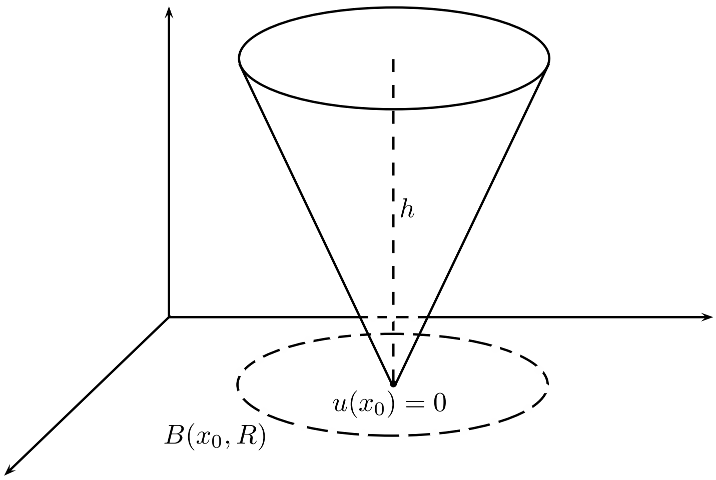

Figura 1.1. Nella figura è rappresentato il grafico della funzione u dell'Esempio 1.1.6.

Vogliamo mostrare che

$$\partial u(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{R}\dfrac{x-x_0}{\|x-x_0\|} & \text{se } 0 < \|x-x_0\| < R, \\ \\ \overline{B(0, \frac{h}{R})} & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

Se $0 < \|x - x_0\| < R$, la tesi segue dal calcolo del gradiente; nel caso $x = x_0$, usiamo la definizione di mappa normale: $p \in \partial u(x_0)$ se e solo se

$$u(x) = \frac{h}{R}\|x-x_0\| \geq u(x_0) + p \cdot (x-x_0) = p \cdot (x-x_0)$$

per ogni $x \in B(x_0, R)$. Se $p \neq 0$, prendiamo

$$x = x_0 + \frac{R}{2}\frac{p}{\|p\|};$$

sostituendo questo valore nella disuguaglianza precedente, si ottiene

$$\|p\| \leq \frac{h}{R}.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, $\|p\| \leq \frac{h}{R}$ implica $p \in \partial u(x_0)$. Infatti

$$|p \cdot (x-x_0)| \leq \|p\|\|x-x_0\| \leq \frac{h}{R}\|x-x_0\|.$$

1.2 Proprietà della mappa normale

Lemma 1.2.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto, $u \in C(\Omega)$ e $K \subset \Omega$ è compatto, allora $\partial u(K)$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{p_k\} \subset \partial u(K)$ una successione. Verifichiamo per prima cosa che $\{p_k\}$ sia limitata.

Per ogni k esiste $x_k \in K$ tale che $p_k \in \partial u(x_k)$, cioè

$$u(x) \geq u(x_k) + p_k \cdot (x - x_0)$$

per ogni $x \in \Omega$. L'insieme K è compatto, quindi anche

$$K_\delta = \{x : \mathrm{dist}(x, K) \leq \delta\}$$

è compatto e contenuto in Ω per δ sufficientemente piccolo; possiamo assumere (eventualmente considerando una sottosuccessione) che $x_k \to x_0$. Allora, se w è un vettore di norma unitaria, $x_k + \delta w \in K_\delta \subset \Omega$ e sostituendo nella disequazione precedente otteniamo

$$u(x_k + \delta w) \geq u(x_k) + \delta p_k \cdot w$$

per ogni $\|w\| = 1$ e per ogni k.

Se $p_k \neq 0$ e $w = \frac{p_k}{\|p_k\|}$, si ha

$$\max_{K_\delta} u(x) \geq \min_K u(x) + \delta \|p_k\|$$

per ogni k. Questo basta per mostrare che $\{p_k\}$ è localmente limitata, poiché u è localmente limitata. Esiste quindi una sottosuccessione convergente $p_{k_m} \to p_0$; resta da provare che $p_0 \in \partial u(x_0)$.

Sappiamo che $u(x) \geq u(x_{k_m}) + p_{k_m} \cdot (x - x_{k_m})$ per ogni $x \in \Omega$ e, poiché u è continua, facendo tendere $m \to \infty$ otteniamo

$$u(x) \geq u(x_0) + p_0 \cdot (x - x_0)$$

per ogni $x \in \Omega$. □

Nota 1.2.2. Dalla precedente dimostrazione, si vede che se u è solo localmente limitata allora $\partial u(E)$ è limitato ogniqualvolta E è limitato e $\overline{E} \subset \Omega$.

Nota 1.2.3. Per ogni $x_0 \in \Omega$ l'insieme $\partial u(x_0)$ è convesso. Per definizione

$$\partial u(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq u(x_0) + p \cdot (x - x_0) \ \forall x \in \Omega\}.$$

Prendiamo due elementi nell'insieme, $p_1, p_2 \in \partial u(x_0)$; dobbiamo verificare che $p_1(1-t) + tp_2 \in \partial u(x_0)$ per ogni $t \in [0,1]$. Sappiamo che

$$\begin{cases} u(x) \geq u(x_0) + p_1 \cdot (x - x_0), \\ u(x) \geq u(x_0) + p_2 \cdot (x - x_0). \end{cases}$$

Moltiplicando la prima disuguaglianza per $(1-t)$ e la seconda per t e sommando membro a membro otteniamo

$$u(x) \geq u(x_0) + [(1-t)p_1 + tp_2] \cdot (x - x_0),$$

cioè $p_1(1-t) + tp_2 \in \partial u(x_0)$, che è ciò che volevamo. Pertanto, l'insieme è convesso.

In generale, però, se K è convesso non necessariamente $\partial u(K)$ è convesso. Si consideri per esempio la funzione

$$u(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

nel dominio convesso

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}.$$

La funzione u è convessa, perché composizione di una funzione convessa (il quadrato della norma) e di una funzione crescente e convessa (la funzione esponenziale). Se scegliamo infatti una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e convessa e una funzione convessa $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, abbiamo naturalmente

$$\psi(tp_1 + (1-t)p_2) \leq t\psi(p_1) + (1-t)\psi(p_2)$$

per ogni $t \in [0,1]$; se consideriamo adesso la composizione abbiamo

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(tp_1 + (1-t)p_2) &\leq \varphi(t\psi(p_1) + (1-t)\psi(p_2)) \\ &\leq t\varphi \circ \psi(p_1) + (1-t)\varphi \circ \psi(p_2) \end{aligned}$$

dalla crescenza di φ, e dunque $\varphi \circ \psi$ è convessa.

Calcoliamo il differenziale di u:

$$Du(x,y) = (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}) = 2e^{x^2+y^2}(x,y).$$

Vediamo nella Figura 1.2 come il differenziale modifichi l'insieme K trasformandolo in un insieme non convesso.

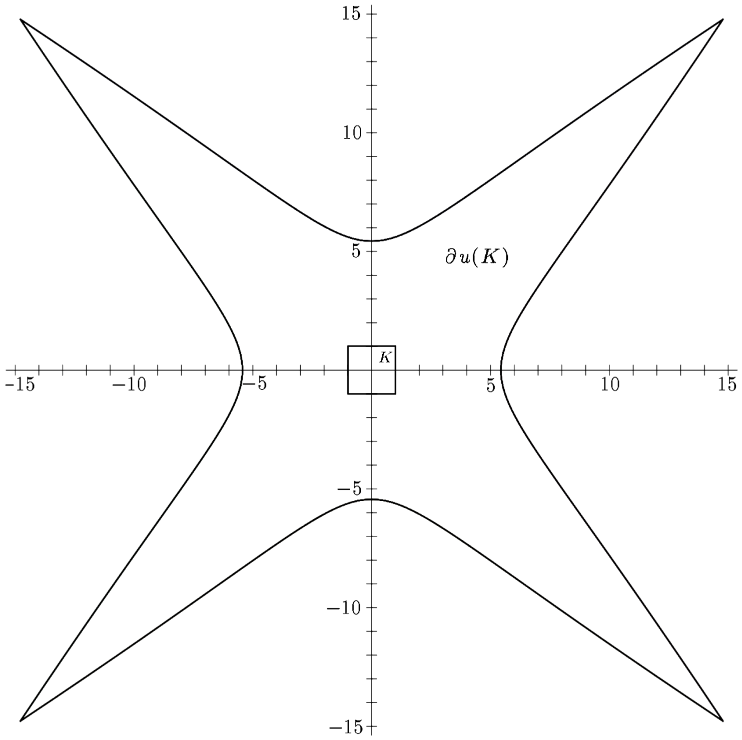

Figura 1.2. La mappa normale di $u(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ manda l'insieme convesso $K \subset \mathbb{R}^2$ (il quadratino di lato 2 centrato nell'origine) in un insieme non convesso $\partial u(K)$.

Lemma 1.2.4. *Se u è convessa in Ω e $K \subset \Omega$ è compatto, allora u è uniformemente lipschitziana in K, cioè esiste una costante $C = C(u,K)$ tale che $\|u(x) - u(y)\| \leq C\|x-y\|$ per ogni $x, y \in K$.*

Dimostrazione. Dal momento che u è convessa, possiamo definire un iperpiano di supporto in ogni punto. Sia

$$C = \sup\left\{\|p\| : p \in \partial u(K)\right\}.$$

Dal Lemma 1.2.1 segue che $C < \infty$.

Se $x \in K$, abbiamo

$$u(y) \geq u(x) + p \cdot (y - x)$$

per $p \in \partial u(x)$ e per ogni $y \in \Omega$. In particolare, se $y \in K$ (in realtà basterebbe $y \in \Omega$), allora

$$u(y) - u(x) \geq -\|p\|\|y - x\|.$$

Scambiando i ruoli di x e y ricaviamo la tesi. □

Teorema 1.2.5 (Rademacher)**.** *Se Ω è aperto e u è lipschitziana, allora u è quasi ovunque differenziabile in Ω.*

Dimostrazione. Si veda [EG92, p. 81]. □

Corollario 1.2.6. *Se u è convessa o concava in Ω, allora è quasi ovunque differenziabile in Ω.*

Dimostrazione. Nel caso in cui u sia convessa, il risultato segue dal Lemma 1.2.4 e dal Teorema 1.2.5; nel caso di u concava, il risultato segue considerando $-u$. □

Nota 1.2.7. [Risultato di Busemann, Feller e Aleksandrov] Ogni funzione convessa in Ω ha derivate seconde quasi ovunque. Per una dimostrazione di questo, si vedano [EG92, p. 242] e [Sch93, pp. 31-32].

Definizione 1.2.8. *La **trasformata di Legendre** della funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è la funzione $u^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita come*

$$u^*(p) = \sup_{x\in\Omega}(x \cdot p - u(x))$$

Nota 1.2.9. Se Ω è limitato e u è limitata in Ω, u^* è finita. Inoltre, u^* è convessa in $\mathbb{R}^n$.

La verifica è immediata: consideriamo i punti p_1 e p_2; abbiamo allora

$$\begin{aligned} u^*(tp_1 + (1-t)p_2) &= \sup_{x\in\Omega} \{x \cdot (tp_1 + (1-t)p_2) - u(x)\} = \\ &= \sup_{x\in\Omega} \{tx \cdot p_1 + (1-t)x \cdot p_2 - (tu(x) + (1-t)u(x)\} \\ &\leq tu^*(p_1) + (1-t)u^*(p_2), \end{aligned}$$

che mostra la convessità di u.

Calcoliamo, a titolo di esempio, alcune trasformate di Legendre.

Esempio 1.2.10. Consideriamo

$$f(x) = \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

vogliamo calcolare
$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} p \cdot x - f(x).$$
Introduciamo la funzione ausiliaria $\varphi(p, x) = p \cdot x - \|x\|$. Si ha banalmente
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(p, x) = f^*(p).$$
Notiamo che la funzione φ è positivamente omogenea in x, cioè per ogni $\lambda > 0$ vale
$$\varphi(p, \lambda x) = \lambda \varphi(p, x). \tag{1.3}$$
Facendo tendere λ a $+\infty$ in (1.3) si vede che, fissato $\bar{p}$, se esiste un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(\bar{p}, x) > 0$, allora automaticamente $f^*(\bar{p}) = +\infty$. Ci chiediamo dunque se esista un x tale che
$$\varphi(\bar{p}, x) = \bar{p} \cdot x - \|x\| > 0,$$
il che è vero se e solo se
$$\bar{p} \cdot x > \|x\|,$$
cioè
$$\bar{p} \cdot \frac{x}{\|x\|} > 1. \tag{1.4}$$
Se ora scegliamo $x = \gamma \bar{p}$, la (1.4) diventa
$$\bar{p} \cdot \frac{\gamma \bar{p}}{\gamma \|\bar{p}\|} = \|\bar{p}\| > 1.$$
Abbiamo dunque dimostrato che, se $\|\bar{p}\| > 1$, allora $f^*(\bar{p}) = +\infty$.

Se invece $\|\bar{p}\| \leq 1$, notiamo che per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha
$$\varphi(\bar{p}, x) = \bar{p} \cdot x - \|x\| \leq \|x\|(\|\bar{p}\| - 1) \leq 0$$
per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Dunque
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(\bar{p}, x) \leq 0.$$
Osserviamo però che in $x = 0$, $\varphi(\bar{p}, 0) = 0$, e quindi l'estremo superiore è proprio 0. Abbiamo quindi trovato che
$$f^*(p) = \begin{cases} 0 \text{ se } \|p\| \leq 1, \\ +\infty \text{ se } \|p\| > 1. \end{cases}$$

Esempio 1.2.11. Sia

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Introduciamo ancora la funzione ausiliaria $\varphi(p,x) = p \cdot x - \frac{1}{2}\|x\|^2$. Si ha ancora

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(p,x).$$

Calcoliamo il gradiente

$$\nabla_x \varphi(p,x) = p - x$$

e la matrice hessiana

$$D^2\varphi(p,x) = -I_n,$$

dove I_n è la matrice identica di dimensione n. Abbiamo quindi un massimo assoluto in $x = p$ e si ha allora

$$f^*(p) = \varphi(p,x)_{|x=p} = \|p\|^2 - \frac{1}{2}\|p\|^2 = \frac{1}{2}\|p\|^2,$$

cioè la funzione f è un'autofunzione per la trasformata di Legendre.

Esempio 1.2.12. Sia ora

$$f(x) = \|x\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

con $1 < q < +\infty$. Definiamo ancora $\varphi(p,x) = p \cdot x - \|x\|_q$; utilizzeremo un ragionamento analogo a quello dell'Esempio 1.2.10. Si ha infatti

$$\varphi(p, \lambda x) = \lambda \varphi(p,x)$$

per ogni $\lambda > 0$. Dunque se, fissato $\bar{p}$, esiste $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(\bar{p}, x) > 0$, allora $f^*(\bar{p}) = +\infty$. Vogliamo quindi vedere se

$$\bar{p} \cdot x - \|x\|_q > 0,$$

che è vero se e solo se

$$\bar{p} \cdot \frac{x}{\|x\|_q} > 1.$$

Sia ora $\bar{p}$ tale che $\|\bar{p}\|_r > 1$, dove r è scelto in modo che

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Vale il seguente lemma.

Lemma 1.2.13. *Siano* $1 < q, r < +\infty$ *tali che*

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

e sia $p \in \mathbb{R}^n$. *È sempre possibile scrivere la norma* $\|p\|_r$ *come prodotto scalare di* p *con un vettore* $x \in \mathbb{R}^n$ *tale che* $\|x\|_q = 1$.

Dimostrazione. Troviamo esplicitamente x. Vogliamo poter scrivere

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |p_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} = \|p\|_r = p \cdot x,$$

quindi dovrà essere $x_i = p_i |p_i|^{r-2}\alpha$ per una qualche costante α. Sarà cioè

$$x = \alpha(p_1|p_1|^{r-2}, ..., p_n|p_n|^{r-2}).$$

Calcoliamo allora

$$p \cdot x = \alpha \sum_{i=1}^{n} |p_i|^r;$$

vogliamo che questa quantità sia uguale a $\|p\|_r$. Questo è vero se scegliamo

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} |p_i|^r\right)^{\frac{1}{r}-1}.$$

Verifichiamo ora che il vettore x così ottenuto ha effettivamente norma q unitaria.

$$\|x\|_q^q = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^q = \alpha^q \sum_{i=1}^{n} |p_i|^{(r-1)q} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |p_i|^r\right)^{\frac{1-r}{r}\frac{r}{r-1}} \sum_{i=1}^{n} |p_i|^r = 1.$$

Abbiamo dunque provato che esiste x con $\|x\|_q = 1$ tale che $p \cdot x = \|p\|_r$. □

Torniamo ora al calcolo della trasformata di Legendre. Preso dunque $\bar{p}$ tale che $\|\bar{p}\|_r > 1$, per il Lemma 1.2.13 appena dimostrato esiste un vettore x tale che

$$\bar{p} \cdot \frac{x}{\|x\|_q} = \|\bar{p}\|_r > 1.$$

Dunque se $\|\bar{p}\|_r > 1$, allora $f^*(\bar{p}) = +\infty$.

Se ora invece $\|\bar{p}\|_r \leq 1$, per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\bar{p} \cdot x - \|x\|_q \leq \|\bar{p}\|_r \|x\|_q - \|x\|_q = \|x\|_q(\|\bar{p}\|_r - 1) \leq 0$$

per ogni x (e $\varphi(\bar{p}, 0) = 0$) e dunque, con ragionamenti analoghi a quelli dell'Esempio 1.2.10, possiamo concludere che

$$f^*(p) = \begin{cases} 0 \text{ se } \|p\|_r \leq 1, \\ +\infty \text{ se } \|p\|_r > 1. \end{cases}$$

Il lemma seguente è apparentemente un risultato molto tecnico, ma si rivelerà fondamentale più avanti nella dimostrazione dell'esistenza e unicità di soluzioni generalizzate al problema di Dirichlet per l'equazione di Monge-Ampère.

Lemma 1.2.14. *Se Ω è un aperto e u è una funzione continua in Ω, l'insieme*

$$S = \{p \in \mathbb{R}^n : \exists x, y \in \Omega, x \neq y \ \text{ e } p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)\}$$

ha misura di Lebesgue nulla.

Dimostrazione. Possiamo assumere che Ω sia limitato; in caso contrario, possiamo trovare un ricoprimento aperto Ω_k per il quale si abbia $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, $\overline{\Omega_k}$ compatti.

Se $p \in S$ esistono $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, con

$$\begin{cases} u(z) \geq u(x) + p \cdot (z - x), \\ u(z) \geq u(y) + p \cdot (z - y) \end{cases} \tag{1.5}$$

per ogni $z \in \Omega$. Poiché $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, $x, y \in \Omega_m$ per un certo indice m; in particolare, le disuguaglianze (1.5) sono vere per $z \in \Omega_m$. Dunque, se definiamo

$$S_m = \left\{p \in \mathbb{R}^n : \exists x, y \in \Omega, x \neq y \text{ e } p \in \partial u_{|\Omega_m}(x) \cap \partial u_{|\Omega_m}(y)\right\},$$

si ha $p \in S_m$, cioè $S \subset \bigcup_m S_m$. Mostriamo ora che ogni S_m ha misura nulla.

Sia u^* la trasformata di Legendre di u; per la Nota 1.2.9 e per il Corollario 1.2.6, u^* è differenziabile quasi ovunque. Sia

$$E = \{p \in \mathbb{R}^n : u^* \text{ non è differenziabile in } p\};$$

mostreremo che

$$\{p \in \mathbb{R}^n : \exists x, y \in \Omega, x \neq y \text{ e } p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)\} \subset E.$$

Se $p \in \partial u(x_1) \cap \partial u(x_2)$ e $x_1 \neq x_2$, si ha

$$u^*(p) = x_i \cdot p - u(x_i),\ \ i = 1, 2.$$

Sappiamo infatti che se $p \in \partial u(x_1)$, $u(x) \geq u(x_1) + p \cdot (x - x_1)$ per ogni $x \in \Omega$, il che equivale a dire $p \cdot x_1 - u(x_1) \geq p \cdot x - u(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Questo implica che

$$p \cdot x_1 - u(x_1) \geq \sup_{x \in \Omega} \{p(x) - u(x)\} = u^*(p);$$

avendo però scelto $x_1 \in \Omega$, abbiamo anche che, per la definizione di estremo superiore, $u^*(p) \geq p \cdot x_1 - u(x_1)$. Pertanto $u^*(p) = p \cdot x_1 - u(x_1)$; possiamo applicare lo stesso ragionamento anche a x_2, ottenendo

$$u^*(p) = p \cdot x_i - u(x_i),\ i = 1, 2.$$

Inoltre $u^*(z) \geq x_i \cdot z - u(x_i)$ implica

$$u^*(z) \geq u^*(p) + x_i \cdot (z - p)$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$; pertanto, se u^* fosse differenziabile in p potremmo scrivere lo sviluppo di Taylor

$$u^*(z) = u^*(p) + Du^*(p) \cdot (z - p) + \mathrm{o}(\|z - p\|);$$

abbiamo allora

$$Du^*(p)(z - p) + \mathrm{o}(\|z - p\|) \geq x_i \cdot (x - p),$$

quindi

$$(Du^*(p) - x_i) \cdot (z - p) + \mathrm{o}(\|z - p\|) \geq 0$$

per ogni z che sia in un intorno di p. Chiamando $v_i = Du^*(p) - x_i$, la precedente disuguaglianza diventa

$$v_i \cdot (z - p) + \mathrm{o}(\|z - p\|) \geq 0.$$

Se $v_i \neq 0$, possiamo affermare che $z - p = -\alpha^2 v_i$ ed otteniamo dalla disuguaglianza precedente $-\alpha^2\|v_i\|^2 + \mathrm{o}(\| - \alpha^2 v_i\|) \geq 0$. Sappiamo d'altronde che

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\mathrm{o}(\alpha^2\|v_i\|)}{\alpha^2\|v_i\|} = 0;$$

possiamo quindi dividere la disuguaglianza per il termine $\alpha^2\|v_i\| > 0$, che ci dà

$$-\|v_i\| + \frac{\mathrm{o}(\alpha^2\|v_i\|)}{\alpha^2\|v_i\|} \geq 0.$$

Calcolando il limite per $\alpha \to 0$, otteniamo $\|v_i\| \leq 0$; ne ricaviamo che $v_i = 0$ per $i = 1, 2$ e quindi che $Du^*(p) = x_i$, $i = 1, 2$, il che contraddice l'unicità del differenziale. $\square$

Teorema 1.2.15. *Se Ω è aperto e $u \in C(\Omega)$, la famiglia di insiemi*

$$\mathcal{S} = \{E \subset \Omega : \partial u(E) \text{ è Lebesgue misurabile}\}$$

è una σ-algebra di Borel. La funzione $Mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definita da

$$Mu(E) = |\partial u(E)| \tag{1.6}$$

è una misura finita sui compatti chiamata la ***misura di Monge-Ampère*** *associata alla funzione u.*

Dimostrazione. Per il Lemma 1.2.1, la famiglia $\mathcal{S}$ contiene tutti i sottoinsiemi compatti di Ω. Se $\{E_m\}$ è una successione di sottoinsiemi di Ω abbiamo inoltre che $\partial u(\bigcup_m E_m) = \bigcup_m \partial u(E_m)$.

Supponiamo quindi che $E_m \in \mathcal{S}$, $m = 1, 2, \ldots$; si ha allora $\bigcup_m E_m \in \mathcal{S}$. In particolare, possiamo scrivere $\Omega = \bigcup_m K_m$ per K_m compatti, ed otteniamo quindi $\Omega \in \mathcal{S}$. Per mostrare che $\mathcal{S}$ è una σ-algebra rimane da provare che se $E \in \mathcal{S}$ si ha anche che $\Omega \setminus E \in \mathcal{S}$. Per provare questo sfruttiamo la seguente formula, valida per ogni insieme $E \subset \Omega$:

$$\partial u(\Omega \setminus E) = (\partial u(\Omega) \setminus \partial u(E)) \cup (\partial u(\Omega \setminus E) \cap \partial u(E)).$$

Per il Lemma 1.2.14, $|\partial u(\Omega \setminus E) \cap \partial u(E)| = 0$ per ogni E. Si ricava quindi che $\Omega \setminus E \in \mathcal{S}$ se $E \in \mathcal{S}$.

Proviamo ora che Mu è σ-additiva. Sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione in $\mathcal{S}$ di insiemi disgiunti. Dobbiamo mostrare che

$$\left|\partial u\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\right| = \sum_{i=1}^{\infty} |\partial u(E_i)|.$$

Poiché $\partial u(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \partial u(E_i)$, basta mostrare che

$$\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} \partial u(E_i)\right| = \sum_{i=1}^{\infty} |\partial u(E_i)|.$$

Avendo scelto la successione in modo che $E_i \cap E_j = \varnothing$ per $i \neq j$, per il Lemma 1.2.14 $|\partial u(E_i) \cap \partial u(E_j)| = 0$ per $i \neq j$. Possiamo scrivere l'insieme $\bigcup_{i=1}^{\infty} \partial u(E_i)$ come unione di insiemi disgiunti. Infatti

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \partial u(E_i) = \partial u(E_1) \cup [\partial u(E_2) \setminus \partial u(E_1)] \cup \partial u(E_3) \setminus (\partial u(E_1) \cup \partial u(E_2)] \cup$$

$$\cup [\partial u(E_4) \setminus (\partial u(E_3) \cup \partial u(E_2) \cup \partial u(E_1)] \cup \ldots;$$

ora, se chiamiamo $H_i = \partial u(E_i)$, abbiamo

$$H_n = [H_n \cap (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup \cdots \cup H_1)] \cup [H_n \setminus (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup \cdots \cup H_1)].$$

Per il Lemma 1.2.14, $|H_n \cap (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup \cdots \cup H_1)| = 0$ e quindi

$$|H_n| = |H_n \setminus (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup \cdots \cup H_1)|.$$

Quindi $|\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |H_i|$, e abbiamo quanto volevamo dimostrare. $\square$

Teorema 1.2.16. *Se $u \in C^2(\Omega)$ è una funzione convessa, allora la misura di Monge-Ampère Mu associata ad u soddisfa*

$$Mu(E) = \int_E \det D^2 u(x) dx$$

per ogni boreliano $E \subset \Omega$.

Dimostrazione. Per provare il Teorema 1.2.16 usiamo il risultato seguente.

Teorema 1.2.17 (Sard)**.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1 in Ω. Se chiamiamo $S_0 = \{x \in \Omega : \det Jg(x) = 0\}$, dove $Jg(x)$ è la matrice jacobiana della funzione g nel punto x, si ha*

$$|g(S_0)| = 0.$$

Dimostrazione. Si veda [Mil97]. $\square$

Poiché u è convessa e di classe $C^2(\Omega)$, $Du : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva sull'insieme

$$A = \left\{x \in \Omega : D^2 u(x) > 0\right\}.$$

Siano infatti $x_1, x_2 \in A$ con $Du(x_1) = Du(x_2)$. Per la convessità di u, $u(z) \geq u(x_i) + Du(x_i) \cdot (z - x_i)$ per ogni $z \in \Omega$, $i = 1, 2$; si ha quindi

$$u(x_1) - u(x_2) = Du(x_1) \cdot (x_1 - x_2).$$

Per la formula di Taylor possiamo scrivere

$$\begin{aligned} u(x_1) = u(x_2) &+ Du(x_2) \cdot (x_1 - x_2) + \\ &+ \int_0^1 t[(x_1 - x_2)^t D^2 u(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)] dt; \end{aligned}$$

quindi l'integrale è nullo e dunque la funzione integranda deve annullarsi per ogni $t \in [0, 1]$. Poiché $x_2 \in A$, si ha che $x_2 + t(x_1 - x_2) \in A$ per t piccolo; deve dunque essere necessariamente $x_1 = x_2$.

Se $u \in C^2(\Omega)$, definiamo $g = Du \in C^1(\Omega)$. Abbiamo allora per definizione $Mu(E) = |Du(E)|$ e $Du(E) = Du(E \cap S_0) \cup Du(E \setminus S_0)$. L'insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme boreliano; lo sono dunque anche $E \cap S_0$ e $E \setminus S_0$. Dalla formula di cambio di variabili e dal Teorema di Sard ricaviamo quindi

$$Mu(E) = Mu(E \cap S_0) + Mu(E \setminus S_0) = \int_{E \setminus S_0} \det D^2u(x)dx =$$

$$= \int_E \det D^2u(x)dx,$$

cioè quanto avevamo affermato. □

Esempio 1.2.18. Se $u(x)$ è il cono n-dimensionale dell'Esempio 1.1.6, allora la misura di Monge-Ampère associata ad u è

$$Mu = \left| B\left(0, \frac{h}{R}\right) \right| \delta_{x_0},$$

dove δ_{x_0} è la delta di Dirac centrata in x_0. Dimostriamolo: innanzitutto notiamo che in $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ possiamo esprimere la misura di Monge-Ampère come integrale di $\det D^2u$. Proviamo ora che $\det D^2u = 0$, facendo così vedere che la misura è tutta concentrata nel punto x_0.

Consideriamo quindi la funzione $u(x) = \frac{h}{R}\|x - x_0\|$; il suo differenziale è

$$D_x u(x) = \frac{h}{R} \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} = \frac{h}{R} \frac{x - x_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i})^2}},$$

dove indichiamo con $x_{0,i}$ la i-esima coordinata del vettore x_0. Vogliamo adesso calcolare le entrate della matrice hessiana $D_x^2u(x) = (D^2_{x_i,x_j}u(x))_{i,j=1\ldots n}$.

Cominciamo con le entrate con $i \neq j$; abbiamo

$$\begin{aligned}
D^2_{x_i,x_j}u(x) &= \frac{h}{R} D_{x_i}\left[\frac{x_j - x_{0,j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_{0,k})^2}}\right] = \\
&= \frac{h}{R}(x_j - x_{0,j}) D_{x_i}\left[\left(\sum_{k=1}^n (x_k - x_{0,k})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \\
&= \frac{h}{R}(x - j - x_{0,j})\left[-\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^n (x_k - x_{0,k})^2)^{-\frac{3}{2}} 2(x_i - x_{0,i})\right] = \\
&= -\frac{h}{R}(x_j - x_{0,j})(x_i - x_{0,i})\|x - x_0\|^{-3}.
\end{aligned}$$

Per le entrate diagonali, in cui $i = j$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
D^2_{x_i} u(x) &= \frac{h}{R} D_{x_i} \left[\frac{x_i - x_{0,i}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_{0,k})^2}} \right] = \\
&= \frac{h}{R} \left\{ \frac{[D_{x_i}(x_i - x_{0,i})]}{\|x - x_0\|} + (x_i - x_{0,i}) D_{x_i} ((\sum_{k=1}^n (x_k - x_{0,k})^2)^{-\frac{1}{2}}) \right\} = \\
&= \frac{h}{R} \frac{1}{\|x - x_0\|} + \frac{h}{R} (x_i - x_{0,i}(x_i - x_{0,i}) \|x - x_0\|^{-3}) = \\
&= \frac{h}{R} \left[\frac{1}{\|x - x_0\|} - \frac{(x_i - x_{0,i})^2}{\|x - x_0\|^3} \right].
\end{aligned}
$$

In definitiva, la matrice hessiana che si ottiene è

$$
-\frac{h}{R} \|x - x_0\|^{-3} \begin{pmatrix} & \ddots & & \\ & & & \\ & & (x_i - x_{0,i})^2 - \|x - x_0\|^2 & \\ & & & \\ (x_j - x_{0,j})(x_i - x_{0,i}) & & & \ddots \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{h}{R} \|x - x_0\|^{-3} \Big((x_i - x_{0,i})(x_j - x_{0,j}) - \delta_{ij} \|x - x_0\|^2 \Big)_{i,j=1,\dots,n} = \\
&= C(v) \Big(v_i v_j - \delta_{ij} \|v\|^2 \Big)_{i,j=1,\dots,n} = C(v) \big(A_{ij}(v) \big)_{i,j=1,\dots,n}
\end{aligned}
$$

dove $v = x - x_0$ e $C(v)$ è un numero reale che dipende da v. Ci proponiamo ora di dimostrare che

$$\det \big(A_{ij}(v) \big)_{i,j=1,\dots,n} = 0.$$

Mostriamo innanzitutto cosa succede al determinante della matrice se la trasformiamo mediante matrici ortogonali. Sia $T = (T_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ tale che

$$TT^t = (T_{ij})(T_{ji}) = I_n,$$

dove I_n è la matrice identica di dimensione n; questo significa che

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n T_{ik} T_{jk}.$$

Ovviamente T agisce su un vettore v in questo modo:

$$Tv = (T_{ij})v = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n T_{1j}v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n T_{nj}v_j \end{pmatrix}$$

e si ha

$$\|Tv\| = \|v\|$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} A_{ij}(Tv) &= (Tv)_i(Tv)_j - \delta_{ij}\|Tv\|^2 = (Tv)_i(Tv)_j - \delta_{ij}\|v\|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n T_{ik}v_k \sum_{h=1}^n T_{jh}v_h - \sum_{k=1}^n T_{ik}T_{jk}\|v\|^2 = \\ &= \sum_{k,h=1}^n T_{ik}T_{jh}v_kv_h - \sum_{k,h=1}^n T_{ik}\delta_{kh}T_{jh}\|v\|^2 = \\ &= \sum_{k,h=1}^n T_{ik}T_{jh}\left(v_kv_h - \delta_{kh}\|v\|^2\right) = \\ &= \left(TA(v)T^t\right)_{ij}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato che

$$A(Tv) = TA(v)T^t$$

e dunque per le proprietà delle matrici ortogonali

$$\det\left(A(Tv)\right) = \det A(v). \tag{1.7}$$

Notiamo ora che

$$A_{ij}\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \left(\frac{v_i}{\|v\|}\frac{v_j}{\|v\|} - \delta_{ij}\right) = \frac{1}{\|v\|}\left(v_iv_j - \delta_{ij}\|v\|\right),$$

da cui segue che

$$A_{ij}(v) = \|v\|^2 A_{ij}\left(\frac{v}{\|v\|}\right). \tag{1.8}$$

Dalle due relazioni (1.7) e (1.8) segue che basta calcolare $\det(A_{ij}(v))$ per un vettore v di norma unitaria. Se infatti riuscissimo a dimostrare che $\det(A_{ij}(v)) = 0$ per $\|v\| = 1$, seguirebbe che $\det(A_{ij}(v)) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Prendiamo

$$\tilde{v} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e scriviamo la matrice

$$(A_{ij}(\tilde{v})) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha determinante nullo, poiché la prima colonna è di soli zeri. Abbiamo provato che $\det D^2 u = 0$.

La nostra misura sarà dunque concentrata in x_0, si avrà

$$Mu = f(x_0)\delta_{x_0},$$

dove $f(x_0)$ è, a priori, funzione di x_0. In x_0 possiamo però calcolare la misura di Monge-Ampère utilizzando direttamente la definizione, cioè

$$Mu(x_0) = |\partial u(x_0)| = \left| B\left(0, \frac{h}{r}\right) \right|,$$

per quanto calcolato nell'Esempio 1.1.6. In definitiva avremo

$$Mu(x) = \left| B\left(0, \frac{h}{r}\right) \right| \delta_{x_0}(x).$$

Capitolo 2

Soluzioni deboli

Una richiesta naturale per le soluzioni in senso classico dell'equazione di Monge-Ampère è che esse siano almeno di classe C^2. Esistono però casi in cui non è possibile trovare soluzioni sufficientemente regolari; ha allora senso formulare una definizione di soluzione diversa, che permetta di trovare una funzione che soddisfi l'equazione, ma che non abbia regolarità C^2. Introduciamo in questo capitolo due definizioni di soluzione debole: sotto opportune ipotesi, esse si riveleranno equivalenti.

2.1 Soluzioni generalizzate

Definizione 2.1.1. *Sia ν una misura di Borel definita in Ω, con Ω aperto convesso contenuto in $\mathbb{R}^n$. La funzione convessa $u \in C(\Omega)$ è una **soluzione generalizzata**, o **soluzione di Aleksandrov**, dell'equazione di Monge-Ampère* $\det D^2 u = \nu$ *se la misura di Monge-Ampère Mu associata ad u definita da*

$$Mu(E) = |\partial u(E)| \tag{2.1}$$

per ogni insieme $E \subset \Omega$ tale che $\partial u(E)$ è Lebesgue misurabile (è la definizione che avevamo dato in (1.6)*) è uguale a ν.*

Se u_k sono soluzioni generalizzate di $\det D^2 u = \nu$ in Ω e $u_k \to u$ uniformemente sui compatti di Ω, allora anche u è soluzione generalizzata di $\det D^2 u = \nu$ in Ω. Prima di provare questo fatto richiamiamo due definizioni.

Definizione 2.1.2. *Sia X_n una successione di insiemi. Definiamo allora*

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{m=n}^{\infty} X_m \right)$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} X_m \right).$$

Lemma 2.1.3. *Siano $u_k \in C(\Omega)$ funzioni convesse tali che $u_k \to u$ uniformemente sui compatti di Ω. Allora:*

1. *se $K \subset \Omega$ è compatto si ha*
$$\limsup_{k\to\infty} \partial u_k(K) \subset \partial u(K)$$
e, per il Lemma di Fatou,
$$\limsup_{k\to\infty} |\partial u_k(K)| \le |\partial u(K)|;$$

2. *sia*
$$S = \{p \in \mathbb{R}^n : p \in \partial u(x_1) \cap \partial u(x_2) \text{ per qualche } x_1, x_2 \in \Omega, x_1 \neq x_2\}.$$
Se K è compatto e U, V sono aperti tali che $K \subset U \subset \bar{U} \subset V \subset \Omega$ si ha
$$\partial u(K) \setminus S \subset \liminf_{k\to\infty} \partial u_k(V)$$
e, per il Lemma di Fatou,
$$|\partial u(K)| \le \liminf_{k\to\infty} |\partial u_k(V)|.$$

Dimostrazione. 1. Se $p \in \limsup_{k\to\infty} \partial u_k(K)$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono k_n e $x_{k_n} \in K$ tali che $p \in \partial u_{k_n}(x_{k_n})$. Considerando una sottosuccessione x_j di x_{k_n}, possiamo assumere che $x_j \to x_0 \in K$; abbiamo ovviamente

$$u_j(x) \ge u_j(x_j) + p \cdot (x - x_0)$$

per ogni $x \in \Omega$ e, facendo tendere $j \to \infty$, per la convergenza uniforme degli u_j sui compatti otteniamo $u(x) \ge u(x_0) + p \cdot (x - x_0)$ per ogni $x \in \Omega$, cioè $p \in \partial u(x_0)$. Ricordiamo un lemma.

Lemma 2.1.4 (Lemma di Fatou)**.** *Sia f_n una successione di funzioni non negative e misurabili su uno spazio di misura (E, Σ, μ). Allora*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Sia ora invece f_n una successione di funzioni a valori in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definite su uno spazio di misura (E, Σ, μ). Se esiste una funzione ***integrabile*** *g su E tale che $f_n \leq g$ per ogni n allora*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Applicando questo lemma (ed osservando che la funzione identicamente uguale a 1 è integrabile sull'insieme compatto $\partial u_k(K)$ per ogni k), si ottiene

$$\limsup_{k\to\infty} |\partial u_k(K)| = \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\partial u_k(K)}(x)dx \leq |\limsup_{k\to\infty} \partial u_k(K)| \leq |\partial u(K)|.$$

2. Per il Lemma 1.2.14, $|S| = 0$. Sia $K \subset \Omega$ un compatto; consideriamo $\partial u(K) \setminus S$. Se $p \in \partial u(K) \setminus S$, esiste un unico $x_0 \in K$ tale che $p \in \partial u(x_0)$ e $p \notin \partial u(x_1)$ per ogni $x_1 \in \Omega$, $x_1 \neq x_0$. Sia ora U un aperto che soddisfa le ipotesi del teorema; se $x_1 \in \Omega$ e $x_1 \neq x_0$, allora $u(x_1) > u(x_0) + p \cdot (x_1 - x_0)$. Se così non fosse, infatti, sarebbe $u(x_1) = u(x_0) + p \cdot (x_1 - x_0)$ e siccome $p \in \partial u(x_0)$ avremmo

$$u(x) \geq u(x_0) + p \cdot (x - x_0) = u(x_1) - p \cdot (x_1 - x_0) + p \cdot (x - x_0) =$$

$$= u(x_1) + p \cdot (x - x_1)$$

per ogni $x \in \Omega$, cioè $p \in \partial u(x_1)$, contro l'ipotesi che $p \in \partial u(K) \setminus S$. Abbiamo quindi $u(x) > u(x_0) + p \cdot (x - x_0)$ per ogni $x \in \bar{U}$, $x \neq x_0$, e poiché $\bar{U}$ è compatto e $u_k \to u$ uniformemente su $\bar{U}$, abbiamo

$$u_k(x) \geq u_k(x_0) + p \cdot (x - x_0) + \varepsilon$$

per qualche $\varepsilon < 0$, per ogni $k \geq k_0$ e per ogni $x \in \bar{U}$.

Chiamiamo

$$\delta_k = \min_{x\in\bar{U}} \{u_k(x) - u_k(x_0) - p \cdot (x - x_0) - \varepsilon\};$$

questo minimo è realizzato per qualche $x_k \in \bar{U}$.

Mostriamo ora che p è la pendenza di un iperpiano di supporto a u_k nel punto $(x_k, u(x_k))$. Infatti

$$\delta_k = u_k(x_k) - u_k(x_0) - p \cdot (x_k - x_0) - \varepsilon$$

e, visto che $u_k(x) \geq u_k(x_0) + p \cdot (x - x_0) + \varepsilon + \delta_k$ per ogni $x \in \bar{U}$, abbiamo

$$u_k(x) \geq u_k(x_k) + p \cdot (x - x_k)$$

per ogni $x \in \bar{U}$. La funzione u_k è convessa in Ω e U è un insieme aperto, e abbiamo quindi che la disuguaglianza vale per ogni $x \in \Omega$ (come visto nella Nota 1.1.2), pertanto $p \in \partial u_k(x_k)$ per ogni $k \geq k_0$; questo implica che

$$p \in \liminf_{k\to\infty} \partial u_k(\bar{U}) \subset \liminf_{k\to\infty} \partial u_k(V).$$

Applichiamo ora nuovamente il Lemma di Fatou per ottenere

$$\begin{aligned} &|\partial u(K)| = |\partial u(K) \setminus S| \leq \liminf \partial u_k(V)| = \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} \chi_{\partial u_k(V)}(x)dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\partial u_k(V)}(x)dx = \liminf_{k\to\infty} |\partial u_k(V)|. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.1.5. *Se u_k sono funzioni convesse in Ω tali che $u_k \to u$ uniformemente sui compatti di Ω, le rispettive misure di Monge-Ampère Mu_k tendono a Mu debolmente, cioè*

$$\int_\Omega f(x)dMu_k(x) \to \int_\Omega f(x)dM(x)$$

per ogni f continua a supporto compatto in Ω.

Dimostrazione. La dimostrazione si può dedurre dal lemma precedente e da [EG92, p. 54]. □

2.2 Soluzioni di viscosità

Definizione 2.2.1. *Siano $u \in C(\Omega)$ una funzione convessa ed f una funzione positiva in $C(\Omega)$. La funzione u è una* ***sottosoluzione*** *(rispettivamente* ***soprasoluzione****)* ***di viscosità*** *dell'equazione* $\det D^2u = f$ *in Ω se, comunque si scelgano una funzione $\Phi \in C^2(\Omega)$ convessa e $x_0 \in \Omega$ tali che $(u-\Phi)(x) \leq (u-\Phi)(x_0)$ (rispettivamente $(u-\Phi)(x) \geq (u-\Phi)(x_0)$) per ogni x in un intorno di x_0, allora si ha* $\det D^2\Phi(x_0) \geq f(x_0)$ *(rispettivamente* $\det D^2\Phi(x_0) \leq f(x_0)$*). Diciamo poi che u è una soluzione di viscosità se è contemporaneamente sottosoluzione e soprasoluzione.*

Nota 2.2.2. È sufficiente, nella definizione, considerare funzioni convesse $\Phi \in C^2(\Omega)$ tali che

$$\Phi(x_0) = u(x_0).$$

Dimostriamolo: prendiamo u sottosoluzione di viscosità e $\varphi \in C^2(\Omega)$, φ convessa e tale che

$$(u-\varphi)(x) \leq (u-\varphi)(x_0) = 0$$

per ogni x in un intorno di x_0, e assumiamo allora che valga

$$\det D^2\varphi(x_0) \geq f(x_0).$$

Vogliamo mostrare che, presa una generica funzione test ψ, cioè $\psi \in C^2(\Omega)$, ψ convessa e tale che

$$(u-\psi)(x) \leq (u-\psi)(x_0)$$

per ogni x in un intorno di x_0, si ha $\det D^2\psi(x_0) \geq f(x_0)$. Definiamo

$$\tilde{\varphi}(x) = \psi(x) - \psi(x_0) + u(x_0).$$

Si ha

$$u(x) - \tilde{\varphi}(x) = u(x) - \psi(x) + \psi(x_0) - u(x_0) \leq 0 = u(x_0) - \tilde{\varphi}(x_0).$$

Allora vale

$$\det D^2\tilde{\varphi}(x_0) \geq f(x_0),$$

ma, dato che $\det D^2\psi(x_0) = \det D^2\tilde{\varphi}(x_0)$, allora

$$\det D^2\psi(x_0) \geq f(x_0),$$

cioè esattamente quanto volevamo. La dimostrazione è analoga nel caso in cui u sia soprasoluzione.

Nota 2.2.3. Se $u \in C(\Omega)$ è convessa, $\Phi \in C^2(\Omega)$ e $u - \Phi$ ha un massimo locale in $x_0 \in \Omega$, allora $D^2\Phi$ è semidefinita positiva.

Infatti, poiché $\Phi \in C^2(\Omega)$, abbiamo

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + D\Phi(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^t D^2\Phi(x_0)(x-x_0) + \mathrm{o}(\|x-x_0\|^2).$$

Quindi per x vicino a x_0 abbiamo

$$u(x) \leq \Phi(x) + u(x_0) - \Phi(x_0) =$$

$$= u(x_0) + D\Phi(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^t D^2\Phi(x_0)(x-x_0) + \mathrm{o}(\|x-x_0\|^2).$$

Poiché u è convessa, esiste $p \in \mathbb{R}^n$ tale che $u(x) \geq u(x_0) + p\cdot(x-x_0)$ per ogni $x \in \Omega$.

Dato w tale che $\|w\| = 1$ ed $s > 0$ piccolo, ponendo $x - x_0 = sw$ otteniamo

$$sp \leq sD\Phi(x_0)\cdot w + \frac{1}{2}s^2(w^t D\Phi(x_0)w) + \mathrm{o}(s^2).$$

Dividiamo per s e facciamo tendere $s \to 0$; poiché la disuguaglianza ottenuta vale per ogni w di norma unitaria, si ha $p = D\Phi(x_0)$; questo vuol dire che

$$w^t D^2\Phi(x_0)w \geq 0,$$

come volevamo.

Nota 2.2.4. Possiamo restringere la classe delle funzioni test usate nella Definizione 2.2.1 ai polinomi quadratici strettamente convessi.

Analizziamo il caso delle sottosoluzioni. Supponiamo che per ogni polinomio quadratico strettamente convesso Φ e per ogni $x_0 \in \Omega$ tale che

$$(u - \Phi)(x) \leq (u - \Phi)(x_0)$$

per ogni x in un intorno di x_0 si abbia che $\det D^2\Phi(x_0) \geq f(x_0)$. Sia ora $\Phi \in C^2(\Omega)$ convessa tale che $u - \Phi$ abbia un massimo locale in $x_0 \in \Omega$; scriviamo lo sviluppo di Taylor

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + D\Phi(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^t D^2\Phi(x_0)(x-x_0) + \mathrm{o}(\|x-x_0\|^2) =$$

$$= P(x) + \mathrm{o}(\|x - x_0\|^2). \tag{2.2}$$

Consideriamo $\varepsilon > 0$ e il polinomio quadratico $P_\varepsilon(x) = P(x) + \varepsilon\|x - x_0\|^2$; abbiamo allora

$$D^2P_\varepsilon(x_0) = D^2P(x_0) + 2\varepsilon(I_n) = D^2\Phi(x_0) + 2\varepsilon(I_n)$$

dove, al solito, I_n è la matrice identica di dimensione n; quindi il polinomio P_ε è strettamente convesso. Vale poi

$$\Phi(x) - P_\varepsilon(x) = \mathrm{o}(\|x - x_0\|^2) - \varepsilon\|x - x_0\|^2 \leq 0,$$

pertanto $\Phi - P_\varepsilon$ ha un massimo locale in x_0. Allora anche $u - P_\varepsilon$ ha un massimo locale e per le assunzioni fatte in precedenza

$$\det D^2P_\varepsilon(x_0) = \det(D^2\Phi(x_0) + 2\varepsilon(I_n)) \geq f(x_0).$$

Facendo tendere $\varepsilon \to 0$, otteniamo $\det D^2\Phi(x_0) \geq f(x_0)$ e la dimostrazione nel caso delle sottosoluzioni è completata.

Passiamo ora al caso delle soprasoluzioni. Sia $\Phi \in C^2(\Omega)$ convessa tale che $u - \Phi$ abbia un minimo locale in x_0. Se $D^2\Phi(x_0)$ ha qualche autovalore nullo, allora $\det D^2\Phi(x_0) = 0 \leq f(x_0)$. Se tutti gli autovalori di $D^2\Phi$ sono positivi e $P(x)$ è definito da (2.2), allora $P_\varepsilon(x) = P(x) - \varepsilon\|x - x_0\|^2$ è strettamente convesso per tutti gli ε sufficientemente piccoli. Procedendo come sopra, otteniamo questa volta che $u - P_\varepsilon$ ha un minimo locale in x_0 e che di conseguenza $\det D^2\Phi(x_0) \leq f(x_0)$.

Possiamo ora confrontare le due nozioni di soluzione che abbiamo introdotto.

Proposizione 2.2.5. *Se u è una soluzione generalizzata per $Mu = f$ con f continua, u è una soluzione di viscosità.*

Dimostrazione. Sia $\Phi \in C^2(\Omega)$ una funzione strettamente convessa tale che $u - \Phi$ abbia un massimo locale in $x_0 \in \Omega$. Possiamo assumere che $u(x_0) = \Phi(x_0)$, così da avere

$$u(x) < \Phi(x)$$

per ogni x tale che $0 < \|x - x_0\| < \delta$, cioè in un intorno di x_0; questo perché possiamo aggiungere $r\|x - x_0\|^2$ a Φ e far tendere $r \to 0$ alla fine.

Sia

$$m = \min_{\frac{\delta}{2} \leq \|x - x_0\| \leq \delta} \{\Phi(x) - u(x)\};$$

si ha $m > 0$. Sia ora $0 < \varepsilon < m$ e consideriamo

$$S_\varepsilon = \{x \in B(x_0, \delta) : u(x) + \varepsilon > \Phi(x)\}.$$

Se $\frac{\delta}{2} \leq \|x - x_0\| \leq \delta$, $\Phi(x) - u(x) \geq m > \varepsilon$, quindi $x \notin S_\varepsilon$; dunque

$$S_\varepsilon \subset B\left(x_0, \frac{\delta}{2}\right).$$

Sia $z \in \partial S_\varepsilon$; per definizione di frontiera esiste $x_n \in S_\varepsilon$ e $\overline{x_n} \notin S_\varepsilon$ tale che $x_n \to z$ e $\overline{x_n} \to z$, e si ha quindi $u + \varepsilon = \Phi$ su ∂S_ε.

Entrambe le funzioni sono convesse in S_ε, quindi per il Lemma 3.1.1 si ha $\partial(u + \varepsilon)(S_\varepsilon) \subset \partial\Phi(S_\varepsilon)$. La funzione u è una soluzione generalizzata; questo implica che

$$\begin{aligned} \int_{S_\varepsilon} f(x)dx = |\partial u(S_\varepsilon)| = \\ = |\partial(u + \varepsilon)(S_\varepsilon)| \leq |\partial\Phi(S_\varepsilon)| = \int_{S_\varepsilon} \det D^2\Phi(x)dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dalla continuità di f e di $D^2\Phi$ deduciamo che $\det D^2\Phi(x_0) \geq f(x_0)$: dimostriamolo per assurdo.

Per prima cosa analizziamo il comportamento degli insiemi S_ε al variare di ε. Notiamo innanzitutto che

$$x_0 \in \bigcap_{\varepsilon>0} S_\varepsilon.$$

Gli insiemi S_ε diventano inoltre sempre più piccoli al tendere di ε a 0. Vale infatti il seguente lemma.

Lemma 2.2.6. *Si ha*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{diam}(S_\varepsilon) = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che, al tendere di ε a 0 si abbia $\operatorname{diam}(S_\varepsilon) \not\to 0$. Allora esistono una successione ε_j ed un $\eta > 0$ tali che $\lim_{j\to+\infty} \varepsilon_j = 0$ e $\operatorname{diam}(S_{\varepsilon_j}) \geq \eta > 0$. Questo implica che per ogni j esistono $x_j^1, x_j^2 \in S_{\varepsilon_j}$ con

$$\|x_j^1 - x_j^2\| \geq \frac{\eta}{2}.$$

Siano ora $x^1 = \lim_{j\to+\infty} x_j^1$ e $x^2 = \lim_{j\to+\infty} x_j^2$. Si ha ovviamente

$$\|x^1 - x^2\| \geq \frac{\eta}{2}.$$

Ora, siccome $x_j^1, x_j^2 \in S_{\varepsilon_j}$,

$$u(x_j^1) + \varepsilon_j > \Phi(x_j^1),$$

$$u(x_j^2) + \varepsilon_j > \Phi(x_j^2)$$

per ogni j. Passando al limite si ottiene

$$u(x^1) \geq \Phi(x^1),$$

$$u(x^2) \geq \Phi(x^2),$$

che implica che $x^1 = x^2 = x_0$ (ricordiamo che $u(x_0) = \Phi(x_0)$ e $u(x) < \Phi(x)$ per ogni x nell'intorno di x_0 che stiamo considerando). Questo però è un assurdo, visto che doveva essere

$$\|x^1 - x^2\| \geq \frac{\eta}{2}.$$

Dunque $\operatorname{diam}(S_\varepsilon) \to 0$ se $\varepsilon \to 0$. □

Torniamo ora ai nostri integrali e supponiamo per assuro che sia

$$f(x_0) > \det D^2\Phi(x_0).$$

Allora esiste $r > 0$ tale che $f(x) > \det D^2\Phi(x)$ per ogni $x \in B(x_0, r)$. Siccome $\mathrm{diam}(S_\varepsilon)$ tende a 0, esiste anche $\varepsilon > 0$ tale che $S_\varepsilon \subset B(x_0, r)$, con S_ε di misura di Lebesgue non nulla. Allora si ha

$$\int_{S_\varepsilon} f(x)dx > \int_{S_\varepsilon} \det D^2\Phi(x)dx,$$

che è in contraddizione con (2.3). Abbiamo raggiunto un assurdo, quindi vale

$$\det D^2\Phi(x_0) \geq f(x_0).$$

Con lo stesso procedimento si dimostra anche che u è una soprasoluzione di viscosità. □

Mostreremo più avanti (nella Proposizione 4.4.2) che una soluzione di viscosità, sotto opportune ipotesi, è anche soluzione generalizzata. Le due definizioni di soluzione date in questo capitolo sono dunque, in alcuni casi, equivalenti tra loro.

Capitolo 3

Principi di massimo e principio del confronto

In questo capitolo analizzeremo alcuni teoremi che si riveleranno fondamentali nello studio del problema di Dirichlet per l'equazione di Monge-Ampère. Si tratta in larga parte di stime dei valori massimi e minimi che possono assumere le soluzioni nei domini considerati.

3.1 Confronto tra mappe normali

Lemma 3.1.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $u, v \in C(\bar{\Omega})$. Se $u = v$ su $\partial\Omega$ e $v \geq u$ in Ω, allora $\partial v(\Omega) \subset \partial u(\Omega)$.*

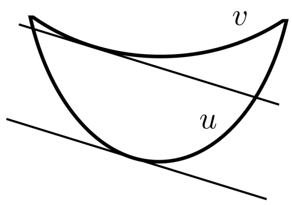

Figura 3.1. Per il Lemma 3.1.1, $\partial v(\Omega) \subset \partial u(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $p \in \partial v(\Omega)$. Allora esiste $x_0 \in \Omega$ tale che

$$v(x) \geq v(x_0) + p \cdot (x - x_0) \tag{3.1}$$

per ogni $x \in \Omega$. Sia

$$a = \sup_{x \in \Omega} \{v(x_0) + p \cdot (x - x_0) - u(x)\};$$

abbiamo $a \geq 0$, poiché $v(x_0) \geq u(x_0)$. Vogliamo trovare ora un iperpiano di supporto con pendenza p per la funzione u in qualche punto di Ω. Analizziamo due casi: quello in cui $a = 0$ e quello in cui $a > 0$.

Se $a = 0$, allora

$$u(x) \geq v(x_0) + p \cdot (x - x_0) \geq u(x_0) + p \cdot (x - x_0)$$

e di conseguenza $u(x_0) + p \cdot (x - x_0)$ è iperpiano di supporto per u in x_0.

Sia ora $a > 0$. Notiamo che, banalmente,

$$a = \sup_{x \in \Omega} \{v(x_0) + p(x - x_0) - u(x)\} = \max_{x \in \bar{\Omega}} \{v(x_0) + p(x - x_0) - u(x)\} .$$

L'insieme Ω è limitato; esiste pertanto $x_1 \in \bar{\Omega}$ tale che

$$a = v(x_0) + p \cdot (x_1 - x_0) - u(x_1).$$

Il punto x_1 non può appartenere a $\partial\Omega$; notiamo infatti che, se prendiamo un punto $\xi \in \partial\Omega$, passando al limite in (3.1), deve valere

$$u(\xi) = v(\xi) \geq v(x_0) + p \cdot (\xi - x_0),$$

da cui, riordinando,

$$v(x_0) + p \cdot (\xi - x_0) - u(\xi) \leq 0$$

per ogni $\xi \in \partial\Omega$. Quindi

$$\max_{x \in \partial\Omega} \{v(x_0) + p(x - x_0) - u(x)\} \leq 0.$$

Se, dunque, il massimo fosse raggiunto sul bordo, avremmo $a \leq 0$, ma noi stiamo supponendo $a > 0$. Dunque $x_1 \in \Omega$, e quindi

$$u(x) \geq v(x_0) + p \cdot (x - x_0) - a = u(x_1) + p \cdot (x - x_1)$$

per ogni $x \in \Omega$, come volevamo. In conclusione, sia che a sia uguale a 0, sia che sia maggiore, la funzione affine

$$v(x_0) + p \cdot (x - x_0) - a$$

è un iperpiano di supporto ad u in un qualche punto di Ω. $\square$

3.2 Il principio del massimo di Aleksandrov

Teorema 3.2.1 (Principio del massimo di Aleksandrov)**.** *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *è un aperto convesso di diametro* Δ *e* $u \in C(\bar{\Omega})$ *è convessa con* $u = 0$ *su* $\partial\Omega$*, allora*

$$|u(x_0)|^n \leq C_n \Delta^{n-1} \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)|\partial u(\Omega)|$$

per ogni $x_0 \in \Omega$*, dove* C_n *è una costante che dipende solo dalla dimensione* n*.*

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in \Omega$ e sia v la funzione convessa il cui grafico è il cono rovesciato di vertice $(x_0, u(x_0))$ e base Ω, con $v = 0$ su $\partial\Omega$ (si veda la Figura 3.2).

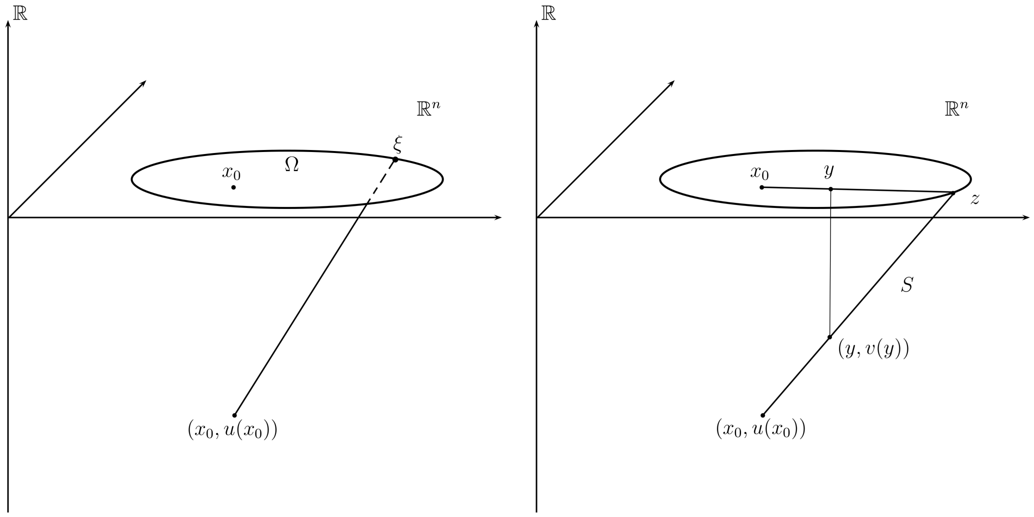

Figura 3.2. Nelle figure è descritta la costruzione del cono v, utilizzata nella dimostrazione del Teorema 3.2.1. Per definizione di cono su un insieme Ω, le sue pareti laterali sono formate dall'insieme dei segmenti che congiungono i punti di $\partial\Omega$ con il vertice. Dato dunque un punto $\xi \in \partial\Omega$, il segmento che congiunge ξ con $(x_0, u(x_0))$ sarà parte della parete del cono. Se ora prendiamo $y \in \Omega$, per definire $v(y)$ congiungiamo x_0 con y e prolunghiamo questo segmento dalla parte di y. Il prolungamento incontrerà il bordo in un punto z. Costruiamo ora il segmento S che unisce z e $(x_0, u(x_0))$; definiamo $v(y) = t$, dove $t \in \mathbb{R}$ è l'unico valore tale che $(y, t) \in S$.

Siccome u è convessa, $v \geq u$ in Ω. Infatti, dato che le pareti del cono sono lineari, è sufficiente ridursi al caso unidimensionale. Sia dunque, come in Figura 3.3, $u : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa tale che $u(0) = 0$ e $u(1) \leq 0$ e sia $v : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $v(t) = u(1)t$. Si ha dunque $v(1) = u(1)$. Dalla convessità di u segue

$$u(tx_1 + (1-t)x_0) \leq tu(x_1) + (1-t)u(x_0),$$

da cui, prendendo $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, si ottiene

$$u(t) \leq tu(1) = v(t),$$

cioè quanto volevamo.

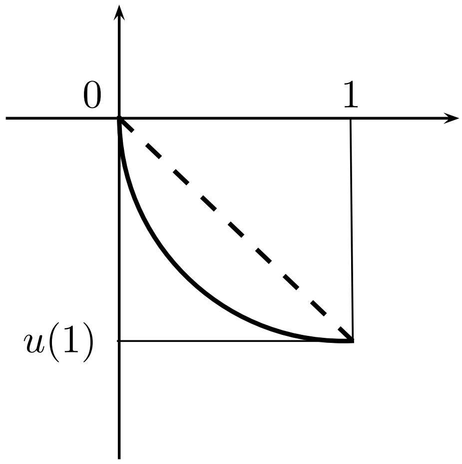

Figura 3.3. Una funzione convessa che coincide con una funzione affine in due punti deve essere minore o uguale alla funzione affine su tutto il segmento che congiunge i due punti.

Per il Lemma 3.1.1 allora $\partial v(\Omega) \subset \partial u(\Omega)$; per dimostrare il teorema stimeremo la misura di $\partial v(\Omega)$ dal basso.

Notiamo per prima cosa che l'insieme $\partial v(\Omega)$ è convesso. Questo è vero perché, se $p \in \partial v(\Omega)$, esiste $x_1 \in \Omega$ tale che $p = \partial v(x_1)$. Se $x_1 \neq x_0$, dal momento che il grafico di v è un cono, $v(x_1) + p \cdot (x - x_1)$ è un iperpiano di supporto in x_0, cioè $p \in \partial v(x_0)$. Mostriamolo: sia $z \in \partial\Omega$. Si ha che v, essendo un cono, è una funzione affine sul segmento $[x_0, z]$. Sia ora $x_1 \in [x_0, z]$ tale che in x_1 esista un iperpiano di supporto, tale cioè che valga

$$v(x) \geq v(x_1) + p \cdot (x - x_1)$$

per ogni $x \in \Omega$. La funzione $f(x) = v(x_1) + p \cdot (x - x_1)$ è una funzione affine sempre minore della funzione affine v che coincide con v in x_1. Deve allora essere

$$v(x) = v(x_1) + p \cdot (x - x_1)$$

per ogni $x \in [x_0, z]$. Dunque un iperpiano di supporto ad un cono in un punto è automaticamente iperpiano di supporto per il vertice. Questo equivale a dire che $\partial v(\Omega) = \partial v(x_0)$; poiché $\partial v(x_0)$ è convesso, questo ci basta per concludere.

Notiamo poi che esiste $p_0 \in \partial v(\Omega)$ tale che

$$\|p_0\| = \frac{-u(x_0)}{\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)};$$

questo è vero perché Ω è convesso. Prendiamo infatti $x_1 \in \partial\Omega$ tale che $\|x_1 - x_0\| = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, e sia H un iperpiano di supporto all'insieme Ω in x_1. L'iperpiano in $\mathbb{R}^{n+1}$ generato da H e dal punto $(x_0, u(x_0))$ ha la pendenza desiderata (si veda la Figura 3.4).

Notiamo ora che la palla

$$B = B\left(0, \frac{-u(x_0)}{\Delta}\right)$$

è contenuta in $\partial v(\Omega) = \partial v(x_0)$. Prendiamo infatti $\xi \in \partial\Omega$. Consideriamo un iperpiano h che passa per ξ e per $u(x_0)$, dunque della forma

$$u(x_0) = p_h \cdot (x_0 - \xi),$$

dove $p_h \in \partial v(x_0)$. Si ha

$$-u(x_0) = \|p_h\| \|x_0 - \xi\|,$$

quindi

$$\|p_h\| = \frac{-u(x_0)}{\|x_0 - \xi\|} > \frac{-u(x_0)}{\Delta}.$$

Abbiamo trovato $p \in \partial v(x_0)$ tale che

$$\|p\| > \frac{-u(x_0)}{\Delta}.$$

Ovviamente possiamo scegliere un diverso iperpiano di supporto, cambiando il punto ξ sul bordo del convesso, e possiamo fare in modo che p assuma tutte le direzioni in $\mathbb{R}^n$. Abbiamo insomma provato che, per ogni vettore $z \in \mathbb{R}^n$ con $\|z\| = 1$ esiste $r > \frac{-u(x_0)}{\Delta}$ tale che $rz \in \partial v(x_0)$ e $-rz \in \partial v(x_0)$ (ovviamente se p è una pendenza accettabile, lo è anche $-p$). Allora, per convessità,

$$\{tz : -r < t < r\} = \operatorname{co}(-rz, rz) \subset \partial v(x_0),$$

dove $\operatorname{co}(X, Y)$ indica l'**inviluppo convesso** di X e di Y. Facendo variare z otteniamo proprio che

$$B = B\left(0, \frac{-u(x_0)}{\Delta}\right) \subset \partial v(x_0) = \partial v(\Omega),$$

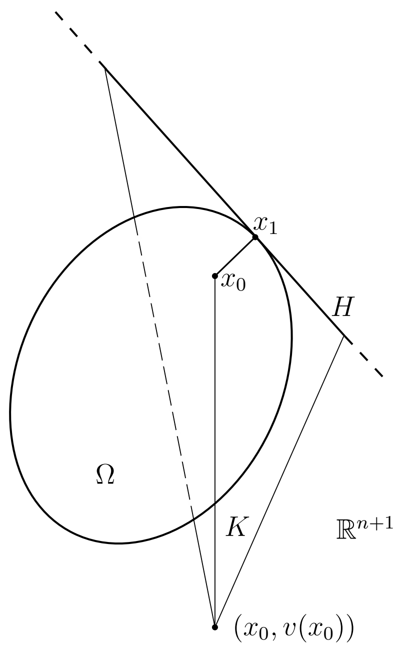

Figura 3.4. Nella figura è illustrata la costruzione di p_0. Sia $x_1 \in \partial\Omega$ il punto tale che $\|x_0 - x_1\| = \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$; sia poi H l'iperpiano di supporto all'insieme Ω in x_1. Definiamo $p_0 = (x_0 - x_1)\alpha$, dove $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è da determinare. Consideriamo l'iperpiano K in $\mathbb{R}^{n+1}$ definito da

$$x_{n+1} = p_0 \cdot (x - x_1),$$

con $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. L'iperpiano K contiene H. Infatti notiamo che possiamo immergere l'insieme $H \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ nel seguente modo:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_1) \cdot (x_0 - x_1) = 0\} \cong \{x = (x', x_{n+1}) : x' \in H, x_{n+1} = 0\}.$$

Allora, se poniamo $x_{n+1} = 0$ nell'equazione che definisce l'iperpiano K, otteniamo $p_0 \cdot (x - x_1) = \alpha(x_0 - x_1) \cdot (x - x_1) = 0$, cioè $H \subset K$. Imponiamo ora che K contenga il vertice del cono. Deve essere $v(x_0) = \alpha(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_1) = \alpha\|x_0 - x_1\|^2$, dunque

$$\alpha = \frac{v(x_0)}{\|x_0 - x_1\|^2}.$$

Ricordando che $v(x_0) = u(x_0) < 0$, si ha che

$$\|p_0\| = \frac{-u(x_0)}{\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)}.$$

come volevamo.

Si ha però che $\|p_0\| \geq \frac{-u(x_0)}{\Delta}$; l'inviluppo convesso di B e p_0 è dunque contenuto in $\partial v(\Omega)$. Il nostro obiettivo è stimarne la misura. Ricordiamo che la misura $(n+1)$-dimensionale di un cono avente per base $D \subset \mathbb{R}^n$ è

$$\frac{1}{n}|D|_n h,$$

dove $|\cdot|_n$ indica la misura n-dimensionale e h è l'altezza del cono. Consideriamo ora la retta che unisce p_0 all'origine, e sezioniamo B con l'iperpiano ortogonale a questa retta e passante per l'origine. La sezione così ottenuta altro non è che una palla $(n-1)$-dimensionale, che chiameremo B'. Consideriamo ora il cono C_0 di base B' e vertice p_0, come in Figura 3.5.

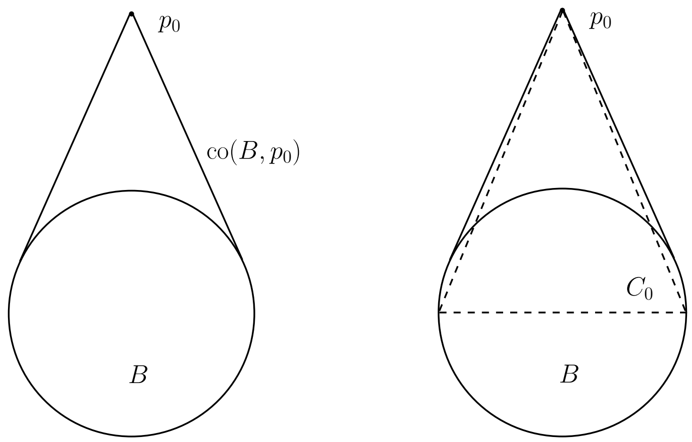

Figura 3.5. Nella prima figura è rappresentato l'inviluppo convesso di B e p_0; nella seconda è evidenziato anche il cono C_0.

Banalmente si ha

$$C_0 \subset \text{co}(B, p_0)$$

e dunque

$$C_n r_{B_0}^{n-1} \|p_0\| = |C_0| \leq |\text{co}(B, p_0)|,$$

dove r_{B_0} indica il raggio della palla B_0 e

$$r_{B_0} = \frac{-u(x_0)}{\Delta};$$

ciò completa la dimostrazione. Infatti abbiamo provato che

$$C_n \left(\frac{-u(x_0)}{\Delta}\right)^{n-1} \left(\frac{-u(x_0)}{\text{dist}(x_0, \partial\Omega)}\right) \leq |\partial v(\Omega)| \leq |\partial u(\Omega)|,$$

da cui, riordinando,

$$(-u(x_0))^n \leq C_n \Delta^{n-1} \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) |\partial u(\Omega)|.$$

□

Nota 3.2.2. La stima è significativa solo se $|\partial u(\Omega)| = Mu(\Omega) < \infty$. Se infatti, ad esempio,

$$u(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\sqrt{1-x} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

allora $\partial u((0,1)) = (-\infty, +\infty)$.

3.3 Il principio del massimo di Aleksandrov, Bakelman e Pucci

Sia $u \in C(\Omega)$ con Ω convesso e consideriamo

$$\mathcal{F}(u) = \{v : v(x) \leq u(x)\ \forall x \in \Omega, v \text{ convessa in } \Omega\},$$

$$\mathcal{G}(u) = \{w : w(x) \geq u(x)\ \forall x \in \Omega, w \text{ concava in } \Omega\}.$$

Siano $u_*(x) = \sup_{v \in \mathcal{F}(u)} v(x)$, $u^*(x) = \inf_{w \in \mathcal{G}(u)} w(x)$.

Ricordiamo che l'estremo superiore puntuale di funzioni convesse è una funzione convessa e l'estremo inferiore puntuale di funzioni concave è una funzione concava (per la dimostrazione è sufficiente ragionare sugli epigrafici). Abbiamo dunque che u_* è convessa e che u^* è concava in Ω. Chiamiamo queste due funzioni gli **inviluppi** rispettivamente convesso e concavo di u in Ω; si ha

$$u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x)$$

per ogni $x \in \Omega$. Vale inoltre $\mathcal{F}(-u) = -\mathcal{G}(u)$ e dunque

$$-(u^*)(x) = (-u)_*(x). \tag{3.2}$$

Consideriamo ora gli insiemi di contatto superiore ed inferiore

$$\mathcal{C}^*(u) = \{x \in \Omega : u^*(x) = u(x)\},\ \mathcal{C}_*(u) = \{x \in \Omega : u_*(x) = u(x)\};$$

abbiamo

$$\mathcal{C}_*(u) = \mathcal{C}^*(-u). \tag{3.3}$$

Sappiamo che u_* è convessa, quindi ha un iperpiano di supporto in x_0, per $x_0 \in \mathcal{C}_*(u)$. Inoltre abbiamo che $u_*(x_0) = u(x_0)$, quindi questo iperpiano è anche un iperpiano di supporto per u in x_0. Di conseguenza si ha che $\partial(u_*)(x_0) \subset \partial u(x_0)$ per $x_0 \in \mathcal{C}_*(u)$, e quindi

$$\partial(u_*)(\mathcal{C}_*(u)) \subset \partial(\mathcal{C}_*(u)).$$

Se $x_0 \notin \mathcal{C}_*(u)$, allora $\partial u(x_0) = \varnothing$; inoltre, se A, B sono due insiemi qualsiasi, $\partial u(A \cup B) = \partial u(A) \cup \partial u(B)$, quindi

$$\partial u(\Omega) = \partial u(\mathcal{C}_*(u) \cup (\Omega \setminus \mathcal{C}_*(u))) = \partial u(\mathcal{C}_*(u)) \cup \partial u(\Omega \setminus \mathcal{C}_*(u)) = \partial u(\mathcal{C}_*(u)).$$

Dalla definizione di u_*, abbiamo $\partial u(\mathcal{C}_*(u)) \subset \partial(u_*)(\mathcal{C}_*(u))$, quindi

$$\partial u(\Omega) = \partial u(\mathcal{C}_*(u)) = \partial(u_*)(\mathcal{C}_*(u)). \tag{3.4}$$

Sia ora $\Phi_u(x_0) = \{p : u(x) \leq u(x_0) + p(x - x_0)\ \forall x \in \Omega\}$; si noti che

$$\Phi_{-u}(x_0) = -\partial u(x_0).$$

Lemma 3.3.1. *Sia $u \in C(\bar{\Omega})$ tale che $u(x) \leq 0$ su $\partial\Omega$; sia poi $x_0 \in \Omega$ con $u(x_0) > 0$. Allora*

$$\Omega(x_0, u(x_0)) \subset \Phi_{u^*}(\mathcal{C}^*(u)),$$

dove si definisce, per $t > 0$,

$$\Omega(x,t) = \left\{\gamma \in \mathbb{R}^n : \gamma \cdot (\xi - x) + t > 0\ \forall \xi \in \bar{\Omega}\right\}.$$

Dimostrazione. Sia $\gamma \in \Omega(x_0, u(x_0))$; allora vale

$$\gamma \cdot (\xi - x_0) + u(x_0) > 0 \tag{3.5}$$

per ogni $\xi \in \bar{\Omega}$. Chiamiamo

$$\lambda_0 = \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda + \gamma \cdot (\xi - x_0) \geq u(\xi)\ \forall \xi \in \bar{\Omega}\right\};$$

per continuità si ha allora

$$\lambda_0 + \gamma \cdot (\xi - x_0) \geq u(\xi) \tag{3.6}$$

per ogni $\xi \in \bar{\Omega}$. Consideriamo

$$\min_{\xi \in \bar{\Omega}} \{\lambda_0 + \gamma \cdot (\xi - x_0) - u(\xi)\};$$

questo minimo è raggiunto in qualche punto $\bar{\xi} \in \bar{\Omega}$ e abbiamo

$$\lambda_0 + \gamma \cdot (\bar{\xi} - x_0) - u(\bar{\xi}) = 0,$$

perché altrimenti avremmo

$$\lambda_0 + \gamma \cdot (\xi - x_0) - (\xi) \geq \varepsilon > 0$$

per ogni $\xi \in \bar{\Omega}$, contro la nostra scelta di λ_0 (λ_0 non sarebbe più l'estremo inferiore, potremmo prendere $\lambda_0 - \varepsilon$).

Vogliamo provare che $\bar{\xi} \in \Omega$. Sappiamo che $u_{|\partial\Omega} \leq 0$, quindi $\bar{\xi} \in \Omega$ se $u(\bar{\xi}) > 0$. Prendiamo $\xi = x$ in (3.6); otteniamo $u(x_0) \leq \lambda_0$, e dunque, grazie a (3.5),

$$\gamma \cdot (\xi - x_0) + \lambda_0 > 0$$

per ogni $\xi \in \bar{\Omega}$. In particolare, se $\xi = \bar{\xi}$,

$$u(\bar{\xi}) = \gamma \cdot (\bar{\xi} - x_0) + \lambda_0 > 0,$$

che implica che $\bar{\xi} \in \Omega$.

Abbiamo quindi mostrato che, se $\gamma \in \Omega(x_0, u(x_0))$, esiste un punto $\xi \in \Omega$ tale che $u(\bar{\xi}) = \gamma \cdot (\bar{\xi} - x_0) + \lambda_0$ e $u(\xi) \leq \gamma \cdot (\xi - x_0) + \lambda_0$ per ogni $\xi \in \bar{\Omega}$. Dunque $\lambda_0 + \gamma \cdot (\xi - x_0)$ è un iperpiano di supporto per u in $\bar{\xi}$. Siccome u^* è definita come estremo inferiore ed è concava, abbiamo

$$u(\xi) \leq u^*(\xi) \leq \gamma \cdot (\xi - x_0) + \lambda_0 = h(\xi)$$

per ogni $\xi \in \Omega$.

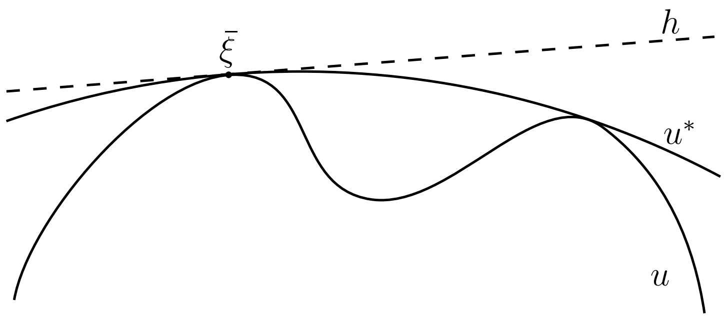

Figura 3.6. La funzione u^* sta tra u ed h, e le tre funzioni coincidono nel punto $\bar{\xi}$.

In particolare, $u(\bar{\xi}) = u^*(\bar{\xi})$ e $\gamma \cdot (\xi - x_0) + \lambda_0$ è un iperpiano di supporto per u^* in $\bar{\xi}$, cioè $\gamma \in \Phi_{u^*}(\bar{\xi})$. □

Abbiamo quindi, sotto le ipotesi del Lemma 3.3.1,

$$\Omega(x_0, u(x_0)) \subset \Phi_{u^*}(\mathcal{C}^*(u)) = -\partial(-(u^*))(\mathcal{C}^*(u)) = -\partial((-u)_*)(\mathcal{C}_*(-u)).$$

Vale inoltre

$$|\Omega(x_0, t)| \geq \frac{\omega_n t^n}{(\operatorname{diam}(\Omega))^n},$$

dove $\omega_n = |B(0,1)|$. Dimostriamolo: notiamo che $\Omega(x_0, t) = t\Omega(x_0, 1)$, che è di facile verifica se si scrive

$$\gamma \cdot (\xi - x_0) + t = t\left(\frac{\gamma}{t}(\xi - x_0) + 1\right).$$

Inoltre, se $x_0 \in \Omega$, si ha

$$B\left(0, \frac{1}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right) \subset \Omega(x_0, 1).$$

Sia infatti $\xi \in \bar{\Omega}$ e $\gamma \in B(0, (\operatorname{diam}(\Omega))^{-1})$. Possiamo scrivere, denotando con ϕ l'angolo compreso tra i due vettori γ e $\xi - x_0$,

$$\gamma \cdot (\xi - x_0) + 1 = \|\gamma\| \|\xi - x_0\| \cos\phi + 1 = \|\gamma\| \operatorname{diam}(\Omega) \frac{\|\xi - x_0\|}{\operatorname{diam}(\Omega)} \cos\phi + 1$$

$$\geq -\|\gamma\| \operatorname{diam}(\Omega) \frac{\|\xi - x_0\|}{\operatorname{diam}(\Omega)} + 1 > 0$$

e dunque $B(0, (\operatorname{diam}(\Omega))^{-1}) \subset \Omega(x_0, 1)$; ma allora

$$tB\left(0, \frac{1}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right) \subset t\Omega(x_0, 1) = \Omega(x_0, t),$$

e si ha

$$\left| tB\left(0, \frac{1}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right) \right| = \omega_n \frac{t^n}{(\operatorname{diam}(\Omega))^n} \leq |\Omega(x_0, t)|,$$

come volevamo.

Se poi u soddisfa le ipotesi del Lemma 3.3.1, abbiamo

$$\frac{\omega_n u(x_0)^n}{(\operatorname{diam}(\Omega))^n} \leq |-\partial((-u)_*)(\mathcal{C}_*(-u))|.$$

Vale inoltre il seguente teorema.

Teorema 3.3.2 (Principio del massimo di Aleksandrov, Bakelman e Pucci). *Se $u \in C(\bar{\Omega})$ e $u \leq 0$ su $\partial\Omega$, si ha*

$$\max_{\Omega} u(x) \leq \omega_n^{-\frac{1}{n}} \operatorname{diam}(\Omega) |\partial((-u)_*)(\mathcal{C}_*(-u))|^{\frac{1}{n}}.$$

Se inoltre $u \in C^2(\Omega)$ (senza nessuna ipotesi sul segno di u su $\partial\Omega$), allora

$$\max_{\Omega} u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u(x) + \omega_n^{-\frac{1}{n}} \operatorname{diam}(\Omega) \left(\int_{\mathcal{C}_*(-u)} |\det(D^2u(x))| dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Dimostrazione. Resta da provare solo l'ultima disuguaglianza. Possiamo assumere, sottraendo da u il massimo valore che essa può assumere sul bordo, che $u \leq 0$ su $\partial\Omega$. Da (3.4) si ha

$$\partial((-u)_*)(\mathcal{C}_*(-u)) = \partial(-u)(\mathcal{C}_*(-u)).$$

Se $u \in C^2(\Omega)$ e $z \in \mathcal{C}_*(-u)$, allora $D^2(-u)(z) \geq 0$. Dimostriamolo supponendo per assurdo che $D^2(-u)(z) < 0$. Supponiamo per ora anche che

$$D(-u)(z) = 0, \tag{3.7}$$

cioè che z sia punto di massimo locale stretto. Sia $B = B(z, r)$ una palla con r tale che $(-u)_{|\bar{B}}$ abbia un massimo assoluto in z. Chiamiamo π l'iperpiano definito da

$$\pi(x) = \max_{\partial B}(-u).$$

Si ha, per la scelta di B, $(-u)(z) > \pi(z)$. Inoltre, per definizione di $(-u)_*$, si ha $(-u)_*(x) \leq \pi(x)$ per ogni $x \in B$. Dunque

$$(-u)_*(z) < (-u)(z),$$

che è chiaramente un assurdo.

Proviamo che non è stato restrittivo assumere che valesse (3.7). Innanzitutto notiamo che se

$$v(x) = u(x) - l(x),$$

dove $l(x)$ è una funzione **lineare**, allora si ha

$$v_*(x) = u_*(x) - l(x);$$

la dimostrazione di questo fatto non è difficile e si basa sulla semplice applicazione della definizione di v_* come estremo superiore.

Supponiamo ora che

$$D(-u)(z) \neq 0;$$

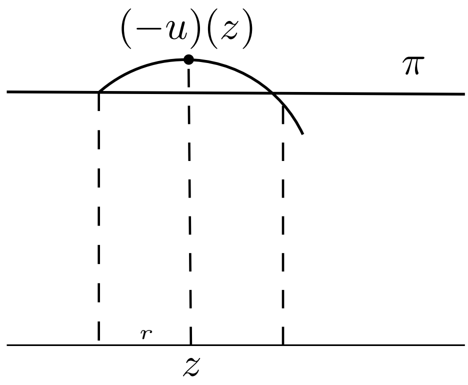

Figura 3.7. Nella figura si vedono la funzione $-u$ e l'iperpiano π.

possiamo allora considerare

$$v(x) = u(x) - Du(z) \cdot x.$$

Ovviamente $Dv(z) = Du(z) - Du(z) = 0$ e $D^2v(z) = D^2u(z) < 0$, come stiamo supponendo per assurdo. Allora la funzione v rientra nel caso appena analizzato e si giunge comunque all'assurdo

$$v_*(z) < v(z).$$

Dunque abbiamo provato che se $u \in C^2(\Omega)$ e $z \in \mathcal{C}_*(-u)$, allora

$$D^2(-u)(z) \geq 0.$$

Per quanto appena dimostrato, $-u$ è convessa. Procedendo esattamente come nel Teorema 1.2.16 otteniamo dunque, dalla formula del cambio di variabili,

$$|\partial(-u)(\mathcal{C}_*(-u))| = \int_{\mathcal{C}_*(-u)} |\det(D^2u(x))|dx,$$

e ciò completa la dimostrazione. □

3.4 Il principio del confronto

Iniziamo la sezione con un risultato di algebra lineare, che utilizzeremo nel seguito.

Teorema 3.4.1 (Disuguaglianza di Minkowski per i determinanti)**.** *Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ due matrici simmetriche semidefinite positive. Allora vale*

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}. \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Sia, al solito, I_n la matrice identica di dimensione n. Supponiamo per ora che A sia una matrice **definita** positiva. Possiamo allora scrivere

$$\det(A+B) = \det(A(I_n + A^{-1}B)) = (\det A)(\det(I_n + A^{-1}B))$$

e la (3.8) diventa, sfruttando l'uguaglianza appena trovata, dividendo entrambi i membri per $(\det A)^{\frac{1}{n}}$ e ricordando che $(\det A)^{-1} = \det(A^{-1})$,

$$\det(I_n + A^{-1}B)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + (\det(A^{-1}B))^{\frac{1}{n}}.$$

Se A è simmetrica, anche A^{-1} lo è, dunque $A^{-1}B$ è una matrice simmetrica semidefinita positiva. Ci basta dunque dimostrare che, data C matrice simmetrica semidefinita positiva, si ha

$$\det(I_n + C)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + (\det C)^{\frac{1}{n}}$$

ed abbiamo finito. Notiamo che C è ortogonalmente diagonalizzabile; possiamo quindi scrivere $C = Q^t \Delta Q$ con Q matrice ortogonale e Δ matrice diagonale. Si ha, banalmente,

$$\det C = \det \Delta$$

e

$$\begin{aligned}\det(I_n + Q^t\Delta Q) &= \det(Q^t I_n Q + Q^t \Delta Q) = \\ &= (\det Q^t)(\det Q)(\det(I_n + \Delta)) = \det(I_n + \Delta),\end{aligned}$$

per cui possiamo semplificare ulteriormente la nostra tesi, che diventa

$$\det(I_n + \Delta)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + (\det \Delta)^{\frac{1}{n}}, \tag{3.9}$$

con Δ matrice diagonale. Siano λ_i, per $i = 1, ..., n$, gli autovalori di Δ. Provare la (3.9) equivale a provare che

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\right)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{3.10}$$

con $\lambda_i \geq 0$. Se uno dei λ_i è uguale a 0 (questo equivale a dire che, all'inizio, era $\det B = 0$), la (3.10) diventa

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\right)^{\frac{1}{n}} \geq 1,$$

che è banalmente vera. Possiamo quindi supporre ora che $\lambda_i \neq 0$ per ogni i. Applicando ad entrambi i membri di (3.10) la funzione crescente $x \mapsto \log x$, otteniamo una disuguaglianza equivalente. Dunque (3.10) è vera se e solo se

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1+\lambda_i) \geq \log\left(1+\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{\frac{1}{n}}\right). \tag{3.11}$$

Notiamo ora che

$$\log\left(1+\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{\frac{1}{n}}\right) = \log\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\lambda_i}\right)$$

e quindi quello che ci resta da dimostrare è che

$$\log\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\lambda_i}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1+\lambda_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1+\mathrm{e}^{\log\lambda_i}). \tag{3.12}$$

La (3.12) è una disuguaglianza di convessità. Basta dimostrare che $\varphi(t) = \log(1+\mathrm{e}^t)$ è una funzione convessa, e questo segue dal fatto che la derivata seconda è positiva:

$$\varphi''(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2} > 0.$$

Abbiamo supposto all'inizio che $\det A \neq 0$. Se $\det A = 0$, abbiamo due possibilità. Se $\det B \neq 0$, possiamo scambiare i ruoli di A e di B nella dimostrazione appena conclusa; se invece anche $\det B = 0$, la nostra tesi diventa

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geq 0,$$

che è banalmente vera. □

Nota 3.4.2. Utilizzeremo una disuguaglianza meno precisa, che segue dal teorema appena dimostrato. Si ha infatti, elevando alla n entrambi i membri della disuguaglianza di Minkowski per i determinanti,

$$\det(A+B) \geq \left((\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \det A + \det B.$$

Teorema 3.4.3 (Principio del confronto)**.** *Siano $u, v \in C(\bar{\Omega})$ funzioni convesse tali che*

$$|\partial u(E)| \leq |\partial v(E)|$$

per ogni boreliano $E \subset \Omega$; allora

$$\min_{x\in\bar{\Omega}}\{u(x)-v(x)\} = \min_{x\in\partial\Omega}\{u(x)-v(x)\}.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo: chiamiamo

$$a = \min_{x\in\bar\Omega} \{u(x) - v(x)\}\,,\ b = \min_{x\in\partial\Omega} \{u(x) - v(x)\}\,,$$

e supponiamo $a < b$. Per definizione, esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $a = u(x_0) - v(x_0)$. Sia $\delta > 0$ tale che

$$\delta(\mathrm{diam}(\Omega))^2 < \frac{b-a}{2}$$

e sia

$$w(x) = v(x) + \delta\|x - x_0\|^2 + \frac{b+a}{2}.$$

Consideriamo l'insieme $G = \big\{x \in \bar\Omega : u(x) < w(x)\big\}$; ovviamente, $x_0 \in G$. Sappiamo inoltre che $G \cap \partial\Omega = \varnothing$; se esistesse infatti $x \in G \cap \partial\Omega$, avremmo $u(x) - v(x) \geq b$ (perché $x \in \partial\Omega$), quindi

$$w(x) \leq u(x) + \delta\|x - x_0\|^2 - \frac{b-a}{2} \leq u(x) + \delta(\mathrm{diam}(\Omega))^2 - \frac{b-a}{2} < u(x),$$

cioè in definitiva $w(x) < u(x)$ per $x \in \partial\Omega$.

Vogliamo mostrare ora che $\partial G \subset \{x \in \Omega : u(x) = w(x)\}$. Innanzitutto $G \subset\subset \Omega$. Sia infatti x_m una successione in G tale che $x_m \longrightarrow x$. Si ha che $u(x_m) < w(x_m)$ e dunque, passando al limite, $u(x) \leq w(x)$. Se fosse $x \in \partial\Omega$, allora $u(x) > w(x)$. Quindi deve essere $x \notin \partial\Omega$, e allora $G \subset\subset \Omega$. Prendiamo ora $x \in \partial G$. Per definizione di frontiera esistono due successioni, $x_k \in G$ e $x_h \in G^c$, tali che $x_k \to x$, con $u(x_k) < w(x_k)$ per ogni k, e $x_h \to x$, con $u(x_h) > w(x_h)$ per ogni h. Allora, per continuità di u e w, deve essere contemporaneamente

$$u(x) \leq w(x)$$

e

$$u(x) \geq w(x).$$

Dunque $u(x) = w(x)$ se $x \in \partial G$.

Per il Lemma 3.1.1, otteniamo $\partial w(G) \subset \partial u(G)$; inoltre,

$$\partial w = \partial(v + \delta\|x - x_0\|^2)$$

e vale il seguente lemma.

Lemma 3.4.4. *Si ha*

$$|\partial(v + \delta\|x - x_0\|^2)(G)| \geq |\partial v(G)| + |\partial(\delta\|x - x_0\|^2)(G)| \tag{3.13}$$

Dimostrazione. Per dimostrare la nostra tesi utilizziamo il fatto che se A e B sono matrici simmetriche semidefinite positive,

$$\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B),$$

come dimostrato all'inizio della sezione. Se quindi abbiamo $v \in C^2(\Omega)$, la relazione (3.13) segue, infatti

$$\begin{aligned} |\partial(v + \delta\|x - x_0\|^2)(G)| &= \int_G \det D^2(v(x) + \delta\|x - x_0\|^2)dx \\ &\geq \int_G \det D^2 v(x)dx + \int_G \det D^2(\delta\|x - x_0\|^2)dx = \\ &= |\partial v(G)| + |\partial(\delta\|x - x_0\|^2)(G)|. \end{aligned}$$

Se v non è $C^2(\Omega)$, possiamo approssimarla tramite una successione di funzioni $v_k \in C^2(\Omega)$ convesse che convergono uniformemente sui compatti di Ω. Per farlo, possiamo considerare una funzione $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, positiva e con supporto in $B(0,1)$, con $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$, quindi porre

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Consideriamo poi la mollificazione di v, $v_\varepsilon = v * \varphi_\varepsilon$. In questo caso, quindi, (3.13) segue dal Lemma 2.1.3. Dimostriamolo: ricordiamo che per il lemma si ha

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |\partial v_\varepsilon(K)| \leq |\partial v(K)| \tag{3.14}$$

se K è un compatto contenuto in Ω. Se poi il compatto K è tale che $K \subset U$, dove U è un aperto che soddisfa le ipotesi del lemma, allora

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} |\partial v_\varepsilon(U)| \geq |\partial v(K)|. \tag{3.15}$$

Prendiamo ora una successione di compatti $K_n \subset\subset G$ tali che $\bigcup_n K_n = G$. Ovviamente vale

$$|\partial v(G)| + |\partial(\delta\|x - x_0\|^2)(G)| = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\partial v(K_n)| + |\partial(\delta\|x - x_0\|^2)(K_n)|) \tag{3.16}$$

Fissiamo ora uno di questi compatti, $K_{\bar{m}} \subset\subset G$ e consideriamo un aperto A tale che $K_{\bar{m}} \subset\subset A \subset\subset G$.

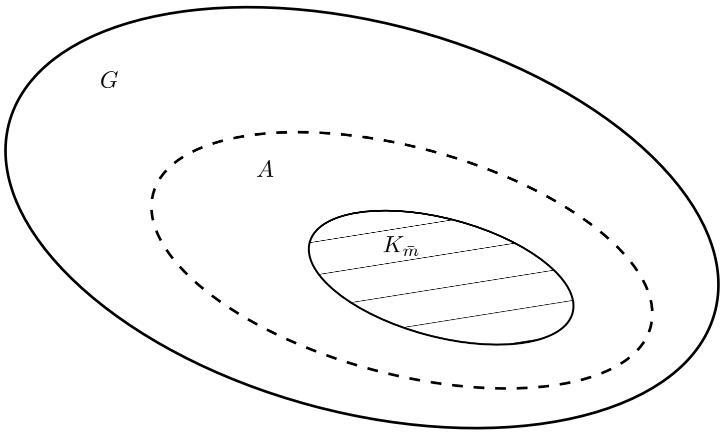

Figura 3.8. Nella figura sono rappresentati il compatto fissato $K_{\bar m}$ e l'aperto A che lo contiene.

Per (3.14) e (3.15), e ricordando che per le v_ε valgono le considerazioni fatte per il caso C^2, si ha

$$\begin{aligned}|\partial v(K_{\bar m})| + |\partial(\delta\|x-x_0\|^2)(K_{\bar m})| &\le \liminf_{\varepsilon\to 0} |\partial v_\varepsilon(A)| + |\partial(\delta\|x-x_0\|^2)(A)| \\ &\le \liminf_{\varepsilon\to 0} |(\partial v_\varepsilon + \delta\|x-x_0\|^2)(A)| \\ &\le \limsup_{\varepsilon\to 0} |(\partial v_\varepsilon + \delta\|x-x_0\|^2)(\bar A)| \\ &\le |\partial(v+\delta\|x-x_0\|^2)(\bar A)| \\ &\le |\partial(v+\delta\|x-x_0\|^2)(\bar A)|.\end{aligned}$$

Da ciò e da (3.16) segue finalmente (3.13). Questo conclude la dimostrazione del Lemma 3.4.4. □

Vale

$$\begin{aligned}|\partial(\delta\|x-x_0\|^2)(G)| &= \int_G \det D^2(\delta\|x-x_0\|^2)dx = \\ &= \int_G \det(2\delta I_n)dx = \\ &= (2\delta)^n|G|,\end{aligned}$$

dove I_n è, come al solito, la matrice identica di dimensione n; si ha allora

$$|\partial u(G)| \ge |\partial w(G)| \ge |\partial v(G)| + |\partial(\delta\|x-x_0\|^2)(G)| = |\partial v(G)| + (2\delta)^n|G|,$$

che contraddice l'ipotesi, e ciò conclude la dimostrazione del principio del confronto. Notiamo che tutti gli insiemi presi in considerazione hanno misura finita in quanto $G \subset\subset \Omega$. □

Corollario 3.4.5. *Se $u, v \in C(\bar{\Omega})$ sono funzioni convesse tali che*

$$|\partial u(E)| = |\partial v(E)|$$

per ogni boreliano $E \subset \Omega$ e $u = v$ su $\partial\Omega$, allora $u = v$ in Ω.

Dimostrazione. È un'applicazione diretta del principio del confronto, in cui si scambiano i ruoli di u e v. Per il teorema precedente si ha infatti

$$\min_{\bar{\Omega}}(u - v) = \min_{\partial\Omega}(u - v) = 0$$

e

$$\min_{\bar{\Omega}}(v - u) = \min_{\partial\Omega}(v - u) = 0,$$

da cui segue la tesi per la definizione di minimo. □

Sfrutteremo questo corollario nel capitolo successivo: esso si rivelerà infatti utile nella dimostrazione dell'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Monge-Ampère.

Capitolo 4

Il problema di Dirichlet

Vediamo ora alcuni teoremi di esistenza e unicità per soluzioni del problema di Dirichlet per l'equazione di Monge-Ampère. Analizzeremo prima il caso omogeneo e poi adatteremo le tecniche utilizzate al caso non omogeneo. Alla fine del capitolo dimostreremo anche l'inverso della Proposizione 2.2.5.

4.1 Il problema di Dirichlet omogeneo

Definizione 4.1.1. *L'insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice* ***strettamente convesso*** *se per ogni $x, y \in \bar{\Omega}$ il segmento aperto che congiunge x e y è contenuto in Ω.*

Teorema 4.1.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e strettamente convesso, e sia $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Esiste un'unica funzione convessa $u \in C(\bar{\Omega})$ che sia soluzione generalizzata del problema*

$$\begin{cases} \det D^2 u = 0 \ \textit{in } \Omega, \\ u = g \ \textit{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrazione. Definiamo

$$\mathcal{F} = \{a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : a \text{ è una funzione affine e } a \leq g \text{ su } \partial\Omega\}.$$

La funzione g è continua, quindi $\mathcal{F} \neq \varnothing$ (ad esempio la funzione costante $a = \min_{\partial\Omega} g$ appartiene ad $\mathcal{F}$). La funzione $u(x) = \sup\{a(x) : a \in \mathcal{F}\}$ è convessa essendo estremo superiore di funzioni convesse, ed abbiamo inoltre $u(x) \leq g(x)$ se $x \in \partial\Omega$.
Lo svolgimento della dimostrazione si articola ora in diversi passi successivi.

Primo passo. Mostriamo che $u = g$ su $\partial\Omega$.

Sia $\xi \in \partial\Omega$; vediamo che $u(\xi) \geq g(\xi)$. Per continuità, scelto $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|g(x) - g(\xi)| < \varepsilon$ per $|x - \xi| < \delta$ con $x \in \partial\Omega$. Sia $P(x) = 0$ l'equazione dell'iperpiano di supporto a Ω nel punto ξ, e assumiamo che $\Omega \subset \{x : P(x) \geq 0\}$. Essendo Ω strettamente convesso, esiste $\eta > 0$ tale che $S = \big\{x \in \bar{\Omega} : P(x) \leq \eta\big\} \subset B(\xi, \delta)$ (si veda la Figura 4.1).

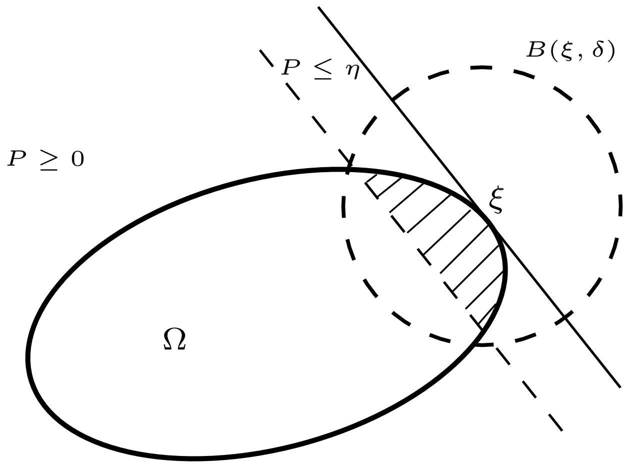

Figura 4.1. Nella figura si vedono la palla di centro ξ e raggio δ contenente l'insieme $S = \big\{x \in \bar{\Omega} : P(x) \leq \eta\big\}$.

Sia $M = \min\{g(x) : x \in \partial\Omega, P(x) \geq \eta\}$ e consideriamo

$$a(x) = g(\xi) - \varepsilon - AP(x), \tag{4.1}$$

dove A è una costante che soddisfa

$$A \geq \max\left(\frac{g(\xi) - \varepsilon - M}{\eta}, 0\right).$$

Abbiamo allora

$$a(\xi) = g(\xi) - \varepsilon - AP(\xi) + g(\xi) - \varepsilon$$

e $a(x) \leq g(x)$ per $x \in \partial\Omega$. Se infatti $x \in \partial\Omega \cap S$, si ha

$$g(\xi) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(\xi) + \varepsilon,$$

quindi

$$g(x) \geq g(\xi) - \varepsilon - AP(x) + AP(x) \geq g(\xi) - \varepsilon - AP(x) = a(x).$$

Se invece $x \in \partial\Omega \cap S^C$, allora $P(x) > \eta$ e per la definizione di M e la scelta di A abbiamo

$$g(x) \geq M = a(x) + M - g(\xi) + \varepsilon + AP(x) \geq a(x) + M - g(\xi) + \varepsilon + A\eta \geq a(x).$$

Abbiamo quindi $a \in \mathcal{F}$, e in particolare

$$u(\xi) \geq a(\xi) = g(\xi) - \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$; dunque $u(\xi) \geq g(\xi)$.

Secondo passo. Mostriamo che u è continua in $\bar{\Omega}$.

Siccome u è convessa in Ω, allora u è continua in Ω; resta da provare la continuità sul bordo.

Siano $\xi \in \partial\Omega$, $\{x_n\} \subset \bar{\Omega}$ con $x_n \to \xi$. Vogliamo provare che $u(x_n) \to g(\xi)$. Se a è la funzione con cui abbiamo lavorato al punto precedente, abbiamo che $u(x) \geq a(x)$. In particolare, $u(x_n) \geq a(x_n)$, e dunque

$$\liminf_{n\to\infty} u(x_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a(x_n) = \liminf_{n\to\infty} (g(\xi) - \varepsilon - AP(x_n)) = g(\xi) - \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$; in definitiva, $\liminf_{n\to\infty} u(x_n) \geq g(\xi)$.

Proviamo ora che $\limsup_{n\to\infty} u(x_n) \leq g(\xi)$. Sappiamo che Ω è convesso, ed esiste quindi una funzione h armonica in Ω tale che $h \in C(\bar{\Omega})$ e $h_{|\partial\Omega} = g$. Se a è una funzione affine tale che $a \leq g$ su $\partial\Omega$, a è armonica e per il principio del massimo $a \leq h$ in Ω. Prendendo l'estremo superiore su a otteniamo $u(x) \leq h(x)$ se $x \in \Omega$. In particolare, $u(x_n) \leq h(x_n)$, pertanto $\limsup_{n\to\infty} u(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} h(x_n) = g(\xi)$.

Terzo passo. Mostriamo che

$$\partial u(\Omega) \subset \{p \in \mathbb{R}^n : \exists x, y \in \Omega, x \neq y, \text{ per cui } p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)\}.$$

Poi, dal Lemma 1.2.14 segue che $|\partial u(\Omega)| = 0$; dunque u è una soluzione generalizzata.

Se $p \in \partial u(\Omega)$, esiste $x_0 \in \Omega$ tale che

$$u(x) \geq u(x_0) + p \cdot (x - x_0) = a(x)$$

per ogni $x \in \Omega$. Poiché $u = g$ su $\partial\Omega$, abbiamo $g(x) \geq a(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Esiste $\xi \in \partial\Omega$ tale che $g(\xi) = a(\xi)$. Se così non fosse, infatti, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $g(x) \geq a(x) + \varepsilon$ per ogni $x \in \partial\Omega$ e dunque $u(x) \geq a(x) + \varepsilon$ per ogni $x \in \Omega$ ed in particolare $u(x_0) \geq a(x_0) + \varepsilon = u(x_0) + \varepsilon$, che è assurdo. Essendo Ω convesso, il segmento aperto I che congiunge x_0 e ξ è contenuto in Ω e si ha $u(x_0) = a(x_0)$, $u(\xi) = a(\xi)$. Se $z \in I$, $z = tx_0 + (1-t)\xi$ e per convessità

$$u(z) \leq tu(x_0) + (1-t)u(\xi) = ta(x_0) + (1-t)a(\xi) = a(z).$$

Sappiamo però che $u(x) \geq a(x)$ per ogni $x \in \Omega$, e quindi in particolare che $u(z) = a(z)$ per $z \in I$; dunque a è iperpiano di supporto ad u in ogni punto del segmento I. Questo vuol dire che $p \in \partial u(z)$ per ogni $z \in I$.

Unicità. L'unicità segue dal Corollario 3.4.5, ma ne forniamo qui anche una prova diretta. Sia $v \in C(\bar{\Omega})$, v convessa e $v = g$ su $\partial\Omega$. Dato $x_0 \in \Omega$, esiste un iperpiano di supporto $a(x)$ nel punto $(x_0, v(x_0))$: si ha $v(x) \geq a(x)$ per ogni $x \in \bar{\Omega}$. Dunque $g(x) = v(x) \geq a(x)$ per $x \in \partial\Omega$, cioè $a \in \mathcal{F}$ e $u(x) \geq a(x)$; in particolare, $u(x_0) \geq a(x_0) = v(x_0)$, e quindi $u \geq v$ in $\bar{\Omega}$. In definitiva u è la più grande funzione convessa uguale a g su $\partial\Omega$. Per mostrare che $u \leq v$, procediamo per assurdo e supponiamo che esista $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) > v(x_0)$. Mostreremo che questo implica che $|\partial u(\Omega)| > 0$. Sia $\varepsilon > u(x_0) - v(x_0) > 0$ e sia $a(x) = u(x_0) + p \cdot (x - x_0)$ un iperpiano di supporto per u in x_0, cioè $u(x) \geq a(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Consideriamo gli iperpiani della forma

$$u(x_0) + q \cdot (x - x_0) - \frac{\varepsilon}{2};$$

proveremo che, se q sta in una (piccola) palla di centro p, questa famiglia di iperpiani sta tutta sotto il grafico di u. Infatti

$$\begin{aligned} u(x_0) + q \cdot (x - x_0) - \frac{\varepsilon}{2} &= u(x_0) + p \cdot (x - x_0) + (q - p) \cdot (x - x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq u(x_0) + p \cdot (x - x_0) + \|q - p\|\|x - x_0\| - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq u(x_0) + p \cdot (x - x_0) + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leq u(x), \end{aligned}$$

se

$$|q - p| \leq \frac{\varepsilon}{2M},$$

con $M = \mathrm{diam}(\Omega)$. Ora abbassiamo ciascuno di questi iperpiani fino a farli diventare iperpiani di supporto per v in qualche punto. Prendiamo

$$a = \sup_{x \in \Omega} \left\{ u(x_0) + q \cdot (x - x_0) - \frac{\varepsilon}{2} - v(x) \right\};$$

si ha che $a > 0$, perché, in $x = x_0$,

$$u(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} - v(x_0) = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Esiste allora $x_1 \in \bar{\Omega}$ tale che

$$a = u(x_0) + q \cdot (x_1 - x_0)\frac{\varepsilon}{2} - v(x_1),$$

dunque
$$u(x_0) + q \cdot (x - x_0) - \frac{\varepsilon}{2} - a \leq v(x),$$
cioè
$$u(x_0) + q \cdot (x - x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$
è un iperpiano di supporto per v in x_1. Resta solo da vedere che $x_1 \in \Omega$. In x_1 abbiamo

$$u(x_1) \geq u(x_0) + q \cdot (x_1 - x_0) - \frac{\varepsilon}{2} = v(x_1) + a > v(x_1)$$

e quindi $x_1 \notin \partial\Omega$. Di conseguenza,

$$B\left(p, \frac{\varepsilon}{2M}\right) \subset \partial v(\Omega)$$

e ciò conclude la dimostrazione. □

Esempio 4.1.3. La funzione convessa $u(x, y) = \max(x^2 - 1, 0)$ è una soluzione generalizzata di $\det D^2 u = 0$ in $B(0, 2)$ che ha dato al bordo continuo ma non è regolare perché ha angoli sulle rette $x = \pm 1$.

Dimostrazione. Mostriamo brevemente che la funzione u è soluzione generalizzata. Sappiamo che la mappa normale coincide con il gradiente nei punti in cui la funzione è derivabile; si ha dunque

$$\partial u(x, y) = \begin{cases} \{(0, 0)\} \text{ nei punti } (x, y) \text{ tali che } -1 < x < 1, \\ \{(2x, 0)\} \text{ nei punti } (x, y) \text{ tali che } x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$

Consideriamo ora un punto $(1, \bar{y})$; applicando la definizione otteniamo che un punto $p = (p_1, p_2)$ appartiene a $\partial u(1, \bar{y})$ se e solo se

$$\max(x^2 - 1, 0) \geq p \cdot (x - 1, y - \bar{y}) \tag{4.2}$$

per ogni $(x, y) \in B(0, 2)$. Scegliendo $x = 1$ otteniamo $p_2(y - \bar{y}) \leq 0$; siccome abbiamo la possibilità di far variare y nell'intervallo aperto $(-2, 2)$, si ha necessariamente $p_2 = 0$. Allora la (4.2) diventa

$$\max(x^2 - 1, 0) \geq p_1(x - 1).$$

Scegliendo $-1 \leq x \leq 1$ otteniamo la condizione $p_1 \geq 0$; se invece $x > 1$, deve essere $p_1 \leq 2$. Abbiamo dunque dimostrato che, se un punto p appartiene a $\partial u(1, \bar{y})$, esso deve necessariamente essere della forma $(p_1, 0)$, con $p_1 \in [0, 2]$.

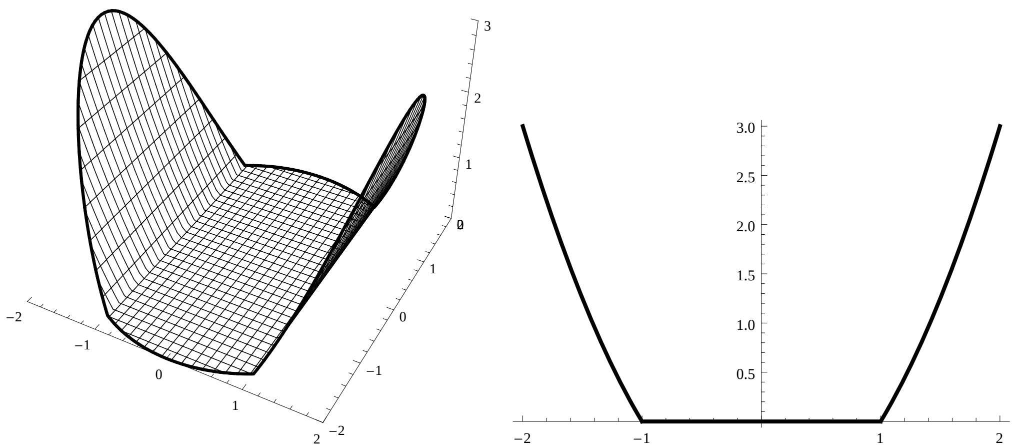

Figura 4.2. Nella prima figura è rappresentato il grafico della funzione

$$u(x, y) = \max(x^2 - 1, 0)$$

per $(x, y) \in B(0, 2)$. Poiché la funzione dipende solo da x e non da y, essa è costante lungo le rette $y = k$, dove k è una costante reale (ovviamente tale che il punto (x, k) stia nel dominio della funzione). Nella seconda figura è rappresentata la sezione del grafico per $y = 0$.

Si dimostra banalmente che tale condizione è anche sufficiente. Allo stesso modo si dimostra che $\partial u(-1, \bar{y}) = \{(p_1, 0)\}$ con $p_1 \in [-2, 0]$. Riassumendo si ha dunque che

$$\partial u(x, y) = \{(p_1, 0) : p_1 \in [-4, 4]\},$$

che essendo un segmento ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^2$. $\square$

4.2 Proprietà di subarmonicità delle funzioni convesse

Consideriamo un aperto connesso limitato Ω. Sappiamo che una funzione $u \in C^2(\Omega)$ è subarmonica in Ω se e solo se

$$\Delta u \geq 0$$

in Ω. Questo equivale a richiedere che

$$\int_\Omega \varphi \Delta u \; dx \geq 0 \tag{4.3}$$

per ogni funzione test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Integrando per parti il primo membro della disuguaglianza (4.3) si ottiene

$$-\int_\Omega Du \cdot D\varphi \, dx \geq 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Ricordiamo che per il Lemma 1.2.4 e per il Corollario 1.2.6 una funzione convessa è localmente lipschitziana e differenziabile quasi ovunque e diamo la seguente definizione.

Definizione 4.2.1. *Una funzione u localmente lipschitziana in Ω si dice* ***debolmente subarmonica*** *in Ω se*

$$-\int_\Omega Du \cdot D\varphi \, dx \geq 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$.

Teorema 4.2.2. *Se u è convessa in Ω, allora u è debolmente subarmonica in Ω.*

Dimostrazione. Se consideriamo, al variare di $\varepsilon > 0$, la mollificazione u_ε di u, si dimostra banalmente che anche u_ε è convessa. Siccome però $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, la sua convessità implica che la matrice hessiana $D^2 u_\varepsilon$ è semidefinita positiva. Allora la sua traccia sarà non negativa, cioè

$$\Delta u_\varepsilon \geq 0.$$

Questo implica che

$$\int_\Omega \varphi \Delta u_\varepsilon \, dx \geq 0 \tag{4.4}$$

per ogni $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Integrando per parti due volte il primo membro della disuguaglianza (4.4) si ottiene

$$\int_\Omega u_\varepsilon \Delta\varphi \, dx \geq 0$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Vale allora

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon \Delta\varphi \, dx \geq 0;$$

data la continuità delle funzioni u_ε e φ e data la compattezza del supporto di φ (e quindi delle sue derivate), non abbiamo problemi a portare il limite dentro l'integrale ed otteniamo

$$\int_\Omega u \Delta\varphi \, dx \geq 0,$$

da cui, integrando ancora per parti, si ottiene

$$-\int_\Omega Du \cdot D\varphi \; dx \geq 0,$$

cioè quanto volevamo. □

Teorema 4.2.3 (Proprietà di sottomedia per le funzioni debolmente subarmoniche)**.** *Sia v una funzione debolmente subarmonica, sia x_0 un punto di Ω e sia data la palla $B(x_0, r)$ di raggio tale che $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$. Allora vale la proprietà di sottomedia sulle palle per v, cioè*

$$v(x_0) \leq \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} v(x) \; dx.$$

Dimostrazione. Sappiamo per ipotesi che

$$-\int_\Omega Dv \cdot D\varphi \; dx \geq 0$$

per ogni $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Sia ora

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(r^2 - \|x - x_0\|^2\right) \text{ se } \|x - x_0\| \leq r, \\ 0 \quad \text{se } \|x - x_0\| > r. \end{cases}$$

Si ha ovviamente

$$D\varphi(x) = \begin{cases} -(x - x_0) \text{ se } \|x - x_0\| \leq r, \\ 0 \quad \text{se } \|x - x_0\| > r; \end{cases}$$

consideriamo ora la mollificazione di φ, cioè, per $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$. Si ha, per la definizione di funzione debolmente subarmonica,

$$-\int_\Omega Dv \cdot D(\varphi_\varepsilon) \; dx \geq 0. \tag{4.5}$$

Lemma 4.2.4. *Si ha $D(\varphi_\varepsilon)(x) = (D\varphi)_\varepsilon(x)$.*

Dimostrazione. Integriamo per comodità su tutto $\mathbb{R}^n$ per non avere problemi di dominio. La compattezza dei supporti fa poi sparire ogni ambiguità; essa inoltre, assieme alla continuità delle funzioni, permette di spostare i limiti sotto il segno di integrale. Poiché φ è localmente lipschitziana possiamo poi utilizzare la formula di integrazione per parti. Si ha, considerando una funzione regolarizzatrice $\chi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} D(\varphi_\varepsilon)(x) &= D_x \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} D_x\left(\chi_\varepsilon(x-y)\right)\varphi(y)\, dy = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} D_y\left(\chi_\varepsilon(x-y)\right)\varphi(y)\, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y) D\varphi(y)\, dy = (D\varphi)_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

□

Dunque facendo tendere ε a 0 in (4.5) si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_\Omega Dv\cdot D(\varphi_\varepsilon)\, dx\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_\Omega Dv\cdot (D\varphi)_\varepsilon\, dx\right) = \\ &= -\int_\Omega Dv\cdot D\varphi\, dx \ge 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_\Omega Dv\cdot(x-x_0)\, dx = \int_{B(x_0,r)} Dv\cdot(x-x_0)\, dx = \\ &= -\int_{B(x_0,r)} v(x)\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(x-x_0)_i + \int_{\partial B(x_0,r)} v(x)(\nu\cdot(x-x_0))d\sigma, \end{aligned} \tag{4.6}$$

dove

$$\nu = \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}.$$

La relazione (4.6) diventa dunque

$$0 \le -n\int_{B(x_0,r)} v(x)\, dx + r\int_{\partial B(x_0,r)} v(x)\, d\sigma,$$

cioè

$$\int_{B(x_0,r)} v(x)\, dx \le \frac{r}{n}\int_{\partial B(x_0,r)} v(x)\, d\sigma. \tag{4.7}$$

Notiamo ora che, se definiamo

$$\psi(r) = \int_{B(x_0,r)} v(x)\, dx,$$

si ha

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\psi(r) &= \frac{d}{dr}\int_0^r \int_{\|x-x_0\|=s} v(x)\ d\sigma\ ds = \\ &= \int_{\|x-x_0\|=r} v(x)\ d\sigma = \int_{\partial B(x_0,r)} v(x)\ d\sigma\end{aligned}$$

e dunque la disuguaglianza (4.7) diventa

$$\psi \leq \frac{r}{n}\psi'. \tag{4.8}$$

Dobbiamo risolvere questa disequazione differenziale. La (4.8) è equivalente a

$$n\frac{d}{dr}\log r = \frac{n}{r} \leq \frac{\psi'}{\psi} = \frac{d}{dr}\log\psi.$$

Integriamo tra r_0 ed r, con $0 < r_0 < r$. Otteniamo

$$n(\log r - \log r_0) = \log\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leq \log\psi(r) - \log\psi(r_0) = \log\left(\frac{\psi(r)}{\psi(r_0)}\right).$$

Da questo, ricordando che il logaritmo è una funzione crescente e riordinando, si ottiene

$$\frac{\psi(r_0)}{r_0^n} \leq \frac{\psi(r)}{r^n},$$

cioè, riscrivendo tutto per esteso e moltiplicando entrambi i membri per $\omega_n^{-1} = |B(0,1)|^{-1}$,

$$\frac{1}{|B(x_0,r_0)|}\int_{B(x_0,r_0)} v(x)\ dx \leq \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} v(x)\ dx \tag{4.9}$$

per ogni $0 < r_0 < r$. Questo implica, facendo tendere $r_0 \to 0$, dato che v è una funzione continua,

$$v(x_0) \leq \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} v(x)\ dx,$$

cioè la nostra tesi. □

Nota 4.2.5. La relazione (4.9) è ben più forte della proprietà di sottomedia: essa è infatti una vera e propria **proprietà di monotonia** che abbiamo dimostrato essere valida per le funzioni debolmente subarmoniche.

Teorema 4.2.6 (Principio del massimo per funzioni debolmente subarmoniche)**.** *Sia Ω aperto connesso e sia v una funzione debolmente subarmonica in Ω. Se esiste un punto x_0 interno ad Ω tale che $v(x_0) \geq v(x)$ per ogni $x \in \Omega$, allora v è costante e $v \equiv v(x_0)$ in Ω.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$A = \{x \in \Omega : v(x) = v(x_0)\};$$

per ipotesi, $A \neq \varnothing$ ed essendo v continua, A è chiuso. Mostriamo che è anche aperto. Sia $\bar{x} \in A$, vogliamo vedere che esiste $r > 0$ tale che $B(\bar{x}, r) \subset A$. Sia r tale che $B(\bar{x}, r) \subset\subset \Omega$. Siccome $\bar{x}$ è punto di massimo assoluto, vale

$$v(\bar{x}) \geq v(x)$$

per ogni $x \in B(\bar{x}, r)$. Questo implica che

$$\int_{B(\bar{x},r)} v(\bar{x})\ dx \geq \int_{B(\bar{x},r)} v(x)\ dx,$$

cioè

$$v(\bar{x}) \geq \frac{1}{|B(\bar{x},r)|} \int_{B(\bar{x},r)} v(x)\ dx.$$

Sappiamo però che v gode della proprietà di sottomedia, quindi deve essere

$$v(\bar{x}) = \frac{1}{|B(\bar{x},r)|} \int_{B(\bar{x},r)} v(x)\ dx.$$

Siccome in $B(\bar{x}, r)$ si ha $v(\bar{x}) \geq v(x)$, la funzione deve valere costantemente $v(\bar{x})$ su tutta la palla. Dunque, dato $\bar{x} \in A$, esiste tutta una palla di centro $\bar{x}$ contenuta in A. Questo vuol dire che A è aperto e, siccome è anche chiuso, data la connessione di Ω, si ha $A = \Omega$. □

Nota 4.2.7. Il teorema precedente implica che, data v funzione debolmente subarmonica in Ω aperto connesso e limitato, v continua fino al bordo e tale che $v = 0$ su $\partial\Omega$, si ha $v(x) \leq 0$ per ogni $x \in \Omega$. Se per assurdo infatti supponiamo che esista $x_0 \in \Omega$ tale che $v(x_0) > 0$, allora $\max_\Omega v = M \geq v(x_0) > 0 = v_{|\partial\Omega}$. Dunque si avrebbe $v \equiv M > 0$ in Ω, che è chiaramente un assurdo perché v vale 0 su $\partial\Omega$ ed è continua fino al bordo.

Teorema 4.2.8 (Confronto con funzioni armoniche)**.** *Sia g una funzione continua su $\partial\Omega$. Sia u una funzione debolmente subarmonica in Ω, continua fino al bordo e tale che $u = g$ su $\partial\Omega$. Sia $w \in C(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ una funzione armonica tale che $w = g$ sul bordo. Allora $u \leq w$ in Ω.*

Dimostrazione. Siccome $\Delta w = 0$ in Ω, una semplice integrazione per parti ci assicura che vale
$$-\int_\Omega Dw \cdot D\varphi \, dx = 0$$
per ogni $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Ricordiamo che u è una funzione debolmente subarmonica, quindi
$$-\int_\Omega Du \cdot D\varphi \, dx \geq 0$$
per ogni $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Allora deve essere
$$-\int_\Omega D(u-w) \cdot D\varphi \, dx = -\int_\Omega Dv \cdot D\varphi \, dx \geq 0$$
per ogni $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, dove $v = u - w$. Si ha ovviamente $v = 0$ su $\partial\Omega$. Ci siamo dunque ridotti a provare che, data una funzione debolmente subarmonica v che vale 0 sul bordo di Ω, si ha $v \leq 0$ in Ω; questo è vero per il principio del massimo (Teorema 4.2.6), o meglio per la nota appena successiva. $\square$

4.3 Il problema di Dirichlet non omogeneo

Risolviamo il problema di Dirichlet non omogeneo per l'operatore di Monge-Ampère usando il metodo di Perron. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e convesso. Siano μ una misura di Borel su Ω e $g \in C(\partial\Omega)$. Poniamo
$$\mathcal{F}(\mu, g) = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v \text{ convessa}, \, Mv \geq \mu \text{ in } \Omega, \, v = g \text{ su } \partial\Omega\}.$$
Supponiamo che $\mathcal{F}(\mu, g) \neq \varnothing$, e sia $v \in \mathcal{F}(\mu, g)$. Assumiamo inoltre che Ω sia strettamente convesso. Per il Teorema 4.1.2, sia $W \in C(\bar{\Omega})$ l'unica soluzione convessa di
$$\begin{cases} MW = 0 \text{ in } \Omega, \\ W = g \text{ su } \partial\Omega. \end{cases}$$
Si ha $0 = MW \leq \mu \leq Mv$ in Ω e per il principio del confronto
$$\min_{\bar{\Omega}}(W - v) = \min_{\partial\Omega}(W - v) = 0$$
e quindi $v \leq W$ in Ω. Dunque tutte le funzioni in $\mathcal{F}(\mu, g)$ sono limitate uniformemente dall'alto e possiamo definire
$$U(x) = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{F}(\mu, g)\}.$$

L'idea per risolvere il problema di Dirichlet non omogeneo è quella di costruire per prima cosa U quando la misura μ è una combinazione di δ di Dirac e poi di approssimare una generica misura μ con una successione di misure di tale forma, arrivando così alla soluzione. Cominciamo con due lemmi.

Lemma 4.3.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e convesso e sia φ una funzione convessa in Ω tale che $\varphi \leq 0$ su $\partial\Omega$. Se $x \in \Omega$ ed $\ell(x) = \varphi(x) + p \cdot (y - x)$ è un iperpiano di supporto per φ nel punto $(x, \varphi(x))$, allora*

$$\|p\| \leq \frac{-\varphi(x)}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)}.$$

Più in generale, se $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, si ha

$$\partial\varphi(\Omega') \subset B\left(0, \frac{\max_{\Omega'}(-\varphi)}{\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)}\right).$$

Dimostrazione. Supponiamo $p \neq 0$. Si ha

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) + p \cdot (y - x)$$

per ogni $y \in \Omega$. Se $0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, allora

$$y_0 = x + r\frac{p}{\|p\|} \in \Omega$$

e

$$0 \geq \varphi(y_0) \geq \varphi(x) + r\|p\|,$$

e ciò termina la dimostrazione. □

Lemma 4.3.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato strettamente convesso; siano μ_j, μ misure di Borel in Ω, $u_j \in C(\bar{\Omega})$ convesse e $g \in C(\partial\Omega)$ tali che*

1. *$u_j = g$ su $\partial\Omega$,*
2. *$Mu_j = \mu_j$ in Ω,*
3. *$\mu_j \longrightarrow \mu$ debolmente in Ω,*
4. *$\mu_j(\Omega) \leq A < +\infty$ per ogni j.*

Allora $\{u_j\}$ contiene una sottosuccessione, che continueremo a chiamare u_j, ed esiste $u \in C(\bar{\Omega})$ convessa in Ω, tali che $u_j \to u$ uniformemente sui compatti di Ω e

$$\begin{cases} Mu = \mu \text{ in } \Omega, \\ u = g \text{ su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrazione. Abbiamo che $u_j \in \mathcal{F}(\mu_j, g)$ e dunque le u_j sono uniformemente limitate dall'alto. Mostriamo che lo sono anche dal basso. Siano $\xi \in \partial\Omega$ ed $\varepsilon > 0$, e sia

$$a(x) = g(\xi) - \varepsilon - AP(x)$$

la funzione affine data da (4.1). Ricordiamo che $A \geq 0$, $a(x) \leq g(x)$ se $x \in \partial\Omega$, $P(\xi) = 0$, $P(x) \geq 0$ per $x \in \Omega$. Poniamo $v_j(x) = u_j(x) - a(x)$. Se $x \in \partial\Omega$, si ha

$$v_j(x) = g(x) - a(x) \geq 0,$$

e le v_j sono convesse in Ω. Se $v_j(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$, allora le u_j sono limitate dal basso in Ω. Se per assurdo $v_j(x) < 0$ in un qualche punto, allora per il principio del massimo di Aleksandrov applicato alle v_j sull'insieme

$$G = \{x \in \Omega : v_j(x) \leq 0\}$$

otteniamo

$$(-v_j(x))^n \leq c_n \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\Delta^{n-1} M v_j(\Omega) \tag{4.10}$$

dove $\Delta = \operatorname{diam}(\Omega)$. Dato che a è una funzione affine, essa si può scrivere nella forma $a(x) = \alpha \cdot x + \beta$. Se $p \in \partial v_j(x_0)$, si ha, applicando la definizione,

$$u_j(x) - \alpha \cdot x - \beta \geq u_j(x_0) - \alpha \cdot x_0 - \beta + p \cdot (x - x_0) \ \forall x \in \Omega,$$

da cui, riordinando, si ottiene

$$u_j(x) \geq u_j(x_0) + (p + \alpha) \cdot (x - x_0) \ \forall x \in \Omega.$$

Dunque se $p \in \partial v_j(x_0)$, allora $p + \alpha \in \partial u_j(x_0)$ (e, analogamente, se $p \in \partial u_j(x_0)$, allora $p - \alpha \in \partial v_j(x_0)$). I due insiemi sono cioè uno il traslato dell'altro e si ha banalmente $Mu_j = Mv_j$ per l'invarianza rispetto alle traslazioni della misura di Lebesgue. Allora la relazione (4.10) implica che

$$(-v_j(x))^n \leq c_n \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\Delta^{n-1} A$$

e di conseguenza

$$v_j(x) \geq -\left(c_n \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\Delta^{n-1} A\right)^{\frac{1}{n}},$$

cioè

$$u_j(x) \geq g(\xi) - \varepsilon - AP(x) - c\left(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{4.11}$$

e così abbiamo provato che le u_j sono uniformemente limitate dal basso in Ω. D'altra parte $u_j(x) \leq w(x)$, con $\Delta w = 0$ in Ω e $w = g$ su $\partial\Omega$ per il principio del massimo perché u_j è debolmente subarmonica. Ora, $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \leq |x - \xi|$ e, da (4.11), otteniamo

$$w(x) \geq u_j(x) \geq g(\xi) - \varepsilon - AP(x) - c|x - \xi|^{\frac{1}{n}} \tag{4.12}$$

e dunque $u_j(x) \to g(\xi)$ se $x \to \xi$.

Allora, per il Lemma 1.2.4 e per il Lemma 4.3.1, le u_j sono localmente uniformemente lipschitziane in Ω e, per il teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione, che continueremo a chiamare u_j, ed una funzione u convessa in Ω tali che $u_j \to u$ uniformemente sui compatti di Ω. Abbiamo anche, da (4.12), che $u \in C(\bar{\Omega})$. La tesi allora segue dal Lemma 2.1.5. □

Passiamo ora al risultato principale della sezione.

Teorema 4.3.3. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato e strettamente convesso, μ è una misura di Borel su Ω con $\mu(\Omega) < +\infty$ e $g \in C(\partial\Omega)$, allora esiste un'unica $u \in C(\bar{\Omega})$ soluzione convessa del problema*

$$\begin{cases} Mu = \mu \ \textit{in} \ \Omega, \\ u = g \ \textit{su} \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrazione. L'unicità segue dal principio del confronto.

Sappiamo che esiste una successione di misure μ_j che convergono debolmente a μ tale che ogni μ_j è combinazione finita di δ di Dirac a coefficienti positivi e $\mu_j(\Omega) \leq A$ per ogni j. Se risolviamo il problema di Dirichlet per ogni μ_j con dato al bordo g, allora il teorema segue dal lemma precedente. Quindi assumiamo d'ora in poi che

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{x_i}, \ x_i \in \Omega, \ a_i > 0.$$

Affermiamo ora che

a) $\mathcal{F}(\mu, g) \neq \varnothing$,

b) se $u, v \in \mathcal{F}(\mu, g)$, allora $u \vee v \in \mathcal{F}(\mu, g)$,

c) $U \in \mathcal{F}(\mu, g)$, con $U = \sup\{v(x) : v \in \mathcal{F}(\mu, g)\}$.

Primo passo. Dimostrazione di a).
Come visto nell'Esempio 1.2.18,

$$M(\|x - x_i\|) = \omega_n \delta_{x_i},$$

dove $\omega_n = |B_n(0,1)|$. Sia

$$f(x) = \omega_n^{-\frac{1}{n}} \sum_{i=1}^{N} a_i^{\frac{1}{n}} \|x - x_i\|$$

e sia u una soluzione al problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Mu = 0 \text{ in } \Omega, \\ u = g - f \text{ su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si ha che $v = u + f \in \mathcal{F}(\mu, g)$. Infatti è chiaro che $v \in C(\bar{\Omega})$, v è convessa e $v = g$ su $\partial\Omega$. Calcoliamo Mv.

$$\begin{aligned} Mv &= M(u+f) \geq Mu + Mf \\ &\geq \frac{1}{\omega_n} \sum_{i=1}^{N} M(a_i^{\frac{1}{n}} \|x - x_i\|) = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{x_i} = \mu. \end{aligned}$$

Allora $\mathcal{F}(\mu, g) \neq \varnothing$ e la nostra U è ben definita.

Secondo passo. Dimostrazione di b).

Siano $\varphi = u \vee v$, $\Omega_0 = \{x \in \Omega : u(x) = v(x)\}$, $\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) > v(x)\}$, $\Omega_2 = \{x \in \Omega : u(x) < v(x)\}$. Se $E \subset \Omega_1$, $M\varphi(E) \geq Mu(E)$ e se $E \subset \Omega_2$, $M\varphi(E) \geq Mv(E)$. Inoltre, se $E \subset \Omega_0$, $\partial u(E) \subset \partial\varphi(E)$ e $\partial v(E) \subset \partial\varphi(E)$.

Dato dunque $E \subset \Omega$ boreliano, possiamo scrivere $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$, con $E_i \subset \Omega_i$ e si ha

$$\begin{aligned} M\varphi(E) &= M\varphi(E_0) + M\varphi(E_1) + M\varphi(E_2) \\ &\geq Mu(E_0) + Mu(E_1) + Mv(E_2) \\ &\geq \mu(E_0) + \mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(E). \end{aligned}$$

Terzo passo. Mostriamo che per ogni $y \in \Omega$ esiste una successione uniformemente limitata $v_m \in \mathcal{F}(\mu, g)$ che converge uniformemente sui compatti di Ω ad una funzione $w \in \mathcal{F}(\mu, g)$ tale che $w(y) = U(y)$.

Sia $v_0 \in \mathcal{F}(\mu, g) \neq \varnothing$ per il primo passo. Se $v \in \mathcal{F}(\mu, g)$, allora $v \leq W$, dove W è la funzione definita all'inizio della sezione. Fissato $y \in \Omega$, per la definizione di U esiste una successione $v_m \in \mathcal{F}(\mu, g)$ tale che $v_m(y) \to U(y)$ se $m \to \infty$. Sia $\bar{v}_m = v_0 \vee v_m$. Per il secondo passo, $\bar{v}_m \in \mathcal{F}(\mu, g)$ e quindi $v_m(y) \leq \bar{v}_m(y) \leq U(y)$, da cui $\bar{v}_m \to U(y)$. Notiamo che

$$v_0(x) \leq \bar{v}_m(x) \leq W(x)$$

per ogni $x \in \Omega$, e v_0, $W \in C(\bar{\Omega})$ con Ω limitato, dunque possiamo assumere che la successione di partenza v_m sia limitata dall'alto e dal basso in Ω. Siccome v_m è convessa in Ω, segue dal Lemma 1.2.4 che, dato $K \subset \Omega$ compatto, v_m è lipschitziana in K con costante di Lipschitz

$$C(K, m) = \sup\{\|p\| : p \in \partial v_m(K)\}.$$

Vogliamo provare che $C(K, m)$ è limitata uniformemente in m. Prendiamo $p \in \partial v_m(x_0)$ con $x_0 \in K$. Per il Lemma 4.3.1,

$$\|p\| \leq \frac{c_1}{\text{dist}(K, \Omega)}$$

e si ha la limitatezza uniforme in m. Allora le v_m sono equicontinue su K e limitate in Ω. Per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste una sottosuccessione v_{m_j} convergente uniformemente sui compatti di Ω ad una funzione w, e dunque $w(y) = U(y)$. Per il Lemma 2.1.5 si ha $w \in \mathcal{F}(\mu, g)$ e quindi $w \leq U$ in Ω.

Quarto passo. Dimostriamo che $MU \geq \mu$ in Ω.

Basta provare che $MU(\{x_i\}) \geq a_i$ per $i = 1, ..., N$. Assumiamo $i = 1$. Per il terzo passo, esiste una successione $v_m \in \mathcal{F}(\mu, g)$, uniformemente limitata, tale che $v_m \to w \in \mathcal{F}(\mu, g)$ uniformemente sui compatti di Ω per $m \to \infty$, con $w(x_1) = U(x_1)$. Siccome $w \in \mathcal{F}(\mu, g)$, $Mw \geq \mu$. Allora $Mw(\{x_1\}) \geq a_1$. Se $p \in \partial w(x_1)$, allora per definizione $w(x) \geq w(x_1) + p \cdot (x - x_1)$ in Ω e quindi $U(x) \geq U(x_1) + p \cdot (x - x_1)$, cioè $p \in \partial U(x_1)$. Dunque

$$MU(\{x_1\}) = |\partial U(\{x_1\})| \geq |\partial w(\{x_1\})| \geq a_1.$$

Quinto passo. Mostriamo ora che $MU \leq \mu$ in Ω.

Proviamo per prima cosa che la misura MU è concentrata sull'insieme $\{x_1, ..., x_N\}$. Sia $x_0 \in \Omega$ con $x_0 \neq x_i$, $i = 1, ..., N$ e scegliamo $r > 0$ tale che $\|x_i - x_0\| > r$ per $i = 1, ..., N$ e $B(x_0, r) \subset \Omega$. Risolviamo $Mv = 0$ in $B(x_0, r)$ con $v = U$ su $\partial B(x_0, r)$, e definiamo il **rialzamento** di U

$$w(x) = \begin{cases} U(x) \text{ se } x \in \Omega,\ \|x - x_0\| \geq r, \\ v(x) \text{ se } \|x - x_0\| \leq r. \end{cases}$$

Vogliamo far vedere che $w \in \mathcal{F}(\mu, g)$. Innanzitutto w è convessa perché, per il quarto passo,

$$MU \geq \mu \geq 0 = Mv$$

in $B(x_0, r)$ e dunque per il principio del confronto $v \geq U$ in $B(x_0, r)$. È chiaro che $w \in C(\bar{\Omega})$. Verifichiamo ora che $Mw \geq \mu$ in Ω.

Sia $E \subset \Omega$ un boreliano. Si ha

$$E = (E \cap B(x_0, r)) \cup (E \cap B(x_0, r)^c),$$

da cui

$$Mw(E) = Mw(E \cap B(x_0, r)) + Mw(E \cap B(x_0, r)^c).$$

Notiamo ora che, se $F \subset B(x_0, r)$, $\partial w(F) = \partial v(F)$ e, se $F \subset B(x_0, r)^c$, $\partial w(F) = \partial U(F)$. Dunque

$$\begin{aligned} Mw(E) &= Mv(E \cap B(x_0, r)) + MU(E \cap B(x_0, r)^c) = \\ &= 0 + MU(E \cap B(x_0, r)^c) \\ &\geq \mu(E \cap B(x_0, r)^c) \geq \mu(E \cap \{x_1, ..., x_N\}) = \mu(E), \end{aligned}$$

per c) e per la definizione di μ. Allora $w \leq U$ e, siccome $w = v \geq U$ in $B(x_0, r)$, otteniamo $v = U$ in $B(x_0, r)$ e allora $MU = Mv = 0$ in $B(x_0, r)$, dove $B(x_0, r) \subset \Omega$ è una qualunque palla tale che $\overline{B(x_0, r)} \cap \{x_1, ..., x_N\} = \varnothing$.

Dunque se $E \subset \Omega$ è un boreliano con $E \cap \{x_1, .., x_N\} = \varnothing$, si ha $MU(E) = 0$ per la regolarità di MU. Allora MU è concentrata sull'insieme $\{x_1, ..., x_N\}$, cioè

$$MU = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i \delta_{x_i},$$

con $\lambda_i \geq 1$, $i = 1, ..., N$.

Affermiamo ora che $\lambda_i = 1$ per ogni i. Per assurdo, supponiamo esista un i per cui $\lambda_i > 1$. Senza perdere di generalità, possiamo assumere $MU = \lambda a \delta_0$ con $\lambda > 1$ e nella palla $B(0, r)$. Si ha $|\partial U(\{0\})| = \lambda a > 0$. Poiché $\partial U(\{0\})$ è convesso, esiste una palla $B(p_0, \varepsilon) \subset \partial U(\{0\})$. Allora $U(x) \geq U(0) + p \cdot x$ per ogni $p \in B(p_0, \varepsilon)$ e $x \in \Omega$. Sia $V(x) = U(x) - p_0 \cdot x$. Si ha allora $V(x) \geq V(0) + (p - p_0) \cdot x$ per ogni $x \in \Omega$ e $p \in B(p_0, \varepsilon)$. Dato $x \in \Omega$, prendiamo

$$p - p_0 = \varepsilon \frac{x}{\|x\|}$$

e dunque

$$V(x) \geq V(0) + \varepsilon \|x\|$$

per ogni $x \in \Omega$. Sia α una costante tale che $V(0) - \alpha$ sia negativo e vicino a zero, e definiamo $\bar{V}(x) = V(x) - \alpha$. $\bar{V}(0)$ è negativo e piccolo in modulo e

$$\bar{V}(x) \geq \bar{V}(0) + \varepsilon \|x\|$$

per ogni $x \in \Omega$. Se $r = -\frac{\bar{V}(0)}{\varepsilon}$,

$$\bar{V}(x) \geq \bar{V}(0) + \varepsilon \|x\| \geq 0$$

per ogni $\|x\| \geq r$. Sia ora

$$w(x) = \begin{cases} \bar{V}(x) \text{ se } \bar{V}(x) \geq 0, \\ \lambda^{-\frac{1}{n}} \bar{V}(x) \text{ se } \bar{V}(x) < 0. \end{cases}$$

Siccome $\lambda > 1$, $\lambda^{-\frac{1}{n}} \bar{V}(x) > \bar{V}(x)$ nell'insieme $\{\bar{V}(x) < 0\}$. Di conseguenza la funzione w è convessa in Ω. Inoltre, sull'insieme $\{\bar{V}(x) < 0\}$, abbiamo

$$\begin{aligned} Mw = M\left(\lambda^{-\frac{1}{n}} \bar{V}\right) &= \frac{1}{\lambda} M\bar{V} = \\ &= \frac{1}{\lambda} MU = a\delta_0. \end{aligned}$$

D'altra parte $w = \bar{V}$ nell'insieme $\{\bar{V} \geq 0\}$, dunque

$$Mw = M\bar{V} = MU \geq \mu.$$

Di conseguenza, $Mw \geq \mu$ in Ω. Questo significa che $w \in \mathcal{F}(\mu, \bar{g})$, dove $\bar{g}$ sono i valori al bordo di

$$\bar{V}(x) = U(x) - p_0 \cdot x - \alpha.$$

Per la definizione di U,

$$\bar{V}(x) = U(x) - p_0 \cdot x - \alpha = \sup\{v(x) - p_0 \cdot x - \alpha : v \in \mathcal{F}(\mu, g)\}.$$

È chiaro che $v'(x) = v(x) - p_0 \cdot x - \alpha \in \mathcal{F}(\mu, \bar{g})$ se e solo se $v(x) \in \mathcal{F}(\mu, g)$; dunque

$$\bar{V}(x) = \sup\{v' : v' \in \mathcal{F}(\mu, \bar{g})\}$$

e siccome $w \in \mathcal{F}(\mu, \bar{g})$, $w(x) \leq \bar{V}(x)$ per ogni $x \in \Omega$. In particolare, $w(0) \leq \bar{V}(0)$ e allora $\lambda^{-\frac{1}{n}} \bar{V}(0) \leq \bar{V}(0)$. Però $\bar{V}(0) < 0$, quindi deve essere $\lambda^{-\frac{1}{n}} \geq 1$, che è in contraddizione con l'assunzione $\lambda > 1$. Questo completa la dimostrazione del quinto passo e dell'intero teorema. □

4.4 Ancora sulle soluzioni di viscosità

In questa sezione proveremo l'inverso della Proposizione 2.2.5. Iniziamo con un lemma.

Lemma 4.4.1. *Sia $f \in C(\Omega)$, $f \geq 0$ e $u \in C(\bar{\Omega})$ una soprasoluzione (rispettivamente sottosoluzione) di viscosità di* $\det D^2 u = f$ *in Ω. Supponiamo che*

$v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *sia una soluzione classica convessa di* $\det D^2 v \geq g$ *(rispettivamente* $\det D^2 v \leq g$*) in* Ω*, con* $g \in C(\Omega)$*. Se* $f < g$ *(rispettivamente* $f > g$*) in* Ω*, allora*

$$\min_{\bar{\Omega}}(u - v) = \min_{\partial\Omega}(u - v)$$

$$(\textit{rispettivamente } \max_{\bar{\Omega}}(u - v) = \max_{\partial\Omega}(u - v))$$

Dimostrazione. È una diretta conseguenza della definizione. Se per assurdo

$$\min_{\bar{\Omega}}(u - x) < \min_{\partial\Omega}(u - v),$$

allora esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $(u-v)(x_0) = \min_{\bar{\Omega}}(u-v)$, cioè $u-v$ ha un minimo locale in x_0. Siccome u è una soprasoluzione di viscosità di $\det D^2 u = f$ in Ω, si ha

$$g(x_0) \leq \det D^2 v(x_0) \leq f(x_0),$$

che è una contraddizione. □

Passiamo ora al risultato principale della sezione: si tratta, come già anticipato, dell'inverso della Proposizione 2.2.5.

Proposizione 4.4.2. *Sia* $f \in C(\bar{\Omega})$ *con* $f > 0$ *in* $\bar{\Omega}$*. Se* u *è una soluzione di viscosità di* $\det D^2 u = f$ *in* Ω*, allora* u *è una soluzione generalizzata di* $Mu = f$ *in* Ω*.*

Dimostrazione. Si ha

$$0 < \lambda \leq f(x) \leq \Lambda$$

in $\bar{\Omega}$. Dato $x_0 \in \Omega$ e $0 < \eta < \frac{\lambda}{2}$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$f(x_0) - \eta < f(x) < f(x_0) + \eta$$

per ogni $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Sia $u_k \in C^\infty(\partial B(x_0, \varepsilon))$ una successione tale che

$$\max_{\partial B(x_0,\varepsilon)} |u(x) - u_k(x)| \leq \frac{1}{k}$$

e v_k^+, v_k^- le soluzioni convesse a

$$\begin{cases} \det D^2 v_k^\pm = f(x_0) \pm \eta \text{ in } B(x_0, \varepsilon), \\ v_k^\pm = u_k \text{ su } \partial B(x_0, \varepsilon). \end{cases}$$

Si ha che $v_k^\pm \in C^2(B(x_0, \varepsilon)) \cap C(\overline{B(x_0, \varepsilon)})$ (per una dimostrazione di questo si veda [GT83, Sezione 17.7] oppure [CY77, Teorema 3, p. 59]) e

$$\det D^2 v_k^- < f(x) < \det D^2 v_k^+ \text{ in } B(x_0, \varepsilon),$$

$$u_k = v_k^{\pm} \text{ su } \partial B(x_0, \varepsilon).$$

Per il Lemma 4.4.1 $u - v_k^+ \geq -\frac{1}{k}$ e $u - v_k^- \leq \frac{1}{k}$ in $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$. Dunque

$$v_k^+(x) - \frac{1}{k} \leq u(x) \leq v_k^-(x) + \frac{1}{k} \text{ se } x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}. \tag{4.13}$$

Per il Teorema 4.3.3, siano $v^{\pm}$ le soluzioni generalizzate di

$$\begin{cases} \det D^2 v^{\pm} = f(x_0) \pm \eta \text{ in } B(x_0, \varepsilon), \\ v^{\pm} = u \text{ su } \partial B(x_0, \varepsilon). \end{cases}$$

Applicando il principio del confronto si ottiene

$$|v^{\pm}(x) - v_k^{\pm}(x)| \leq \frac{1}{k}$$

e, facendo tendere $k \to \infty$ in (4.13),

$$v^+(x) \leq u(x) \leq v^-(x) \text{ per } x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}.$$

Per il Lemma 3.1.1

$$\partial v^-(B(x_0, \varepsilon)) \subset \partial u(B(x_0, \varepsilon)) \subset \partial v^+(B(x_0, \varepsilon)),$$

e dunque

$$\begin{aligned} |B(x_0, \varepsilon)|(f(x_0) - \eta) \leq |\partial u(B(x_0, \varepsilon))| = \\ = Mu(B(x_0, \varepsilon)) \leq |B(x_0, \varepsilon)|(f(x_0) + \eta) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Dunque, se Q è un cubo contenuto in Ω, opportunamente piccolo,

$$C_1|Q| \leq Mu(Q) \leq C_2|Q|, \tag{4.15}$$

dove C_1, C_2 sono costanti positive. Se $F \subset \Omega$ è un insieme di misura zero, dato $\delta > 0$ esiste una successione di cubi disgiunti Q_j, $Q_j \cap Q_k = \varnothing$ se $j \neq k$, $Q_j \subset \Omega$ con $\operatorname{diam}(Q_j)$ tale che valga (4.15), tali che $F \subset \bigcup_j Q_j$ e $\sum_j |Q_j| < \delta$. Applicando ora (4.15) otteniamo

$$Mu(F) < C_2\delta.$$

Questo vuol dire che Mu è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e quindi esiste $h \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tale che

$$Mu(E) = \int_E h(x)dx.$$

Dividendo (4.14) per $|B(x_0, \varepsilon)|$ e facendo tendere ε a 0 otteniamo

$$f(x_0) - \eta \leq h(x_0) \leq f(x_0) + \eta$$

per quasi ogni $x_0 \in \Omega$ e per ogni η sufficientemente piccolo. Quindi Mu ha densità f. $\square$

Capitolo 5

Regolarità

In questo capitolo presenteremo alcuni risultati di regolarità per le soluzioni generalizzate dell'equazione di Monge-Ampère. Non daremo dimostrazioni complete; cercheremo piuttosto di fornire una visione d'insieme sui risultati noti.

5.1 Regolarità $C^{1,\alpha}$

Il primo articolo che abbiamo analizzato è un lavoro di Caffarelli, [Caf91], in cui si studiano le proprietà di regolarità hölderiana delle soluzioni di Aleksandrov dell'equazione di Monge-Ampère.

Caffarelli considera l'equazione

$$Mu = \mu \text{ in } \Omega$$

e definisce un'importante proprietà per il dato μ.

Proprietà di raddoppiamento. Sia u una funzione convessa che risolve $Mu = \mu$ in Ω; sia l una funzione affine e chiamiamo

$$\Omega_l = \{x \in \Omega : (u - l)(x) < 0\}.$$

Allora la misura boreliana μ ha la **proprietà di raddoppiamento** rispetto ad u se esiste $C > 0$ tale che

$$\mu(\Omega_l) \leq C\mu\left(\frac{1}{2}\Omega_l\right)$$

per ogni l, dove $\frac{1}{2}\Omega_l$ è un'omotetia di Ω_l di fattore $\frac{1}{2}$, prendendo come origine il centro di massa di Ω_l.

Teorema 5.1.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e convesso. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione convessa tale che*

$$Mu = \mu \text{ in } \Omega$$

con μ misura boreliana su Ω che soddisfa la proprietà di raddoppiamento. Allora, se l_{x_0} è una funzione affine di supporto per u in x_0, abbiamo che

$$\{x \in \Omega : u(x) = l_{x_0}(x)\} = \{x_0\},$$

oppure che

$$\{x \in \Omega : u(x) = l_{x_0}(x)\}$$

non ha punti estremali in Ω.

Ricordiamo la definizione di punto estremale.

Definizione 5.1.2. *Sia Ω un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$. Il punto $x_0 \in \bar{\Omega}$ è un punto estremale di Ω se x_0 non si può scrivere come combinazione convessa propria di punti di $\bar{\Omega}$.*

Il Teorema 5.1.1 è lo strumento con cui Caffarelli dimostra il seguente risultato.

Teorema 5.1.3 (Regolarità $C^{1,\alpha}$)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e convesso. Se u è una soluzione strettamente convessa di*

$$Mu = \mu \text{ in } \Omega,$$

dove μ ha la proprietà di raddoppiamento, allora u è di classe $C^{1,\alpha}(\Omega)$ per qualche $\alpha > 0$.

Per dimostrare il teorema Caffarelli mostra che il gradiente della funzione convessa sta in certi spazi di tipo Morrey-Campanato.

L'interesse della proprietà di raddoppiamento nasce dalla seguente osservazione.

Nota 5.1.4. Se u è una funzione tale che

$$0 < \lambda_1 \leq Mu \leq \lambda_2 < \infty,$$

allora, posto $Mu = \mu$, μ soddisfa la proprietà di raddoppiamento (si vedano [Gut01, Corollario 3.2.4 e Sezione 3.3]). Quindi, dal teorema di Caffarelli segue che le soluzioni della disequazione di Monge-Ampère

$$0 < \lambda_1 \leq \det D^2 u \leq \lambda_2 < \infty,$$

se strettamente convesse, sono di classe $C^{1,\alpha}(\Omega)$.

Inoltre, se u è una funzione convessa tale che

$$\begin{cases} Mu = \mu \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $0 < \lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_2 < \infty$, il Teorema 5.1.1 assicura che u è strettamente convessa. Se infatti per ogni iperpiano l_{x_0} di supporto ad u si ha che

$$\{x \in \Omega : u(x) = l_{x_0}(x)\} = \{x_0\},$$

allora u è strettamente convessa e non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo per assurdo che esista un punto $\tilde{x}$ tale che

$$A := \{x \in \Omega : u(x) = l_{\tilde{x}}(x)\}$$

non abbia punti estremali in Ω ma non contenga solamente l'elemento $\tilde{x}$. Allora A conterrà almeno un altro elemento, che chiameremo $\tilde{x}'$. L'insieme A è però un insieme convesso: infatti, se una funzione convessa coincide con un iperpiano in due punti distinti, dovrà coincidere con esso anche in ogni punto del segmento che li congiunge. Dunque A contiene il segmento che congiunge $\tilde{x}$ e $\tilde{x}'$; di più, per il Teorema 5.1.1, A dovrà contenere il prolungamento di questo segmento fino al bordo di Ω. Chiamiamo questo segmento $S_{\tilde{x}\tilde{x}'}$. Nei punti dell'insieme $S_{\tilde{x}\tilde{x}'} \cap \partial\Omega$ la funzione u vale 0 per ipotesi; allora, essendo u convessa, si avrà $u \equiv 0$ su tutto il segmento $S_{\tilde{x}\tilde{x}'}$.

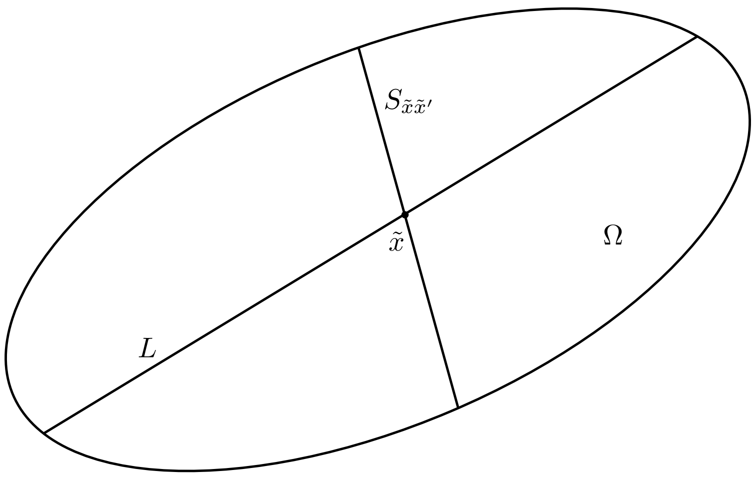

Figura 5.1. Il generico segmento L, che interseca $S_{\tilde{x}\tilde{x}'}$ nel punto $\tilde{x}$.

Prendiamo ora un generico segmento $L \subset \bar{\Omega}$ che contenga il punto $\tilde{x}$, come in Figura 5.1; come prima, nei punti dell'insieme $L \cap \partial\Omega$ la funzione u vale 0 per ipotesi. Inoltre $u(\tilde{x}) = 0$ per quanto dimostrato sopra. Dunque $u \equiv 0$ sul segmento L e allora, data l'arbitrarietà della scelta di L, si ha $u \equiv 0$ in Ω, che è un assurdo perché avevamo supposto che $0 < \lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_2 < \infty$. Dunque deve essere

$$\{x \in \Omega : u(x) = l_{x_0}(x)\} = \{x_0\}$$

per ogni iperpiano di supporto l_{x_0}, cioè u è strettamente convessa.

5.2 Regolarità $W^{2,p}$

Caffarelli, in [Caf90], ha dimostrato una stima L^p per le derivate seconde delle soluzioni dell'equazione di Monge-Ampère. Oltre all'articolo citato, si veda anche [Gut01, Capitolo 6].

L'insieme convesso Ω è **normalizzato** se il suo centro di massa è l'origine e se

$$B\left(0, n^{-\frac{3}{2}}\right) \subset \Omega \subset B(0,1).$$

In un dominio normalizzato vale il seguente teorema.

Teorema 5.2.1. *Siano Ω un insieme convesso normalizzato ed $f \in C(\bar{\Omega})$ con $0 < \lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_2$ in Ω. Supponiamo che $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ sia una soluzione classica per l'equazione $\det D^2 u = f$ in Ω con $u_{|\Omega} = 0$; allora per ogni $0 < p < \infty$ e $0 < \alpha < 1$ abbiamo*

$$\int_{\Omega_\alpha} D_{ee}u(x)^p dx \leq C(n, p, \alpha),$$

per ogni $|e| = 1$, dove $\Omega_\alpha = \{x \in \Omega : u(x) < (1-\alpha)\min_\Omega u\}$. Si intende che $D_{ee}u = e^t(D^2u)e$, dove D^2u è la matrice hessiana di u.

Nella dimostrazione di questo teorema presente in [Gut01] si considera prima il caso $\det D^2 u = 1$; si studiano poi disequazioni del tipo

$$1 - \varepsilon \leq \det D^2 u \leq 1 + \varepsilon$$

per ε piccolo. Si definiscono sezioni e particolari insiemi di sottolivello e si confrontano le funzioni convesse con paraboloidi; stimando le differenze di questi insiemi e procedendo poi per approssimazione, con opportuni teoremi di ricoprimento si ottiene la tesi.

Nota 5.2.2. La stima del teorema precedente si estende anche alle derivate miste D_iD_ju. Nel teorema il vettore e può essere sostituito da un'arbitraria funzione misurabile $e(x) : \Omega_\alpha \to \mathbb{S}^{n-1}$. Per il teorema vale

$$\int_{\Omega_\alpha} \big(e(x)^t D^2u(x)e(x)\big)^p \, dx \leq C,$$

dove $D^2u(x)$ è la matrice hessiana di u nel punto x.

Siano ora $\lambda_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, gli autovalori di $D^2u(x)$ ordinati in modo che $\lambda_1(x) \geq \ldots \geq \lambda_n(x) \geq 0$. Siano poi $e_i : \Omega_\alpha \to \mathbb{S}^{n-1}$, $i = 1, \ldots, n$, funzioni che ad $x \in \Omega_\alpha$ associano vettori unitari tali che

$$e_i(x)^t D^2u(x)e_i(x) = \lambda_i(x);$$

la funzione e_j associa cioè ad x il j-esimo autovettore di $D^2u(x)$. Si ha allora

$$\int_{\Omega_\alpha} \big(e_i(x)^t D^2u(x)e_i(x)\big)^p = \int_{\Omega_\alpha} \lambda_i(x)^p \leq C.$$

Dunque

$$\|\lambda_i(x)\|_{L^p(\Omega_\alpha)} \leq C$$

per $i = 1, \ldots, n$. Consideriamo la norma operatoriale di $D^2u(x)$,

$$\|D^2u(x)\| = \max_{\|w(x)\| \leq 1} \|D^2u(x)w(x)\|.$$

Esiste una mappa $x \mapsto v(x)$, con $\|v(x)\| \leq 1$, tale che $v(x)$ sia il vettore di norma unitaria tale che

$$\|D^2u(x)\| = \|D^2u(x)v(x)\|.$$

Sia Q una trasformazione che diagonalizza $D^2u(x)$. Allora si ha

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega_\alpha} \|D^2u(x)\|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\Omega_\alpha} \|D^2u(x)v(x)\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \\
&= \left(\int_{\Omega_\alpha} \|Q^t(x)D^2u(x)Q(x)v(x)\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\Omega_\alpha} \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i(x)v_i(x)\right\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega_\alpha} \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i(x)|\|v_i(x)\|dx\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega_\alpha} \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i(x)|\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega_\alpha} \sum_{i=1}^n |\lambda_i(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Ora ricordiamo che, data una matrice A, si ha l'equivalenza di norme

$$\|A\| \cong \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|$$

e dunque

$$|D_iD_ju(x)| \leq c\|D^2u(x)\|$$

e quindi anche

$$|D_iD_ju(x)|^p \leq c'\|D^2u(x)\|^p.$$

Allora, grazie a (5.1), possiamo concludere

$$\left(\int_{\Omega_\alpha} (D_iD_ju(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c'' \left(\int_{\Omega_\alpha} \|D^2u(x)\|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Nota 5.2.3. Nel Teorema 5.2.1 abbiamo preso in considerazione le soluzioni classiche. Lo stesso risultato è valido per le soluzioni generalizzate, modificando opportunamente il tipo di derivate considerato. Studiamo il problema

$$\begin{cases} Mu = f \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $f \in C(\bar{\Omega})$ e $0 < \lambda_1 \leq f \leq \lambda_2 < \infty$. Possiamo regolarizzare f tramite convoluzione con funzioni $C_c^\infty(\Omega)$ ed ottenere una successione $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che $f_\varepsilon \to f$ al tendere di ε a 0, dove la convergenza è uniforme sui compatti di Ω. Sia $\{\Omega_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<1}$ una famiglia di aperti contenuti in Ω con frontiera C^∞ e tali che

$$\bigcup_{0<\varepsilon<1} \Omega_\varepsilon = \Omega.$$

Consideriamo un compatto $K_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$; sappiamo risolvere

$$\begin{cases} Mu_\varepsilon = f_\varepsilon \text{ in } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 \text{ su } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Le soluzioni u_ε sono soluzioni classiche per [CY77, Teorema 3, p. 59] e dunque possiamo applicare il Teorema 5.2.1 ed ottenere

$$\int_{K_\varepsilon} |D_i D_j u_\varepsilon|^p dx \leq C,$$

dove C è la costante del teorema e non dipende da ε. Dunque $u_\varepsilon \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ e si ha

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,p}(K_\varepsilon)} \leq C < \infty$$

per ogni ε. Allora esiste una sottosuccessione di u_ε debolmente convergente in $W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ e si ha quindi

$$D_i D_j u_{\varepsilon_h} \rightharpoonup g_{ij} \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$$

e la convergenza debole è in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Per il Teorema 5.1.1 (in particolare per la Nota 5.1.4) e per il Teorema 5.1.3, $u \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$; consideriamo

$$\int_\Omega D_i u D_j \varphi \, dx$$

per $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Possiamo integrare su tutto Ω perché φ è a supporto compatto. Con un adattamento elementare del Lemma 4.3.2 si prova che esiste una successione ε_h che tende a 0 tale che

$$u_{\varepsilon_h} \longrightarrow u$$

uniformemente sui compatti $K \subset \Omega$. Vale

$$\begin{aligned}\int_\Omega D_i u D_j \varphi \, dx &= -\int_\Omega u D_i D_j \varphi \, dx = \\ &= -\lim_{\varepsilon_h \to 0} \int_\Omega u_{\varepsilon_h} D_i D_j \varphi \, dx = \\ &= -\lim_{\varepsilon_h \to 0} \int_\Omega D_i D_j u_{\varepsilon_h} \varphi \, dx = \\ &= -\int_\Omega g_{ij} \varphi \, dx,\end{aligned}$$

e $g_{ij} \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Siccome la funzione φ è generica, abbiamo appena dimostrato che

$$\int_\Omega D_i u D_j \varphi \, dx = -\int_\Omega g_{ij} \varphi \, dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, cioè

$$g_{ij} = D_j D_i u$$

nel senso delle derivate deboli. Quindi $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Per la semicontinuità inferiore della norma negli spazi di Banach allora vale, se $\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h = 0$,

$$\int_{\Omega_\alpha} |D_i D_j u|^p \, dx \le \liminf_{h\to\infty} \int_{\Omega_\alpha} |D_i D_j u_{\varepsilon_h}|^p \, dx \le C(n, p, \alpha).$$

Dunque il Teorema 5.2.1 vale anche nel caso delle soluzioni generalizzate, se si considerano le derivate deboli.

5.3 Controesempi alla regolarità

Presentiamo alcuni esempi, che si possono trovare in [Wan95], di soluzione all'equazione

$$Mu = f \text{ in } \Omega$$

con Ω aperto convesso e normalizzato.

Esempio 5.3.1. In questo esempio mostriamo una funzione che risolve l'equazione $Mu = f$ in Ω, con

$$0 \le f \le C$$

per una qualche costante $C \ge 0$, tale che $u \notin C^{1,\alpha}(\Omega)$ per nessun $\alpha > 0$. L'ipotesi che Mu sia strettamente positiva è dunque fondamentale per avere la regolarità $C^{1,\alpha}$.

Sia

$$u(x,y) = \begin{cases} \varphi(x,y) = 4x^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} + x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{|x|}} y^2 & \text{se } |y| < h(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}, \\ \psi(x,y) = 3g(x)x^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} + 2|y| \log^{-2}|y| & \text{se } |y| \geq h(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}. \end{cases}$$

Allora, per un'opportuna scelta di g ed h e per un opportuno r, si ha che $u \in C^1(B(0,r))$, u è strettamente convessa in $B(0,r)$ e $0 \leq Mu \leq C < \infty$ in $B(0,r)$, ma $u \notin C^{1,\alpha}(B(0,r))$ per nessun $\alpha > 0$.

Dimostrazione. Siano g ed h funzioni pari tali che $\varphi = \psi$ e $D_y\varphi = D_y\psi$ sull'insieme $S = \{(x,y) : |y| = h(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\}$ (il che ci assicura automaticamente che $D_x\varphi = D_x\psi$ su S). Le condizioni che g ed h devono soddisfare sono

$$4 + h^2 = 3g + 2h(1 - |x| \log h)^{-2} \tag{5.2}$$

e

$$h = (1 - |x| \log h)^{-2} + 2|x|(1 - |x| \log h)^{-3}.$$

Per ottenere la funzione pari h ci poniamo nel semispazio in cui $x > 0$, fissiamo $h(0) = 1$ e deriviamo

$$h = (1 - x \log h)^{-2} + 2x(1 - x \log h)^{-3}.$$

Otteniamo, per il teorema di esistenza e unicità per il problema di Dirichlet, una soluzione localmente analitica che prolunghiamo per parità. Da (5.2), ponendo $g(0) = 1$, otteniamo allo stesso modo g, analitica in un intervallo $[0,\delta]$, per δ opportuno. In realtà queste due funzioni non sono necessariamente derivabili in 0, però questo non è importante: nelle derivate di u le derivate di g saranno sempre moltiplicate per un fattore esponenziale che tende a 0 per x che tende a 0.

Data la regolarità di g e di h, si verifica che, per un'opportuna scelta di r,

$$0 \leq M\varphi \leq C$$

in $R_1 = B(0,r) \cap \{(x,y) : |y| < h(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\}$ e che

$$0 \leq M\psi \leq C$$

in $R_2 = B(0,r) \cap \{(x,y) : |y| > h(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\}$, con C che dipende da g e da h. Si noti che, come nell'esempio precedente, il contributo del raccordo S alla misura di Monge-Ampère è nullo. Si ha dunque

$$0 \leq Mu \leq C$$

in $B(0,r)$.

In modo elementare si verifica che $u \in C^1(B(0,r))$ e che φ e ψ sono strettamente convesse.

Allora anche u è strettamente convessa; prendiamo infatti un generico segmento L che congiunge due punti $P_1 \in R_1$ e $P_2 \in R_2$ come in Figura 5.2. Consideriamo la funzione u lungo quel segmento: otteniamo una funzione reale di variabile reale. Se studiamo la sua derivata prima, essa cresce strettamente nella regione R_1 per la stretta convessità di φ, e cresce strettamente anche nella regione R_2 per la stretta convessità di ψ. Il fatto che sul raccordo ci sia l'uguaglianza dei differenziali di φ e ψ ci assicura che lungo il segmento scelto la funzione u è strettamente convessa. Dunque, vista la genericità del segmento L, segue che u è strettamente convessa.

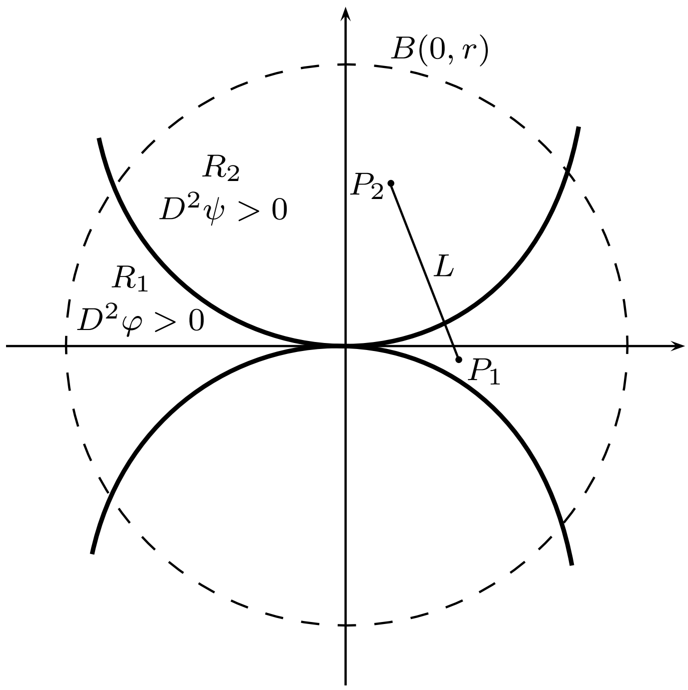

Figura 5.2. Il segmento L che congiunge i punti $P_1 \in R_1$ e $P_2 \in R_2$.

Verifichiamo ora che $u \notin C^{1,\alpha}(B(0,r))$ per ogni $0 < \alpha \leq 1$. Consideriamo

$$D_y\psi = 2\log^{-3} y(\log y - 2);$$

si ha che

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0} D_y\psi(0,y) &= \lim_{y\to 0} 2\frac{\log y - 2}{(\log y)^3} = \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{2}{3(\log y)^2} = 0.\end{aligned}$$

Ci chiediamo se esistano $C > 0$ ed $\alpha \in (0, 1]$ tali che

$$|D_y\psi(0, y) - D_y\psi(0, 0)| \leq C|y - 0|^\alpha,$$

cioè

$$|D_y\psi(0, y)| \leq C|y|^\alpha, \tag{5.3}$$

per ogni $y \in (0, r)$. La disuguaglianza (5.3) diventa

$$2\left|\frac{\log y - 2}{(\log y)^3}\right| \leq C|y|^\alpha,$$

cioè

$$\left|\frac{\log y - 2}{y^\alpha(\log y)^3}\right| \leq \frac{C}{2}.$$

Si ha però che

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{\log y - 2}{y^\alpha(\log y)^3} = +\infty$$

e questo basta per dimostrare che $D_y\psi$ non è hölderiana. Dunque

$$u \notin C^{1,\alpha}(B(0, r))$$

per nessun $\alpha > 0$. □

Esempio 5.3.2. In questo esempio mostriamo una soluzione u dell'equazione $Mu = f$ in Ω, con f positiva ma non continua, che non sta in $W^{2,p}$. L'ipotesi di continuità fino al bordo della misura Mu nel teorema di regolarità $W^{2,p}$, Teorema 5.2.1, è dunque essenziale.

Sia

$$u(x, y) = \begin{cases} x^4 + \dfrac{3}{2}\dfrac{y^2}{x^2} \text{ se } |y| < |x|^3, \\ \dfrac{1}{2}x^2y^{\frac{2}{3}} + 2y^{\frac{4}{3}} \text{ se } |y| \geq |x|^3 \end{cases}$$

e sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u(x, y) < 1\}$. Allora

$$\frac{1}{3} \leq Mu \leq 36$$

in Ω, ma u non è in $W^{2,p}$ per $p \geq 2$.

Dimostrazione. Calcolando le derivate si prova che $u \in C^1(\bar{\Omega})$ e che u è strettamente convessa in Ω. Inoltre

$$\det D^2 u = \begin{cases} 36 - 9\dfrac{y^2}{x^6} \text{ se } |y| < |x|^3, \\ \dfrac{8}{9} - \dfrac{5}{9}x^2 y^{-\frac{2}{3}} \text{ se } |y| \geq |x|^3. \end{cases}$$

Si ha quindi che

$$27 \leq Mu \leq 36 \text{ se } |y| < |x|^3$$

e che

$$\frac{1}{3} \leq Mu \leq \frac{8}{9} \text{ se } |y| \geq |x|^3.$$

Notiamo che in ogni punto del raccordo $S = \{(x,y) : |y| = |x|^3\}$ c'è un unico iperpiano di supporto, quindi possiamo trascurare i punti di S ed affermare che

$$Mu(E) = \int_E D^2 u(x)\ dx$$

per ogni boreliano E. Chiamiamo $R_1 = \{(x,y) : |y| < |x|^3\} \cap \Omega$ ed $R_2 = \{(x,y) : |y| \geq |x|^3\} \cap \Omega$. Si ha che, per ogni boreliano E,

$$\begin{aligned} Mu(E) &= Mu\left((E \cap R_1) \cup (E \cap R_2)\right) = \\ &= Mu(E \cap R_1) + Mu(E \cap R_2) \\ &\leq 36|E \cap R_1| + \frac{8}{9}|E \cap R_2| \\ &\leq 36|E|, \end{aligned}$$

dove, al solito, $|E|$ indica la misura di Lebesgue dell'insieme E. Con calcoli del tutto analoghi si riesce a dimostrare che

$$Mu(E) \geq \frac{1}{3}|E|,$$

dunque

$$\frac{1}{3} \leq Mu \leq 36.$$

Mostriamo però che $u \notin W^{2,p}$ per $p \geq 2$. Ci basta provare ad esempio che $D_y D_y u \in L^p$ se e solo se $p < 2$. La derivata è

$$D_y D_y u(x,y) = 3\frac{1}{x^2}.$$

Consideriamo ora un sottoinsieme D di Ω definito in questo modo:

$$D = \{(x,y) : |y| < x^3 < 1\} \cap \Omega$$

e dimostriamo che $D_y D_y u \notin L^p(D)$ per $p \geq 2$. Si ha infatti

$$3\int_D \left(\frac{1}{x^2}\right)^p dxdy = 3\int_0^1 x^{-2p}\int_{-x^3}^{x^3} dy\ dx =$$
$$= 3\int_0^1 \frac{1}{x^{2p}} 2x^3 dx =$$
$$= 6\int_0^1 \frac{1}{x^{2p-3}} dx$$

e tale quantità è finita se e solo se $2p - 3 < 1$, cioè se e solo se $p < 2$. $\square$

Nota 5.3.3. In modo analogo si dimostra che la funzione

$$u(x,y) = \begin{cases} x^\alpha + \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha(\alpha-2)} y^2 x^{2-\alpha} \text{ se } |y| < |x|^{\alpha-1}, \\ \dfrac{1}{2\alpha} x^2 y^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} + \dfrac{4\alpha - 5}{2(\alpha-2)} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \text{ se } |y| \geq |x|^{\alpha-1}, \end{cases}$$

è strettamente convessa e si ha

$$0 < C_1(\alpha) \leq Mu \leq C_2(\alpha) < \infty,$$

ma $u \notin W^{2,p}$ per $p > \frac{\alpha}{\alpha-2}$. Dunque esistono soluzioni di $Mu = f$ che non stanno in $W^{2,p}$ per p arbitrariamente vicino ad 1.

Bibliografia

[Caf90] L. A. Caffarelli. Interior $W^{2,p}$ estimates for solutions of the Monge-Ampère equation. *Ann. of Math.*, 131:135–150, 1990.

[Caf91] L. A. Caffarelli. Some regularity properties of solutions of Monge-Ampère equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44:965–969, 1991.

[CY77] S.-Y. Cheng e S.-T. Yau. On regularity of the Monge-Ampère equation $\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) = f(x,u)$. *Comm. Pure Appl. Math.*, XXX:41–68, 1977.

[EG92] L. C. Evans e R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press, 1992.

[GT83] D. Gilbarg e N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer Verlag, 1983.

[Gut01] C. E. Gutiérrez. *The Monge-Ampère equation.* Birkhäuser, 2001.

[Mil97] J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint.* Princeton University Press, 1997.

[Sch93] R. Schneider. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its applications.* Cambridge University Press, 1993.

[Wan95] X.-J. Wang. Some counterexamples to the regularity of Monge-Ampère equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123(3):841–845, 1995.