UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Distribuzione dei numeri primi e funzione Zeta

Candidato:
Domenico Valloni
Matricola:
1031233

Relatore:
Prof. Roberto Monti

25 luglio 2014

Introduzione

Questa tesi si sviluppa in due parti: la prima si propone di fornire al lettore una delle ultime dimostrazioni del teorema dei numeri primi (PNT) (si veda il libro di Newman [7]), mentre la seconda ha come fine quello di investigare, seguendo sia i classici come il Titchmarsh [12] o l'Ingham [6] sia i più moderni come il Davenport [2], il collegamento tra la funzione Zeta di Riemann e la distribuzione dei primi. Queste due parti non sono trattate separatamente, in quanto le sviluppiamo insieme; cercheremo infatti di portare avanti un discorso unico e completo.

Inizieremo presentando alcuni fatti generali riguardo le serie di Dirichlet, così da poter avere il minimo di strumenti necessari per manipolare la funzione ζ. Verrà naturale introdurre le funzioni di Chebyshev, e vedremo una formulazione equivalente del PNT per mezzo di queste. Seguendo Riemann, estenderemo la ζ a tutto il piano, dimostreremo la sua equazione funzionale e introdurremo la funzione intera ξ, che ci sarà utile per dimostrare proprietà della ζ stessa. Dando una prima occhiata alla sua distribzione degli zeri, si nota che la funzione ζ ha due 'tipi' di zeri: quelli banali $(-2,\ -4,\ -6,\ldots)$ e quelli non banali, contenuti nella striscia $0 \leq Re(s) \leq 1$.

Si mostra quindi che la retta $Re(s) = 1$ è priva di zeri, e che questo fatto è equivalente al PNT. La conoscenza di una retta priva di zeri ci ha condotto dunque ad una stima asintotica per la funzione $\pi(n)$, e quindi si ha l'impressione che la distribuzione degli zeri influenzi la distribuzione dei primi, e viceversa. In particolare sono le regioni prive di zeri a dare informazioni al riguardo.

In seguito, utilizzando dei risultati di analisi complessa sulle funzioni intere, ricaveremo un prodotto infinito sia per la ζ che per la ξ che ci fornirà l'esistenza e l'infinità di zeri non banali, e mostreremo (al modo di de la Valléè Poussin) l'esistenza di una regione senza zeri subito a sinistra della retta $Re(s) = 1$, il cui spessore decresce come $\ln^{-1}(t)$, dove t è la parte immaginaria di s.

Grazie a queste conoscenze, saremo in grado di dimostrare la formula di Riemann-Von Mangoldt: se chiamiamo con $N(T)$ il numero di zeri non banali con parte immaginaria compresa tra 0 e T, si ha per $T \to \infty$:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T).$$

La parte finale della tesì espliciterà in modo finalmente chiaro, ovvero mediante una formula, come gli zeri non banali di ζ giochino un ruolo fondamentale per lo studio della $\pi(n)$. Dimostreremo infatti una cosiddetta 'formula esatta' : se chiamiamo con $\psi_0(x)$ una variante della seconda funzione di Chebyshev (si veda (13.32)), avremo:

$$\psi_0(x) = x - {\sum_\rho}' \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \ln(1 - x^{-2}),$$

dove la somma è estesa a tutti gli zeri non banali della ζ, e l'apice in alto significa che va intesa come un valore principale. Grazie a questa identità saremo in grado, nell'ultima sezione, sia di trovare una formula asintotica per $\pi(n)$ con un resto (e ci riusciremo grazie all'esistenza della regione priva di zeri dimostrata in precedenza) e sia di spiegare l'ipotesi di Riemann.

Indice

1 Alcune definizioni e fatti elementari

In questa sezione introdurremo le prime definizioni e teoremi che ci permetteranno poi di procedere, in particolare useremo le notazioni:

- $\sum_{p\le x} f(p)$ indica la somma estesa a tutti i primi minori od uguali ad x.
- $\sum_{p^n\le x} f(p^n)$ indica la somma estesa a tutte le potenze dei primi minori od uguali ad x.
- Le stesse convenzioni varranno per i prodotti.
- Un generico numero complesso verrà indicato come $s = \sigma + it$ con σ e t reali.
- Il suo argomento verrà denotato con arg e sarà sempre considerato nell'intervallo $(-\pi, \pi]$.
- Diremo che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ è moltiplicativa se $f(nm) = f(n)f(m)$ ogni qualvolta $\gcd(n, m) = 1$.
- Completamente moltiplicativa se $f(nm) = f(n)f(m)$ per n, m qualunque.
- Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, scriveremo $f \sim g$ se vale $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Teorema 1.1. *(Prodotto di Eulero) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una funzione moltiplicatica tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} (1 + f(p) + f(p^2) + ...). \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Notiamo che $(1 + f(p) + f(p^2) + ...)$ è una serie assolutamente convergente. Ricordiamo anche che un numero finito di serie assolutamente convergenti possono essere moltiplicate e i termini possono essere riarrangiati a piacimento.
Sia P un primo. Chiamiamo

$$\Pi_P := \Pi_{p\le P}(1 + f(p) + f(p^2) + ...) = 1 + f(n_1) + f(n_2) + f(n_3) + ...$$

Dove abbiamo posto $n_1,\ n_2,\ n_3, ...$ la successione crescente dei numeri naturali i cui fattori primi siano tutti $\le P$

$$|\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \Pi_P| \le \sum_{n=P+1}^{\infty} |f(n)| \to 0 \text{ per } P \to \infty,$$

per la convergenza assoluta della serie.

□

Sia $\mathfrak{A} := \{f : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{C}\}$. $(\mathfrak{A}, +, *)$ è un anello con unità, dove l'addizione è la somma puntuale di funzioni e $*$ è la convoluzione di Dirichlet:

$$(f * g)(n) := \sum_{ab=n} f(a)g(b)$$

.

Indicheremo con $\varepsilon(n)$ l'unità moltiplicativa di questo anello: $\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$ e con $1(n)$ la funzione costantemente uguale a 1.
Si possono dimostrare i seguenti fatti (alcuni dei quali abbiamo già dichiarato implicitamente)

Teorema 1.2.
- *La convoluzione è un'operazione commutativa e associativa;*
- *f è invertibile in $\mathfrak{A} \Leftrightarrow f(1) \neq 0$;*
- *Se f e g sono moltiplicative, allora anche $f * g$ è moltiplicativa;*
- *Se $h = g * f$, si ha $\sum_{n \leq x} h(n) = \sum_{ab \leq x} f(a)g(b)$;*
- *$1 * \mu = \varepsilon$ dove μ è la funzione di Moebius:*
  se $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_m^{\alpha_m}$ è la sua scomposizione in primi con $\alpha_i > 0$ allora:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \textit{se qualche } \alpha_i > 1 \\ (-1)^m & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

- *Vale $\sum_{ab \leq x} \mu(a) = 1$ per $x \geq 1$.*

2 Breve introduzione alle serie di Dirichlet

Una serie di Dirichlet è una qualunque serie (anche formale) del tipo:

$$D(f, s) := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$$

con $f \in \mathfrak{A}$ e s un numero complesso. Indicheremo con $(\mathfrak{D}, +, \cdot)$ l'anello delle serie di Dirichlet con somma e prodotto usuali. Enunciamo il seguente teorema:

Teorema 2.1. *La seguente funzione*

$$\begin{aligned} D(\cdot, s) \colon (\mathfrak{A}, +, *) &\to (\mathfrak{D}, +, \cdot) \\ f &\mapsto D(f, s) \end{aligned}$$

è un morfismo di anelli.

Dimostrazione. Verifichiamo l'unica parte non banale:

$$D(f,s)\cdot D(g,s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s} = \sum_{n,m=1}^{\infty} f(n)g(m)(nm)^{-s}$$

Raggruppando i termini ponendo $mn = h$, otteniamo che h^{-s} ha per coefficiente $\sum_{ab=h} f(a)g(b)$, ovvero

$$D(f,s)\cdot D(g,s) = \sum_{h=1}^{\infty} (f*g)(h)n^{-s} = D(f*g,s).$$

□

Tutti queste manipolazioni dei coefficienti valgono formalmente, ma è chiaro che se $D(f,s)$ e $D(g,s)$ sono assolutamenti convergenti in un qualche $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, allora vale (come prodotto di funzioni olomorfe)

$$D(f,s)\cdot D(g,s) = D(f*g,s)$$

Ora dimostreremo alcuni teoremi sulla convergenza delle serie di Dirichlet e sul fatto che esse definiscono funzioni olomorfe.

Teorema 2.2. *Sia $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ fissato. Se $D(f,s)$ converge per qualche $s_0 = \sigma_0 + it_0$, allora converge uniformemente nella regione $\{s \in \mathbb{C}$ t.c. $|arg(s-s_0)| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\}$*

Dimostrazione. Ricordiamo la formula Abel:

$$\sum_{v=n}^{m} f(v)g(v) = \sum_{v=n}^{m-1} F(n,v)\{g(v)-g(v+1)\} + F(n,m)g(m)$$

Dove $F(n,v) = \sum_{h=n}^{v} f(h)$. Ora, senza perdere di generalità, possiamo supporre $s_0 = 0$, dunque:

$$\sum_{v=n}^{m} f(v)v^{-s} = \sum_{v=n}^{m-1} F(n,v)\left\{\frac{1}{v^s} - \frac{1}{(v+1)^s}\right\} + F(n,m)m^{-s}$$

.
Dalle ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che

$$|F(n,m)| < \varepsilon \cdot \cos(\alpha).$$

Per ogni $m \geq n \geq M$. Inoltre

$$\left|\frac{1}{v^s} - \frac{1}{(v+1)^s}\right| = \left|\int_v^{v+1} \frac{s}{x^{1+s}}dx\right| \leq \int_v^{v+1} \left|\frac{s}{x^{1+s}}\right|dx = \int_v^{v+1} \frac{|s|}{x^{1+\sigma}}dx =$$

$$= \frac{|s|}{\sigma}\left[\frac{1}{v^\sigma} - \frac{1}{(v+1)^\sigma}\right].$$

Nella regione dell'enunciato, abbiamo $\frac{|s|}{\sigma} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)}$, dunque mettendo assieme i vari risultati

$$\left| \sum_{v=n}^{m} f(v) v^{-s} \right| \leq \sum_{v=n}^{m-1} |F(n,v)| \left| \frac{1}{v^s} - \frac{1}{(v+1)^s} \right| + |F(n,m)||m^{-s}| \leq$$

$$\epsilon \left(\sum_{v=n}^{m} \frac{cos(\alpha)}{cos(\alpha)} \left\{ \frac{1}{v^\sigma} - \frac{1}{(v+1)^\sigma} \right\} + \frac{1}{m^\sigma} \right) = \varepsilon \frac{1}{n^\sigma} \leq \varepsilon$$

□

Questo teorema implica immediatamente:

Corollario 2.3. *Se $D(f,s)$ converge per qualche $s_0 = \sigma_0 + it_0$, allora converge per ogni $\sigma + it$ con $\sigma > \sigma_0$*

Dunque una serie di Dirichlet può non convergere mai, convergere sempre, o convergere per alcuni valori di s. Nell'ultimo caso possiamo trovare un numero reale σ_0 tale che si ha la convergenza per ogni s con $Re(s) > \sigma_0$ e la non convergenza per ogni s con $Re(s) < \sigma_0$. Il numero σ_0 è detto *ascissa di convergenza*. Allo stesso modo, per studiare la convergenza assoluta di $D(f,s)$, possiamo applicare i risultati precedenti a $D(|f|,s)$ e troveremo analogamente un σ_0' detto *ascissa di convergenza assoluta*

Teorema 2.4. *Sia D una qualunque regione limitata di $\mathbb{C}$ i cui punti s soddisfino $\sigma \geq \sigma_0 + \delta$ per un qualche $\delta > 0$ fissato. Allora $D(f,s)$ converge uniformemente in D e ivi definisce una funzione analitica. Inoltre*

$$-D(f,s)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot \ln(n)}{n^s}$$

Dimostrazione. La convergenza uniforme segue dal Teorema 0.2.2. Il fatto che definisca una funzione analitica e che si possa scambiare derivata con sommatoria è una conseguenza dei teoremi di Weiestrass (si guardi ad esempio [1] capitolo 5). □

Proposizione 2.5. *Se $f \geq 0$, allora $D(f,s)$ ha un polo in $s = \sigma_0$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $\sigma_0' = \sigma_0 = 0$. Supponiamo dunque che σ_0 sia un non-polo per $D(f,s)$. In $s = 1$ la sua serie di Laurent ha raggio di convergenza $r > 1$ e quindi possiamo trovare un $s < 0$ per cui vale:

$$D(f,s) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(s-1)^v}{v!} D^{(v)}(f,1) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(1-s)^v}{v!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot \ln^v(n)}{n}.$$

Tutti i termini di questa doppia serie sono positivi, possiamo cambiare dunque l'ordine di somma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(1-s)^v \ln^v(n)}{v!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Assurdo perché avevamo supposto $\sigma_0 = 0 > s$. □

3 La funzione zeta di Riemann e alcune formule fondamentali

Si definisce la funzione Zeta come:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = D(1,s).$$

Come serie di Dirichlet, la sua ascissa di convergenza e di convergenza assoluta coincidono e valgono $\sigma_0 = 1$. Applicando la formula prodotto di Eulero, si veda Teorema 1.1, (per $Re(s) > 1$) otteniamo subito

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}. \tag{3.2}$$

Grazie a questa identità, sapendo che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, Eulero mostrò per la prima volta, con metodi analitici, l'infinità dei numeri primi. Altre funzioni correlate alla Zeta, di cui faremo uso per dimostrare il Teorema dei Numeri Primi, sono: $\zeta(s)^2$ e $\zeta(s)^{-1}$. Otteniamo la loro espressione come serie di Dirichlet:

$$\zeta(s)^2 = D(1,s) \cdot D(1,s) = D(1*1,s)$$
$$(1*1)(n) = \sum_{ab=n} 1 := \tau(n)$$

Dove $\tau(n)$ è la *funzione dei divisori*. In particolare è facile mostrare che se $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_m^{\alpha_m}$ è la scomposizione di n in primi, allora $\tau(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_m+1)$.
Per poter invertire (algebricamente) $\zeta(s)$ possiamo fare questo ragionamento:

$$D(\mu,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

è una serie di Dirichlet, e per $\sigma > 1$

$$|D(\mu,s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\mu(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \zeta(\sigma).$$

Dunque la sua ascissa di convergenza assoluta è ≤ 1, e possiamo considerare:

$$D(\mu,s) \cdot \zeta(s) = D(\mu * 1, s) = D(\varepsilon, s) = 1 \quad \sigma > 1. \tag{3.3}$$

Ovvero $\zeta(s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ e $\zeta(s) \neq 0$ per $\sigma > 1$.
$Re(s) > 1$ è un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{C}$, e $\zeta(s)$ è ivi una funzione olomorfa mai nulla. Dunque in tale regione è possibile definire in modo unico la mappa olomorfa $\ln \zeta(s)$, con la condizione che per s reale anche $\ln \zeta(s)$ sia reale. Usando la formula 3.2 otteniamo:

$$\ln \zeta(s) = -\sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{sn}}. \tag{3.4}$$

Studiamo la convergenza assoluta dell'ultima serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p}\left|\frac{1}{np^{sn}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{1}{np^{\sigma n}};$$

$$\sum_{p}\frac{1}{p^{\sigma n}} \leq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\sigma n}} - 1 \leq \int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\sigma n}} = \frac{1}{\sigma n - 1}.$$

E quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p}\left|\frac{1}{np^{sn}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\sigma n - 1)} < \infty.$$

Per il teorema di Tonelli, possiamo dunque scambiare i due simboli di serie. Sia ora K un compatto in $Re(s) > 1$, e $\sigma' = \min\{Re(s)|s \in K\}$. Studiamo la convergenza totale della serie in K. Da quanto detto prima, sapendo che $\sigma' > 1$ e che $|p^{sm}| > |p^{\sigma' m}|$ per ogni $s \in K$, abbiamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p}\left|\frac{1}{np^{sn}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\sigma' n - 1)} < \infty$$

e dunque si ha la convergenza totale, e di conseguenza quella uniforme. Per i teoremi di Weiestrass possiamo concludere che

$$\sum_{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^{sn}}$$

è una rappresentazione valida per $\ln\zeta(s)$ se $\sigma > 1$ e che possiamo scambiare il simbolo di derivata con il simbolo di sommatoria:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\ln\zeta(s)' = \sum_{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(p)}{p^{sn}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{s}}. \tag{3.5}$$

Dove $\Lambda(n)$ è $\ln(p)$ se n è una potenza positiva di un primo p, e 0 altrimenti. In particolare $\ln\zeta(s)'$ è a sua volta una serie di Dirichlet, e $\Lambda(n)$ è chiamata *funzione di Von Mangholt*.

4 Le funzioni di Chebyshev

Come abbiamo visto da questo breve studio sulla Zeta di Riemann, ci siamo immediatamente imbattuti nella funzione $\Lambda(n)$. Dato il suo carattere *irregolare* si è tentati di studiare il comportamento di $\sum_{n\leq x}\Lambda(n)$ Questa è la seconda funzione di Chebyshev $\psi(x)$. Come vedremo a breve, essa costituisce un *ponte* tra il nostro problema originario riguardo $\pi(x)$ (ovvero di studiarne l'andamento asintotico) e il punto di vista analitico che deriva dalla $\zeta(s)$. Innanzi tutto introduciamo la prima funzione *ausiliaria* di Chebyschev ϑ ponendo

$$\vartheta(x) := \sum_{p\leq x}\ln(p).$$

Essa ci sarà utile per dimostrare il prossimo teorema. Se scriviamo anche $\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \ln(p)$ otteniamo subito:

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{p^2 \leq x} \ln p + \sum_{p^3 \leq x} \ln p + \ldots = \vartheta(x) + \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + ...$$

Se invece notiamo che il termine $\ln(p)$ compare in $\psi(x)$ esattamente $[\log_p(x)]$ volte, abbiamo

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\ln(x)}{\ln(p)}\right] \ln(p).$$

Mettendo insieme queste considerazioni

$$\vartheta(x) \leq \psi(x) \leq \sum_{p \leq x} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p = \pi(x) \ln x. \tag{4.6}$$

Teorema 4.1. *Siano:*

$$\Lambda_1 = \limsup_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \quad \Lambda_2 = \limsup_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} \quad \Lambda_3 = \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \cdot \ln x}{x}$$

$$\lambda_1 = \liminf_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \quad \lambda_2 = \liminf_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} \quad \lambda_3 = \liminf_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \cdot \ln(x)}{x}$$

Allora si ha: $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$ *e* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza 4.6 abbiamo:

$$\vartheta(x) \leq \psi(x) \leq \pi(x) \ln x.$$

Per cui $\Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \Lambda_3$ e $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. Sia ora $0 < \alpha < 1$. Allora:

$$\vartheta(x) \geq \sum_{x^\alpha < p \leq x} \ln p \geq \{\pi(x) - \pi(x^\alpha)\} \ln x^\alpha.$$

Siccome $\pi(x^\alpha) \leq x^\alpha$, $\{\pi(x) - \pi(x^\alpha)\} \ln x^\alpha \geq \{\pi(x) - x^\alpha\} \ln x^\alpha = \alpha \cdot \{\pi(x) - x^\alpha\} \ln x$. Quindi

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \geq \alpha \cdot \left(\frac{\pi(x) \cdot \ln x}{x} - \frac{\ln x}{x^{1-\alpha}}\right).$$

Prendendo i limiti superiori e inferiori abbiamo infine $\Lambda_1 \geq \alpha \cdot \Lambda_3$ e $\lambda_1 \geq \alpha \cdot \lambda_3$. Data l'arbitrarietà di $0 < \alpha < 1$ si conclude. $\square$

Da questo segue in particolare che

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \Leftrightarrow \quad \psi(x) \sim x.$$

5 La Zeta di Riemann come mappa meromorfa su $\mathbb{C}$

In questa sezione estenderemo la funzione ζ su $\mathbb{C}$. Storicamente, da Eulero a Chebyschev, essa venne considerata come funzione dai naturali, o al più dai reali. Fu Riemann, nella sua memoria del 1859 [9], che ebbe l'intuizione di considerare la ζ come funzione a valori complessi: la estese in modo meromorfo su tutto il piano e si accorse del suo intimo legame con la distribuzione dei numeri primi. In questa sezione noi estenderemo la ζ a sinistra della retta $\sigma = 1$, la nostra dimostrazione sarà una di quelle suggerite dallo stesso Riemann. Cominciamo dalla definizione della funzione Gamma:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

Valida per $\sigma > 0$ (ovvero dove l'integrale converge). Con il cambiamento di variabile $x \to n^2\pi x$ si ottiene

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx.$$

Ora, per $\sigma > 1$ possiamo sommare su n e ottenere:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)dx, \tag{5.7}$$

dove abbiamo posto

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}.$$

Scriviamo $\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$ così che $2\omega(x) = \vartheta(s) - 1$.

Lemma 5.1. *Per $x > 0$ si ha:*

$$\vartheta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\vartheta(x).$$

Dimostrazione. Applicando la formula di sommazione di Poisson (per un breve richiamo si veda fine sezione) a $\vartheta(x^{-1})$:

$$\vartheta(x^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x^{-1}} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\pi x^{-1}+2\pi i v t}dt.$$

Cambiamo variabile $t \to xu$:

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\pi x^{-1}+2\pi i v t}dt = x \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x u^2+2\pi i v x u}du.$$

L'esponente di e possiamo scriverlo, completando il quadrato, come: $-\pi x u^2 + 2\pi i v x u = -\pi x(u - iv)^2 - \pi x v^2$ e quindi:

$$\vartheta(x^{-1}) = x \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x(u-iv)^2-\pi x v^2}du = x \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\pi x v^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x(u-iv)^2}du,$$

E finiamo notando che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x(u-iv)^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x u^2} du = x^{-\frac{1}{2}}.$$

Dove la prima uguaglianza altro non è che traslare il cammino in cui si integra $e^{-\pi x u^2}$ dall'asse reale alla retta $Im = -v$, a lui parallela. $\square$

Ripartiamo ora dall'equazione (5.7):

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx.$$

Da quanto appena dimostrato sappiamo che:

$$\omega(x^{-1}) = \frac{1}{2}(\vartheta(x^{-1}) - 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{x}\vartheta(x) - 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}\omega(x).$$

Per usare questa formula nell'integrale $\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)dx$, lo spezziamo in $\int_1^{\infty} + \int_0^1$ e nel secondo addendo cambiamo variabile $x \to x^{-1}$, ottenendo così:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx + \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} \omega(x^{-1}) dx;$$

$$\int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} \omega(x^{-1}) dx = \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}\omega(x) \right\} dx =$$
$$= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \omega(x) dx.$$

Ed abbiamo quindi ottenuto:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} (x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}) \omega(x) dx.$$

Notiamo che l'integrale a destra è convergente $\forall s \in \mathbb{C}$, e converge uniformemente in ogni regione limitata di $\mathbb{C}$, in quanto $\omega(x) = O(e^{-\pi x})$ per $x \to \infty$. Dunque abbiamo effettivamente esteso la funzione ζ in tutto $\mathbb{C}$ in modo meromorfo (notiamo subito il polo in $s = 1$).
Inoltre la parte a destra dell'uguaglianza è invariante per la trasformazione $s \mapsto 1 - s$ e quindi

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s). \tag{5.8}$$

Questa identità è *l'equazione funzionale della Zeta di Riemann*. Diamo ora la definizione di un'altra funzione correlata alla ζ, che ci servirà (sia ora che in futuro) per studiare alcune proprietà della ζ stessa; poniamo:

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + s(s-1)\int_1^{\infty}(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1})\omega(x)dx\right).$$

Dalla definizione, ξ è una mappa intera e soddisfa:

$$\xi(s) = \xi(1-s); \tag{5.9}$$

Inoltre: $\overline{\xi(s)} = \xi(\overline{s})$, per la sua definizione integrale.
Elenchiamo ora alcune proprietà di ξ e ζ.

Teorema 5.2.
1) $\zeta(s)$ *ha un unico polo, semplice, in* $s = 1$ *con residuo* 1*;*
2) $\xi(s) \neq 0$ *per* $\sigma > 1$ *o* $\sigma < 0$*;*
3) $\zeta(-2n) = 0$ *con* $n = 1, 2, 3, ...$ *Sono zeri di molteplicità uno, detti zeri banali;*
4) $\xi(s)$ *ha gli stessi zeri di* $\zeta(s)$ *(in posizione e molteplicità), eccetto che gli zeri banali;*
5) $\xi(s)$ *è reale per* s *reale o* $\sigma = \frac{1}{2}$*.*

Dimostrazione. 1) Dalla definizione integrale di ξ si ha che

$$\xi(1) = \frac{1}{2} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\pi^{\frac{-1}{2}}\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) \Rightarrow 1 = \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s).$$

In quanto $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \pi^{\frac{-1}{2}}$.

2) Sappiamo che $\zeta(s) \neq 0$ per $\sigma > 1$ (si veda **??**), lo stesso vale per tutti gli altri fattori nella definizione di ξ. Siccome $\xi(s) = \xi(1-s)$ si conclude.

3) I poli di $\Gamma(\frac{s}{2}+1)$ sono semplici e si hanno per $s = -2, -4, -6....$ Per il punto precedente $\xi(-2n) \neq 0$ con $n = 1, 2, 3...$ Dunque la ζ deve avere in questi punti degli zeri di ordine uno.

4) Gli unici zeri di ξ possono giacere in $0 \leq \sigma \leq 1$. Sappiamo già che $\xi(1) = \frac{1}{2}$ e che ζ ha un polo in 1. Le altre funzioni, oltre ζ, che compaiono come fattori nella definizione di ξ non sono mai nulle né hanno poli in $0 \leq \sigma \leq 1$, dunque si conclude.

5) $\overline{\xi(\frac{1}{2}+it)} = \xi(\frac{1}{2}-it) = \xi(1-(\frac{1}{2}-it)) = \xi(\frac{1}{2}+it)$ e $\overline{\xi(\sigma)} = \xi(\sigma)$. □

In particolare, il punto **(**4) ci dice che gli zeri di ζ che giacciono in $0 \leq \sigma \leq 1$ sono simmetrici sia rispetto le retta $Re(s) = \frac{1}{2}$ che ripetto l'asse reale.

Proposizione 5.3. *Si ha* $\zeta(\sigma) \neq 0$ *se* $0 \leq \sigma \leq 1$*.*

Dimostrazione. Definiamo

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \zeta(s) - 2 \cdot \frac{1}{2^s}\zeta(s) = \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \quad \sigma > 1.$$

Siccome $\frac{(-1)^{n+1}}{n^\sigma}$ è decrescente, infinitesima (se $\sigma > 0$) e contiene il termine oscillante $(-1)^n$, $\eta(s)$ ha ascissa di convergenza $\sigma_0 \leq 0$.
Sia $\sigma \in (0,1)$,

$$\eta(\sigma) = 1 - \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} - .... > 1 - \frac{1}{2^\sigma}.$$

Quindi

$$\zeta(\sigma) = \left(1 - \frac{1}{2^{\sigma-1}}\right)^{-1} \eta(\sigma) < \left(1 - \frac{1}{2^\sigma}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{\sigma-1}}\right)^{-1} < 0.$$

Per $\sigma = 0$ usiamo invece il fatto che $\xi(0) = \frac{1}{2}$.
(Nota: avremmo potuto utilizzare η per estendere ζ in $0 < \sigma \leq 1$) □

Formula di sommazione di Poisson

Seguendo lo Stein [11] definiamo lo spazio di Schwartz su $\mathbb{R}$ come:

$$S(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k f^{(l)}(x)| < \infty \ \ \forall k, l \in \mathbb{N} \right\}.$$

La formula di sommazione di Poisson afferma che se $f \in S(\mathbb{R})$ allora

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(z+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n z}.$$

Dove $\widehat{f}$ è la trasformata di Fourier di f.

Nella dimostrazione del Lemma 5.1 abbiamo posto, nella formula di Poisson,

$$f(t) = e^{-\frac{t^2 \pi}{x}} \ \ \mathbf{e} dz = 0.$$

6 La Zeta non ha zeri nella retta $Re(s) = 1$

Esistono svariate dimostrazioni di questa affermazione. Come vedremo a breve, essa costituisce il passo fondamentale per la dimostrazione del Teorema dei Numeri primi. La dimostrazione che proponiamo fu suggerita da Ingham (si veda [12], capitolo 3)
Sia $a \in \mathbb{C}$, definiamo:

$$\tau_a(n) := \sum_{d|n} d^a.$$

Notiamo che $\tau_a = \mathrm{id}^a * 1$, quindi è una funzione moltiplicativa, perché prodotto di convoluzione di funzioni moltiplicative, si veda (1.2).
Se p è un primo e $m \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\tau_a(p^m) = \sum_{i=0}^{m} p^{ai} = \frac{p^{(m+1)a} - 1}{p^a - 1}.$$

Dunque se $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_m^{\alpha_m}$ è la sua scomposizione in primi, allora

$$\tau_a(n) = \tau_a(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_m^{\alpha_m}) = \tau_a(p_1^{\alpha_1})\tau_a(p_2^{\alpha_2})...\tau_a(p_m^{\alpha_m}) =$$

$$= \frac{p_1^{(\alpha_1+1)a} - 1}{p_1^a - 1} \frac{p_2^{(\alpha_2+1)a} - 1}{p_2^a - 1} ... \frac{p_m^{(\alpha_m+1)a} - 1}{p_m^a - 1}.$$

Lemma 6.1 (Ramanujan). *Se $a, b \in \mathbb{C}$, la seguente formula*

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_a(n)\tau_b(n)}{n^s}$$

è valida per $\sigma > \max\{1, Re(a)+1, Re(b)+1, Re(a+b)+1\}$.

Dimostrazione. Notiamo che per un generico $a \in \mathbb{C}$

$$\zeta(s-a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{n^s} = D(n^a, s).$$

Se σ è come nell'enunciato, possiamo usare il prodotto di Eulero per scrivere la parte sinistra dell'uguaglianza come :

$$\prod_p \frac{1 - p^{-2s+a+b}}{(1-p^{-s})(1-p^{-s+a})(1-p^{-s+b})(1-p^{-s+a+b})}.$$

Poniamo $p^{-s} = z$ e consideriamo un generico fattore del prodotto sopra come una funzione in z:

$$f(z) = \frac{1 - z^2 p^{a+b}}{(1-z)(1-zp^a)(1-zp^b)(1-zp^{a+b})}$$

Ora vogliamo scomporla in frazioni elementari:

$$\frac{1 - z^2 p^{a+b}}{(1-z)(1-zp^a)(1-zp^b)(1-zp^{a+b})} = \frac{C_0}{1-z} + \frac{C_a}{1-p^a z} + \frac{C_b}{1-p^b z} + \frac{C_{a+b}}{1-p^{a+b} z}$$

Dalla teoria sappiamo che:

- $C_0 = Res(f, 1)$;
- $C_a = Res(f, p^{-a})$;

- $C_b = Res(f, p^{-b})$;
- $C_{a+b} = Res(f, p^{-a-b})$;

Questi residui sono facilmente calcolabili (omettiamo il calcolo) e valgono rispettivamente:

$$C_0 = \frac{1}{(1-p^a)(1-p^b)},\ C_a = \frac{-p^a}{(1-p^a)(1-p^b)},$$
$$C_b = \frac{-p^b}{(1-p^a)(1-p^b)},\ C_{a+b} = \frac{p^{a+b}}{(1-p^a)(1-p^b)}.$$

Quindi

$$\frac{1-z^2p^{a+b}}{(1-z)(1-zp^a)(1-zp^b)(1-zp^{a+b})} =$$
$$= \frac{1}{(1-p^a)(1-p^b)}\left[\frac{1}{1-z} - \frac{p^a}{1-p^az} - \frac{p^b}{1-p^bz} + \frac{p^{a+b}}{1-p^{a+b}z}\right] =$$
$$= \frac{1}{(1-p^a)(1-p^b)}\sum_{m=0}^{\infty}(1-p^{(m+1)a} - p^{(m+1)b} + p^{(m+1)(a+b)})z^m.$$

(Si noti che la sommatoria è giustificata per la scelta di s e $z = p^{-s}$)

$$\frac{1-z^2p^{a+b}}{(1-z)(1-zp^a)(1-zp^b)(1-zp^{a+b})} = \frac{1}{(1-p^a)(1-p^b)}\sum_{m=0}^{\infty}(1-p^{(m+1)a})(1-p^{(m+1)b})z^m =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1-p^{(m+1)a}}{1-p^a}\frac{1-p^{(m+1)b}}{1-p^b}\,z^m.$$

Riconosciamo ora

$$\frac{1-p^{(m+1)a}}{1-p^a} = \tau_a(p^m),\quad \frac{1-p^{(m+1)b}}{1-p^b} = \tau_b(p^m).$$

Ricomponendo tutti i pezzi otteniamo finalmente

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \prod_p\sum_{n=0}^{\infty}\tau_a(p^m)\tau_b(p^m)\frac{1}{p^{ms}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_a(n)\tau_b(n)}{n^s}.$$

L'ultima uguaglianza segue dall'identità prodotto di Eulero, si veda il Teorema 1.1. □

Ora il fatto che $\zeta(1+it) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ segue facilmente. Supponiamo che $1+it$ sia uno zero, allora anche $1-it$ è uno zero, per il Teorema 5.2. Scriviamo quindi l'identità di Ramanujan con $a = it$ e $b = -it$. Allora

$$f(s) := \frac{\zeta(s)^2\zeta(s-it)\zeta(s+it)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\tau_{it}(n)|^2}{n^s},\qquad \sigma > 1.$$

Quella a destra è una serie di Dirichlet a coefficienti ≥ 0, quindi se chiamiamo σ_0 la sua ascissa di convergenza (e convergenza assoluta), f deve avere un polo in $s = \sigma_o$. Siccome abbiamo supposto $1 + it$ essere uno zero, allora $f(1)$ esiste perché il doppio zero $\zeta(1 \pm it)$ cancella il doppio polo $\zeta(1)^2$.

La funzione a sinistra inoltre non può avere altri poli sull'asse reale se non gli zeri reali di $\zeta(2s)$, ovvero deve aversi $\sigma_0 = -1$ Da qui l'assurdo: ad esempio $f(\frac{1}{2}) = 0$ per la rappresentazione a sinistra, ma $f(\frac{1}{2}) \geq 1$ per la rappresentazione a destra.

7 Un teorema sulle serie di Dirichlet

Il seguente teorema è dovuto a Ingham, ma la dimostrazione che daremo è di Donald J. Newman. Esso ci permetterà nella prossima sezione di dimostrare queste due implicazioni:

$$\zeta(1+it) \neq 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0 \implies \psi(x) \sim x.$$

Teorema 7.1. *Sia $f \in \mathfrak{A}$ tale che $|f(n)| \leq 1$, con $n \in \mathbb{N}$ (in particolare $D(f,s)$ ha ascissa di convergenza $\sigma_0 \leq 1$).*
Supponiamo ora che $D(f,s)$ abbia ascissa di convergenza $= 1$, e che come funzione olomorfa sia estendibile anche in $\sigma = 1$. Allora $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ continua ad essere una rappresentazione valida anche per la sua l'estensione olomorfa in $\sigma = 1$ (in particolare converge).

Dimostrazione. Sia $w = x + iy$ con $x \geq 1$ fissato. Sia $N \in \mathbb{N}_{>0}$ fissato. Per ipotesi $D(f, s+w)$ è analitica in $\sigma \geq 0$. Fissiamo $R \geq 1$ e troviamo un $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ e $M > 0$ tale che:
$D(f, s+w)$ è analitica in $-\delta \leq \sigma$, $|s| \leq R$ e ivi vale $|D(f, s+w)| \leq M$. Ora definiamo il contorno Γ (percorso in senso anti-orario) formato da:

- L'arco $|s| = R$ per $\sigma > -\delta$;
- Il segmento $\sigma = -\delta$ in $|s| \leq R$.

Chiameremo A la parte di Γ in $\sigma \geq 0$ e B la restante.
La funzione

$$D(f, s+w)N^s \left[\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2}\right]$$

ha un polo in $s = 0$ il cui residuo vale $D(f, w)$, quindi

$$\int_\Gamma D(f, s+w)N^s \left[\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2}\right] ds = 2\pi i D(f, w)$$

In A, per ipotesi, $D(f, s+w)$ è uguale alla sua rappresentazione mediante serie di Dirichlet, e chiamiamo $S_N(s+w)$ la sua N-esima somma parziale, $r_N(s+w)$ il suo resto. Sempre per il teorema dei residui abbiamo:

$$\int_{|s|=R} S_N(s+w)N^s\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right]ds =$$

$$= \int_A S_N(s+w)N^s\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right]ds + \int_{-A} S_N(s+w)N^s\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right]ds = 2\pi i S_N(w)$$

Con un cambio di variabile $z \to -z$ nel secondo integrale, otteniamo:

$$\int_A S_N(s+w)N^s\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right]ds + \int_A S_N(w-s)N^{-s}\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right]ds = 2\pi i S_N(w)$$

Spezziamo l'integrale su Γ:

$$\int_\Gamma D(f,s+w)N^s\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right]ds =$$

$$= \int_A (S_N(s+w)+r_N(s+w))N^s\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right]ds + \int_B D(f,s+w)N^s\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right]ds.$$

Quindi possiamo scrivere

$$2\pi i\{D(f,w) - S_N(w)\} =$$

$$= \int_A \left(r_N(s+w)N^s - \frac{S_N(w-s)}{N^s}\right)\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right]ds + \int_B D(f,s+w)N^s\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right]ds \quad (\star)$$

Ora dobbiamo stimare gli integrali a destra:

$$\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2} = \frac{2\sigma}{R^2} \quad in\ A, \tag{7.10}$$

$$\left|\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right| = \left|\frac{R^2+s^2}{sR^2}\right| \le \frac{2R^2}{\delta R^2} = \frac{2}{\delta} \quad in\ \sigma = -\delta,\ |s| \le R, \tag{7.11}$$

$$|r_N(s+w)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+1}} \le \int_N^\infty \frac{dn}{n^{\sigma+1}} = \frac{1}{\sigma N^\sigma} \quad in\ A, \tag{7.12}$$

$$|S_N(w-s)| = \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{f(n)}{n^{w-s}}\right| \le \sum_{n=1}^{N} n^{\sigma-1} \le$$

$$\le N^{\sigma-1} + \int_0^N n^{\sigma-1}dn = N^\sigma\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{\sigma}\right) \quad in\ A. \tag{7.13}$$

Osservazione 1. Spieghiamo l'ultima stima: in A dobbiamo distinguere i due casi $\sigma \ge 1$ e $\sigma \in (0,1)$
Nel primo caso, $n^{\sigma-1}$ è una funzione crescente positiva, quindi:

$$\sum_{n=1}^{N} n^{\sigma-1} = \sum_{n=1}^{N-1} n^{\sigma-1} + N^{\sigma-1} \le N^{\sigma-1} + \int_1^N t^{\sigma-1}dt \le N^{\sigma-1} + \int_0^N n^{\sigma-1}dn.$$

Nel secondo caso, invece, $n^{\sigma-1}$ è decrescente positiva, quindi:

$$\sum_{n=1}^{N} n^{\sigma-1} \leq \int_0^N n^{\sigma-1} dn \leq \int_0^N n^{\sigma-1} dn + N^{\sigma-1}.$$

Applichiamo queste stime in $(\star)$: nel primo integrale

$$\left| \int_A \left(r_N(s+w)N^s - \frac{S_N(w-s)}{N^s} \right) \left[\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right] ds \right| \leq \int_A \left| r_N(s+w)N^s - \frac{S_N(w-s)}{N^s} \right| \left| \frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right| d|s|$$

$$\leq \int_A \left(\frac{2}{\sigma} + \frac{1}{N} \right) \left(\frac{2\sigma}{R^2} \right) d|s| = \int_A \left(\frac{4}{R^2} + \frac{2\sigma}{NR^2} \right) d|s| \leq \frac{4\pi}{R} + \frac{2\pi}{N}$$

In quanto $\sigma \leq R$ in A e $|A| = R\pi$
Nel secondo integrale, invece

$$\left| \int_B D(f, s+w) N^s \left[\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right] ds \right| \leq \int_B \left| D(f, s+w) \right| N^\sigma \left| \frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right| ds.$$

Ora spezziamo B nelle sue tre componenti

$$B_\delta = \{-\delta + it \mid \delta^2 + t^2 \leq R^2\}$$
$$B_\pm = \{\sigma \pm it \mid -\delta \leq \sigma \leq 0,\ \sigma^2 + t^2 = R^2\ t > 0\}.$$

$$\left| \int_{B_\delta} D(f, s+w) N^s \left[\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right] ds \right| \leq M \int_{B_\delta} N^{-\delta} \left| \frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right| d|s| \leq M N^{-\delta} \frac{2}{\delta} \int_{B_\delta} d|s| \leq \frac{4MR}{\delta N^\delta}.$$

$$\left| \int_{B_+ \cup B_-} D(f, s+w) N^s \left\{ \frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right\} ds \right| \leq M \int_{B_+ \cup B_-} N^\sigma \left| \frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right| d|s| = 2M \int_{B_+} N^\sigma \frac{2|\sigma|}{R^2} d|s|.$$

Ora parametrizziamo B_+ con $t \mapsto Rt + iR\sqrt{1-t^2}$, $t \in (\frac{-\delta}{R}, 0)$.
Quindi $d|s| = \frac{Rdt}{\sqrt{1-t^2}}$:

$$2M \int_{B_+} N^\sigma \frac{2|\sigma|}{R^2} d|s| = 2M \int_{\frac{-\delta}{R}}^0 N^{Rt} \frac{2R|t|}{R^2} \frac{R}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2M \int_0^\delta N^{-t} \frac{2t}{R^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - t^2}} dt.$$

In $(0, \delta)$ con $\delta \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - t^2}} \leq \frac{R}{\sqrt{R^2 - \delta^2}} \leq \frac{R}{\sqrt{R^2 - 1/4}} \leq \frac{3}{2}, \text{ con } R \text{ sufficientemente grande.}$$

Quindi

$$2M \int_0^\delta N^{-t} \frac{2t}{R^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - t^2}} dt \leq \frac{6M}{R^2} \int_0^\delta t N^{-t} dt =$$

$$= \frac{6M}{R^2} \left(\frac{-\delta}{\ln(N) N^\delta} - \frac{1}{\ln^2(N) N^\delta} + \frac{1}{\ln^2 N} \right) \leq \frac{6M}{R^2 \ln^2 N}.$$

Finalmente abbiamo ottenuto

$$\left| D(f, w) - S_N(w) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{6M}{R^2 \ln^2 N} + \frac{4MR}{\delta N^\delta} + \frac{4\pi}{R} + \frac{2\pi}{N} \right).$$

Siccome R è grande a piacere e tutti i parametri sono indipendenti da N, si conclude.

$\square$

8 Il teorema dei numeri primi

I primi a dimostrare il Teorema dei Numeri Primi furono, contemporaneamente, de la Vallée Poussin (si veda [8]) e Hadamard (si veda [4]). Entrambi presero spunto dal lavoro di Riemann [9]. Nel 1948 Selberg dimostrò (con metodi elementari, ovvero che non richiedono risultati di analisi complessa) la seguente formula asintotica:

$$\vartheta(x)\log(x) + \sum_{p\leq x}\log(p)\,\vartheta\left(\frac{x}{p}\right) = 2x\log(x) + O(x),$$

dove ϑ è, come nella sezione 4, la prima funzione di Chebyshev. Grazie a questa formula asintotica, pochi mesi dopo, sia Selberg stesso [10] che Erdos [3] riuscirono a ricavare (ancora una volta senza l'uso dell'analisi complessa) sufficienti informazioni sulla funzione ϑ da poter dimostrare il teorema dei Numeri Primi. Va detto che questo tipo di dimostrazione era, ai tempi di Ingham e Hardy, ritenuto impossibile, ovvero si giudicava il problema troppo *profondo* per poter essere risolto con metodi elementari. La nostra dimostrazione è presa dal libro di Newman [7]. Sebbene Don Zagier ne abbia fornita una ancora più rapida (migliorando quella di Newman, si veda [13]) abbiamo lo stesso preferito questa se non altro per due motivi:

- Il teorema precedente. Esso è di interesse generale, in quanto spiega il comportamento di una qualunque serie di Dirichlet a coefficienti limitati sulla sua ascissa di convergenza.

- Ci fornisce un'equivalenza in più, ovvero come vedremo nella prossima sezione, si avrà

  $$\zeta(1+it)\neq 0\ \ \forall t\in\mathbb{R} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}=0 \iff \psi(x)\sim x.$$

  Banalmente (lo dimostreremo in questa sezione) il fatto che

  $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}=0$$

  implica

  $$\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=0,$$

  dove $M(x) := \sum_{n\leq x}\mu(n)$ è la funzione di Mertens. Per vedere come anche essa sia collegata alla distribuzione dei primi (e degli zeri della ζ) si veda il Titchmarsh [12], capitolo 14.

Adesso iniziamo la dimostrazione. Applichiamo subito il teorema precedente a

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

Abbiamo $|\mu(n)| \leq 1$ e ricordando che ζ non ha zeri con parte reale 1, se veda la sezione 6, possiamo concludere:

$$0 = \frac{1}{\zeta(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}.$$

Sorprendentemente questo fatto implica il Teorema dei Numeri Primi. Ciò di cui abbiamo bisogno è il seguente corollario e il seguente lemma:
La funzione di Mertens è definita come

$$M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n),$$

Corollario 8.1. *Si ha*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{M(x)}{x} = 0.$$

Dimostrazione. Usiamo il fatto che se è a_n una successione con limite L allora anche

$$A_N := \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{N-1}}{N}$$

ha limite L. Poniamo $a_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{\mu(m)}{m}$.

$$NA_N := \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{n} \frac{\mu(m)}{m} = \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \frac{\mu(i)}{i} = Na_{N-1} - M(N-1)$$

e quindi si trova:

$$0 = \lim_{N \to \infty} A_N =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \left(a_{N-1} - \frac{M(N-1)}{N} \right) = \lim_{N \to \infty} \frac{M(N-1)}{N}.$$

□

Quindi possiamo scrivere:

$$\left| \frac{M(x)}{x} \right| \leq \delta(x), \tag{8.14}$$

Con δ che può essere scelta continua, decrescente e con limite:

$$\lim_{x \to \infty} \delta(x) = 0.$$

Ricordiamo ora che τ è la funzione dei divisori:

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Lemma 8.2 (Dirichlet)**.**

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

Dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni.

Per una dimostrazione, si veda la fine della sezione. Ora usiamo il Lemma 8.2 e la (8.14) per provare che la seconda funzione di Chebyshev ψ (si veda la sezione 4) verifica

$$\psi(x) \sim x$$

Ciò è ovviamente equivalente a:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x) - x}{x} = 0.$$

Ricordiamo che la seconda funzione di Chebyshev è definita da:

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n),$$

dove Λ è la funzione di Von Mangholt, ovvero:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & se\ n = p^n \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Quindi:

$$\frac{\psi(x) - x}{x} = \frac{\sum_{n\leq x}(\Lambda(n) - 1)}{x} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ora vogliamo scrivere $\Lambda(n) - 1$ in una forma che coinvolga le funzioni μ e τ. Ricordiamo che, vedi sezione 3,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

da cui discende immediatamente, grazie alla formula prodotto di Eulero, che

$$\Lambda(n) = (\ln *\mu)(n),$$

in quanto

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s}, \ \ \zeta^{-1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \quad (Re(s) > 1).$$

Ricordando il Teorema 1.2 e che $\tau = 1 * 1$ otteniamo:

$$\Lambda(n) - 1(n) = (\ln *\mu)(n) - 1(n) = [(\ln -\tau) * \mu](n),$$

E quindi:

$$\sum_{n\leq x}(\Lambda(n) - 1) = \sum_{n\leq x}[(\ln -\tau) * \mu](n) = \sum_{n\leq x}\sum_{ab=n}(\ln(b) - \tau(b))\mu(a) = \sum_{ab\leq x}[\ln(b) - \tau(b)]\mu(a)$$

Scriviamo:

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n) - 1 = \sum_{ab\leq x}[\ln(b) - \tau(b)]\mu(a) = \sum_{ab\leq x}[\ln(b) - \tau(b) + 2\gamma]\mu(a) - 2\gamma.$$

L'ultima uguaglianza discende da $\sum_{ab\leq x}\mu(a) = 1$, si veda il Teorema 1.2. Siamo ora in grado di stimare la somma, ma dovremo procedere in modo accurato: si può notare che i termini da sommare sono $\sim x\ln x$ e grazie al comportamento della μ molti di questi di cancellano a vicenda. Prendiamo un numero positivo ω e spezziamo la somma:

$$\sum_{ab\leq x}[\ln(b)-\tau(b)+2\gamma]\mu(a) =$$

$$= \sum_{a\leq x/\omega}\mu(a)\sum_{b\leq x/a}[\ln(b)-\tau(b)+2\gamma] + \sum_{b<\omega}[\ln(b)-\tau(b)+2\gamma]\sum_{x/\omega<a\leq x/b}\mu(a).$$

Stimiamo la prima somma:

$$\left|\sum_{a\leq x/\omega}\mu(a)\sum_{b\leq x/a}[\ln(b)-\tau(b)+2\gamma]\right| \leq \sum_{a\leq x/\omega}\left|\sum_{b\leq x/a}[\ln(b)-\tau(b)+2\gamma]\right|.$$

Ora

$$\left|\sum_{b\leq x/a}[\ln(b)-\tau(b)-2\gamma]\right| \leq C\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Dove C è una costante, e questo vale per il lemma di Dirichlet e la formula di Stirling, infatti per $X\to\infty$

$$\sum_{b\leq X}[\ln(b)-\tau(b)+2\gamma] \sim \ln\Gamma(X+1) - \sum_{b\leq X}\tau(b) + 2\gamma X \sim$$

$$\sim [X\ln(X) - X + O(\ln X)] - [X\ln(X) - (2\gamma-1)X + O(\sqrt{X})] + 2\gamma X \sim O(\sqrt{X}).$$

Ovvero possiamo trovare una costante C per cui vale

$$\sum_{b\leq X}[\ln(b)-\tau(b)+2\gamma] \leq C\sqrt{X} \quad X\geq 1.$$

.

Quindi

$$\left|\sum_{a\leq x/\omega}\mu(a)\sum_{b\leq x/a}[\ln(b)-\tau(b)-2\gamma]\right| \leq \sum_{a\leq x/\omega}C\sqrt{\frac{x}{a}} = O\left(\frac{x}{\sqrt{\omega}}\right).$$

E possiamo scrivere, sempre per la stessa tipologia di ragionamenti,

$$\left|\sum_{a\leq x/\omega}\mu(a)\sum_{b\leq x/a}[\ln(b)-\tau(b)-2\gamma]\right| \leq K\frac{x}{\sqrt{\omega}}.$$

Dove K è una costante opportuna, indipendente da ω. Ora, banalmente, esiste una costante $A\geq 1$ tale che

$$|\ln b - \tau(b) + 2\gamma| \leq Ab,$$

infatti

$$\frac{\tau(b)}{b} = \frac{\sum_{d|b}1}{b} \leq 1.$$

Stimiamo la seconda somma:

$$\left| \sum_{b<\omega} [\ln(b) - \tau(b) - 2\gamma] \sum_{x/\omega<a\leq x/b} \mu(a) \right| \leq \sum_{b<\omega} Ab \left| M\left(\frac{x}{b}\right) - M\left(\frac{x}{\omega}\right) \right|.$$

Ora usiamo il nostro risultato sulla funzione di Mertens (8.14):

$$|M(x)| \leq x\delta(x).$$

Quindi:

$$\left| M\left(\frac{x}{b}\right) - M\left(\frac{x}{\omega}\right) \right| \leq \frac{x}{b}\delta\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{x}{\omega}\delta\left(\frac{x}{\omega}\right).$$

Siccome δ è decrescente e $b < \omega$, otteniamo:

$$\left| M\left(\frac{x}{b}\right) - M\left(\frac{x}{\omega}\right) \right| \leq 2\frac{x}{b}\delta\left(\frac{x}{\omega}\right).$$

Sostituendo nella somma e facendo il conto si ha:

$$\left| \sum_{b<\omega} [\ln(b) - \tau(b) - 2\gamma] \sum_{x/\omega<a\leq x/b} \mu(a) \right| \leq 2Ax\omega\delta\left(\frac{x}{\omega}\right).$$

E quindi siamo arrivati a:

$$\left| \frac{\sum_{n\leq x}(\Lambda(n) - 1)}{x} \right| \leq 2A\omega\delta\left(\frac{x}{\omega}\right) + \frac{K}{\sqrt{\omega}} + \frac{2\gamma}{x}.$$

Se chiamiamo L il limite superiore

$$L = \limsup_{x\to\infty} \left| \frac{\sum_{n\leq x} \Lambda(n) - 1}{x} \right|$$

otteniamo che

$$L \leq \frac{K}{\sqrt{\omega}}.$$

Siccome ω è arbitrario e K non dipende da ω, si conclude ceh$L = 0$, ovvero la dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi. Ora dimostriamo il lemma di Dirichlet:

Dimostrazione. Ricordiamo la seguente formula dovuta a Dirichlet:
Se $f = g * h$ si ha

$$\sum_{n\leq X} f(n) = \sum_{n\leq X} \sum_{ab=n} g(a)h(b) = \sum_{ab\leq X} g(a)h(b) =$$

$$= \sum_{a\leq\sqrt{X}} \sum_{b\leq\frac{X}{a}} g(a)h(b) + \sum_{b\leq\sqrt{X}} \sum_{a\leq\frac{X}{b}} g(a)h(b) - \sum_{a\leq\sqrt{X}} \sum_{b\leq\sqrt{X}} g(a)h(b)$$

Infatti, la somma

$$\sum_{ab \leq X} g(a)h(b)$$

e' estesa a tutte le coppie (a, b) a coordinate intere che giacciono sotto l'iperbole $ab \leq X$. La formula di Dirichlet semplicemente spezza questa somma nelle due regioni $a \leq \sqrt{X}$ e $b \leq \sqrt{X}$ Ora scriviamo $\tau = 1 * 1$ e applichiamo la formula precedente:

$$\sum_{n \leq X} \tau(n) = \sum_{a \leq \sqrt{X}} \sum_{b \leq \frac{X}{a}} 1 + \sum_{b \leq \sqrt{X}} \sum_{a \leq \frac{X}{b}} 1 - \sum_{a \leq \sqrt{X}} \sum_{b \leq \sqrt{X}} 1 =$$

$$\sum_{a \leq \sqrt{X}} \left(\frac{X}{a} + O(1) \right) + \sum_{b \leq \sqrt{X}} \left(\frac{X}{b} + O(1) \right) - (\sqrt{X} + O(1))^2 =$$

$$= 2X \sum_{a \leq \sqrt{X}} \frac{1}{a} + O(\sqrt{X}) - (\sqrt{X} + O(1))^2 = 2X(\ln \sqrt{X} + \gamma + O(1)) - X + O(1) + O(\sqrt{X}) =$$

$$X \ln X + (2\gamma - 1)X + O(\sqrt{X}).$$

□

9 L'implicazione inversa

In questa sezione mostreremo come il Teorema dei Numeri Primi implichi, a sua volta, il fatto che la Zeta di Riemann non abbia zeri con $Re(s) = 1$. Per farlo, avremo bisogno di un'altra rappresentazione di $\frac{\zeta'}{\zeta}$. Scriviamo:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{\psi(m)}{m^s} - \sum_{n=1}^{m-1} \psi(n) \left(\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} \right) = \frac{\psi(m)}{m^s} + s \sum_{n=1}^{m-1} \psi(n) \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{s+1}} =$$

$$= \frac{\psi(m)}{m^s} + s \int_1^m \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx. \tag{9.15}$$

Ora per il Teorema 4.1 abbiamo che per ogni $\epsilon > 0$

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x^{1+\epsilon}} = \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x^{1+\epsilon}} \leq \limsup_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} = 0.$$

(La stessa cosa vale per i limiti inferiori) dunque $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x^{1+\epsilon}} = 0.$$

Ora nella (9.15) prendiamo s con $\sigma > 1$ e facciamo il limite per $m \to \infty$, ottenendo:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = s \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Definiamo la funzione ϕ:

$$\phi(s) := \int_1^{\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{s+1}} dx = -\frac{1}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}.$$

Ora supponiamo sia vero il Teorema dei Numeri Primi, quindi per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare un $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che per $x \geq x_0$ si ha

$$|\psi(x) - x| \leq \epsilon x.$$

Quindi:

$$|\phi(s)| \leq \int_1^{x_0} \frac{|\psi(x) - x|}{x^{\sigma+1}} dx + \int_{x_0}^{\infty} \frac{\epsilon}{x^{\sigma}} dx \leq K + \frac{\epsilon}{\sigma - 1}.$$

E quindi per ogni $1 < \sigma \leq 1 + \frac{\epsilon}{K}$ si ha

$$|(\sigma - 1)\phi(\sigma + it)| \leq 2\epsilon.$$

Ovvero per ogni t fissato vale:

$$\lim_{\sigma \to 1^+} (\sigma - 1)\phi(\sigma + it) = 0. \tag{9.16}$$

Quindi concludiamo, in quanto se ζ avesse uno zero in $1 + it$ $(t \neq 0)$ di ordine n, il limite (9.16) dovrebbe essere

$$-\frac{n}{1 + it}.$$

10 Il prodotto infinito di ξ e ζ

In questa sezione useremo risultati di Analisi Complessa che non dimostreremo (si veda [1], [6] e [2]) in particolare:

Lemma 10.1. *In $|\arg s| \leq \pi - \delta$ dove δ è un numero positivo fissato, si ha per $|s|$ sufficientemente grande:*

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \ln s - \frac{1}{2s} + O(|s|^{-2}).$$

Teorema 10.2 (Stirling). *Per $|s| \to \infty$ e $-\pi + \delta \leq \arg s \leq \pi + \delta$ (con δ positivo e fissato) vale:*

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \frac{\ln 2\pi}{2} + O(|s|^{-1}).$$

Teorema 10.3 (Jensen). *Sia f analitica in $|s| \leq R$ a siano a_1, a_2, $\cdots a_n$ gli zeri di f in $|s| < R$ contati con le loro molteplicità. Supponiamo che $f(0) \neq 0$, allora si ha*

$$\ln |f(0)| + \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{R}{|a_i|}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

Definizione 10.1. Sia f intera, $f(0) \neq 0$ e siano a_i gli zeri di f. Si definisce il *genere* di f il più piccolo intero h tale che esista una rappresentazione del tipo:

$$f(s) = e^{g(s)} \prod_i \left(1 - \frac{s}{a_i}\right) e^{s/a_i + 1/2(s/a_i)^2 + \cdots + 1/h(s/a_i)^h},$$

con g un polinomio di grado al più h. Se tale intero non esiste, il genere di f si dice infinito.
Sia $M(r)$ il massimo di $|f|$ in $|s| = r$. Si definisce l'*ordine* di f come

$$\lambda = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}.$$

In particolare per ogni $\epsilon > 0$ e r sufficientemente grande vale

$$M(r) \leq e^{r^{\lambda+\epsilon}}.$$

Teorema 10.4 (Hadamard). *Il genere e l'ordine di una funzione intera soddisfano*

$$h \leq \lambda \leq h + 1.$$

Teorema 10.5. *Sia f intera di ordine $\lambda = 1$, e siano a_i i suoi zeri, allora:*

1. $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i^{-1-\epsilon}|$ *converge per ogni $\epsilon > 0$,*
2. *Se $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i^{-1}|$ converge, allora esiste C costante tale che*

$$|f(s)| \leq e^{C|s|}.$$

Ora daremo un'altra rappresentazione della ζ che ci sarà utile per calcolare l'ordine di ξ:

Lemma 10.6. *Per $\sigma > 0$ vale:*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{1+s}} dx.$$

dove abbiamo indicato con $\{x\}$ la parte frazionaria di x.

Dimostrazione. In $\sigma > 1$ abbiamo:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^s} = \frac{m}{m^s} + \sum_{n=1}^{m-1} n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) = \frac{m}{m^s} + s \sum_{n=1}^{m-1} n \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{s+1}} = \frac{m}{m^s} + s \int_1^m \frac{[x]dx}{x^{s+1}},$$

dove abbiamo indicato con $[x]$ la parte intera di x. Dunque facendo tendere $m \to \infty$, siccome $\sigma > 1$, si ottiene:

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{[x]dx}{x^{s+1}} = s \int_1^{\infty} \frac{x - \{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}dx}{x^{s+1}}.$$

Ora il secondo integrale è assolutamente convergente in $\sigma > 0$, uniformemente in $\sigma \geq \delta > 0$ e quindi la tesi. $\square$

Lemma 10.7. *Sia $0 < \delta < 1$ fissato e sia $s = \sigma + it$ con $|t| \geq 1$ e $\sigma > \delta$. Esiste una costante A per cui vale:*

$$|\zeta(s)| \leq A(\delta)|t|^{1-\delta}.$$

Dimostrazione. Ricordando la dimostrazione del lemma precedente, abbiamo per $x \geq 1$:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^{s+1}} = s \int_1^x \frac{[w]dw}{w^{s+1}} + \frac{[x]}{x^s},$$

ora scrivendo $[w] = w - \{w\}$ e facendo il conto, otteniamo:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^{s+1}} = \frac{s}{s-1} - \frac{s}{(s-1)x^{s-1}} + \frac{1}{x^{s-1}} - \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_1^x \frac{\{w\}}{w^{s+1}} dt.$$

Per cui:

$$\zeta(s) - \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^{s+1}} =$$

$$= \left(\frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{w\}}{w^{1+s}} dx \right) - \left(\frac{s}{s-1} - \frac{s}{(s-1)x^{s-1}} + \frac{1}{x^{s-1}} - \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_1^x \frac{\{w\}}{w^{s+1}} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{(s-1)x^{s-1}} + \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_x^\infty \frac{\{w\}}{w^{s+1}} dt.$$

Ricordando che $\sigma > \delta$, $|t| \geq 1$, $|s| \leq |\sigma| + |t|$, facciamo la seguenti maggiorazioni:

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^\delta} + \frac{1}{|t|x^{\delta-1}} + \frac{1}{x^\sigma} + (\sigma + |t|) \int_x^\infty \frac{dw}{w^{\sigma+1}},$$

siccome $|t| \geq 1$ abbiamo $\frac{1}{|t|x^{\delta-1}} \leq x^{1-\delta}$, sostituiamo e continuiamo la catena di disuguaglianze:

$$\leq \int_0^{[x]} \frac{dw}{w^\delta} + x^{1-\delta} + \frac{1}{x^\sigma} + \frac{\sigma + |t|}{\sigma} \frac{1}{x^\sigma} \leq$$

$$\leq \frac{x^{1-\delta}}{1-\delta} + x^{1-\delta} + \frac{2\sigma + |t|}{\sigma} \frac{1}{x^\sigma}.$$

Ora $2\sigma + |t| \leq |t|(2\sigma + 1)$, quindi

$$|\zeta(s)| \leq \leq \frac{x^{1-\delta}}{1-\delta} + x^{1-\delta} + |t| \left(2 + \frac{1}{\delta} \right) \frac{1}{x^\sigma},$$

terminiamo la dimostrazione ponendo $x = |t|$, e otteniamo:

$$|\zeta(s)| \leq |t|^{1-\delta} \left(\frac{1}{1-\delta} + 3 + \frac{1}{\delta} \right).$$

$\square$

Ora abbiamo tutti gli strumenti necessari non solo per calcolare l'ordine di ξ, ma anche per studiare l'andamento asintotico di

$$M(r) := \max\{|\xi(s)| \,:\, |s| = r\}.$$

Teorema 10.8. *Sia $M(r)$ come prima, si ha:*

$$\ln M(r) \sim \frac{1}{2} r \ln r.$$

In particolare l'ordine di ξ è 1.

Dimostrazione. Ricordiamo la definizione di ξ:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

e la sua equazione funzionale:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Quindi ci basta lavorare in $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Ovviamente esiste una costante A per cui:

$$\left| \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}} \right| \leq e^{A|s|}.$$

Ricordando la formula di Stirling, si veda il teorema 10.2, otteniamo in $\sigma \geq \frac{1}{2}$, $|s| \geq 1$:

$$\ln \left| \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| = Re \ln \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \leq \left| \ln \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2}(|s|+1) \left| \ln \frac{s}{2} \right| + \frac{|s|}{2} + \frac{\ln 2\pi}{2} + O(|s|^{-1}),$$

abbiamo:

$$\left| \ln \frac{s}{2} \right| = \left| \ln |s| - \ln 2 + i \arg s \right| \leq \ln |s| + \ln 2 + \frac{\pi}{2},$$

da cui discende:

$$\left| \ln \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2} |s| \ln |s| + B|s|,$$

dove B è una costante opportuna. Infine il Lemma 10.7 ci dice che in $\sigma \geq \frac{1}{2}$ e $|t| \geq 1$

$$|\zeta(s)| \leq A\left(\frac{1}{2}\right) |s|^{\frac{1}{2}}.$$

Quindi notando che se $\sigma \geq 2$ allora $|\zeta(s)| \leq \zeta(2)$ otteniamo che per $|s| \geq 3$ e $\sigma \geq \frac{1}{2}$ vale:

$$|\zeta(s)| \leq \zeta(2) + A\left(\frac{1}{2}\right) |s|^{\frac{1}{2}}.$$

Ciò che abbiamo ottenuto è che in $\sigma \geq \frac{1}{2}$ e $|s| \geq 3$ esiste una costante D per cui:

$$\ln |\xi(s)| \leq \frac{1}{2} |s| \ln |s| + D|s|.$$

Dunque quello di cui abbiamo bisogno per concludere è la disuguaglianza inversa, facilmente ottenibile usando nuovamente la formula di Stirling e notando che per r sufficientemente grande:

$$\ln M(r) \geq \ln |\xi(r)| = \ln\left(\frac{1}{2}r(r-1)\right) + \ln\zeta(r) + \ln\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) - \frac{r}{2}\ln\pi \geq \frac{1}{2}r\ln r + Fr,$$

con F una costante opportuna. □

Da qui in poi denoteremo con $\rho = \beta + i\gamma$ un generico zero di ξ. Ricordiamo il Teorema 10.5 e notiamo che, per il teorema precedente, ξ non soddisfa una disuguaglianza più precisa del tipo:

$$|\xi(s)| \leq e^{C|s|},$$

quindi la somma

$$\sum_\rho |\rho|^{-1}$$

non è convergente. Da questo discende che esistono infiniti zeri non banali. Ricordiamo che si chiamano zeri non banali tutti gli zeri di ζ con parte reale compresa tra 0 e 1. Siamo inoltre in grado di espandere ξ come prodotto infinito. Per il Teorema 10.4, detto h il genere di ξ, abbiamo:

$$h \leq 1 \leq h+1,$$

quindi $h = 0$ oppure $h = 1$. Ma $h \neq 0$, in quanto $\sum_\rho |\rho|^{-1}$ è divergente. Per cui abbiamo $h = 1$ e:

$$\xi(s) = e^{a+bs}\prod_\rho \left\{\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\right\}. \tag{10.17}$$

Le costanti a e b possono essere calcolate, ma non avranno importanza per i nostri sviluppi futuri, tuttavia riportiamo il loro valore:

$$b = \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = \ln(2\pi) - 1 - \frac{\gamma}{2}, \quad a = \frac{\ln(4\pi)}{2} - 1 - \frac{1}{2}.$$

Dalla rappresentazione (10.17) possiamo calcolare le derivate logaritmiche di ξ e ζ:

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = b + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right), \tag{10.18}$$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{d}{ds}\left(\ln\xi(s) - \ln(s-1) + \frac{s}{2}\ln\pi - \ln\Gamma(s/2+1)\right) =$$
$$= b + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{s-1} + \frac{\ln\pi}{2} - \frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)}.$$

E quindi:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{s-1} + \frac{\ln\pi}{2} - \frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)}. \tag{10.19}$$

11 Una regione priva di zeri per ζ

Nella dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi abbiamo visto che la ζ non ha zeri con parte reale $\sigma = 1$. Non solo, abbiamo anche mostrato che queste due affermazioni sono equivalenti. Ci aspettiamo quindi che la conoscenza di regioni prive di zeri sempre più grandi, contenute nella striscia $0 \leq \sigma \leq 1$, comporti anche stime migliori per la funzione $\pi(x)$. Ora noi dimostreremo l'esistenza di una regione priva di zeri subito a sinistra della retta $\sigma = 1$, la cui larghezza decresce come

$$\frac{1}{\ln |t|}.$$

La nostra dimostrazione è essenzialmente quella di de la Vallée Poussin, con qualche semplificazione apportata da Mertens. L'esistenza di questa regione comporterà una stima di $\pi(x)$ con resto, si veda l'ultima sezione.

Teorema 11.1. *Esiste una costante $c > 0$ tale che ζ non ha zeri nella regione*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln t}, \quad t \geq 2.$$

Dimostrazione. Cominciamo notando che:

$$0 \leq 2(\cos(\theta) + 1)^2 = 3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta). \tag{11.20}$$

Ora scriviamo, ricordando la (10.1)

$$Re\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) = Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\cos(t \ln n)}{n^s}.$$

Quindi per la 11.20 abbiamo:

$$3Re\left[-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \right] + 4Re\left[-\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right] + Re\left[-\frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \right] \geq 0. \tag{11.21}$$

Ora, sapendo che ζ ha un polo semplice con residuo 1 in $s = 1$, vediamo che anche $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ ha un polo semplice in $s = 1$ con residuo 1. Quindi possiamo trovare una costante C positiva per cui vale in $1 < \sigma \leq 2$:

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \leq \frac{1}{\sigma - 1} + C. \tag{11.22}$$

Ora consideriamo la regione $t \geq 2, 1 \leq \sigma \leq 2$, e usiamo la rappresentazione (10.19) per stimare gli altri due addendi di (11.21):

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -b - \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{s - 1} - \frac{\ln \pi}{2} + \frac{\Gamma'(s/2 + 1)}{\Gamma(s/2 + 1)}.$$

Nella regione considerata,

$$Re\frac{1}{s-1}=\frac{\sigma}{|s-1|^2}\leq\frac{\sigma}{|t|^2}\leq\frac{1}{2},$$

quindi

$$Re\bigg(-b+\frac{1}{s-1}-\frac{\ln\pi}{2}\bigg)\leq A_1,$$

dove A_1 è una costante. Ora ricordando il Lemma 10.1 otteniamo che:

$$Re\bigg(\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)}\bigg)=\frac{1}{2}\bigg[Re\ln(s/2+1)-Re\frac{1}{s+2}+Re\ O(|s/2+1|^{-2})\bigg]\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\bigg[A_2+\ln|s/2+1|\bigg]\leq A_3\ln t,$$

con A_2, A_3 costanti. Ciò è reso possibile in quanto si ha sempre $|\sigma-1|\leq 1$, quindi per t grande $|s/2+1|\sim|t|$. Inoltre $t\geq 2$ e quindi la costante A_3 può essere scelta perché $\ln t\geq\ln 2>0$. Ora scegliamo un'ultima costante A tale che

$$\frac{A_1}{\ln 2}+A_3\leq A$$

per ottenere:

$$Re\bigg(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\bigg)\leq A\ln t-Re\sum_\rho\bigg(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\bigg).\tag{11.23}$$

Ora notiamo che si ha

$$Re\sum_\rho\bigg(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\bigg)=\sum_\rho Re\bigg(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\bigg)=\sum_\rho\bigg(\frac{\sigma-\beta}{|s-\rho|^2}+\frac{\beta}{|\rho|^2}\bigg)\geq 0,\tag{11.24}$$

in quanto $\sigma\geq 1$ e $0<\beta<1$. Quindi possiamo semplicemente stimare, grazie a (11.23):

$$Re\bigg(-\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\bigg)\leq A\ln(2t).\tag{11.25}$$

Per finire il teorema, scegliamo uno zero non banale $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$ con $\gamma_0\geq 2$ e poniamo $t=\gamma_0$. Siccome abbiamo visto che la somma (11.24) ha tutti i termini positivi, possiamo maggiorarla scegliendo un solo termine, quello che corrisponde allo zero $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$:

$$Re\sum_\rho\bigg(\frac{1}{\sigma+i\gamma_0-\rho}+\frac{1}{\rho}\bigg)\geq\frac{\sigma-\beta_0}{|\sigma+i\gamma_0-\rho_0|^2}=\frac{1}{\sigma-\beta_0}.$$

Quindi:

$$-Re\frac{\zeta'(\sigma+i\gamma_0)}{\zeta(\sigma+i\gamma_0)}\leq A\ln\gamma_0-\frac{1}{\sigma-\beta_0}.\tag{11.26}$$

Ora in (11.22) e (11.25) sostituiamo $t = \gamma_0$ per ottenere, grazie a (11.21):

$$3\left(\frac{1}{\sigma - 1} + C\right) + 4\left(A \ln \gamma_0 - \frac{1}{\sigma - \beta_0}\right) + \left(A \ln(2\gamma_0)\right) \geq 0.$$

Sempre per lo stesso ragionamento, nella nostra regione $t \geq 2$, $1 < \sigma \leq 2$ possiamo incorporare tutte le costanti nel seguente modo:

$$3C + 5A \ln \gamma_0 + A \ln 2 \leq K \ln \gamma_0,$$

quindi abbiamo ottenuto:

$$\frac{4}{\sigma - \beta_0} \leq \frac{3}{\sigma - 1} + K \ln \gamma_0.$$

Per finire poniamo $\sigma = 1 + \delta / \ln \gamma_0$ con $\delta > 0$ e risolviamo per β_0 :

$$\beta_0 \leq 1 + \frac{\delta(\delta K - 1)}{(3 + 4K) \ln \gamma_0},$$

scegliendo $0 < \delta < K^{-1}$ e ponendo $-c = \delta(K\delta - 1) < 0$ otteniamo:

$$\beta_0 \leq 1 - \frac{c}{\ln \gamma_0}. \tag{11.27}$$

Ora ricordiamo che $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ è un generico zero non banale di ζ con $\gamma_0 \geq 2$. Quindi parte reale e immaginaria di ρ_0 devono soddisfare (11.27), ovvero abbiamo dimostrato il teorema.

□

12 La formula di Riemann-Von Mangoldt

Nel suo articolo del 1860 Riemann stabilì una formula asintotica per il numero di zeri non banali della ζ con parte immaginaria nell'intervallo $[0, T]$. Tale formula fu poi dimostrata di Von Mangoldt circa trent'anni dopo. In questa sezione noi presenteremo una dimostrazione tratta dal libro [2] di Harold Davenport. Iniziamo con le seguenti definizioni:

Definizione 12.2. Sia $T > 0$, poniamo

$$N(T) := \#\{\rho = \beta + i\gamma \;\; con\; 0 \leq \beta \leq 1 \; e\; 0 \leq \gamma \leq T \;\mid \zeta(\rho) = 0\}.$$

Data una curva $\alpha \in C([0,1], \mathbb{C})$ e una funzione meromorfa f i cui poli o zeri non appartengono ad α, denoteremo con

$$[\arg f]_\alpha = \int_\alpha Im \frac{f'(s)}{f(s)} ds,$$

(parametrizzato da $t \to \alpha(t)$) ovvero l'incremento dell'argomento di $f(s)$ quando s descrive α. Notiamo che se α è una curva chiusa

$$[\arg f]_\alpha = \int_\alpha \frac{f'(s)}{f(s)} ds,$$

in quanto per il teorema dei residui $\int_\alpha \frac{f'(s)}{f(s)} ds \in i\mathbb{Z}$.

Sia ora R il rettangolo con vertici in

$$2, \;\; 2+iT, \;\; -1+iT, \;\; -1,$$

orientato in senso antiorario. Per comodità da qui in poi T non corrisponderà mai alla parte immaginaria di qualche zero non banale ρ. Per quanto visto nel Teorema 5.2 abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$2\pi N(T) = [\arg \zeta]_R = [\arg \xi]_R.$$

Come al solito, quindi, lavoreremo con la funzione ξ, per via della sua equazione funzionale (5.9).

Se chiamiamo L la spezzata che congiunte i punti

$$2, \;\; 2+iT, \;\; \frac{1}{2}+iT,$$

ed L' quella che congiunge

$$\frac{1}{2}+iT, \;\; -1+iT, \;\; -1,$$

abbiamo grazie alla simmetria di ξ rispetto alla retta $Re(s) = \frac{1}{2}$ che

$$[\arg \xi]_L = [\arg \xi]_{L'}$$

ovvero

$$\begin{aligned} [\arg \xi]_R &= 2[\arg \xi]_L \\ \pi N(T) &= [\arg \xi]_L. \end{aligned} \tag{12.28}$$

Ora possiamo dimostrare la stima (12.29), detta formula di Riemann-Von Mangoldt.

Teorema 12.1. *Quando $T \to \infty$ si ha:*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T). \tag{12.29}$$

Dimostrazione. Riscriviamo la definizione di ξ:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s).$$

Quindi otteniamo:

$$[\arg \xi]_L = [\arg(s-1)]_L + [\arg \pi^{-\frac{s}{2}}]_L + [\arg \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)]_L + [\arg \zeta]_L.$$

Stimiamo separatamente tutti i termini:

$$[\arg(s-1)]_L = \arg(iT - \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2} + O(T^{-1}).$$

$$[\arg \pi^{-\frac{s}{2}}]_L = -\frac{1}{2} T \ln \pi.$$

Ora, in quanto $\Gamma(s)$ è reale per s reale positivo, e nella regione $\sigma > 0$ è possibile definire in modo olomorfo $\ln \Gamma$ abbiamo:

$$[\arg \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)]_L = Im \ln \Gamma\left(\frac{iT}{2} + \frac{5}{4}\right).$$

Ricordiamo il Teorema di Stirling 10.2 (valido sicuramente a destra di $Re(s) = 0$):

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \frac{\ln 2\pi}{2} + O(|s|^{-1}).$$

E quindi scriviamo:

$$Im \ln \Gamma\left(\frac{iT}{2} + \frac{5}{4}\right) = Im\left\{\left(\frac{iT}{2} + \frac{3}{4}\right) \ln \left(\frac{iT}{2} + \frac{5}{4}\right) - \frac{iT}{2} - \frac{5}{4} + \frac{\ln 2\pi}{2} + O(|T|^{-1})\right\},$$

in quanto ovviamente per T abbastanza grande $\left|\frac{iT}{2} + \frac{5}{4}\right| \sim |T|$. Siccome

$$\ln\left(\frac{iT}{2} + \frac{5}{4}\right) = \ln\left|\frac{iT}{2} + \frac{5}{4}\right| + i \arg\left(\frac{iT}{2} + \frac{5}{4}\right) = \ln \frac{T}{2} + \frac{\pi}{2} + O(T^{-1}).$$

Abbiamo dunque

$$Im \ln \Gamma\left(\frac{iT}{2} + \frac{5}{4}\right) = \frac{T}{2} \ln \frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \frac{3\pi}{8} + O(T^{-1}).$$

E mettendo insieme queste stime otteniamo, grazie alla (12.28):

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \frac{[\arg \zeta]_L}{\pi} + O(T^{-1}).$$

Dunque se ora dimostriamo che $[\arg \zeta]_L = O(\ln T)$ abbiamo finito. La stima di questo termine è di fatto il passo più difficile della dimostrazione, che noi ora interromperemo un momento per vedere due lemmi, i quali ci permetteranno di concludere.

Lemma 12.2. *Per T sufficientemente grande si ha:*

$$\sum_{\rho} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} = O(\ln T).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che per (11.23) si ha

$$Re\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \leq A \ln t - Re \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right),$$

per $1 \leq \sigma \leq 2$ e $t \geq 2$. Scegliamo $s = 2+iT$ e notiamo che:

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2} = c < \infty. \tag{12.30}$$

Quindi a meno di cambiare la costante A abbiamo che per $T \geq 2$ vale:

$$Re \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \leq A \ln T.$$

Ora

$$Re \frac{1}{s-\rho} = \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} \geq \frac{1}{4+(T-\gamma)^2} \geq \frac{1}{4+4(T-\gamma)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+(T-\gamma)^2},$$

e ricordando che tutti i termini della serie sono positivi, otteniamo:

$$\sum_{\rho} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \leq 4A \ln T \qquad T \geq 2.$$

□

In particolare abbiamo subito il seguente corollario:

Corollario 12.3. *Per T sufficientemente grande si ha:*

1. *Il numero di zeri non banali con $T-1 < \gamma < T+1$ è $O(\ln T)$;*

2. $$\sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma| \geq 1}} \frac{1}{(T-\gamma)^2} = O(\ln T);$$

3. *Sia $-1 \leq \sigma \leq 2$, $s = \sigma + iT$, allora:*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma| < 1}} \frac{1}{(s-\rho)} + O(\ln T).$$

Dimostrazione. 1. Sia $K(T) = \#\{\rho \text{ tali che } |\gamma - T| < 1\}$, si ha:

$$\sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|<1}} \frac{1}{2} \leq \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|<1}} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \leq A \ln T.$$

E quindi:

$$K(T) \leq 2A \ln(T).$$

2. Con lo stesso ragionemanto si ottiene:

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|\geq 1}} \frac{1}{(T-\gamma)^2} \leq \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|\geq 1}} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} = O(\ln T);$$

3. Ricordiamo la formula 10.19 per la derivata logaritmica di ζ:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{s-1} + \frac{\ln \pi}{2} - \frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)}.$$

Ora sia s come nell'enunciato e $s' = 2 + iT$.

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{\zeta'(s')}{\zeta(s')} = \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+iT-\rho} \right) - \frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} + \frac{\Gamma'(2+iT/2)}{\Gamma(2+iT/2)} + O(1).$$

Per 10.1 si ha:

$$\frac{\Gamma'(2+iT/2)}{\Gamma(2+iT/2)} = \ln |T| + O(1),$$

$$\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} = \ln |T| + O(1).$$

Quindi

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\zeta'(s')}{\zeta(s')} + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+iT-\rho} \right) + O(1),$$

ricordando che per 12.30 si ha

$$\frac{\zeta'(s')}{\zeta(s')} = O(1),$$

si ottiene:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+iT-\rho} \right) + O(1).$$

Ora spezziamo la somma: per i ρ tali che $|\gamma - T| \geq 1$ abbiamo:

$$\left| \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+iT-\rho} \right| = \frac{2-\sigma}{|(s-\rho)(2+iT-\rho)|} \leq \frac{3}{|\gamma - T|^2}.$$

E quindi per il punto 2):

$$\sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|\geq 1}} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+iT-\rho} \right) = O(\ln T).$$

Per i ρ tali che $|\gamma - T| < 1$ abbiamo che $|2 + iT - \rho| \geq 1$, quindi per il punto 1):

$$\sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|<1}} \frac{1}{2+iT-\rho} = O(\ln T).$$

Ora finiamo scrivendo:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(1) + \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|\geq 1}} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+iT-\rho} \right) + \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|<1}} \frac{1}{s-\rho} - \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|<1}} \frac{1}{2+iT-\rho}$$

$$= \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|<1}} \frac{1}{s-\rho} + O(\ln T).$$

□

Adesso, con questi strumenti, terminiamo la dimostrazione della la formula di Riemann-Von Mangholt. Avevamo dimostrato:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \frac{[\arg \zeta]_L}{\pi} + O(T^{-1}),$$

e rimaneva da stimare il termine $[\arg \zeta]_L$. Dalla definizione, abbiamo:

$$[\arg \zeta]_L = \int_0^T Im \frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} dt - \int_{\frac{1}{2}}^2 Im \frac{\zeta'(x+iT)}{\zeta(x+iT)} dx. \tag{12.31}$$

Ora ricordiamo che per $\sigma > 1$ $\ln \zeta$ è una funzione olomorfa ben definita, e vale per (3.4)

$$\ln \zeta(s) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{sn}},$$

$$Im \ln \zeta(2+iT) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(Tn)}{np^{2n}} = O(1).$$

Quindi

$$[\arg \zeta]_L = O(1) - \int_{\frac{1}{2}}^2 Im \frac{\zeta'(x+iT)}{\zeta(x+iT)} dx.$$

Per stimare l'integrale usiamo il Lemma (12.2) e il suo corollario, parte 3); abbiamo

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 Im \frac{\zeta'(x+iT)}{\zeta(x+iT)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 Im \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|<1}} \frac{1}{s-\rho} ds + O(\ln T) =$$

$$= O(\ln T) + \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|<1}} \int_{\frac{1}{2}+iT}^{2+iT} Im \frac{1}{s-\rho} ds;$$

è facile controllare che:

$$\left| \int_{\frac{1}{2}}^{2} Im \frac{1}{s-\rho} ds \right| \leq \pi,$$

Inoltre il numero degli addendi della somma

$$\sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma|<1}}$$

è un $O(\ln T)$ per il Corollario 12.3, quindi abbiamo mostrato che

$$[\arg \zeta]_L = O(\ln T).$$

Sostituendo queste stime in (12.31) otteniamo:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T),$$

che è la formula di Riemann- Von Mangholtd. □

13 Formule esatte

In questa sezione dimostreremo una delle cosiddette 'formule esatte'. Essa ci espliciterà, finalmente, il profondo legame che esiste tra la distribuzione dei numeri primi e la distribuzione degli zeri non banali. Faremo uso, per semplificare i conti e le idee, delle seguenti notazioni:

- Indicheremo con
$$\sum\nolimits_{\rho}' = \lim_{T\to\infty} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}}$$
il valore principale della somma.

- Chiameremo $\psi_0(x)$ la funzione
$$\psi_0(x) = \frac{\psi(x^+) + \psi(x^-)}{2}; \tag{13.32}$$

- Se $f = O(g)$ scriveremo $f \ll g$;

- Infine, se x è un reale positivo indicheremo con

$$\langle x \rangle = \begin{cases} \min_p \min_{n\geq 0} |x - p^n| & \text{se } x \text{ non è potenza di un primo} \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ciò che noi dimostreremo è:

Teorema 13.1. *Sia $x \geq 2$, si ha*

$$\psi_0(x) = x - \sum\nolimits_\rho' \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1 - x^{-2}).$$

Idea della dimostrazione:

- Usando l'integrale discontinuo, valido per $c > 0$

$$\delta(y) := \frac{1}{2\pi i}\text{p.v.}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < y < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{se } y = 1, \\ 1 & \text{se } y > 1. \end{cases} \tag{13.33}$$

  possiamo scrivere (per $c > 1$)

$$\psi_0(s) = \frac{1}{2\pi i}\text{p.v.}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right] \frac{x^s}{s} ds.$$

  Infatti, ricordando che per (3.5) si ha:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \quad \sigma > 1$$

  otteniamo formalmente

$$\frac{1}{2\pi i}\text{p.v.}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right] \frac{x^s}{s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \delta\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) = \psi_0(x).$$

- Una volta giustificati questi passaggi, cercheremo, mediante un opportuno contorno, di esprimere l'integrale qui sopra come la somma dei residui della funzione

$$\left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right] \frac{x^s}{s},$$

  che sono proprio la somma a destra di (13.1).

Prima di cominciare la dimostrazione, abbiamo bisogno di tre lemmi: uno per capire in che modo l'integrale (13.33) converge a δ, l'altro per una stima di $\frac{\zeta'}{\zeta}$ in $\sigma \leq -1$ e l'ultimo per ottenere una maggiorazione per $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$ con $-1 \leq \sigma \leq 2$ e t opportuno.

Lemma 13.2. *Sia $T > 0$, $c > 0$, $y > 0$ e*

$$I(y,T) := \frac{1}{2\pi}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds.$$

Allora si ha:

$$|I(y,T) - \delta(y)| \leq \begin{cases} y^c \min(1, T^{-1}|\ln y|^{-1}) & \text{se } y \neq 1; \\ cT^{-1} & \text{se } y = 1. \end{cases}$$

Dimostrazione. Nel caso in cui $0 < y < 1$, notiamo che

$$\frac{y^s}{s} \to 0 \text{ per } \sigma \to \infty$$

uniformemente in t. Quindi possiamo scrivere:

$$I(y,T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iT}^{\infty+iT} \frac{y^s}{s} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{\infty-iT} \frac{y^s}{s} ds.$$

In quanto, se consideriamo il rettangolo R di vertici

$$c+iT,\ U+iT,\ U-iT,\ c-iT$$

con $U > 1$ abbiamo per il teorema dei residui che:

$$\int_R \frac{y^s}{s} ds = 0.$$

Facendo tendere $U \to \infty$, si ha che nel lato (di lunghezza $2T$ fissata) di vertici $U + iT,\ U - iT$ l'integranda tende a 0, quindi si conclude. Ora

$$\left| \int_{c+iT}^{\infty+iT} \frac{y^s}{s} ds \right| \le \frac{1}{T}\int_c^\infty y^\sigma d\sigma = \frac{y^c}{T|\ln y|}.$$

Analogamente per il secondo integrale, quindi si conclude una prima disuguaglianza. Resta da mostrare, nel caso $0 < y < 1$ che $|I(y,T)| \le y^c$. Questa stima è facilmente ottenibile cambiando la linea di integrazione con un arco di circonferenza, centrata in 0 e raggio $R^2 = c^2 + T^2$. In questo contorno circolare abbiamo: $|y^s| \le y^c$ e $|s| = R$, quindi:

$$|I(y,T)| \le \frac{1}{2\pi}\pi R \frac{y^c}{R} < y^c.$$

Per il caso $y > 1$ si fa esattamente lo stesso ragionamento, solo usando, come prima, un rettangolo di vertici:

$$c+iT,\ -U+iT,\ -U-iT,\ c-iT$$

e l'arco di circonferenza a sinistra di $Re(s) = c$. Questa volta però i due contorni ingloberanno l'unico polo di $\frac{y^s}{s}$ in $s = 0$, di residuo $1 = \delta(y)$. Nell'ultimo caso da considerare, $y = 1$, con un conto diretto si ottiene:

$$I(1,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T} \frac{idt}{c+it} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T} \frac{ic+t}{c^2+t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{c}{c^2+t^2} dt,$$

in quanto $t \mapsto \frac{t}{c^2+t^2}$ è una funzione dispari. Quindi

$$I(1,T) = \frac{1}{\pi}\int_0^{T/c} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\arctan(T/c)}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{\arctan(c/T)}{\pi}.$$

Quindi:

$$|I(1,T) - 1/2| = \frac{\arctan(c/T)}{\pi} \leq \frac{c}{T}.$$

□

Lemma 13.3. *Sia D la regione ottenuta togliendo dal semipiano chiuso $\sigma \leq -1$ dei dischi di raggio $\frac{1}{2}$ centrati negli zeri banali di ζ (ovvero -2, -4, $\ldots$). Per $s \in D$ si ha:*

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \ll \ln(2|s|).$$

Dimostrazione. Ricordiamo l'equazione funzionale (5.8) di ζ:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

e che per le proprietà della Γ vale:

$$\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s}{2})} = \pi^{-\frac{1}{2}}2^{1-s}\cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right)\Gamma(s).$$

Dunque, dividendo e facendo i conti, si ottiene un'equazione funzionale equivalente per la ζ:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(s)\zeta(s).$$

Ora consideriamo le derivate logaritmiche:

$$-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = \text{const.} - \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi s}{2}\right) + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

A noi interessa stimare $\frac{\zeta'}{\zeta}$ in $\sigma \leq -1$, poniamo $w = 1-s$. Quindi $Re(w) \leq -1$ se e solo se $Re(s) \geq 2$, e consideriamo la funzione a destra della uguaglianza per $\sigma \geq 2$. Ora i punti in cui $\frac{\pi}{2}\tan(\frac{\pi s}{2})$ ha dei poli sono $2k+1$, con k intero. Quindi se $|s-(2k+1)| \geq \frac{1}{2}$ per ogni k intero, $\frac{\pi}{2}\tan(\frac{\pi s}{2})$ resta limitata. Ma $|s-(2k+1)| \geq \frac{1}{2}$ se e solo se $|w-2k| \geq \frac{1}{2}$. Per (12.30), il termine $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ resta limitato in $\sigma \geq 2$. Infine, usando il Lemma 10.1, abbiamo che:

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \ll \ln|s| = \ln|1-w| \ll \ln(2|w|)$$

nella regione considerata.

□

Lemma 13.4. *Esiste una successione di numeri T_1, T_2, $,\ldots$ tali che $n+1 < T_n < n+2$ e per $-1 \leq \sigma \leq 2$ e $t = T_n$ vale:*

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq K\ln T_n;$$

con K positivo e fissato.

Dimostrazione. Scegliamo un naturale $n > 0$. Ricordiamo che per il punto 1) del Corollario 12.3, il numero di zeri non banali con $n < y < n+1$ è minore di $2A \ln n$. Quindi suddividiamo l'intervallo $[n, n+1]$ in $[2A \ln n] + 1$ parti uguali. Sicuramente esiste almeno uno di questi sotto-intervalli, chiamiamolo I, per cui non esistono ρ con $\gamma \in I$. Scegliamo quindi T_n il punto medio di I. Sempre per il Corollario 12.3, abbiamo per $-1 \leq \sigma \leq 2$ e $t = T_n$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\substack{\rho \\ |T_n - \gamma| < 1}} \frac{1}{(s-\rho)} + O(\ln T_n)$$

e inoltre per i ρ della somma, si ha

$$|s-\rho| \geq |T_n - \gamma| \geq \frac{1}{2} \frac{1}{[2A \ln n] + 1}.$$

Quindi concludiamo in quanto:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\substack{\rho \\ |T_n - \gamma| < 1}} \frac{1}{(s-\rho)} + O(\ln T_n) \leq K \ln^2 T_n$$

con K una costante opportuna.

$\square$

Ora iniziamo la dimostrazione del Teorema 13.1. Denotiamo

$$J(x, T) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right] \frac{x^s}{s} ds, \quad c > 1.$$

Ricordiamo la (3.5), ovvero:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

e ricordiamo che tale serie è assolutamente convergente in $\sigma > 1$. Quindi possiamo scambiare il segno di integrale con il segno di serie ed ottenere:

$$J(x, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) I\left(\frac{x}{n}, T\right).$$

Quindi scrivendo:

$$\psi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \delta\left(\frac{x}{n}\right),$$

otteniamo grazie al Lemma 13.2

$$|\psi_0(x) - J(x, T)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left| \delta\left(\frac{x}{n}\right) - I\left(\frac{x}{n}, T\right) \right| \leq$$

$$\leq cT^{-1}\Lambda(x) + \sum_{n=1\ n\neq x}^{\infty} \Lambda(n)\frac{x^c}{n^c}\min(1, T^{-1}|\ln(x/n)|^{-1}), \tag{13.34}$$

dove il termine $cT^{-1}\Lambda(x)$ compare solo se x è la potenza di un primo. Quello che noi faremo ora è stimare la somma per trovare un termine di errore più maneggevole. Scegliamo $c = 1 + 1/\ln(x)$, e spezziamo la sommatoria; quando $n \leq (3/4)x$ o $n \geq (5/4)x$, abbiamo che $|\ln(x/n)|$ ha un limite inferiore positivo, quindi

$$\sum_{\substack{n\leq\frac{3}{4}x\\ n\geq\frac{5}{4}x}} \Lambda(n)\frac{x^c}{n^c}\min(1, T^{-1}|\ln(x/n)|^{-1}) \ll$$

$$\ll x^c T^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-c} \ll exT^{-1}\left[-\frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)}\right] \ll xT^{-1}\ln x, \tag{13.35}$$

in quanto $x^c = ex$ e per la (11.22) abbiamo $-\frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)} \leq C + \ln x$. Ora consideriamo i termini per cui $\frac{3}{4}x < n < x$, e chiamiamo x_1 la più grande potenza di un primo in quell'intervallo; possiamo supporre che sia $\frac{3}{4}x < x_1 < x$, altrimenti in quell'intervallo $\Lambda \equiv 0$. Per il termine $n = x_1$ abbiamo:

$$\ln(x/n) = -\ln\left(1 - \frac{x - x_1}{x}\right) \geq \frac{x - x_1}{x},$$

e quindi il contributo alla somma di questo termine è

$$\ll \Lambda(x_1)\min\left[1, \frac{x}{T(x - x_1)}\right] \ll \Lambda(x_1)\min\left[1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right] \ll (\ln x)\min\left[1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right].$$

Gli altri termini, nell'intervallo considerato, che contribuiscono alla somma sono compresi tra $3/4x$ e x_1, quindi possiamo scriverli come: $n = x_1 - v$ con $0 < v < 1/4x$ e:

$$\ln(x/n) \geq \ln(x_1/n) = -\ln(1 - v/x_1) \geq v/x_1,$$

e quindi possiamo maggiorare la somma:

$$\sum_{3/4x<n<x_1} \Lambda(n)\min(1, T^{-1}|\ln(x/n)|^{-1}) \ll \sum_{0<v<1/4x} \Lambda(x_1 - v)T^{-1}\frac{x_1}{v}.$$

Ora $\Lambda(x_1 - v) \leq \ln(x_1 - v) = \ln v + \ln(x_1/v - 1) \leq \ln v + \ln x_1$, usiamo questa maggiorazione:

$$\sum_{0<v<1/4x} \Lambda(x_1 - v)T^{-1}\frac{x_1}{v} \ll \frac{x_1}{T}\sum_{0<v<1/4x}\frac{\ln v + \ln x_1}{v} \ll \frac{x_1}{T}(\ln^2 x + \ln x_1 \ln x),$$

e siccome $x_1 < x$ si ha infine:

$$\sum_{3/4x<n<x} \Lambda(n)\min(1, T^{-1}|\ln(x/n)|^{-1}) \ll \frac{x}{T}\ln^2 x + (\ln x)\min\left[1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right]. \tag{13.36}$$

I termini tali che $x < n < 5/4x$ sono trattati in modo del tutto simmetrico, solo che x_1 è sostuito da x_2, la più piccola potenza di un primo in quell'intervallo. Si ottiene infine la stessa maggiorazione. Quindi, grazie all'ultima osservazione e mettendo insieme le stime (13.35) ed (13.36) otteniamo:

$$|\psi_0(x) - J(x,T)| \ll \frac{x\ln^2 x}{T} + (\ln x)\min\left[1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right]. \tag{13.37}$$

Ora, il prossimo passo, sarà quello di considerare un opportuno rettangolo R e rimpiazzare $J(x,T)$ con i tre integrali che corrispondono agli altri lati; in particolare siano U e T positivi e consideriamo il rettangolo di vertici:

$$c - iT, \quad c + iT, \quad -U + iT, \quad -U - iT,$$

Scegliamo per U un numero naturale dispari, così che il segmento di vertici $U + iT$ e $U - iT$ non incontri alcuno zero banale di ζ. Ora usiamo il Lemma 13.4 e scegliamo un T_n come semi-altezza per il nostro rettangolo R. Per il teorema dei residui abbiamo:

$$\int_R \left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\frac{x^s}{s}ds = x - \sum_{|\gamma|<T_n}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0<2m<U}\frac{x^{-2m}}{-2m}.$$

Ora stimiamo gli integrali sui lati orizzontali. Siccome $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$, consideriamo solo il segmento di vertici $-U + iT,\ c + iT$. Lo spezziamo in $-U + iT,\ -1 + iT$ e $-1 + iT,\ c + iT$. Nel secondo abbiamo, per il Lemma 13.4 :

$$\int_{c+iT}^{-1+iT}\left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\frac{x^s}{s}ds \ll \ln^2 T_n \int_{-1}^{c}\left|\frac{x^s}{s}\right| \ll \frac{\ln^2 T_n}{T_n}\int_{-\infty}^{c} x^\sigma d\sigma \ll \frac{x\ln^2 T_n}{T_n \ln x}. \tag{13.38}$$

Per la prima parte invece ricordiamo il Lemma 13.3 in D si ha $|\zeta'(s)/\zeta(s)| \ll \ln(2|s|)$, quindi:

$$\int_{-1+iT}^{-U+iT}\left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\frac{x^s}{s}ds \ll \int_{c+iT}^{-1+iT}|\ln(2|s|)\frac{x^\sigma}{|s|}d|s|$$

Ora la funzione $t \to \frac{\ln(2t)}{t}$ è descrescente per $t \geq 2$. Quindi, ricordando che per ogni n si ha $T_n > 2$ e quindi nella parte di segmento che consideriamo $\ln(2|s|)/|s| \leq \ln(2T_n)/T_n$, sostituiamo:

$$\int_{c+iT}^{-1+iT}\left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\frac{x^s}{s}ds \ll \frac{\ln(2T_n)}{T_n}\int_{-U}^{-1} x^\sigma d\sigma \ll \frac{\ln(2T_n)}{T_n}\int_{-\infty}^{-1} x^\sigma d\sigma \ll \frac{\ln T_n}{T_n x\ln x}. \tag{13.39}$$

Resta quindi da stimare l'integrale

$$\int_{U+iT}^{U-iT}\left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\frac{x^s}{s}ds$$

Usando ancora una volta il Lemma 13.3, grazie allo stesso ragionamento di prima, otteniamo:

$$\int_{U+iT}^{U-iT}\left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\frac{x^s}{s}ds \ll \frac{\ln(2U)}{U}\int_{-T}^{T}x^{-U}dt \ll \frac{T_n\ln U}{Ux^U}. \tag{13.40}$$

Ora abbiamo finito, raccogliamo tutte queste stime:

$$J(x,T_n) = x - \sum_{|\gamma|<T_n}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0<2m<U}\frac{x^{-2m}}{-2m} + ERR(x,T_n,U),$$

e grazie alle (13.38), (13.39), (13.40):

$$ERR(x,T_n,U) \ll \frac{T_n\ln U}{Ux^U} + \frac{\ln T_n}{T_n x\ln x} + \frac{x\ln^2 T_n}{T_n\ln x} \ll \frac{T_n\ln U}{Ux^U} + \frac{x\ln^2 T_n}{T_n\ln x}.$$

Facendo tendere $U\to\infty$ si ha:

$$J(x,T_n) = x - \sum_{|\gamma|<T_n}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1-x^{-2}) + ERR(x,T_n),$$

con

$$ERR(x,T_n) \ll \frac{x\ln^2 T_n}{T_n\ln x}.$$

Ricordiamo la (13.37) e finiamo scrivendo:

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma|<T_n}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1-x^{-2}) + R(x,T_n), \tag{13.41}$$

dove

$$R(x,T_n) \ll \frac{x\ln^2 x}{T_n} + (\ln x)\min\left[1,\frac{x}{T_n\langle x\rangle}\right] + \frac{x\ln^2 T_n}{T_n\ln x} \ll$$
$$\ll \frac{x}{T_n}\ln^2(xT_n) + (\ln x)\min\left[1,\frac{x}{T_n\langle x\rangle}\right]. \tag{13.42}$$

Quindi il teorema è dimostrato, difatti facendo tendere $T_n\to\infty$ si ottiene la tesi. Abbiamo ottenuto anche un resto, la cui importanza si noterà nella prossima sezione. Notiamo che se x è un intero, allora $\langle x\rangle \geq 1$, quindi il termine di errore diventa semplicemente

$$R(x,T_n) \ll \frac{x}{T_n}\ln^2(xT_n) \tag{13.43}$$

Infine, non dimostreremo questo fatto, ma facciamo notare come la formula (13.41) continui a valere anche per $x\geq 1$ e per un T qualunque.

14 L'ipotesi di Riemann e il teorema dei numeri primi con resto

Nella sezione 11 avevamo preannunciato che, grazie alla conoscenza di quella particolare regione priva di zeri, avremmo ottenuto un miglioramento della stima di $\pi(n)$, in particolare un resto. Ricordiamo il Teorema 11.1: esiste una costante $c > 0$ tale che ζ non ha zeri nella regione

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln t}, \quad t \geq 2.$$

Grazie a questa disuguaglianza otterremo una stima della somma (13.41). Sia infatti T sufficientemente grande, e ρ uno zero non banale con $|\gamma| \leq T$, e quindi $|x^\rho| = x^\beta \leq x^{1-c/\ln T} = xe^{-c\frac{\ln x}{\ln T}}$. Inoltre

$$\sum_{0<\gamma<T} \frac{1}{|\rho|} \leq \sum_{0<\gamma<T} \frac{1}{\gamma} = \int_0^T t^{-1} dN(t) = \frac{N(T)}{T} + \int_0^T t^{-2} N(t) dt,$$

dove $N(t)$ è, come nella sezione 12, il numero di zeri non banali con $\gamma \leq T$. Per la formula di Riemann-Von Mangoldt (si veda il Teorema 12.1) si ha $N(t) \ll t \ln t$, quindi:

$$\sum_{0<\gamma<T} \frac{1}{|\rho|} \ll \frac{N(T)}{T} + \int_0^T t^{-2} N(t) dt \ll \ln t + \int_0^T t^{-1} \ln t dt \ll \ln^2 T,$$

quindi

$$\sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} \ll x \ln^2(T) e^{-c\frac{\ln x}{\ln T}}.$$

Scegliamo x intero, per i risultati del capitolo precedente, in particolare la (13.41), (13.42), (13.43), otteniamo:

$$|\psi(x) - x| \ll x \ln^2(T) e^{-c\frac{\ln x}{\ln T}} + \frac{x \ln^2(xT)}{T}.$$

Scegliamo dunque T in funzione di x, ponendo $\ln^2 T = \ln x$. Quindi $T^{-1} = e^{-\sqrt{\ln x}}$, e sostituendo otteniamo:

$$|\psi(x) - x| \ll x \ln(x) e^{-c\sqrt{\ln x}} + x \ln^2(x) e^{-\sqrt{\ln x}},$$

Scegliamo infine $c_1 < \min(1, c)$ per ottenere

Teorema 14.1 (Teorema dei Numeri Primi con resto, versione ψ). *Si ha per $x \geq 1$*

$$|\psi(x) - x| \ll xe^{-c_1\sqrt{\ln x}}.$$

Un'osservazione banale, ma di cui faremo uso da qui in poi, è che per ogni $c > 0$ e $0 < \alpha < 1$ si ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{-c_1\sqrt{\ln x}}}{x^\alpha} = \infty.$$

Adesso vorremo trovare una stima simile per $\pi(x)$, che ricaveremo con un semplice argomento di somma per parti; poniamo

$$\pi_1(x) = \sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} = \sum_{p^n\le x} \frac{1}{n} = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$$

Quindi notiamo che

$$\pi_1(x) - \pi(x) \ll \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + \dots \ll \sqrt{x}. \tag{14.44}$$

Scrivendo

$$\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln x} = \int_n^x \frac{dt}{t\ln^2 t}$$

otteniamo

$$\pi_1(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) \int_n^x \frac{dt}{t\ln^2 t} + \frac{1}{\ln x}\sum_{n\le x}\Lambda(n) =$$
$$= \int_2^x \frac{\psi(t)dt}{t\ln^2 t} + \frac{\psi(x)}{\ln x}. \tag{14.45}$$

Ora vogliamo sostituire t a $\psi(t)$ e studiare il termine di errore dovuto a questa perturbazione; poniamo

$$\widetilde{\pi_1}(x) := \int_2^x \frac{tdt}{t\ln^2 t} + \frac{x}{\ln x} = Li(x) + \frac{2}{\ln 2}, \tag{14.46}$$

dove abbiamo posto $Li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$. Inoltre grazie al Teorema 14.1 abbiamo

$$|\pi_1(x) - \widetilde{\pi_1}(x)| \ll \int_2^x e^{-c_1\sqrt{\ln t}}dt + xe^{-c_1\sqrt{\ln x}}.$$

La funzione integranda è decrescente, e $e^{-c_1\sqrt{\ln t}} \le 1$ in $[1,\infty]$. Quindi banalmente si ha:

$$\int_2^x e^{-c_1\sqrt{\ln t}}dt = \int_2^{\sqrt[4]{x}} e^{-c_1\sqrt{\ln t}}dt + \int_{\sqrt[4]{x}}^x e^{-c_1\sqrt{\ln t}}dt \le \sqrt[4]{x} + \int_{\sqrt[4]{x}}^x e^{-c_1\sqrt{\ln t}}dt.$$

Nell'intervallo $[\sqrt[4]{x}, x]$ si ha $\sqrt{\ln t} > \frac{1}{2}\sqrt{\ln x}$, quindi:

$$\int_2^x e^{-c_1\sqrt{\ln t}}dt \ll \sqrt[4]{x} + \int_{\sqrt[4]{x}}^x e^{-c_1\frac{1}{2}\sqrt{\ln x}}dt \ll \sqrt[4]{x} + xe^{-\frac{c_1}{2}\sqrt{\ln x}} \ll xe^{-\frac{c_1}{2}\sqrt{\ln x}}$$

E infine:

$$|\pi_1(x) - \widetilde{\pi_1}(x)| \ll xe^{-\frac{c_1}{2}\sqrt{\ln x}}.$$

Ora ricordando le (14.46) e (14.44):

$$\widetilde{\pi_1}(x) = Li(x) + \frac{2}{\ln 2},$$

$$|\pi_1(x) - \pi(x)| \ll \sqrt{x}$$

Otteniamo:

Teorema 14.2 (Teorema dei Numeri Primi con resto, versione π)**.** *Si ha per* $x \geq 1$

$$\pi(x) = Li(x) + O(xe^{-\frac{c_1}{2}\sqrt{\ln x}}).$$

Ora, per completare la nostra discussione, assumiamo che esista un numero $\frac{1}{2} \leq \Theta < 1$ con la propriatà che per ogni zero non banale $\rho = \beta + i\gamma$ si abbia $\beta \leq \Theta$. Quindi, ragionando esattamente come prima, otteniamo:

$$\sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} \ll x^\Theta \ln^2 T,$$

e (sempre grazie alla formula esatta (13.41))

$$|\psi(x) - x| \ll x^\Theta \ln^2 T + \frac{x \ln^2(xT)}{T},$$

poniamo infine $T = x^{1-\Theta}$ per avere

$$|\psi(x) - x| \ll x^\Theta \ln^2 x. \tag{14.47}$$

Per tradurre questo risultato in termini di π, ancora una volta ripetiamo il ragionamento precedente: poniamo

$$\widetilde{\pi_1}(x) := \int_2^x \frac{tdt}{t\ln^2 t} + \frac{x}{\ln x} = Li(x) + \frac{2}{\ln 2},$$

e grazie alla (14.45) abbiamo

$$|\pi_1(x) - \widetilde{\pi_1}(x)| = \left| \int_2^x \frac{(\psi(t) - t)dt}{t\ln^2 t} + \frac{\psi(x) - x}{\ln x} \right|.$$

Ora sostituiamo il nostro risultato (14.47)

$$|\pi_1(x) - \widetilde{\pi_1}(x)| \ll \int_2^x t^{\Theta-1}dt + x^\Theta \ln x \ll x^\Theta \ln x.$$

Ricordando la (14.44) e che $\frac{1}{2} \leq \Theta$ otteniamo

$$\pi(x) = Li(x) + O(x^{\Theta} \ln x).$$

Al giorno d'oggi nessuno è riuscito a dimostrare se un tale Θ esista o meno. L'ipotesi di Riemann non solo dichiara l'esistenza di un tale numero, ma lo prende come il migliore possibile, ovvero $\Theta = \frac{1}{2}$. Ciò significa che tutti gli zeri non banali giacciono sulla retta $\sigma = \frac{1}{2}$. Questa comporta la miglior stima ottenibile con questi mezzi:

$$\pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x} \ln x).$$

Per finire la tesi dimostriamo, come nella sezione 10, l'implicazione inversa. Ovvero se vale:

$$|\psi(x) - x| \ll x^a$$

per qualche $\frac{1}{2} < a < 1$ allora la ζ non ha zeri in $\sigma > a$. Infatti, come nella sezione 10, scriviamo (per $\sigma > 1$)

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{s+1}} dx = -\frac{1}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1},$$

ovvero

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} + s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{s+1}} dx.$$

Il fatto che $|\psi(x) - x| \ll x^a$ comporta che l'integrale a destra rappresenza una funzione olomorfa per $\sigma > a$, ovvero anche

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

è olomorfa in quel semipiano, da cui l'implicazione inversa.

Bibliografia

[1] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. 1979.

[2] Harold Davenport. *Multiplicative number theory*. 1967.

[3] Paul Erdös. On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 35(7):374, 1949.

[4] Jacques Hadamard. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bulletin de la Societé mathematique de France*, 24:199–220, 1896.

[5] Godfrey Harold Hardy and Marcel Riesz. *The general theory of Dirichlet's series*. Courier Dover Publications, 2013.

[6] Albert Edward Ingham. *The distribution of prime numbers*. Number 30. Cambridge University Press, 1932.

[7] Donald J. Newman. *Analytic number theory*, volume 177. Springer, 1998.

[8] Charles Jean de La Vallée Poussin. *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inferieurs à une limite donnée*, volume 59. Hayez, 1899.

[9] Bernhard Riemann. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1:145, 1859.

[10] Atle Selberg. An elementary proof of the prime-number theorem. *Annals of Mathematics*, pages 305–313, 1949.

[11] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, 2003.

[12] Edward C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*. Clarendon Press-Oxford, 1986.

[13] Don Zagier. Newman's short proof of the prime number theorem. *American Mathematical Monthly*, pages 705–708, 1997.