Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Matematica

Equazioni Differenziali Ordinarie

Dal Teorema di Cauchy–Lipschitz alle teorie di DiPerna–Lions e Crippa–De Lellis

Tesi di Laurea Triennale

Candidato:

Giorgio Stefani

Relatore:

Prof. Roberto Monti

Sessione di Laurea del 25 luglio 2014

Anno Accademico 2013 – 2014

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Matematica

Equazioni Differenziali Ordinarie

Dal Teorema di Cauchy–Lipschitz alle teorie di DiPerna–Lions e Crippa–De Lellis

Tesi di Laurea Triennale

Candidato:
Giorgio Stefani
matricola n° 1031160

Relatore:
Prof. Roberto Monti

. . . .

. . . .

Sessione di Laurea del 25 luglio 2014
Anno Accademico 2013 – 2014

A mio zio Luciano

Sommario

In questa tesi studiamo alcuni risultati sulle equazioni differenziali ordinarie, dalla teoria classica dell'ambiente Lipschitziano a quella più moderna sui campi vettoriali di tipo Sobolev. La tesi è divisa in due parti: nella prima discutiamo alcuni criteri di unicità locale per la soluzione del problema di Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, mentre nella seconda affrontiamo il problema dell'esistenza e dell'unicità del flusso associato ad un campo vettoriale.

Abstract

In this thesis we study some results on ordinary differential equations, from the classic theory of the Lipschitz setting to the more modern one on Sobolev vector fields. The thesis is divided in two parts: in the first one we discuss some local uniqueness criteria for the solution of the Cauchy problem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, while in the second one we face the problem of existence and uniqueness of the flow associated to a vector field.

Indice

Un matematico è una persona che trova analogie tra teoremi.
Un matematico migliore è quello che vede analogie tra le dimostrazioni.
Il miglior matematico nota analogie tra le teorie.
Possiamo allora immaginare che il matematico limite
sia quello che vede analogie tra le analogie.

— Stefan Banach, 1892 – 1945

Introduzione

Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione continua da un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ e fissiamo un punto $(t_0, y_0) \in \Omega$. Il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{A}$$

si dice *problema di Cauchy* o anche *problema a valori iniziali*, ed è composto da un'*equazione differenziale ordinaria* $y' = f(t,y)$ e da una *condizione iniziale* $y(t_0) = y_0$.

In fisica o nelle altre scienze, la modellizzazione di un sistema richiede spesso la risoluzione di un problema ai valori iniziali del tipo (A), e si può intendere l'equazione differenziale $y' = f(t,y)$ come una legge che descrive l'evoluzione, al variare del tempo t, dello stato $y(t)$ del sistema fisico a partire dalla situazione iniziale $y(t_0) = y_0$.

Nella prima parte di questo lavoro, ci siamo interessati alle *soluzioni locali* del problema (A), cioè alle funzioni $y \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^d)$ tali che

1) $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo (aperto) tale che $t_0 \in I$;

2) $(t, y(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$;

3) $y'(t) = f(t, y(t))$ per ogni $t \in I$;

4) $y(t_0) = y_0$.

Per quanto riguarda l'esistenza di una soluzione locale del problema (A), un teorema mostrato da G. Peano nel 1890 in [44] (si veda il Teorema 1.1.1) afferma che la continuità della funzione f in un intorno aperto del dato iniziale implica l'esistenza locale di almeno una soluzione del sistema. L'ipotesi di continuità della funzione f sull'aperto Ω assicura pertanto l'esistenza, per lo meno locale, di una soluzione.

Nella prima parte della tesi, ci siamo dunque posti il seguente problema: quando tale soluzione locale è anche unica?

Nella letteratura classica il più noto risultato sull'unicità locale della soluzione del problema (A) è il Teorema di Cauchy–Lipschitz, o Picard–Lindelöf (si veda il Teorema 1.1.3), che dimostra l'unicità locale della soluzione sotto l'ipotesi che la funzione f sia localmente Lipschitziana sull'aperto Ω (si veda la Definizione 1.1.2).

La condizione di Lipschitzianità della funzione f, tuttavia, è sufficiente ma non necessaria per l'unicità locale della soluzione del problema (A). Il nostro studio si è quindi concentrato su questo aspetto di non necessità della condizione di Lipschitz e si è sviluppato parallelamente su diversi fronti.

Abbiamo considerando un caso molto particolare di questa situazione "anomala" di non applicabilità del Teorema di Cauchy–Lipschitz, l'Esempio 1.1.5, che prende in considerazione la funzione scalare $f(t,y) = \sqrt{|y|} + \sqrt{t}$, con $t \geq 0$: cercando una possibile spiegazione del perché la soluzione locale rimanesse unica anche se la funzione f non soddisfa le ipotesi del Teorema di Cauchy–Lipschitz, siamo riusciti a formulare un primo risultato, il Teorema 1.2.1, che ci ha permesso di estendere il Teorema di Cauchy–Lipschitz, nel caso di una funzione f scalare, in modo tale da comprendere anche questo esempio particolare.

Successivamente, abbiamo cercato e studiato altri teoremi presenti nella letteratura classica che coinvolgessero situazioni "anomale" più o meno simili a quella dell'Esempio 1.1.5, sia scalari che vettoriali. I testi di riferimento utilizzati per questa ricerca sono stati [2], [3] e [34]; il testo [2], a nostro giudizio, è la fonte più completa su questo tema, e lo segnaliamo al lettore interessato per la chiarezza espositiva, la ricca rassegna di risultati e dimostrazioni, e l'esaustiva bibliografia. I risultati che trattano questo tipo di situazioni sono moltissimi, e non tutti sono generalizzazioni dirette del Teorema di Cauchy–Lipschitz. Ne abbiamo presi in considerazione alcuni che più si avvicinavano ai nostri scopi, in particolare i Teoremi di Montel–Tonelli, di Osgood e di Giuliano, e li abbiamo confrontati con il Teorema 1.2.1. Abbiamo ottenuto così nuove situazioni "anomale", sia scalari che vettoriali, che siamo riusciti a comprendere in ulteriori nuove estensioni del Teorema di Cauchy–Lipschitz.

Nella seconda parte della tesi, abbiamo sviluppato queste ricerche in un'ottica più moderna, prendendo in considerazione, invece della particolare soluzione locale del problema (A), il flusso generato dalla soluzione al variare del dato iniziale.

In altri termini, fissato $T > 0$, sia $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale dipendente dal tempo. Nella seconda parte di questo lavoro, abbiamo considerato il seguente problema

$$\begin{cases} \dfrac{dX_t}{dt}(x) = b_t(X_t(x)), & (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d, \\ X_0(x) = x, & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{B}$$

ed abbiamo studiato l'esistenza e l'unicità della mappa $X : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ soluzione del problema (B), detta *flusso* associato al campo vettoriale b, ed alcune sue proprietà notevoli.

La nostra analisi si è concentrata prevalentemente su due aspetti.

Da un lato, abbiamo studiato le tecniche introdotte nel 1989 da R. J. DiPerna e P.-L. Lions nel loro articolo [23], oggi note come *approccio Euleriano*, per la soluzione del problema (B) tramite l'*equazione del trasporto* associata

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \langle b, \nabla u \rangle = 0. \tag{C}$$

Più precisamente, partendo da un articolo di S. Fang e T. Zhang, [25], e da alcune note di Fang, [24], abbiamo mostrato che il Teorema di Giuliano (Teorema 1.3.3) visto nella prima parte può essere riformulato per dimostrare che il flusso associato ad un campo vettoriale b di tipo Osgood–Giuliano (si veda la 2.11) esiste ed è unico ed ha alcune proprietà notevoli in relazione all'equazione del trasporto e alla misura di Lebesgue (si vedano i Teoremi 2.2.1, 2.3.2 e 2.3.3). Abbiamo mostrato questi risultati elementari usando tecniche sia classiche (si veda il Lemma 2.2.4) che moderne, come la teoria della misura e dell'integrazione.

Dall'altro lato, abbiamo studiato i risultati di G. Crippa e C. De Lellis contenuti nel loro articolo [20] del 2008, in cui viene sviluppato quello che oggi è noto come *approccio Lagrangiano*, ovvero una tecnica di risoluzione del problema (B) che non coinvolge l'equazione associata (C). In particolare, abbiamo confrontato le nostre tecniche e la profondità del nostro Teorema 2.2.1 con quelle contenute nel loro articolo [20]: la nostra analisi è riassunta nel Teorema 2.4.4.

Il lavoro contenuto in questa tesi è il frutto di una intesa, proficua, istruttiva, stimolante e gratificante collaborazione con il mio relatore Professor Roberto Monti svoltasi in quest'ultimo anno accademico.

Il seme da cui tutto è cominciato è stato un esercizio che il Professor Monti ha proposto durante il suo corso di Analisi 2A tenuto nel primo semestre dell'a.a. 2012 – 2013, esercizio che è poi diventato l'Esempio 1.1.5. A partire da questa curiosa situazione "anomala" in cui il Teorema di Cauchy–Lipschitz non poteva essere applicato, ho cominciato a studiare la teoria delle equazioni differenziali. La prima parte di questa tesi raccoglie una parte di questo studio.

Il Professor Monti mi ha poi guidato e aiutato nella comprensione della nuova teoria sviluppata da DiPerna e Lions. Durante la raccolta di informazioni su questo argomento, ho incontrato prima i risultati di Fang e Zhang e, successivamente, quelli più recenti di Crippa e De Lellis. La seconda parte di questa tesi riassume alcune di queste ricerche.

Il lavoro contenuto in questa tesi è una raccolta non esaustiva e piuttosto eterogenea di risultati e spunti di riflessione sui quali ho lavorato nel corso di un anno. L'obiettivo e il senso di questa ricerca, nello spirito dell'aforisma di S. Banach, è stata l'analogia: non ho voluto privilegiare un particolare punto di vista o incidere profondamente su un aspetto specifico della teoria, ma piuttosto ho preferito avere una visione non troppo generale d'insieme, imparando a cogliere le somiglianze e le differenze — tra due risultati, tra due esempi, tra una tecnica classica ed una moderna — e, soprattutto, il perché di tali somiglianze e differenze; il *leitmotiv* non è stato un teorema o una tecnica particolare, ma piuttosto come una stessa idea si ripresentasse, seppur variata od ampliata, in situazioni diverse, alle volte simili e vicine, altre volte differenti e lontane.

Ringraziamenti. Un sentito ringraziamento al mio relatore Professor Roberto Monti: durante tutto il percorso che ha portato alla realizzazione di questo lavoro, è stato una persona paziente, onesta, sincera e sempre disponibile nei miei confronti ad ogni nostro incontro, aiutandomi e stimolandomi con tenace fiducia nelle mie capacità. Un ringraziamento particolare inoltre ai Professori Maurizio Cailotto, Andrea Marson e Alberto Tonolo, per il supporto offertomi durante quest'ultimo anno e le piacevoli conversazioni che ho avuto in loro compagnia. I miei più sinceri e affettuosi ringraziamenti alla mia famiglia, che mi ha aiutato e spronato sempre ed incondizionatamente durante tutto questo triennio, permettendomi di raggiungere questo prezioso traguardo. Infine, ringrazio tutti gli amici che ho avuto il piacere di conoscere durante tutto questo percorso.

PARTE 1

Alcuni criteri di unicità locale classici

In questa parte discutiamo alcuni criteri di esistenza e unicità locale per la soluzione del problema di Cauchy $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ che generalizzano in modo diretto il Teorema di Cauchy–Lipschitz. In particolare, nella prima sezione ricordiamo alcuni risultati classici utili alla nostra trattazione, nella seconda generalizziamo il Teorema di Cauchy–Lipschitz per il caso scalare e il Teorema di Montel–Tonelli e nella terza sezione generalizziamo i risultati precedenti al caso vettoriale.

Notazioni. In questa parte usiamo le seguenti simbologie e abbreviazioni:

- $B_r(c)$ indica la *palla Euclidea aperta* di centro $c \in \mathbb{R}^d$ e raggio $r > 0$ e $\bar{B}_r(c)$ indica la palla *chiusa*; se $c = 0$, scriviamo semplicemente $B(r)$ e $\bar{B}(r)$;
- $\|\cdot\|_\infty$ è la *norma infinito* (o la *norma della convergenza uniforme*) per funzioni continue definite su un compatto di $\mathbb{R}^d$;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il *prodotto scalare* naturale di $\mathbb{R}^d$.

Gli integrali sono intesi nel senso di Riemann. Diremo pertanto che un integrale *esiste finito* (o è *convergente* o, ancora, *converge*) se è ben definito come integrale di Riemann *in senso generalizzato*; i limiti ad uno o più punti critici saranno sottointesi e riferiti al contesto in cui è considerato l'integrale.

1.1. Introduzione

Sia $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione continua da un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Siamo interessati alle *soluzioni locali* del problema (1.1), cioè alle funzioni $y \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^d)$ tali che

1) $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo (aperto) tale che $x_0 \in I$;

2) $(x, y(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in I$;

3) $y'(x) = f(x, y(x))$ per ogni $x \in I$;

4) $y(x_0) = y_0$.

La continuità della funzione f in un intorno aperto del dato iniziale implica l'esistenza di almeno una soluzione del problema (1.1). Vale infatti il seguente risultato, ottenuto da G. Peano nel 1890, [44].

Teorema 1.1.1 (Peano)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un aperto e $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione continua. Per ogni $(x_0, y_0) \in \Omega$ esiste $\delta > 0$ e $y \in \mathcal{C}^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^d)$ che è soluzione del problema* (1.1)*.*

Affinché esista sempre una soluzione al problema (1.1), supporremo per comodità che la funzione f in (1.1) sia continua per ipotesi.

Una volta nota l'esistenza di una soluzione al problema (1.1), si possono indagare le condizioni sotto cui tale soluzione è unica, almeno in un intorno $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ del punto iniziale. L'ipotesi di continuità della funzione f non è sufficiente, in generale, per garantire l'unicità della soluzione: un esempio di funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$ ma tale che per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il problema (1.1) abbia soluzione non unica si può trovare in [34, p. 18]. È dunque necessario aggiungere ulteriori ipotesi alla funzione f per garantire l'unicità locale della soluzione.

Uno dei più noti teoremi di esistenza e unicità locale è il Teorema di Cauchy–Lipschitz o Picard–Lindelöf. Ricordiamo preliminarmente la seguente definizione.

Definizione 1.1.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un insieme aperto. Diciamo che una funzione $f \in \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{R}^d)$ è *localmente di Lipschitz in y* se per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{1.2}$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in K$.

Aggiungendo alla continuità della funzione f anche l'ipotesi della locale Lipschitzianità in y si dimostra che il problema (1.1) ha un'unica soluzione locale. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1.1.3 (Cauchy–Lipschitz o Picard–Lindelöf)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un insieme aperto, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e sia $f \in \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{R}^d)$ una funzione localmente di Lipschitz in y. Allora esiste $\delta > 0$ tale che il problema* (1.1) *ha una soluzione unica $y \in \mathcal{C}^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^d)$. Inoltre, la scelta di δ è uniforme per (x_0, y_0) in un compatto di Ω.*

Esistono vari modi per dimostrare questo risultato. La dimostrazione più nota si basa sul Teorema delle contrazioni, dimostrato da S. Banach nel 1922, [10], e riscoperto indipendentemente da R. Caccioppoli nel 1931, [17].

Teorema 1.1.4 (Banach–Caccioppoli)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico completo non vuoto e sia $T : X \to X$ una* contrazione *su X, cioè una funzione tale che esiste $k \in]0, 1[$ per cui*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

per ogni $x, y \in X$. Allora esiste un unico $x \in X$ tale che $Tx = x$.

Per dimostrare il Teorema 1.1.3 si considera lo spazio metrico completo $(V, \|\cdot\|_\infty)$ dove

$$V = \mathcal{C}^0([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^d)$$

e si considera per ogni $\varepsilon > 0$ il suo sottoinsieme chiuso

$$X = \{\, y \in V : \|y - y_0\|_\infty \leq \varepsilon, y(x_0) = y_0 \,\}\,.$$

Si definisce poi l'operatore funzionale $T\colon X \to X$ ponendo

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{1.3}$$

per ogni $y \in X$. Siccome f è continua, per opportuni $\delta, \varepsilon > 0$ l'operatore T è ben definito, cioè $Ty \in X$ per ogni $y \in X$. Inoltre, per l'ipotesi (1.2), l'operatore T (oppure T^n per qualche $n > 1$ dipendente da $\delta > 0$) è una contrazione su X, e quindi, per il Teorema 1.1.4, ha un unico punto fisso in X. Ma i punti fissi di T sono chiaramente tutte e sole le soluzioni locali del problema (1.1), da cui il Teorema 1.1.3.

In generale il Teorema 1.1.3 costituisce una condizione sufficiente ma non necessaria per l'unicità locale della soluzione del problema (1.1). Per mostrarlo si può considerare il seguente esempio.

Esempio 1.1.5. Il problema (scalare) di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} + \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

ha un'unica soluzione definita su tutto l'intervallo $[0, \infty)$, ma la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{|y|} + \sqrt{x}$$

non è localmente di Lipschitz in y sul semipiano $x \geq 0$.

Il Teorema 1.1.3 è stato generalizzato essenzialmente in due modi.

Il primo metodo si concentra sulla variazione della funzione f rispetto alla variazione della variabile y. Premettiamo la seguente definizione.

Definizione 1.1.6. Una funzione $g(z)$ continua sull'intervallo $[0, \infty)$ e tale che $g(0) = 0$, $g(z) > 0$ per ogni $z > 0$ e

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon} \frac{dz}{g(z)} = \infty \tag{1.5}$$

si dice *funzione di Osgood.*

Esempio 1.1.7 (Funzioni di Osgood)**.** Esempi di funzioni di Osgood sono $g(z) = z$, $z \log(\frac{1}{z})$, $z \log\log(\frac{1}{z})$, ... A parte l'identità, queste funzioni sono definite su intervalli del tipo $]0, c_0]$, per qualche opportuna costante $c_0 > 0$ ed estese in $z = 0$ per continuità.

Il risultato seguente è stato ottenuto da W. Osgood nel 1898, [42].

Teorema 1.1.8 (Osgood)**.** *Siano* $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *un insieme aperto,* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *e sia* $f \in \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{R}^d)$ *una funzione tale che*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq g(|y_1 - y_2|)$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{B}_\delta(x_0) \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ *per qualche* $\delta, \varepsilon > 0$*, dove* $g \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$ *è una funzione di Osgood. Allora il problema* (1.1) *ha una soluzione unica* $y \in \mathcal{C}^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^d)$*.*

Una dimostrazione di questo teorema si può trovare in [2, p. 12], in [3, p. 69] e in [34, p. 33]. Successivamente, si è scoperto che il Teorema 1.1.8 è un caso particolare del seguente ben più generale risultato di unicità, dimostrato da E. Kamke nel 1930, [35].

Teorema 1.1.9 (Kamke)**.** *Supponiamo che*

i) $\omega(x,z)$ *sia una funzione (scalare) continua e non negativa per* $x_0 < x \le x_0+\delta$, $0 \le z \le 2\varepsilon$, *con la proprietà che, per ogni* x_1, $x_0 < x_1 < x_0+\delta$, $z(x) \equiv 0$ *è l'unica funzione differenziabile per* $x_0 < x < x_1$ *e continua per* $x_0 \le x \le x_1$ *tale che* $z'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{z(x)-z(x_0)}{x-x_0}$ *esiste, e soddisfa*

$$\begin{cases} z'(x) = \omega(x, z(x)), \quad x_0 < x < x_1 \\ z(x_0) = z'_+(x_0) = 0; \end{cases} \tag{1.6}$$

ii) $f(x,y)$ *sia una funzione continua su* $[x_0, x_0+\delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0)$ *e tale che*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le \omega(x, |y_1-y_2|)$$

per ogni $(x,y_1),(x,y_2) \in [x_0,x_0+\delta]\times\bar{B}_\varepsilon(y_0)$.

Allora il problema (1.1) *ha un'unica soluzione sull'intervallo* $[x_0, x_0+\delta]$.

Una dimostrazione di questo teorema si può trovare in [2, p. 56], in [3, p. 111] e in [34, p. 31]. Nel 1962, X. Shen ha dimostrato un versione più generale del Teorema 1.1.9 studiando le soluzioni positive dell'equazione differenziale in (1.6), [45]; per l'enunciato e la dimostrazione di questo risultato, si veda [2, p. 63].

Il secondo metodo, invece, focalizza l'attenzione sulla costante $L > 0$ in (1.2), e la sostituisce con una più generica funzione $L(x)$ in generale non costante, non continua e non necessariamente limitata. Vale infatti il seguente risultato, detto Teorema di Cauchy–Lipschitz generalizzato, di cui diamo la dimostrazione.

Teorema 1.1.10. *Siano* $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ *un insieme aperto,* $(x_0,y_0)\in\Omega$ *e sia* $f \in \mathcal{C}^0(\Omega;\mathbb{R}^d)$ *una funzione. Supponiamo esistano* $\delta,\varepsilon > 0$ *tali che* $[x_0,x_0+\delta]\times B_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ *e*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L(x)|y_1-y_2| \tag{1.7}$$

per ogni $(x,y_1),(x,y_2)\in[x_0,x_0+\delta]\times B_\varepsilon(y_0)$ *dove* $L\colon [x_0,x_0+\delta] \to [0,\infty)$ *è una funzione (eventualmente non definita in* x_0*) tale che converga l'integrale*

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} L(t)dt < \infty. \tag{1.8}$$

Allora il problema (1.1) *ha un'unica soluzione* $y \in \mathcal{C}^1([x_0,x_0+\delta];\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Osserviamo che, per l'ipotesi (1.8), possiamo supporre

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} L(t)dt \le \frac{1}{2}.$$

eventualmente scegliendo $\delta > 0$ più piccolo. Allora per ogni $y_1, y_2 \in X$ si ha che

$$\begin{aligned} |Ty_1(x) - Ty_2(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))\right| dt \le \int_{x_0}^{x} |f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))| dt \\ &\le \int_{x_0}^{x} L(t)|y_1(t)-y_2(t)|dt \le \|y_1-y_2\|_\infty \int_{x_0}^{x} L(t)dt \le \frac{1}{2}\|y_1-y_2\|_\infty \end{aligned}$$

da cui

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty.$$

Dunque il funzionale T definito in (1.3) è una contrazione di X in se stesso, e pertanto, per il Teorema 1.1.4, ha un unico punto fisso, che è l'unica soluzione del problema (1.1). □

Anche il teorema appena dimostrato, come quello di Osgood, è una conseguenza del Teorema di Kamke: infatti, nel caso in cui $L(x)$ sia continua su $[x_0, x_0+\delta]$, la funzione

$$\omega(x, |y|) = L(x)|y|$$

soddisfa le proprietà dell'enunciato del Teorema 1.1.9, e quindi, ancora, la soluzione al problema (1.1) è unica.

Il Teorema 1.1.10 costituisce una generalizzazione diretta del Teorema di Cauchy–Lipschitz, dato che, nel caso $L(x) = L \in \mathbb{R}$, si ha ovviamente

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} L(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+\delta} Ldt = \delta L < \infty.$$

L'obiettivo di questa parte è di generalizzare ulteriormente e in modo diretto il Teorema 1.1.10 andando possibilmente oltre il Teorema di Kamke; in particolare, di sostituire la funzione $L(x)$ con una più generale funzione dipendente anche dalle variabili y.

1.2. Generalizzazione per il problema scalare

In questa sezione dimostriamo alcuni nuovi risultati, ottenuti partendo dall'idea di base del Teorema di Cauchy–Lipschitz generalizzato: al posto della funzione $L(x)$ in (1.7) abbiamo considerato una più generica funzione h dipendente anche dalle variabili y. Abbiamo utilizzato la stessa idea per generalizzare il Teorema di Montel–Tonelli (Teorema 1.2.6). Abbiamo ottenuto così dei nuovi criteri per l'unicità locale della soluzione del problema (1.1) nel caso in cui la funzione f sia scalare. In particolare, le nuove ipotesi fatte sulla funzione f non saranno più riconducibili a quelle del Teorema 1.1.9.

1.2.1. Condizioni sufficienti per il caso Cauchy–Lipschitz

Generalizziamo il Teorema 1.1.10 nel caso in cui f sia una funzione scalare.

Teorema 1.2.1. *Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sia $h\colon U \to [0, \infty)$ una funzione definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_0, y_0, y_0) \in U$, eventualmente non definita in (x_0, y_0, y_0). Supponiamo esistano $\delta, \varepsilon > 0$ tali che*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq h(x, y_1, y_2)|y_1 - y_2|$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in [x_0, x_0+\delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$, con $[x_0, x_0+\delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset U$. Supponiamo inoltre che

i) esista una funzione $\phi\colon [x_0, x_0+\delta] \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in [x_0, x_0+\delta]$, valga $\phi(x) \leq f(x, y(x))$ per ogni soluzione $y \in X$ del problema (1.1) *e sia ben definita $\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(t)dt$ al variare di $x \in [x_0, x_0+\delta]$;*

ii) si abbiano $h(x, y_1, y_2) = h(x, y_2, y_1)$, $h(x, 2y_0 - y_1, y_2) = h(x, y_1, y_2)$ *e* $y_0 < y_1 \leq \overline{y}_1 \Rightarrow h(x, y_1, y_2) \geq h(x, \overline{y}_1, y_2)$ *per ogni* $(x, y_1, y_2), (x, y_2, y_1), (x, \overline{y}_1, y_2) \in [x_0, x_0+\delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \setminus \{ (x_0, y_0, y_0) \}$;

iii) esista finito l'integrale $\int_{x_0}^{x_0+\delta} h(t, \Phi(t), \Phi(t))dt < \infty$;

Allora il problema (1.1) *ha un'unica soluzione* $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0 + \delta]; \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Osserviamo che, dall'ipotesi i), segue che

$$\int_{x_0}^{x} \phi(t)dt \leq \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = \int_{x_0}^{x} y'(t)dt = y(x) - y_0$$

da cui

$$y(x) \geq y_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(t)dt = \Phi(x).$$

per ogni soluzione $y \in X$ del problema (1.1). Definiamo allora il seguente insieme

$$Y = \{ y \in X : y(x) \geq \Phi(x) \text{ per ogni } x \in [x_0, x_0 + \delta] \} .$$

Lo spazio $(Y, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio metrico completo.

Consideriamo ora l'operatore funzionale T definito in (1.3). Osserviamo che

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \geq y_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(t)dt = \Phi(x)$$

per ogni funzione $y \in Y$, da cui $T(Y) \subseteq Y$. Osserviamo inoltre che, per l'ipotesi iii), possiamo supporre

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} h(t, \Phi(t), \Phi(t))dt \leq \frac{1}{2}$$

eventualmente scegliendo $\delta > 0$ più piccolo. Allora, per ogni $y_1, y_2 \in Y$, si ha che

$$\begin{aligned}
|Ty_1(x) - Ty_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \right| dt \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|dt \\
&\leq \int_{x_0}^{x} h(t, y_1(t), y_2(t))|y_1(t) - y_2(t)|dt \leq \int_{x_0}^{x} h(t, \Phi(t), \Phi(t))|y_1(t) - y_2(t)|dt \\
&\leq \|y_1 - y_2\|_\infty \int_{x_0}^{x} h(t, \Phi(t), \Phi(t))dt \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty
\end{aligned}$$

da cui

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty.$$

Dunque il funzionale T definito in (1.3) è una contrazione di Y in se stesso, e pertanto, per il Teorema 1.1.4, T ha un unico punto fisso, che è l'unica soluzione del problema (1.1). □

Esempio 1.2.2. Applichiamo questo risultato appena dimostrato al problema (1.4). Ricordiamo che, nel problema (1.4), la funzione f non era uniformemente di Lipschitz nella variabile y e, pertanto, il Teorema 1.1.3 non era applicabile.

Abbiamo che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \sqrt{|y_1|} - \sqrt{|y_2|} \right| = \frac{||y_1| - |y_2||}{\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}} \leq \frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}}$$

e si verifica immediatamente che la funzione

$$h(x, y_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}}$$

soddisfa le condizioni dell'ipotesi ii) del Teorema 1.2.1. Inoltre chiaramente vale $y(x) \geq 0$ per ogni soluzione del problema (1.4), essendo $y' \geq 0$ e $y(0) = 0$. Ma allora

$$y'(x) = f(x, y(x)) \geq \sqrt{x} = \phi(x)$$

da cui segue la stima

$$y(x) \geq \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \Phi(x). \tag{1.9}$$

La funzione

$$h(x, \Phi(x), \Phi(x)) = \sqrt{\frac{3}{8}} x^{-\frac{3}{4}}$$

ha integrale convergente su $[0, \delta]$, $\delta > 0$, e, in particolare, il valore di tale integrale è minore di 1 se si sceglie $\delta < \frac{1}{36}$. Anche le ipotesi i) e iii) del Teorema 1.2.1 sono pertanto soddisfatte. Il problema (1.4) ha dunque un'unica soluzione sull'intervallo $\left[0, \frac{1}{36}\right]$.

Si può dare una dimostrazione diversa e più semplice del Teorema 1.2.1 usando il seguente lemma, dimostrato per la prima volta (in forma più debole) da T. H. Grönwall nel 1919, [29], e generalizzato nella forma che presentiamo da R. Bellman nel 1943, [11].

Lemma 1.2.3 (Gronwall–Bellman)**.** *Siano $u, p, q \in \mathcal{C}^0([x_0, x_0 + \delta])$ tre funzioni non negative tali che*

$$u(x) \leq p(x) + \int_{x_0}^{x} q(t)u(t)dt$$

per ogni $x \in [x_0, x_0 + \delta]$. Allora vale

$$u(x) \leq p(x) + \int_{x_0}^{x} p(t)q(t)e^{\int_t^x q(s)ds} dt$$

per ogni $x \in [x_0, x_0 + \delta]$. In particolare, se $p(x) \equiv 0$, allora $u(x) \equiv 0$.

Una dimostrazione di questo risultato si può trovare ad esempio in [3, p. 47].

Remark 1.2.4. Il Lemma 1.2.3 rimane vero anche se la funzione non negativa q è solamente integrabile anziché continua su $[x_0, x_0 + \delta]$ — lasciamo al lettore la verifica di questa affermazione. Nel seguito, applicheremo il Lemma 1.2.3 con questa ipotesi più generale.

Altra dimostrazione del Teorema 1.2.1. Per il Teorema 1.1.1, esistono $\delta > 0$ e una soluzione $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0 + \delta]; \mathbb{R})$ del problema (1.1). Supponiamo per assurdo che esistano due soluzioni $y_1, y_2 \in X$ del problema (1.1) per opportuni $\delta, \varepsilon > 0$. Poniamo $u(x) = |y_1(x) - y_2(x)| \geq 0$. Allora

$$\begin{aligned} u(x) = |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \right| dt \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \\ &\leq \int_{x_0}^{x} h(t, y_1(t), y_2(t)) |y_1(t) - y_2(t)| dt \leq \int_{x_0}^{x} h(t, \Phi(t), \Phi(t)) |y_1(t) - y_2(t)| dt \end{aligned}$$

cioè

$$u(x) \leq \int_{x_0}^{x} h(t, \Phi(t), \Phi(t)) u(t) dt.$$

Dal Lemma 1.2.3 si conclude che $u(x) \equiv 0$, e quindi le due soluzioni y_1 e y_2 coicidono sul comune intervallo di esistenza. $\square$

Remark 1.2.5. L'ipotesi i) nel Teorema 1.2.1 è più forte del necessario: si potrebbe supporre ad esempio che $\phi(x) \leq f(x, \rho(x))$ per ogni $x \in [x_0, x_0 + \delta]$, dove $\rho(x)$ è la *soluzione minima* del problema (1.1), cioè la soluzione (unica) del problema (1.1) tale che $\rho(x) \leq y(x)$ per ogni soluzione $y \in X$ del problema (1.1) al variare di $x \in [x_0, x_0 + \delta]$. L'esistenza della soluzione $\rho(x)$ è garantita dalla continuità della funzione f: si veda per esempio [34, p. 25].

1.2.2. Condizioni sufficienti per il caso Montel–Tonelli

Vogliamo ora generalizzare ulteriormente i risultati appena ottenuti. In particolare, diamo una generalizzazione del seguente Teorema, dimostrato indipendentemente da L. Tonelli nel 1925, [47], e P. Montel nel 1926, [39].

Teorema 1.2.6 (Montel–Tonelli)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un insieme aperto, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e sia $f \in \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{R})$ una funzione tale che*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq h(x) g(|y_1 - y_2|)$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in [x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ per qualche $\delta, \varepsilon > 0$, dove $g \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$ è una funzione di Osgood e $h \geq 0$ è una funzione, eventualmente non definita in x_0, tale che esiste finito il seguente integrale

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} h(t) dt < \infty.$$

Allora il problema (1.1) ha una soluzione unica $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0 + \delta]; \mathbb{R})$.

Questo risultato è una generalizzazione del Teorema di Osgood nel caso in cui la funzione f del problema (1.1) sia scalare, ed è un corollario del Teorema di Kamke. Una dimostrazione diretta del Teorema 1.2.6 si può trovare in [2, p. 19]. Il risultato che ora dimostriamo ne costituisce una generalizzazione.

Teorema 1.2.7. *Sia $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sia $h \colon U \to [0, \infty)$ una funzione definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_0, y_0, y_0) \in U$, eventualmente non definita in (x_0, y_0, y_0). Sia $g \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$ una funzione di Osgood. Supponiamo esistano $\delta, \varepsilon > 0$ tali che*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq h(x, y_1, y_2) g(|y_1 - y_2|) \tag{1.10}$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in [x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ con $[x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset U$. Supponiamo inoltre che siano soddisfatte le ipotesi i), ii) e iii) del Teorema 1.2.1. Allora il problema (1.1) ha un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0 + \delta]; \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Per il Teorema 1.1.1, esistono $\delta > 0$ e $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0 + \delta]; \mathbb{R})$ soluzione del problema (1.1). Supponiamo per assurdo che esistano due soluzioni $y_1, y_2 \in X$ del problema (1.1) per opportuni $\delta, \varepsilon > 0$. Poniamo $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Allora esiste $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta]$ tale che $u(x) > 0$ per ogni $x \in (x_1, x_1 + \delta_1]$ e $u(x) = 0$ per ogni $x \in [x_0, x_1]$, per un opportuno $0 < \delta_1 < \delta$. Allora, per ogni $x \in (x_1, x_1 + \delta_1)$, si ha che

$$u'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \leq h(x, y_1(x), y_2(x)) g(u(x)) \leq h(x, \Phi(x), \Phi(x)) g(u(x))$$

da cui, per l'ipotesi iii),

$$\int_{u(x_1)}^{u(x_1+\delta_1)} \frac{dz}{g(z)} \leq \int_{x_1}^{x_1+\delta_1} h(t, \Phi(t), \Phi(t)) dt < \infty$$

che contraddice il limite (1.5). $\square$

Notiamo che per il Teorema 1.2.7 vale ancora il Remark 1.2.5.

Esempio 1.2.8. Consideriamo la funzione $f\colon [0,\infty[\times[0,1/e] \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x,y) = \sqrt{x} + \begin{cases} \sqrt{y} - y\log y, & 0 < y \le 1/e, \\ 0, & y = 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Analogamente all'Esempio 1.1.5, questa funzione è continua ma non è uniformemente di Lipschitz in y. Vogliamo applicare il Teorema 1.2.7 e mostrare che il problema (1.1) per tale funzione f ammette un'unica soluzione definita in un intorno destro di 0.

A tale scopo sia $g : [0,\infty[\to [0,\infty[$ definita ponendo

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z = 0, \\ -z\log z, & 0 < z \le 1/e, \\ 1/e, & z > 1/e. \end{cases} \tag{1.12}$$

Chiaramente g è continua, crescente su $[0,\infty[$, $g(0) = 0$ e $g(z) > 0$ per $z > 0$. Inoltre abbiamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon \frac{dz}{g(z)} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon \frac{dz}{-z\log z} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \log\log(1/\varepsilon) = \infty.$$

Questo mostra che g è una funzione di Osgood. Studiamo la funzione f. Poniamo $f = p + q$, dove $p(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ e $q(y) = -y\log y$. La funzione p è quella studiata nell'Esempio 1.2.2. La funzione q verifica $\frac{d^2q}{dy^2} = -\frac{1}{y} < 0$ per $0 < y \le 1/e$, quindi q è concava. Pertanto, se $0 < y_1 - y_2 < y_2 < y_1 \le 1/e$, allora segue che

$$\frac{q(y_1 - y_2) - q(0)}{y_1 - y_2} \ge \frac{q(y_1) - q(y_2)}{y_1 - y_2},$$

ovvero

$$-(y_1 - y_2)\log(y_1 - y_2) \ge -y_1\log y_1 + y_2\log y_2$$

e quindi

$$|q(y_1) - q(y_2)| = |(-y_1\log y_1) - (-y_2\log y_2)| \le -|y_1 - y_2|\log|y_1 - y_2| = g(|y_1 - y_2|).$$

Ricaviamo dunque che, se $0 < y_1, y_2 \le 1/e$, allora

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &\le \frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}} + g(|y_1 - y_2|) \\ &\le \left(\frac{1}{\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}} + 1\right) g(|y_1 - y_2|) \\ &\le \left(1 + \sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}\right) \frac{g(|y_1 - y_2|)}{\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}} \\ &\le C\frac{g(|y_1 - y_2|)}{\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}} \end{aligned} \tag{1.13}$$

con $C = 1 + \frac{2}{\sqrt{e}} > 0$. Questo mostra che la (1.10) è soddisfatta con

$$h(x,y_1,y_2) = \frac{C}{\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}} \tag{1.14}$$

e g come sopra. Come nell'Esempio 1.2.2, la funzione h soddisfa le condizioni dell'ipotesi ii) del Teorema 1.2.1, possiamo scegliere $\phi(x) = \sqrt{x}$ e $\Phi(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ e l'integrale in iii) del Teorema 1.2.1 converge sull'intervallo $[0, \delta]$ per un qualche $\delta > 0$. Per il Teorema 1.2.7 concludiamo che il problema (1.1) con f come in (1.11) ha soluzione unica sull'intervallo $[0, \delta]$.

Osserviamo infine che la funzione h in (1.14) non è limitata in un intorno del punto $(0, 0)$ e che non è possibile maggiorare ulteriormente il prodotto hg in (1.13) con un'altra funzione di Osgood dipendente solo da $|y_1 - y_2|$ (ed eventualmente anche da x). Infatti, la funzione

$$R(x, y_1, y_2) = \frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{g(|y_1 - y_2|)} = -\frac{\left|\left(\sqrt{|y_1|} - \sqrt{|y_2|}\right) + ((-y_1 \log y_1) - (-y_2 \log y_2))\right|}{|y_1 - y_2| \log|y_1 - y_2|}$$

non dipende da x e non è limitata in un intorno di $y_1 = y_2 = 0$, e se si avesse

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le \bar{g}(|y_1 - y_2|)$$

con $\bar{g}$ un'altra funzione di Osgood, e possiamo supporre che $\lim_{z \to 0^+} \frac{\bar{g}(z)}{g(z)} = 0$, allora

$$R(x, y_1, y_2) \le \frac{\bar{g}(|y_1 - y_2|)}{g(|y_1 - y_2|)}$$

da cui seguirebbe che R è limitata in un intorno di $y_1 = y_2 = 0$, assurdo.

Concludiamo che i Teoremi di Osgood 1.1.8, di Montel–Tonelli 1.2.6 e di Kamke 1.1.9 non sono applicabili al problema (1.1) con f come in (1.11). Il Teorema 1.2.7 costituisce dunque un miglioramento effettivo di questi tre risultati.

1.2.3. Analisi della necessità delle condizioni del Teorema 1.2.1

Vogliamo capire se le ipotesi del Teorema 1.2.1 sono non solo sufficienti ma anche necessarie per l'unicità locale della soluzione del problema (1.1). Più precisamente, ci poniamo il seguente problema.

Problema 1.2.9. Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sia $h\colon U \to [0, \infty)$ una funzione definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_0, y_0, y_0) \in U$, eventualmente non definita in (x_0, y_0, y_0), tale che

- $h(x, y_1, y_2) = h(x, y_2, y_1)$
- $h(x, 2y_0 - y_1, y_2) = h(x, y_1, y_2)$
- $y_0 < y_1 \le \overline{y}_1 \Rightarrow h(x, y_1, y_2) \ge h(x, \overline{y}_1, y_2)$

per ogni $(x, y_1, y_2), (x, y_2, y_1), (x, \overline{y}_1, y_2) \in [x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \smallsetminus \{ (x_0, y_0, y_0) \}$. Supponiamo inoltre che h sia la "più piccola" funzione tale che esistano $\delta, \varepsilon > 0$ per cui

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le h(x, y_1, y_2)|y_1 - y_2|$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in [x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ e $[x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset U$, ovvero che, se $f \le \bar{h} \cdot |y_1 - y_2|$ in un intorno del punto (x_0, y_0), allora si ha $h \le \bar{h}$, eventualmente in un intorno più piccolo.

Ci poniamo la seguente domanda: se il problema (1.1) ha un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0 + \delta]; \mathbb{R})$, allora le seguenti affermazioni (a) e (b) sono verificate?

(a) Esiste una funzione $\phi\colon [x_0, x_0+\delta] \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in [x_0, x_0+\delta]$, valga $\phi(x) \leq f(x, y(x))$ per la soluzione $y \in X$ del problema (1.1) e sia ben definita $\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(t)dt$ al variare di $x \in [x_0, x_0+\delta]$.

(b) Esiste finito l'integrale $\int_{x_0}^{x_0+\delta} h(t, \Phi(t), \Phi(t))dt < \infty$.

L'affermazione (a) è sempre banalmente soddisfatta, perché basta prendere $\phi = y'$, dove y è la soluzione del problema (1.1). Tuttavia, in generale, l'integrale $\int_{x_0}^{x_0+\delta} h(t, y(t), y(t))dt$ non è finito. Consideriamo, infatti, il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x + \sqrt{|y|}, & x \geq 0, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

Una soluzione del problema (1.15) è banalmente $y(x) = x^2$, e questa è l'unica soluzione di (1.15) per il criterio di unicità di Wend (vedi [2, p. 77]). In effetti

$$h(x, y_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}} \qquad \text{e} \qquad \phi(x) = y'(x) = 2x$$

ma l'integrale seguente diverge

$$\int_0^\delta h(t, y(t), y(t))dt = 2\int_0^\delta \frac{dt}{t} = \infty. \tag{1.16}$$

Questo esempio mostra che non esiste nessuna funzione ϕ che possa soddisfare le richieste (a) e (b) del Problema 1.2.9 in riferimento al problema di Cauchy (1.15). Infatti, se una tale ϕ esistesse, dovremmo avere $\phi(x) \leq 2x$, da cui $\Phi(x) \leq x^2$; ma allora l'integrale $\int_0^\delta h(t, \Phi(t), \Phi(t))dt$ diverge per confronto con (1.16) per l'ipotesi sulla decrescenza della funzione h. In conclusione, il Problema 1.2.9 ha una risposta negativa e, pertanto, le ipotesi del Teorema 1.2.1 sono sufficienti ma non necessarie per l'unicità locale della soluzione del problema (1.1).

Facciamo un breve excursus sul criterio di Wend citato nel Problema 1.2.9. Questo criterio di unicità locale è stato dimostrato da D. V. V. Wend nel 1967: nella formulazione originale, vedi [48] e [49], questo risultato dimostra l'esistenza e l'unicità locale della soluzione del problema (1.1) anche per funzioni a valori vettoriali. Noi lo riportiamo qui come formulato in [2, p. 77].

Teorema 1.2.10 (Wend)**.** *Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Supponiamo esistano $\delta, \varepsilon > 0$ tali che $f(x, y)$ sia non-decrescente in $[x_0, x_0+\delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0)$ in entrambe le variabili x e y separatamente, $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in [x_0, x_0+\delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0)$ e $f(x, y_0) \neq 0$ per ogni $x \in]x_0, x_0+\delta]$. Allora il problema* (1.1) *ha un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0+\delta]; \mathbb{R})$.*

Una dimostrazione di questo risultato si può trovare ad esempio in [2, p. 77]. Questo criterio si applica a tutti gli esempi che abbiamo fornito sino ad ora, perché le funzioni che abbiamo considerato sono del tipo $f(x, y) = p(x) + q(y)$, con p e q funzioni tali che le ipotesi del Teorema 1.2.10 siano soddisfatte. Tuttavia, i nostri risultati non sono una conseguenza del criterio di Wend: infatti, se in (1.11) (Esempio 1.2.8) avessimo considerato la funzione $f\colon [0,1] \times [0, 1/e] \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x}\,(1 + x|\sin(1/x)|) + \sqrt{y} - y\log y & 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1/e \\ 0 & x = 0,\ y = 0, \end{cases}$$

allora il Teorema 1.2.10 non sarebbe stato più applicabile, sebbene il Teorema 1.2.7 ci avrebbe permesso di concludere, anche in tal caso, che la soluzione locale è unica.

1.2.4. Ipotesi di derivabilità per il caso scalare

I Teoremi 1.2.1 e 1.2.7 mostrano che, sotto opportune ipotesi sulla funzione f, se le soluzioni del problema (1.1) soddisfano certe condizioni, allora la soluzione è unica. Quindi, per dimostrare l'unicità locale della soluzione, bisogna conoscere la struttura di una generica soluzione del problema (1.1). Vogliamo ora mostrare che, in ipotesi leggermente più restrittive sulla funzione f, le informazioni sufficienti per l'unicità locale possono essere ricavate direttamente dalla funzione f senza necessariamente conoscere l'andamento di una generica soluzione.

Definizione 1.2.11. Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Definiamo la funzione $f^\natural\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo $f^\natural(x,y) = \partial_1 f(x,y) + \partial_2 f(x,y)\cdot f(x,y)$.

Dal Teorema 1.2.1 deduciamo il seguente risultato.

Teorema 1.2.12. *Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e differenziabile su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sia $h\colon U \to [0,\infty)$ una funzione definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x_0, y_0, y_0) \in U$, eventualmente non definita in (x_0, y_0, y_0). Supponiamo esistano $\delta, \varepsilon > 0$ tali che*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq h(x,y_1,y_2)|y_1 - y_2|$$

per ogni $(x,y_1),(x,y_2) \in [x_0, x_0+\delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ con $[x_0,x_0+\delta]\times\bar{B}_\varepsilon(y_0)\times\bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset U$. Supponiamo inoltre che

- *i) esista una funzione $\theta\colon [x_0,x_0+\delta] \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in [x_0,x_0+\delta]$, valga $\theta(x) \leq f^\natural(x,y)$ per ogni $(x,y) \in [x_0,x_0+\delta]\times\bar{B}_\varepsilon(y_0)$ e sia ben definita $\Theta(x) = y_0 + f(x_0,y_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t}\theta(u)du dt$ al variare di $x \in [x_0,x_0+\delta]$;*
- *ii) si abbiano $h(x,y_1,y_2) = h(x,y_2,y_1)$, $h(x,2y_0-y_1,y_2) = h(x,y_1,y_2)$ e $y_0 < y_1 \leq \overline{y}_1 \Rightarrow h(x,y_1,y_2) \geq h(x,\overline{y}_1,y_2)$ per ogni $(x,y_1,y_2),(x,y_2,y_1),(x,\overline{y}_1,y_2) \in [x_0,x_0+\delta]\times\bar{B}_\varepsilon(y_0)\times\bar{B}_\varepsilon(y_0) \setminus \{\,(x_0,y_0,y_0)\,\}$;*
- *iii) esista finito l'integrale $\int_{x_0}^{x_0+\delta} h(t,\Theta(t),\Theta(t))dt < \infty$.*

Allora il problema (1.1) *ha un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1([x_0,x_0+\delta];\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Ci basta dimostrare che l'ipotesi i) del Teorema 1.2.1 è soddisfatta. Osserviamo che, per ogni soluzione $y \in \mathcal{C}^1([x_0,x_0+\delta];\mathbb{R})$ del problema (1.1), dall'ipotesi i) si ha che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x,y(x)) &= \partial_1 f(x,y(x)) + \partial_2 f(x,y(x))\cdot y'(x) = \\ &= \partial_1 f(x,y(x)) + \partial_2 f(x,y(x))\cdot f(x,y(x)) = \\ &= f^\natural(x,y(x)) \geq \theta(x)\end{aligned}$$

ovvero

$$y''(x) \geq \theta(x).$$

Ma allora integrando una prima volta si trova

$$f(x,y(x)) \geq f(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x}\theta(t)dt$$

e una seconda si trova

$$y(x) \geq y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t} \theta(u) du dt = \Theta(x). \tag{1.17}$$

Quindi l'ipotesi i) del Teorema 1.2.1 è verificata con

$$\phi(x) = f(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} \theta(t) dt.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Remark 1.2.13. La condizione i) del Teorema 1.2.12 sulla funzione θ è un'ipotesi sulla possibilità di stimare dal basso uniformemente rispetto alla variabile y la funzione $f^\natural$.

Ad esempio, in riferimento alla funzione del problema (1.4), si ha che

$$f^\natural(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\mathrm{sgn}(y)}{2\sqrt{|y|}} \left(\sqrt{|y|} + \sqrt{x} \right)$$

per $y \neq 0$, e in particolare per $y \geq 0$ si ottiene

$$f^\natural(x, y) \geq \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} = \theta(x).$$

Usando questa stima in (1.17) si ha che, per ogni soluzione $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0 + \delta]; \mathbb{R})$ del problema (1.4), vale

$$y(x) \geq \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} x^2 = \Theta(x)$$

che fornisce una stima leggermente più precisa di quella ottenuta in (1.9).

La minorazione uniforme nell'ipotesi i) del Teorema 1.2.12 per la funzione $f^\natural$ permette dunque di stimare l'andamento approssimativo di una soluzione del problema (1.1) direttamente dalla forma della funzione f. Come osservato in precedenza questa informazione non è sempre così precisa da poter permettere di dimostrare l'unicità locale della soluzione. Ad esempio, in riferimento al problema (1.15), si ha che

$$f^\natural(x, y) = 1 + \frac{\mathrm{sgn}(y)}{2\sqrt{|y|}} \left(\sqrt{|y|} + x \right)$$

per $y \neq 0$, e per $y \geq 0$ questa porta in modo naturale alla stima

$$f^\natural(x, y) \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \theta(x).$$

Quindi dalla (1.17) segue

$$y(x) \geq \frac{3}{4} x^2 = \Theta(x),$$

stima in effetti coerente con le osservazioni fatte sopra, essendo $y(x) = x^2$ l'unica soluzione del problema (1.15), ma l'integrale nell'ipotesi iii) del Teorema 1.2.12 diverge.

In modo del tutto analogo a quanto fatto sopra, dal Teorema 1.2.7 si può dedurre il seguente risultato.

Teorema 1.2.14. *Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e differenziabile su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sia $h\colon U \to [0,\infty)$ una funzione definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x_0, y_0, y_0) \in U$, eventualmente non definita in (x_0, y_0, y_0). Supponiamo esistano $\delta, \varepsilon > 0$ tali che*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq h(x, y_1, y_2)g(|y_1 - y_2|)$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in [x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ con $[x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset U$, dove $g \in \mathcal{C}^0([0,\infty))$ è una funzione di Osgood. Supponiamo inoltre che siano soddisfatte le ipotesi i), ii) e iii) del Teorema 1.2.12. Allora il problema (1.1) *ha un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0 + \delta]; \mathbb{R})$.*

Lasciamo al lettore la dimostrazione di questo risultato.

1.3. Generalizzazione al problema vettoriale

In questa sezione generalizziamo i risultati precedenti al caso in cui f sia una funzione a valori vettoriali.

1.3.1. Condizioni sufficienti per il caso Cauchy–Lipschitz

Facciamo la seguente osservazione. Se $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0+\delta]; \mathbb{R}^d)$ è una soluzione non identicamente nulla del problema (1.1), allora

$$\begin{cases} \langle y', y\rangle = \langle f(x, y), y\rangle \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\frac{|y|^2}{2} = \langle f(x, y), y\rangle \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e quindi

$$|y(x)| = \sqrt{|y_0|^2 + 2\int_{x_0}^{x} \langle f(t, y(t)), y(t)\rangle dt}$$

per ogni $x \in [x_0, x_0 + \delta]$. D'ora in avanti, a meno che non sia specificato diversamente, supporremo che la funzione identicamente nulla $y(x) \equiv 0$ non sia soluzione del problema (1.1).

Teorema 1.3.1. *Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione continua su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sia $h\colon U \to [0,\infty)$ una funzione definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_0, |y_0|, |y_0|) \in U$, eventualmente non definita in $(x_0, |y_0|, |y_0|)$. Supponiamo esistano $\delta, \varepsilon > 0$ tali che*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq h(x, |y_1|, |y_2|)|y_1 - y_2|$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in [x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ e $[x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(|y_0|) \times \bar{B}_\varepsilon(|y_0|) \subset U$. Supponiamo inoltre che

i) esista una funzione $\psi\colon [x_0, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ tale che valga $\psi(x) \leq \langle f(x, y(x)), y(x)\rangle$ per ogni $x \in [x_0, x_0 + \delta]$ e per ogni soluzione $y \in X$ del problema (1.1) *e sia ben definita $\Psi(x) = \sqrt{|y_0|^2 + 2\int_{x_0}^{x} \psi(t)dt}$ al variare di $x \in [x_0, x_0 + \delta]$;*

ii) si abbiano $h(x,u_1,u_2) = h(x,u_2,u_1)$, $h(x,2|y_0|-u_1,u_2) = h(x,u_1,u_2)$ *e* $|y_0| < u_1 \leq \overline{u}_1 \Rightarrow h(x,u_1,u_2) \geq h(x,\overline{u}_1,u_2)$ *per ogni* $(x,u_1,u_2),(x,u_2,u_1),(x,\overline{u}_1,u_2) \in [x_0,x_0+\delta] \times \bar{B}_\varepsilon(|y_0|) \times \bar{B}_\varepsilon(|y_0|) \setminus \{\,(x_0,|y_0|,|y_0|)\,\}$*;*

iii) esista finito l'integrale $\int_{x_0}^{x_0+\delta} h(t,\Psi(t),\Psi(t))dt < \infty$.

Allora il problema (1.1) *ha un'unica soluzione* $y \in \mathcal{C}^1([x_0,x_0+\delta];\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Per l'ipotesi i) segue che, per ogni soluzione $y \in X$ del problema (1.1), vale

$$|y(x)| \geq \sqrt{|y_0|^2 + 2\int_{x_0}^{x} \psi(t)dt} = \Psi(x)$$

per ogni $x \in [x_0,x_0+\delta]$. Per il Teorema 1.1.1, esistono $\delta > 0$ e $y \in \mathcal{C}^1([x_0,x_0+\delta];\mathbb{R}^d)$ soluzione del problema (1.1). Supponiamo per assurdo che esistano due soluzioni $y_1,y_2 \in X$ al problema (1.1) per opportuni $\delta,\varepsilon > 0$. Poniamo $u(x) = |y_1(x) - y_2(x)| \geq 0$. Allora

$$\begin{aligned} u(x) = |y_1(x) - y_2(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))\right| dt \leq \int_{x_0}^{x} |f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))| dt \\ &\leq \int_{x_0}^{x} h(t,|y_1(t)|,|y_2(t)|)|y_1(t)-y_2(t)|dt \leq \int_{x_0}^{x} h(t,\Psi(t),\Psi(t))|y_1(t)-y_2(t)|dt \end{aligned}$$

cioè

$$u(x) \leq \int_{x_0}^{x} h(t,\Psi(t),\Psi(t))u(t)dt.$$

Dal Lemma 1.2.3 si conclude che $u(x) \equiv 0$, e quindi le due soluzioni y_1 e y_2 coincidono sul comune intervallo di esistenza. $\square$

Esempio 1.3.2. Sia $f\colon [0,\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo

$$f(x,y) = \left(|y|^{\frac{10}{11}} + \sqrt[4]{x}\right)\vec{e}_1 + \left(3|y|^{\frac{10}{11}} + 2\sqrt[5]{x}\right)\vec{e}_2 \tag{1.18}$$

e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \left(|y|^{\frac{10}{11}} + \sqrt[4]{x}\right)\vec{e}_1 + \left(3|y|^{\frac{10}{11}} + 2\sqrt[5]{x}\right)\vec{e}_2 \\ y(0) = \vec{0}. \end{cases} \tag{1.19}$$

Vogliamo mostrare che il problema (1.19) ammette un'unica soluzione locale. Osserviamo che la funzione f definita in (1.18) è continua ma non è localmente di Lipschitz in y, quindi il Teorema 1.1.3 non è applicabile. Applichiamo il Teorema 1.3.1 e mostriamo che il problema (1.19) ammette un'unica soluzione definita su $[0,\delta]$ per qualche $\delta > 0$.

Osserviamo preliminarmente che, posto $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$y_1'(x) = \langle y'(x), \vec{e}_1\rangle = |y|^{\frac{10}{11}} + \sqrt[4]{x} \geq \sqrt[4]{x}$$

da cui integrando si trova $y_1(x) \geq \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$. Analogamente $y_2(x) \geq \frac{5}{3}x^{\frac{6}{5}}$.

Mostriamo che l'ipotesi i) del Teorema 1.3.1 è verificata. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \langle f(x,y(x)), y(x)\rangle &= \left(|y(x)|^{\frac{10}{11}} + \sqrt[4]{x}\right)y_1(x) + \left(3|y(x)|^{\frac{10}{11}} + 2\sqrt[5]{x}\right)y_2(x) \\ &\geq \sqrt[4]{x}\cdot\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + 2\sqrt[5]{x}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{6}{5}} \geq \frac{4}{5}x^{\frac{3}{2}} =: \psi(x) \end{aligned}$$

e, pertanto,

$$\Psi(x) := \sqrt{2\int_0^x \psi(t)dt} = \sqrt{\frac{8}{5}\int_0^x t^{\frac{3}{2}}dt} = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}.$$

Calcoliamo la funzione h e mostriamo che l'ipotesi ii) del Teorema 1.3.1 è verificata. Infatti, posto $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$, si ha

$$\begin{aligned}
|f(x,v) - f(x,w)| &= \left|\left(|v|^{\frac{10}{11}} - |w|^{\frac{10}{11}}\right)\vec{e}_1 + 3\left(|v|^{\frac{10}{11}} - |w|^{\frac{10}{11}}\right)\vec{e}_2\right| \\
&\leq 4\left||v|^{\frac{10}{11}} - |w|^{\frac{10}{11}}\right| \leq \frac{40}{11}\left(\frac{1}{\sqrt[11]{|v|}} + \frac{1}{\sqrt[11]{|w|}}\right)||v| - |w|| \\
&\leq \frac{40}{11}\left(\frac{1}{\sqrt[11]{|v|}} + \frac{1}{\sqrt[11]{|w|}}\right)|v - w|
\end{aligned}$$

per il Teorema del valor medio applicato alla funzione $t \mapsto t^{\frac{10}{11}}$, $t > 0$. Abbiamo trovato

$$h(x, u_1, u_2) = \frac{40}{11}\left(\frac{1}{\sqrt[11]{|u_1|}} + \frac{1}{\sqrt[11]{|u_2|}}\right)$$

con $u_1, u_2 \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ e lasciamo al lettore verificare che le condizioni in ii) sono soddisfatte.

Infine, mostriamo che l'ipotesi iii) del Teorema 1.3.1 è verificata. Infatti

$$\int_0^\delta h(t, \Psi(t), \Psi(t))dt = \frac{40}{11}\int_0^\delta \frac{2dt}{\sqrt[11]{\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}}} = \frac{3520}{429} \cdot \sqrt[11]{\frac{5}{4}} \cdot \delta^{\frac{39}{44}} < \infty.$$

Abbiamo verificato le ipotesi del Teorema 1.3.1: concludiamo che il problema (1.19) ammette un'unica soluzione definita sull'intervallo $[0, \delta]$ (e possiamo scegliere $\delta = 1$).

1.3.2. Condizioni sufficienti per il caso Giuliano

Vogliamo ora estendere al caso vettoriale le osservazioni fatte riguardo al Teorema 1.2.6 di Montel–Tonelli analogamente a quanto fatto per il Teorema di Cauchy–Lipschtz.

Una estensione al caso vettoriale del Teorema 1.2.6 è stata dimostrata da L. Giuliano nel 1940, [27], [28].

Teorema 1.3.3 (Giuliano)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un insieme aperto, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e sia $f \in \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{R}^d)$ una funzione tale che*

$$\langle f(x, y_1) - f(x, y_2), y_1 - y_2\rangle \leq h(x)g(|y_1 - y_2|^2)$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in [x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ per qualche $\delta, \varepsilon > 0$, dove $g \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$ è una funzione di Osgood e $h \geq 0$ è una funzione, eventualmente non definita in x_0, tale che esiste finito il seguente integrale

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} h(t)dt < \infty.$$

Allora il problema (1.1) *ha una soluzione unica $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^d)$.*

Una dimostrazione del Teorema 1.3.3, in una versione leggermente più generale di quella data qui, si può trovare in [2, p. 143]. Il seguente risultato ne costituisce una generalizzazione.

Teorema 1.3.4. *Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione continua su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sia $h\colon U \to [0, \infty)$ una funzione definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_0, |y_0|, |y_0|) \in U$, eventualmente non definita in $(x_0, |y_0|, |y_0|)$. Supponiamo esistano $\delta, \varepsilon > 0$ tali che*

$$\langle f(x, y_1) - f(x, y_2), y_1 - y_2\rangle \leq h(x, |y_1|, |y_2|)g(|y_1 - y_2|^2)$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in [x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ con $[x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(|y_0|) \times \bar{B}_\varepsilon(|y_0|) \subset U$, dove $g \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$ è una funzione di Osgood. Supponiamo inoltre che siano soddisfatte le ipotesi i), ii) e iii) del Teorema 1.3.1. Allora il problema (1.1) *ha un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 1.1.1, esistono $\delta > 0$ e $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0 + \delta]; \mathbb{R})$ soluzione del problema (1.1). Supponiamo per assurdo che esistano due soluzioni $y_1, y_2 \in X$ al problema (1.1) per opportuni $\delta, \varepsilon > 0$. Poniamo $u(x) = |y_1(x) - y_2(x)|^2$. Allora esiste $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta]$ tale che $u(x) > 0$ per ogni $x \in (x_1, x_1 + \delta_1]$ e $u(x) = 0$ per ogni $x \in [x_0, x_1]$, per un opportuno $0 < \delta_1 < \delta$. Allora, per ogni $x \in (x_1, x_1 + \delta_1)$ si ha che

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2\langle f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)), y_1(x) - y_2(x)\rangle \leq \\ &\leq 2h(x, |y_1(x)|, |y_2(x)|)g(u(x)) \leq \\ &\leq 2h(x, \Psi(x), \Psi(x))g(u(x)). \end{aligned}$$

dato che, per ipotesi, si ha

$$|y(x)| \geq \sqrt{|y_0|^2 + 2\int_{x_0}^{x} \psi(t)dt} = \Psi(x).$$

Ma allora, integrando, si ha

$$\int_{u(x_1)}^{u(x_1+\delta_1)} \frac{dz}{g(z)} \leq 2\int_{x_1}^{x_1+\delta_1} h(t, \Psi(t), \Psi(t))dt < \infty$$

che contraddice il limite (1.5). □

Esempio 1.3.5. Sia $f\colon [0, \infty[\times \bar{B}_{1/e}(0) \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(|y|^{\frac{6}{7}} - 4|y|\log|y| + \sqrt[5]{x}\right)\vec{e}_1 + \left(3|y|^{\frac{6}{7}} - |y|\log|y| + 2\sqrt[6]{x}\right)\vec{e}_2 & 0 < |y| \leq 1/e \\ \sqrt[5]{x}\vec{e}_1 + 2\sqrt[6]{x}\vec{e}_2 & y = \vec{0} \end{cases} \tag{1.20}$$

e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = \vec{0} \end{cases} \tag{1.21}$$

con f definita come in (1.20). Vogliamo mostrare che il problema (1.21) ammette un'unica soluzione locale. La funzione f definita in (1.20) è continua ma non è localmente di Lipschitz in y, quindi il Teorema 1.1.3 non è applicabile. Applichiamo il Teorema 1.3.4 e mostriamo che il problema (1.21) ammette un'unica soluzione definita su $[0, \delta]$, per qualche $\delta > 0$.

Osserviamo preliminarmente che, posto $y = (y_1, y_2)$, si ha

$$y_1'(x) = \langle y(x), \vec{e}_1\rangle = |y|^{\frac{6}{7}} - 4|y|\log|y| + \sqrt[5]{x} \geq \sqrt[5]{x}$$

da cui, integrando, ricaviamo $y_1(x) \geq \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}$. Analogamente troviamo $y_2(x) \geq \frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}}$.

Mostriamo che l'ipotesi i) del Teorema 1.3.1 è verificata. Infatti si ha

$$\begin{aligned}\langle f(x,y(x)), y(x)\rangle &= \left(|y|^{\frac{6}{7}} - 4|y|\log|y| + \sqrt[5]{x}\right) y_1(x) + \left(3|y|^{\frac{6}{7}} - |y|\log|y| + 2\sqrt[6]{x}\right) y_2(x) \\ &\geq \sqrt[5]{x}\cdot\frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + 2\sqrt[6]{x}\cdot\frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}} \geq \frac{5}{6}x^{\frac{7}{5}} =: \psi(x)\end{aligned}$$

e, pertanto,

$$\Psi(x) = \sqrt{2\int_0^x \psi(t)dt} = \sqrt{\frac{5}{3}\int_0^x t^{\frac{7}{5}}dt} = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}.$$

Calcoliamo la funzione h e mostriamo che l'ipotesi ii) del Teorema 1.3.1 è verificata. Infatti, posto $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$, si ha

$$\begin{aligned}|f(x,v) - f(x,w)| &= \bigg| \left(\left(|v|^{\frac{6}{7}} - |w|^{\frac{6}{7}}\right) - 4\left(|v|\log|v| - |w|\log|w|\right)\right)\vec{e}_1 \\ &\qquad + \left(3\left(|v|^{\frac{6}{7}} - |w|^{\frac{6}{7}}\right) - \left(|v|\log|v| - |w|\log|w|\right)\right)\vec{e}_2 \bigg| \\ &\leq 4\Big||v|^{\frac{6}{7}} - |w|^{\frac{6}{7}}\Big| + 5\big||v|\log|v| - |w|\log|w|\big| \\ &\leq \frac{24}{7}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{|v|}} + \frac{1}{\sqrt[7]{|w|}}\right)\big||v| - |w|\big| + 5g(\big||v| - |w|\big|) \\ &\leq \frac{120}{7}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{|v|}} + \frac{1}{\sqrt[7]{|w|}}\right) g(|v-w|)\end{aligned}$$

per il Teorema del valor medio applicato alla funzione $t \mapsto t^{\frac{6}{7}}$, $t > 0$, e per i calcoli svolti nell'Esempio 1.2.8, dove g è la funzione definita in (1.12). Allora

$$\begin{aligned}\langle f(x,v) - f(x,w), v - w\rangle &\leq \frac{120}{7}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{|v|}} + \frac{1}{\sqrt[7]{|w|}}\right) g(|v-w|)|v-w| \\ &= \frac{60}{7}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{|v|}} + \frac{1}{\sqrt[7]{|w|}}\right) g(|v-w|^2).\end{aligned}$$

Abbiamo trovato

$$h(x,u_1,u_2) = \frac{60}{7}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{|u_1|}} + \frac{1}{\sqrt[7]{|u_2|}}\right)$$

con $u_1, u_2 \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ e lasciamo al lettore verificare che le condizioni in ii) sono soddisfatte.

Infine, mostriamo che l'ipotesi iii) del Teorema 1.3.1 è verificata. Infatti

$$\int_0^\delta h(t,\Psi(t),\Psi(t))dt = \frac{60}{7}\int_0^\delta \frac{2dt}{\sqrt[7]{\frac{5}{6}t^{\frac{7}{5}}}} = \frac{4200}{196}\cdot\sqrt[7]{\frac{6}{5}}\cdot\delta^{\frac{28}{35}} < \infty.$$

Abbiamo verificato le ipotesi del Teorema 1.3.4: concludiamo che il problema (1.21) ammette un'unica soluzione definita sull'intervallo $[0,\delta]$ (e possiamo scegliere $\delta = 1$).

In particolare, osserviamo che il Teorema 1.3.3 non è applicabile. Infatti, possiamo applicare lo stesso ragionamento dell'Esempio 1.2.8 alla funzione

$$R(x,v,w) = \frac{|\langle f(x,v) - f(x,w), v-w\rangle|}{g(|v-w|^2)}.$$

Il Teorema 1.3.4 è un miglioramento effettivo del Teorema 1.3.3.

1.3.3. Ipotesi di derivabilità per il caso vettoriale

In modo simile a quanto osservato sopra per il caso scalare, il Teorema 1.3.1 può essere riformulato sotto ipotesi più restrittive ricavando però le informazioni sufficienti per l'unicità locale direttamente dalla funzione f stessa e non dalla struttura particolare delle soluzioni del problema (1.1).

A tale scopo, riprendiamo la Definizione 1.2.11.

Definizione 1.3.6. Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione continua e derivabile su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$. Definiamo la funzione $f^\natural\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo $f^\natural(x,y) = \langle \partial_1 f(x,y) + \partial_2 f(x,y) f(x,y), y\rangle + |f(x,y)|^2$, dove in questo caso $\partial_1 f \in \mathbb{R}^d$ e $\partial_2 f \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$ indicano rispettivamente la derivata rispetto alla variabile $x \in \mathbb{R}$ della funzione f e la matrice Jacobiana della funzione f rispetto alla sola variabile vettoriale $y \in \mathbb{R}^d$.

Dal Teorema 1.3.1 deduciamo allora il seguente risultato.

Teorema 1.3.7. *Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione continua e differenziabile su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sia $h\colon U \to [0,\infty)$ una funzione definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x_0, |y_0|, |y_0|) \in U$, eventualmente non definita in $(x_0, |y_0|, |y_0|)$. Supponiamo esistano $\delta, \varepsilon > 0$ tali che*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le h(x, |y_1|, |y_2|)|y_1 - y_2|$$

per ogni $(x,y_1), (x,y_2) \in [x_0, x_0+\delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ con $[x_0, x_0+\delta] \times \bar{B}_\varepsilon(|y_0|) \times \bar{B}_\varepsilon(|y_0|) \subset U$. Supponiamo inoltre che

i) esista una funzione $\theta\colon [x_0, x_0+\delta] \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in [x_0, x_0+\delta]$, valga $\theta(x) \le f^\natural(x,y)$ per ogni $(x,y) \in [x_0, x_0+\delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0)$ e sia ben definita

$$\Theta(x) = \sqrt{|y_0|^2 + 2\langle f(x_0,y_0), y_0\rangle (x - x_0) + 2\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t} \theta(u)dudt}$$

al variare di $x \in [x_0, x_0+\delta]$;

ii) si abbiano $h(x,u_1,u_2) = h(x,u_2,u_1)$, $h(x, 2|y_0| - u_1, u_2) = h(x,u_1,u_2)$ e $|y_0| < u_1 \le \overline{u}_1 \Rightarrow h(x,u_1,u_2) \ge h(x,\overline{u}_1,u_2)$ per ogni $(x,u_1,u_2), (x,u_2,u_1), (x,\overline{u}_1,u_2) \in [x_0, x_0+\delta] \times \bar{B}_\varepsilon(|y_0|) \times \bar{B}_\varepsilon(|y_0|) \smallsetminus \{\, (x_0, |y_0|, |y_0|) \,\}$;

iii) esista finito l'integrale $\int_{x_0}^{x_0+\delta} h(t, \Theta(t), \Theta(t))dt < \infty$.

Allora il problema (1.1) *ha un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0+\delta]; \mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Ci basta dimostrare che l'ipotesi i) del Teorema 1.3.1 è soddisfatta. Osserviamo che, per ogni soluzione $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0+\delta]; \mathbb{R}^d)$ del problema (1.1), dall'ipotesi i) si ha che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\langle f(x,y(x)), y(x)\rangle &= \langle \partial_1 f(x,y(x)) + \partial_2 f(x,y(x))y'(x), y(x)\rangle + \langle f(x,y(x)), y'(x)\rangle = \\ &= \langle \partial_1 f(x,y(x)) + \partial_2 f(x,y(x)) f(x,y(x)), y(x)\rangle \\ &\quad + \langle f(x,y(x)), f(x,y(x))\rangle = \\ &= f^\natural(x,y(x)) \ge \theta(x). \end{aligned}$$

Ma allora integrando si trova

$$\langle f(x,y(x)), y(x)\rangle \ge \langle f(x_0,y_0), y_0\rangle + \int_{x_0}^{x} \theta(t)dt = \psi(x).$$

Quindi l'ipotesi i) del Teorema 1.3.1 è verificata con

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \sqrt{|y_0|^2 + 2\int_{x_0}^{x} \psi(t)dt} \\ &= \sqrt{|y_0|^2 + 2\langle f(x_0, y_0), y_0\rangle(x - x_0) + 2\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t} \theta(u)dudt} = \Theta(x).\end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Analogamente a quanto appena fatto, dal Teorema 1.3.4 si deduce il seguente risultato.

Teorema 1.3.8. *Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione continua e differenziabile su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sia $h\colon U \to [0, \infty)$ una funzione definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x_0, |y_0|, |y_0|) \in U$, eventualmente non definita in $(x_0, |y_0|, |y_0|)$. Supponiamo esistano $\delta, \varepsilon > 0$ tali che*

$$\langle f(x, y_1) - f(x, y_2), y_1 - y_2\rangle \leq h(x, |y_1|, |y_2|)g(|y_1 - y_2|^2)$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in [x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ con $[x_0, x_0 + \delta] \times \bar{B}_\varepsilon(|y_0|) \times \bar{B}_\varepsilon(|y_0|) \subset U$, dove $g \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$ è una funzione di Osgood. Supponiamo inoltre che siano soddisfatte le ipotesi i), ii) e iii) del Teorema 1.3.7. Allora il problema (1.1) *ha un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0 + \delta]; \mathbb{R}^d)$.*

Lasciamo al lettore la dimostrazione di questo risultato.

Remark 1.3.9. Tutti i teoremi enunciati mostrano l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (1.1) definita sull'intervallo $[x_0, x_0 + \delta]$. Questa ipotesi è stata fatta per comodità. Tutti i risultati visti possono essere naturalmente rienunciati per intervalli del tipo $[x_0 - \delta, x_0]$ e $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Parte 2

Flusso di un campo ed equazione del trasporto

In questa parte discutiamo alcune proprietà del flusso generato da un campo vettoriale soddisfacente una condizione simile a quella del Teorema di Giuliano (Teorema 1.3.3). In particolare, nella prima sezione ricordiamo alcuni risultati utili alla nostra trattazione, nella seconda dimostriamo, seguendo un'idea di S. Fang in [24], l'esistenza e l'unicità del flusso associato ad un campo vettoriale del tipo del Teorema 1.3.3, nella terza studiamo la relazione di tale flusso con l'equazione del trasporto e la misura di Lebesgue ed infine nella quarta discutiamo i limiti delle tecniche utilizzate in relazione a quelle introdotte da G. Crippa e C. De Lellis in [20].

Notazioni. In questa parte riteniamo nota la teoria elementare della misura e dell'integrazione alla Lebesgue. Gli integrali sono intesi nel senso di Lebesgue. In particolare usiamo le seguenti simbologie e abbreviazioni:

- $B_r(c)$ indica la *palla Euclidea aperta* di centro $c \in \mathbb{R}^d$ e raggio $r > 0$ e $\bar{B}_r(c)$ indica la palla *chiusa*; se $c = 0$, scriviamo semplicemente $B(r)$ e $\bar{B}(r)$;
- $\|\cdot\|_\infty$ è la *norma infinito* (o la *norma della convergenza uniforme*) per funzioni continue definite su un compatto di $\mathbb{R}^d$;
- $\mathscr{L}^d$ indica la misura d-dimensionale di Lebesgue in $\mathbb{R}^d$;
- $\|\cdot\|_{L^p}$ indica la norma standard dello spazio L^p per ogni $1 \leq p \leq \infty$;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il *prodotto scalare* naturale di $\mathbb{R}^d$;
- $f * g$ indica il *prodotto di convoluzione* in $\mathbb{R}^d$ delle funzioni $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$; la convoluzione di due funzioni, a meno che non diversamente specificato, è nelle sole variabili spaziali;
- ∇b e $\operatorname{div}(b)$ indicano rispettivamente il *gradiente* o *derivata* e la *divergenza* (eventualmente *deboli*) del campo vettoriale b rispetto alle sole variabili spaziali; Db indica la *misura derivata debole* nel caso b sia a variazione limitata;
- $\det A$ indica il *determinante* della matrice A.

2.1. Introduzione

Nella parte precedente abbiamo studiato alcuni criteri di unicità locale classici che generalizzano il Teorema di esistenza e unicità locale di Cauchy–Lipschitz per la soluzione del problema di Cauchy (1.1). In questa parte siamo interessati alle proprietà del *flusso* associato ad un campo vettoriale.

Definizione 2.1.1 (Flusso)**.** Sia $T > 0$ e sia $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale (dipendente dal tempo). Una mappa $X : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tale che

$$\begin{cases} \dfrac{dX_t}{dt}(x) = b_t(X_t(x)), & (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d, \\ X_0(x) = x, & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2.1}$$

se esiste, si dice un *flusso* associato al campo vettoriale b. Equivalentemente, un flusso associato al campo b è, se esiste, una famiglia di funzioni $\left\{ X_t \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d : t \in [0,T] \right\}$ tali che

$$X_t(x) = x + \int_0^t b_s(X_s(x))ds$$

per ogni $t \in [0,T]$ ed ogni $x \in \mathbb{R}^d$.

La Definizione 2.1.1 pone il seguente problema: quali condizioni possiamo dare al campo b affinché esista un flusso associato? quali affinché tale flusso sia anche unico? Per rispondere a queste domande dobbiamo considerare, per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot\gamma = b_t(\gamma) \\ \gamma(0) = x \end{cases} \tag{2.2}$$

e stabilire sotto quali condizioni esista e sia unica la soluzione $\gamma_x(t) = X_t(x)$.

Il Teorema di Peano (Teorema 1.1.1) dimostra che, se $b \in \mathcal{C}^0([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, allora esiste una soluzione locale $\gamma_x \in \mathcal{C}^1(I_x; \mathbb{R}^d)$ per qualche intervallo $I_x \subseteq [0,T]$. Se il campo b è continuo, dunque, ha senso parlare di flusso associato, anche se non è assicurata né l'esistenza per tutti i tempi $t \in [0,T]$ né l'unicità.

Il Teorema di Cauchy–Lipschitz (Teorema 1.1.3) dimostra che, se b è continuo e localmente di Lipschitz in x su $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ (si veda la Definizione 1.1.2), allora esiste un'unica soluzione $\gamma_x \in \mathcal{C}^1(I_x; \mathbb{R}^d)$ per qualche intervallo $I_x \subseteq [0,T]$. Inoltre, se b è limitato su $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, allora la soluzione $\gamma_x \colon I_x \to \mathbb{R}^d$ può essere estesa ad un'unica soluzione $\gamma_x \colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$; una dimostrazione di questa affermazione si può trovare in [19, p. 16].

In conclusione, se b è continuo, localmente di Lipschitz in x su $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ e limitato su $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, allora esiste ed è unico il flusso associato $X \colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, e pertanto la Definizione 2.1.1 è ben posta.

Ricordiamo ora alcuni risultati classici sul flusso associato ad un campo vettoriale.

Proposizione 2.1.2 (Proprietà del flusso)**.** *Sia $b \colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale limitato, continuo e di Lipschitz nella variabile spaziale, cioè esista una costante $L > 0$ tale che*

$$|b_t(x) - b_t(y)| \le L|x-y| \tag{2.3}$$

per ogni $(t,x), (t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$. Allora valgono le seguenti affermazioni:

i) il flusso X associato al campo b è localmente di Lipschitz nella variabile spaziale; inoltre, se $b \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, allora $X \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$;

ii) si ha $X_0(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, cioè $X_0 = \mathrm{id}$;

iii) il flusso ha la proprietà di gruppo $X_{t+s} = X_t \circ X_s$ per ogni $s, t \in [0,T]$ con $s + t \in [0,T]$.

Una dimostrazione di questo risultato si può trovare ad esempio in [41, p. 45].

Facciamo ora un'ulteriore osservazione legata al punto (i) della Proposizione 2.1.2 (vedi anche [18, p. 2] e [23, p. 512]). Supponiamo che $b\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sia un campo vettoriale tale che valga la (2.3), e pertanto un campo non necessariamente continuo nel tempo. In queste ipotesi, allora, il flusso X associato al campo b esiste ed è unico per ogni punto iniziale $x \in \mathbb{R}^d$ e, inoltre, il flusso $X_t(x)$ eredita la regolarità Lipschitz rispetto alla variabile x. In quanto segue diamo una giustificazione formale di queste affermazioni.

L'unicità può essere dimostrata con il seguente argomento. Supponiamo che X e $\bar{X}$ siano due flussi associati al campo b (possibilmente distinti). Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ si ha che

$$\frac{d}{dt}|X_t(x) - \bar{X}_t(x)| \leq |b_t(X_t(x)) - b_t(\bar{X}_t(x))| \leq L|X_t(x) - \bar{X}_t(x)|$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato la (2.3). Usando il Lemma di Grönwall, ricordato che $X_0(x) = \bar{X}_0(x)$, si deduce immediatamente che $X_t(x) = \bar{X}_t(x)$ per ogni $t \in [0,T]$, cioè che $X = \bar{X}$ come si voleva.

La dimostrazione della regolarità Lipschitz segue da un argomento simile. Fissati $x, y \in \mathbb{R}^d$, si calcola

$$\frac{d}{dt}|X_t(x) - X_t(y)| \leq |b_t(X_t(x)) - b_t(X_t(y))| \leq L|X_t(x) - X_t(y)|$$

da cui, ricordato che $|X_0(x) - X_0(y)| = |x - y|$, ancora applicando il Lemma di Grönwall si trova

$$|X_t(x) - X_t(y)| \leq e^{Lt}|x - y|$$

cioè $X_t(x)$ è di Lipschitz rispetto ad x, e la costante di Lipschitz dipende esponenzialmente dalla costante di Lipschitz del campo b. Si può anche dare una stima di Lipschitz dal basso. Osservato infatti che il flusso inverso $X_t^{-1} = X_{-t}$ soddisfa banalmente

$$\frac{dX_t^{-1}}{dt}(x) = -b_t(X_t^{-1}(x))$$

per ogni $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, con lo stesso ragionamento applicato a X^{-1} si dimostra che

$$|X_t(x) - X_t(y)| \geq e^{-Lt}|x - y|$$

e quindi si ha la doppia stima

$$e^{-Lt}|x - y| \leq |X_t(x) - X_t(y)| \leq e^{Lt}|x - y| \tag{2.4}$$

per ogni $(t,x), (t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$.

A questo punto, sotto l'ipotesi che b sia un campo Lipschitziano, la Proposizione 2.1.2 e le osservazioni formali appena viste chiariscono in modo sufficientemente esaustivo l'unicità e la regolarità del flusso associato al campo.

Focalizziamo ora la nostra attenzione sulla stima (2.4). La doppia disuguaglianza (2.4) fornisce una stima a priori sul comportamento del flusso al tempo t rispetto al dato iniziale. Questa informazione porta in modo naturale alla seguente domanda, legata all'interazione tra il flusso e la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^d$: in che modo il flusso X deforma un dato insieme misurabile limitato $A \subset \mathbb{R}^d$? Più precisamente, è possibile dare una stima a priori dell'intensità di questa deformazione in modo analogo a quanto visto per la stima (2.4)?

Queste considerazioni sono state il punto di partenza delle ricerche di R. J. DiPerna e P.-L. Lions nel loro articolo del 1989, [23]. Vogliamo ora esporre brevemente le loro idee, rimanendo però all'interno dell'ambiente classico, almeno per il momento.

Prima di procedere premettiamo alcuni risultati e definizioni di cui avremo bisogno nel seguito. Per prima cosa ricordiamo il seguente risultato.

Proposizione 2.1.3 (Determinante Jacobiano)**.** *Sia X il flusso associato ad un campo vettoriale limitato $b \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$. Allora il determinante Jacobiano $w_x(t) = \det \nabla X_t(x)$ risolve per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ l'equazione differenziale*

$$\dot{w}_x(t) = \operatorname{div}(b_t(X_t(x)))w_x(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.5}$$

Una dimostrazione di questa proposizione si può trovare [41, p. 45]. Diamo ora la seguente definizione.

Definizione 2.1.4 (Misura push-forward)**.** Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $(Y, \mathcal{N})$ uno spazio misurabile. Sia $\phi\colon X \to Y$ una mappa misurabile. La *misura push-forward* (o *misura immagine*) tramite ϕ della misura μ è la misura $\phi_{\#}\mu\colon \mathcal{N} \to [0,\infty]$ definita ponendo $\phi_{\#}\mu(B) = \mu(\phi^{-1}(B))$ per ogni $B \in \mathcal{N}$.

Lasciamo al lettore la verifica che $f_{\#}\mu$ è una misura su $\mathcal{N}$. Nel seguito avremo bisogno del seguente risultato elementare sulla misura push-forward.

Lemma 2.1.5. *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $(Y, \mathcal{N})$ uno spazio misurabile. Sia $\phi\colon X \to Y$ una mappa misurabile. La misura push-forward tramite ϕ della misura μ è la misura ν sullo spazio $(Y, \mathcal{N})$ tale che*

$$\int_Y f d\nu = \int_X f \circ \phi \, d\mu$$

per ogni funzione misurabile $f\colon Y \to [0,\infty]$.

Lasciamo al lettore la dimostrazione di questo risultato. Infine, diamo la definizione di alcuni spazi di funzioni.

Definizione 2.1.6. Siano $T > 0$ e $1 \le p < \infty$. Definiamo lo spazio $L^1([0,T]; L^p(\mathbb{R}^d))$ come l'insieme di tutte le funzioni misurabili $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tali che

$$\|f\|_{L^1([0,T];L^p(\mathbb{R}^d))} := \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p\right)^{1/p} dt < \infty.$$

Analogamente, definiamo lo spazio $L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ come l'insieme di tutte le funzioni misurabili $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tali che

$$\|f\|_{L^1([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^d))} := \int_0^T \|f(t,\cdot)\|_{L^\infty} dt < \infty.$$

Gli spazi $L^1([0,T]; L^p(\mathbb{R}^d))$ e $L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ dotati di queste norme sono spazi di Banach. In modo analogo si definiscono gli spazi $L^1([0,T]; L^p_{loc}(\mathbb{R}^d))$ e $L^1([0,T]; L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d))$.

Siamo ora pronti per tornare alla relazione tra flusso e misura di Lebesgue. Supponiamo che $b \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ sia un campo vettoriale limitato tale che $\operatorname{div}(b) \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^d))$.

Allora la misura di Lebesgue $\mathscr{L}^d$ è *quasi-invariante* sotto il flusso generato dal campo b, cioè vale la disuguaglianza

$$e^{-\int_0^t \|\mathrm{div}(b_s)\|_{L^\infty} ds} \leq k_t(x) \leq e^{\int_0^t \|\mathrm{div}(b_s)\|_{L^\infty} ds} \tag{2.6}$$

per ogni $t \in [0,T]$ ed ogni $x \in \mathbb{R}^d$, dove $k \in L^1([0,T];L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ è la *densità* della misura push-forward $(X_t)_\#\mathscr{L}^d$ rispetto alla misura di Lebesgue, cioè $(X_t)_\#\mathscr{L}^d = k_t\mathscr{L}^d$ per ogni $t \in [0,T]$.

Questo è il punto di partenza delle ricerche di DiPerna e Lions in [23]. Infatti, come DiPerna e Lions osservano nel loro articolo, ci sono diversi modi di provare la (2.6). Li esponiamo brevemente nel seguito.

Il primo modo, quello più semplice ed, in realtà, quello peggiore per suggerire nuovi e più generali approcci al problema, è dato dalla disuguaglianza (2.4), che fornisce immediatamente la stima più imprecisa

$$e^{-Lt} \leq k_t(x) \leq e^{Lt}$$

per ogni $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$.

Il secondo modo, quello più difficile ma migliore perché porta alla stima più precisa e alla sua corretta spiegazione, è basato sulla seguente osservazione. Si può dimostrare che la densità k nella (2.6) soddisfa, nel *senso delle distribuzioni*, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial k}{\partial t} - \mathrm{div}(bk) = 0, & (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d, \\ k_0 = 1, & \text{su } \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2.7}$$

cioè, per ogni $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\mathbb{R}^d)$, detta *funzione test*, si ha

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial t} k_t(x) + \langle b_t(x)k_t(x), \nabla\phi_t(x)\rangle dxdt = 0. \tag{2.8}$$

Utilizzando l'informazione fornita dalla Proposizione 2.1.3 e applicando il Lemma di Grönwall, dal problema (2.7) segue la stima (2.6) (svolgeremo questo calcolo esplicitamente in una delle sezioni seguenti). In altri termini, «la divergenza di b governa il tasso esponenziale della compressione o della dilatazione della misura di Lebesgue trasportata dal flusso» ([23, p. 513]), cioè la (2.6) fornisce una stima a priori dell'intensità della deformazione della misura di Lebesgue sotto l'azione del flusso.

Il problema di Cauchy (2.7) è detto *equazione di continuità* per la densità k ed è un'equazione differenziale alle derivate parziali (PDE). Il collegamento tra equazioni differenziali ordinarie (ODE) soddisfatte dal flusso (2.1) e PDE apre una nuova prospettiva nello studio del problema (2.1) e costituisce il fulcro delle ricerche di DiPerna e Lions.

L'importanza del collegamento tra ODE e PDE segue anche dalla seguente osservazione (vedi anche [21, p. 405] o [19, p. 20]). Consideriamo un campo vettoriale limitato $b \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ ed il suo unico flusso associato X come nel problema (2.1). Una funzione $u \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ è costante lungo il cammino $X_\cdot(x) : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ se e solo se u risolve

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \langle b, \nabla u\rangle = 0. \tag{2.9}$$

Infatti, derivando la funzione $g(t) = u_t(X_t(x))$, si trova

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial u_t}{\partial t}(X_t(x)) + \left\langle \frac{dX_t}{dt}(x), \nabla u_t(X_t(x)) \right\rangle = \frac{\partial u_t}{\partial t}(X_t(x)) + \langle b_t(X_t(x)), \nabla u_t(X_t(x))\rangle = 0.$$

Più in generale, l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_t(x)}{\partial t} + \langle b_t(x), \nabla u_t(x)\rangle = 0, & (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d, \\ u_0(x) = \theta(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2.10}$$

detto anche problema dell'*equazione del trasporto* per la funzione u con dato iniziale $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, è data dalla funzione $u_t(x) = \theta(X_{-t}(x))$.

Questi calcoli mostrano che il problema (2.1) è collegato in modo sottile alla PDE (2.9). Più precisamente, mostrare che il problema (2.1) è ben posto porta alla soluzione della (2.10) con un dato iniziale sufficientemente regolare e, viceversa — e questo è il punto fondamentale — mostrare che il problema (2.10) è ben posto porta alla soluzione del problema (2.1).

Questo è il nuovo approccio al problema (2.1) sviluppato da DiPerna e Lions in [23]: per prima cosa si prova che il problema (2.10) è *ben posto*, cioè, secondo la definizione di J. Hadamard in [30],

1. esiste una soluzione
2. la soluzione è unica
3. la soluzione dipende in modo continuo rispetto ai dati iniziali,

e poi, come conseguenza, si dimostra che anche il problema (2.1) è ben posto. Questa idea si basa sul fatto che la Definizione 2.1.1 del flusso associato ad un campo vettoriale è collegata alle soluzioni del problema (2.10). Questo metodo è indiretto ed è ora noto come teoria di DiPerna–Lions o *approccio Euleriano*.

La novità di questa tecnica consiste soprattutto nella possibilità di estendere i risultati che abbiamo visto — l'esistenza, l'unicità, le proprietà di gruppo (Proposizione 2.1.2) e la regolarità del flusso rispetto alla misura di Lebesgue — ad un campo vettoriale b non più Lipschitziano, ma molto meno regolare. Nel loro articolo [23], DiPerna e Lions generalizzano questi risultati per un campo vettoriale di Sobolev $b \in L^1([0,T]; W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d))$ con divergenza debole $\operatorname{div}(b) \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^d))$. Di seguito richiamiamo brevemente la definizione di spazio di Sobolev $W^{1,p}$; si veda ad esempio [1, p. 59] o [16, p. 202].

Definizione 2.1.7 (Spazi di Sobolev $W^{1,p}$)**.** Sia $1 \le p \le \infty$. Definiamo lo *spazio di Sobolev* $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ come lo spazio di Banach composto da tutte le funzioni $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tali che esista in senso debole il gradiente $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, dotato della norma

$$\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

In modo analogo si definisce lo spazio $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Lo spazio $L^1([0,T]; W^{1,p}(\mathbb{R}^d))$ e lo spazio $L^1([0,T]; W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^d))$ sono definiti nello stesso modo della Definizione 2.1.6.

I risultati classici che abbiamo visto si inseriscono nell'ambiente $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$, che è proprio l'insieme delle funzioni Lipschitziane. Più precisamente, vale il seguente risultato, la cui dimostrazione si può trovare in [16, p. 207] (un risultato analogo vale in dimensione $d > 1$).

Proposizione 2.1.8. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, possibilmente illimitato. Una funzione $f \in L^\infty(I)$ appartiene a $W^{1,\infty}(I)$ se e solo se esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y| \text{ per ogni } x, y \in I.$$

L'approccio di DiPerna e Lions, in questo senso, permette di "abbassare" la regolarità del campo vettoriale b nel problema (2.1) da quella di tipo Lipschitz a quella, molto più generale, di tipo Sobolev $W^{1,1}$.

I risultati di DiPerna e Lions estendono la teoria classica delle ODE a campi di tipo Sobolev $W^{1,1}$ sfruttando il legame tra il problema (2.1) e l'equazione del trasporto (2.10). Risulta quindi interessante chiedersi se questa estensione rimanga valida anche per campi vettoriali ancora più irregolari.

Nel 2004, nei suoi lavori [5] e [7], L. Ambrosio, partendo da un risultato di G. Alberti (il Lemma 36 in [8] e, per i lavori originali, il Teorema del rango uno di Alberti, [4]), è riuscito ad estendere la teoria di DiPerna e Lions ad un campo vettoriale $b \in L^1([0,T]; BV_{loc}(\mathbb{R}^d))$ tramite l'equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(bu) = 0$$

(già incontrata nel lavoro di DiPerna e Lions per la densità, vedi (2.7)). Di seguito richiamiamo brevemente una possibile definizione dello spazio delle funzioni a variazione limitata BV; per una trattazione più precisa si veda ad esempio [9, p. 117].

Definizione 2.1.9 (Spazio BV). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto e sia $f \in L^1(\Omega)$. Diciamo che la funzione f è *a variazione limitata* su Ω, e scriviamo $f \in BV(\Omega)$, se il gradiente debole di f è rappresentabile da una misura di Radon finita su Ω, cioè se

$$\int_\Omega f \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \phi \, dD_i f \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad i = 1, \ldots, d$$

per qualche misura d-vettoriale $Df = (D_1 f, \ldots, D_d f)$ su Ω. Lo spazio $BV(\Omega)$ dotato della norma

$$\|f\|_{\mathcal{M}} := \|f\|_{L^1(\Omega)} + |Df|(\Omega)$$

è uno spazio di Banach. In modo analogo si definisce lo spazio $BV_{loc}(\Omega)$. Lo spazio $L^1([0,T]; BV(\mathbb{R}^d))$ e lo spazio $L^1([0,T]; BV_{loc}(\mathbb{R}^d))$ sono definiti nello stesso modo della Definizione 2.1.6.

In alcuni recenti articoli, Ambrosio, Figalli, Fang e Luo, hanno generalizzato la teoria di DiPerna e Lions e i risultati di Ambrosio agli spazi infinito-dimensionali di Wiener.

Il caso BV, a tutt'oggi, è il più ampio contesto in cui è nota una teoria generale per l'*approccio Euleriano*. Sembra tuttavia possibile estendere questa teoria in contesti ancora più generali, si veda [6, p. 8].

Sebbene i risultati di DiPerna e Lions e di Ambrosio valgano in ipotesi molto generali, rimangono ancora alcune situazioni in cui non si sono trovate estensioni di queste teorie, a causa soprattutto del loro approccio molto indiretto al problema (2.1) tramite l'equazione del trasporto e di continuità.

D'altra parte, i metodi classici si basano su stime *dirette* del flusso, come per esempio i calcoli fatti per mostrare la (2.4) o i criteri di unicità della soluzione locale discussi nella parte precedente, e non fanno uso della teoria delle PDE.

Siamo pertanto interessati alla seguente domanda: possiamo raggiungere, anche solo parzialmente, alcune delle conclusioni della Teoria DiPerna–Lions tramite un più diretto *approccio Lagrangiano*? Cioè, più precisamente, è possibile provare delle stime a priori sufficientemente precise in modo da poterne derivare l'esistenza, l'unicità e le proprietà di regolarità del flusso?

Questo approccio è possibile in molti casi, ed è stato mostrato per la prima volta nel 2008 da G. Crippa e C. De Lellis in [20] (si vedano anche [21] e [19] per un confronto con la teoria di DiPerna–Lions e di Ambrosio). Il loro metodo si applica ad un campo vettoriale b con regolarità di tipo Sobolev $W^{1,p}$ con $p > 1$ e si basa su alcune stime a priori sul flusso che dipendono solamente da $\|b\|_{W^{1,p}} + \|b\|_{L^\infty}$ e la *costante di compressione* del *flusso regolare Lagrangiano* (si veda la sezione 2.4 ed in particolare la Definizione 2.4.1).

Il seguente risultato, che si può trovare in [21, p. 407], rappresenta un prototipo di ciò che è possibile provare con la teoria di DiPerna–Lions o con l'approccio più diretto di Crippa–De Lellis.

Teorema 2.1.10. *Sia $p \geq 1$ e sia $b \in L^1([0,T]; W^{1,p}(\mathbb{R}^d))$ un campo vettoriale limitato con divergenza debole $\operatorname{div}(b) \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^d))$. Allora esiste un unico flusso regolare Lagrangiano $X : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ associato a b. Inoltre, se $\{ b^n : n \geq 1 \}$ è una successione di campi vettoriali lisci che convergono in L^1_{loc} al campo b con*

$$\sup_{n\geq 1} \|\operatorname{div}(b^n)\|_{L^1([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^d))} < \infty,$$

allora il flusso X^n associato al campo b^n converge in L^1_{loc} al flusso X.

Il caso $p = 1$, dimostrato per la prima volta da DiPerna e Lions in [23], non è stato raggiunto completamente dalla teoria di Crippa e De Lellis sviluppata in [20]. Tuttavia, recentemente, il caso $p = 1$ è stato trattato completamente secondo l'*approccio Lagrangiano*: nel 2013, F. Bouchut e Crippa hanno esteso i risultati ottenuti in [20] al caso in cui il campo b abbia una regolarità di tipo Sobolev $W^{1,1}$ o, più in generale, abbia gradiente debole dato da una somma finita di *operatori integrali singolari* di funzioni in L^1, [13] (per una breve esposizione di questi risultati si veda [18]).

Le tecniche di Crippa e De Lellis, oltre a dare una differente derivazione dei risultati di DiPerna e Lions, hanno alcune nuove notevoli conseguenze.

Da un lato, Crippa e De Lellis hanno mostrato che il flusso regolare Lagrangiano associato al campo b è *approssimativamente differenziabile*: per una definizione si veda [20, p. 28]; per il risultato si veda invece [20, Corollary 3.5].

Dall'altro lato, Crippa e De Lellis sono riusciti a dare una parziale risposta alla prima delle due congetture di A. Bressan.

La prima congettura di Bressan è una congettura sul costo dei rimescolamenti di insiemi nel piano reale. Sia $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ il toro bidimensionale. Fissiamo le coordinate cartesiane $(x_1, x_2) \in [0,1[\times[0,1[$ su $\mathbb{T}$ e consideriamo l'insieme

$$A = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1/2 \} \subset \mathbb{T}.$$

Sia $b\colon [0,1] \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale liscio dipendente dal tempo, e denotiamo con $X\colon [0,1] \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2$ il flusso associato al campo b. Assumiamo che il flusso sia *quasi incompressibile*, cioè che esista una costante $\tau > 0$ tale che

$$\tau|\Omega| \leq |X_t(\Omega)| \leq \frac{1}{\tau}|\Omega|$$

per ogni $\Omega \subset \mathbb{T}$ e per ogni $t \in [0,1]$, dove $|\cdot|$ indica la misura 2-dimensionale di Lebesgue. Per un fissato $0 < \kappa < 1/2$, diciamo che il flusso $X_1\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ al tempo $t = 1$ *mescola l'insieme A fino ad una scala ε* se, per ogni palla $B_\varepsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, si ha che

$$\kappa|B_\varepsilon(x)| \leq |B_\varepsilon(x) \cap X_1(A)| \leq (1-\kappa)|B_\varepsilon(x)|.$$

In [14], Bressan propone la seguente congettura.

Congettura 2.1.11 (Congettura di Bressan sul mescolamento)**.** *Con le notazioni e le ipotesi precedenti, esiste una costante $C > 0$ dipendente unicamente da κ e τ tale che, se X_1 mescola l'insieme A fino ad una scala ε, allora*

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{T}} |\nabla b| dx dt \geq C |\log \varepsilon|$$

per ogni $0 < \varepsilon < 1/4$.

Crippa e De Lellis, nel loro articolo [20], dimostrano il seguente risultato.

Teorema 2.1.12 (Crippa–De Lellis, [20, Theorem 6.2])**.** *Sia $p > 1$. Con le notazioni e le ipotesi precedenti, esiste una costante $C > 0$ dipendente unicamente da κ, τ e p tale che, se X_1 mescola l'insieme A fino ad una scala ε, allora*

$$\int_0^1 \|\nabla b\|_{L^p(\mathbb{T})} dt \geq C |\log \varepsilon|$$

per ogni $0 < \varepsilon < 1/4$.

La seconda congettura di Bressan riguarda invece la precompattezza di una successione di flussi, e può essere vista come una versione continua della Congettura 2.1.11. Più precisamente, in [15], Bressan propone la seguente congettura.

Congettura 2.1.13 (Congettura di Bressan sulla compattezza)**.** *Siano $b^n \colon [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $n \geq 1$, campi vettoriali lisci limitati dipendenti dal tempo. Per ogni $n \geq 1$, sia X^n la soluzione del sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dX_t^n}{dt}(x) = b_t^n(X_t^n(x)), & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \\ X_0^n(x) = x, & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Supponiamo che

$$\sup_{n \geq 1} \left(\|b^n\|_{L^\infty} + \|\nabla b^n\|_{L^1} \right) < \infty$$

e che i flussi X^n siano uniformemente quasi incompressibili, *cioè che esista una costante $C > 0$, indipendente da $n \geq 1$, tale che, per ogni $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, si abbia*

$$\frac{1}{C} \leq \det(\nabla X_t^n(x)) \leq C.$$

Allora la successione $\{ X^n : n \geq 1 \}$ è relativamente compatta in L^1_{loc} (per la topologia forte).

Ad oggi, non è noto se la teoria di DiPerna–Lions possa essere estesa per comprendere questo risultato. Il lavoro [13] di Bouchut e Crippa rappresenta un grande progresso nella dimostrazione della Congettura 2.1.13: una completa estensione al caso BV dei loro risultati implicherebbe questa interessante ipotesi. Si vedano [6] e [13] per ulteriori dettagli.

In questa parte vogliamo trattare — in modo elementare e parziale — alcune semplici tecniche standard della teoria di DiPerna–Lions e di Cippa–De Lellis per lo studio dell'esistenza e dell'unicità del flusso e, rispettivamente, del flusso regolare Lagrangiano associati a campi con regolarità leggermente più bassa di quella di tipo Lipschitz. In particolare, da un lato, seguendo alcune tecniche elementari introdotte da Fang nelle note [24], mostriamo che il flusso associato ad un campo di tipo Osgood–Giuliano (si veda il Teorema 2.2.1) esiste ed è unico, ed inoltre risolve il problema dell'equazione del trasporto (2.10) con dato iniziale $\theta \in \mathcal{C}^0$; dall'altro lato, ponendo l'accento sulla limitatezza delle semplici tecniche qui introdotte rispetto a quelle di Crippa e De Lellis, mostriamo che il flusso regolare Lagrangiano associato ad un campo vettoriale con gradiente esponenzialmente integrabile (si veda il Teorema 2.4.4) esiste ed è unico.

2.2. Esistenza e unicità del flusso associato ad un campo di tipo Osgood–Giuliano

2.2.1. La condizione di Fang–Zhang

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un aperto e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione continua. Nella Parte 1 abbiamo studiato l'unicità della soluzione locale del problema di Cauchy (1.1) sotto l'ipotesi che la funzione f fosse di tipo *pseudo-Lipschitz*. In particolare, abbiamo studiato le due situazioni seguenti.

Nel Teorema 1.1.8, la funzione f è tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le g(|y_1 - y_2|)$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{B}_\delta(x_0) \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ per qualche $\delta, \varepsilon > 0$, dove $g \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$ è una funzione di Osgood (si ricordi la Definizione 1.1.6). La condizione di tipo Lipschitz si ottiene nel caso in cui $g(z) = Lz$ per ogni $z \ge 0$ con $L > 0$.

Nei Teoremi 1.2.6 e 1.3.3, la funzione f è più generale, e sostanzialmente tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le h(x)g(|y_1 - y_2|) \tag{2.11}$$

per ogni $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{B}_\delta(x_0) \times \bar{B}_\varepsilon(y_0) \subset \Omega$ per qualche $\delta, \varepsilon > 0$, dove $g \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$ è ancora una funzione di Osgood e $h \ge 0$ è una funzione, eventualmente non definita in x_0, tale che esiste finito il seguente integrale (di Riemann)

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} h(t)dt < \infty.$$

La condizione precedente si ottiene nel caso in cui la funzione h sia limitata sull'intervallo $[x_0, x_0 + \delta]$. Ci riferiamo genericamente alla (2.11) come alla *condizione di Osgood–Giuliano* per la funzione f.

In tutti e due i casi visti sopra, solo l'unicità locale della soluzione del problema (1.1) era derivata dalla condizione di Osgood–Giuliano per f, mentre l'esistenza locale di tale soluzione era garantita dall'ipotesi di continuità della funzione f, secondo il Teorema di esistenza di Peano (Teorema 1.1.1).

Nelle sue note [24], S. Fang studia il flusso associato ad un campo $b\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ limitato tale che

$$|b(x) - b(y)| \le C|x - y| \log \frac{1}{|x - y|} \tag{2.12}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$ con $|x-y| \le \delta$, per qualche $0 \le \delta < 1$ fissato. Notare che la condizione (2.12) è la (2.11) con $h = C$ e $g(z) = z \log \frac{1}{z}$, $0 \le z \le \delta$. Fang afferma che esiste un unico flusso associato al campo b e che tale flusso può essere costruito (ovvero approssimato) in modo uniforme con i flussi associati ai campi regolarizzati b^n del campo b (si veda la Definzione 2.2.3). In [24] sono svolti solamente i calcoli per l'approssimazione del flusso; la parte riguardante l'esistenza e l'unicità del flusso è svolta in un lavoro di Fang e T. Zhang, [25]. D'altra parte, la condizione (2.12) implica la continuità del campo b, e pertanto, sotto l'ipotesi di limitatezza del campo e la condizione (2.12), l'esistenza locale segue dal Teorema di esistenza di Peano e l'esistenza in grande dalla limitatezza di b (si ricordi quanto detto nella sezione precedente).

I calcoli svolti in [25] e [24] si basano su una semplice estensione della disuguaglianza di Grönwall applicata alla condizione (2.12). Questo approccio è sostanzialmente quello usato per dimostrare il Teorema di unicità locale di Osgood: si vedano ad esempio [42], [2, p. 12], [3, p. 69],[19, p. 14] oppure [34, p. 33].

In questa sezione vogliamo generalizzare la condizione (2.12) ad una condizione Osgood–Giuliano — ammettendo cioè un campo vettoriale b tempo dipendente e una funzione di Osgood generica — e mostrare che il flusso associato esiste ed è unico e che può essere approssimato uniformemente dai flussi associati ai campi regolarizzati b^n del campo b. Nella sezione successiva utilizzeremo questi risultati per risolvere l'equazione del trasporto (2.9) con dato iniziale $\theta \in \mathcal{C}^0$.

2.2.2. Esistenza e unicità tramite il Lemma di Bihari

In questa sezione volgiamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 2.2.1. *Sia $b \in L^1([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ un campo vettoriale limitato. Supponiamo esista $\delta > 0$ tale che, per ogni $t \in [0,T]$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$ con $|x-y| < \delta$, valga*

$$|b_t(x) - b_t(y)| \leq h(t)g(|x-y|) \tag{2.13}$$

dove

- *$h \in L^1([0,T])$ è una funzione tale che $h(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0,T]$;*
- *$g \in \mathcal{C}^0([0,\infty[)$ è una funzione di Osgood non decrescente.*

Allora esiste un unico flusso $X : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ associato al campo b.

Per dimostrare questo risultato, abbiamo bisogno di alcune considerazioni preliminari. Diamo le seguenti due definizioni.

Definizione 2.2.2 (Mollificatori)**.** Diciamo che $\{\, \chi_\varepsilon : \varepsilon > 0 \,\}$ è un insieme di *mollificatori standard* in $\mathbb{R}^d$ (o *nuclei di convoluzione standard*) se, per ogni $\varepsilon > 0$, valgono le seguenti proprietà:

- $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ e $\chi_\varepsilon \geq 0$;
- $\mathrm{supp}(\chi_\varepsilon) \subseteq \bar{B}(\varepsilon)$;
- $\int_{\mathbb{R}^d} \chi_\varepsilon dx = 1$.

In particolare, con la scelta $\varepsilon = 1/n$, diciamo che la successione di funzioni $\chi_n := \chi_{1/n}$, $n \geq 1$, è una *successione di mollificatori standard.*

Definizione 2.2.3 (Regolarizzazione)**.** Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ una funzione e sia $\{\, \chi_\varepsilon : \varepsilon > 0 \,\}$ un insieme di mollificatori standard. Diciamo che la funzione $f^\varepsilon := f * \chi_\varepsilon$ è una *regolarizzata* (o *ε-regolarizzata*) della funzione f. In particolare, se $\varepsilon = 1/n$, $n \geq 1$, scriviamo $f^n := f * \chi_n$ e diciamo che la funzione f^n è una *regolarizzata n-esima* della funzione f.

Utilizzeremo le nozioni di mollificatore e di regolarizzazione nella prima parte della dimostrazione del Teorema 2.2.1, dedicata al processo di costruzione del flusso tramite approssimazione uniforme.

Per dimostrare il Teorema 2.2.1 abbiamo bisogno della seguente generalizzazione del Lemma 1.2.3 (Grönwall–Bellman), dimostrata da I. A. Bihari nel 1956, [12]. Per comodità del lettore, diamo una dimostrazione di questo risultato seguendo, nelle linee essenziali, quella riportata in [43, p. 107].

Lemma 2.2.4 (Bihari)**.** *Siano $u, f \in \mathcal{C}^0([0,T])$ due funzioni non negative e sia $k > 0$ una costante. Sia $w \in \mathcal{C}^0([0,\infty[)$ una funzione non decrescente sull'intervallo $[0,\infty[$ e tale che $w(z) > 0$ per ogni $z > 0$. Se*

$$u(t) \leq k + \int_0^t f(s)w(u(s))ds \tag{2.14}$$

per ogni $0 \leq t \leq T$, allora, fissato $r_0 > 0$ e posto $W(r) = \int_{r_0}^r \frac{ds}{w(s)}$ per ogni $r > 0$, si ha

$$u(t) \leq W^{-1}\left(W(k) + \int_0^t f(s)ds\right), \tag{2.15}$$

dove W^{-1} è l'inversa di W.

Se nel Lemma 2.2.4 si sceglie $w = \mathrm{id}$, allora $W(r) = \log(\frac{r}{r_0})$ e si ottiene la disuguaglianza di Grönwall. Di seguito dimostriamo brevemente il lemma.

Dimostrazione. Sia $\phi(t) = k + \int_0^t f(s)w(u(s))ds$ con $0 \leq t \leq T$. Allora $\phi(0) = k$, $u(t) \leq \phi(t)$ e

$$\phi'(t) = f(t)w(u(t)) \leq f(t)w(\phi(t)).$$

Dalla definizione di W segue quindi che

$$\frac{d}{dt}W(\phi(t)) = \frac{\phi'(t)}{w(\phi(t))} \leq f(t).$$

Pertanto, integrando tra 0 e t, otteniamo

$$W(\phi(t)) \leq W(k) + \int_0^t f(s)ds.$$

Siccome W è crescente, anche la sua inversa W^{-1} è crescente. Dunque, applicando W^{-1} ad ambo i lati della disuguaglianza precedente si ottiene

$$\phi(t) \leq W^{-1}\left(W(k) + \int_0^t f(s)ds\right).$$

Siccome $u(t) \leq \phi(t)$, abbiamo concluso. □

Remark 2.2.5. La scelta del punto $r_0 > 0$ nella definizione di W non influisce sulla disuguaglianza (2.15) del Lemma 2.2.4. Infatti, se $\bar{r}_0 > 0$ e definiamo $\bar{W}(r) = \int_{\bar{r}_0}^r \frac{ds}{w(s)}$ per ogni $r > 0$, allora $\bar{W}(r) = W(r) - W(\bar{r}_0)$, cosicché $\bar{W}^{-1}(v) = \bar{W}^{-1}(v + W(\bar{r}_0))$. Pertanto si ottiene

$$\bar{W}^{-1}\left(\bar{W}(k) + \int_0^t f(s)ds\right) = W^{-1}\left(W(k) + \int_0^t f(s)ds\right),$$

e questo dimostra che la (2.15) è indipendente dalla scelta del punto $r_0 > 0$.

Remark 2.2.6. Il Lemma 2.2.4 rimane valido anche se la funzione f è solamente integrabile su $[0,T]$ invece che continua, cioè se $f \in L^1([0,T])$ e $f(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0,T]$. Lasciamo al lettore la verifica di questa affermazione. Nel seguito useremo il Lemma 2.2.4 sotto questa ipotesi più generale.

Siamo pronti per dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Dimostrazione del Teorema 2.2.1. La dimostrazione è divisa in due parti.

Step 1: Esistenza. Costruiamo una soluzione del problema (2.1) con un argomento di regolarizzazione. Sia $\{ \chi_n : n \geq 1 \}$ una successione di mollificatori standard in $\mathbb{R}^d$. Per ogni $t \in [0,T]$, definiamo $b^n_t = b_t * \chi_n$ (il prodotto di convoluzione di b_t e χ_n in $\mathbb{R}^d$). Allora, per ogni $n \geq 1$, b^n è un campo vettoriale liscio, limitato con $\|b^n\|_{L^\infty} \leq \|b\|_{L^\infty}$ e tale che $b^n \to b$ in $L^1([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$. Sia allora $X^n \colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ l'unico flusso liscio generato dal campo b^n per ogni $n \geq 1$, ovvero l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \dfrac{dX^n_t}{dt}(x) = b^n_t(X^n_t(x)) \\ X^n_0(x) = x \end{cases}$$

con $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$.
Mostriamo ora due stime che coinvolgono i campi b e b^n di cui avremo bisogno nel seguito.

<u>Stima 1</u>. *Per ogni $t \in [0,T]$ e per ogni $n > 1/\delta$ si ha*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |b^n_t(x) - b_t(x)| \leq h(t)g(1/n). \tag{2.16}$$

Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, si ha che

$$\begin{aligned} |b^n_t(x) - b_t(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |b_t(x-y) - b_t(x)|\chi_n(y)dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} h(t)g(|y|)\chi_n(y)dy \\ &\leq h(t)g(1/n) \int_{\mathbb{R}^d} \chi_n(y)dy = h(t)g(1/n) \end{aligned}$$

pur di scegliere $n > 1/\delta$ per poter applicare la disuguaglianza (2.13).

<u>Stima 2</u>. *Per ogni $t \in [0,T]$ e per ogni $n > 1/\delta$ si ha*

$$|b^n_t(x) - b^n_t(y)| \leq h(t)g(|x-y|) \tag{2.17}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$, con $|x-y| < \delta$.

Infatti, se $|x-y| < \delta$, allora dalla disuguaglianza (2.13) si deduce che

$$\begin{aligned} |b^n_t(x) - b^n_t(y)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |b_t(x-z) - b_t(y-z)|\chi_n(z)dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} h(t)g(|x-y|)\chi_n(z)dz = h(t)g(|x-y|) \end{aligned}$$

pur di scegliere $n > 1/\delta$ per poter applicare la disuguaglianza (2.13).
Fissato $x \in \mathbb{R}^d$, per ogni $t \in [0,T]$ definiamo la funzione

$$\xi_{m,n}(t) \equiv \xi_{m,n}(t,x) := |X^m_t(x) - X^n_t(x)|^2,$$

(omettiamo la dipendenza da x per semplicità) e la quantità

$$\tau_{m,n} \equiv \tau_{m,n}(x) := \inf \left\{ t > 0 : \xi_{m,n}(t) \geq \delta^2 \right\}.$$

Osserviamo che $\xi_{m,n}(\tau_{m,n}) = \delta^2$ e che

$$0 \le \xi_{m,n}(t) < \delta^2 \tag{2.18}$$

per ogni $0 \le t < \tau_{m,n} \wedge T$ e per ogni $m, n \ge 1$, per definizione.
Allora, per ogni $0 \le t \le \tau_{m,n}$, troviamo

$$\begin{aligned}
\left|\frac{dX_t^m(x)}{dt} - \frac{dX_t^n(x)}{dt}\right| &= |b_t^m(X_t^m) - b_t^n(X_t^n)| \\
&\le |b_t^m(X_t^m) - b_t^n(X_t^m)| + |b_t^n(X_t^m) - b_t^n(X_t^n)| \\
&\le h(t)(g(1/m) + g(1/n)) + h(t)g(|X_t^m(x) - X_t^n(x)|)
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato le due stime appena mostrate. Quindi, per ogni $0 \le t \le \tau_{m,n}$, ricaviamo che

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d\xi_{m,n}(t)}{dt}\right| &= 2\left|\left\langle X_t^m(x) - X_t^n(x), \frac{dX_t^m(x)}{dt} - \frac{dX_t^n(x)}{dt}\right\rangle\right| \\
&\le 2|X_t^m - X_t^n| \cdot \left|\frac{dX_t^m}{dt} - \frac{dX_t^n}{dt}\right| \\
&\le 2h(t)\Big(\delta\big(g(1/m) + g(1/n)\big) + |X_t^m - X_t^n| \cdot g(|X_t^m - X_t^n|)\Big) \\
&\le 2h(t)\left(\delta\zeta_{m,n} + \sqrt{\xi_{m,n}(t)} \cdot g\left(\sqrt{\xi_{m,n}(t)}\right)\right)
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo posto $\zeta_{m,n} := g(1/m) + g(1/n)$. Integrando tra 0 e t otteniamo

$$\begin{aligned}
\xi_{m,n}(t) &\le 2\int_0^t h(s)\left(\delta\zeta_{m,n} + \sqrt{\xi_{m,n}(s)} \cdot g\left(\sqrt{\xi_{m,n}(s)}\right)\right) ds \\
&\le 2\delta\zeta_{m,n}\|h\|_{L^1([0,T])} + \int_0^t h(s) w\left(\xi_{m,n}(s)\right) ds
\end{aligned}$$

con $w(z) = 2\sqrt{z}g\left(\sqrt{z}\right)$ funzione continua non decrescente sull'intervallo $[0, \infty[$ e positiva per $z > 0$. Fissiamo $r_0 > 0$ e applichiamo il Lemma 2.2.4. Osserviamo che

$$W(r) = \int_{r_0}^r \frac{ds}{w(s)} = \int_{r_0}^r \frac{ds}{2\sqrt{s}g(\sqrt{s})} = \int_{r_0}^r \frac{d\sqrt{s}}{g(\sqrt{s})} = \int_{\sqrt{r_0}}^{\sqrt{r}} \frac{dz}{g(z)}.$$

Pertanto, posto

$$G(r) = \int_{\sqrt{r_0}}^r \frac{dz}{g(z)},$$

si ottiene la stima uniforme in t e in x

$$\begin{aligned}
\xi_{m,n}(t) &\le W^{-1}\left(W\left(2\delta\zeta_{m,n}\|h\|_{L^1}\right) + \int_0^t h(s)ds\right) \\
&\le \left(G^{-1}\left(G\left(\sqrt{2\delta\zeta_{m,n}\|h\|_{L^1}}\right) + \|h\|_{L^1}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che, quando $r \to 0^+$, si ha $G(r) \to -\infty$ perché g è una funzione di Osgood (vedi il limite (1.5)). Conseguentemente, se $v \to -\infty$, allora $G^{-1}(v) \to 0^+$. Quindi, siccome per $m, n \to \infty$ si ha $\zeta_{m,n} \to 0^+$, per m ed n sufficientemente grandi si ha

$$G^{-1}\left(G\left(\sqrt{2\delta\zeta_{m,n}\|h\|_{L^1}}\right) + \|h\|_{L^1}\right) < \delta.$$

Più precisamente, esiste $N \geq 1$ dipendente unicamente da $\delta/2$ tale che, per ogni $m, n \geq N$, si abbia

$$G^{-1}\left(G\left(\sqrt{2\delta\zeta_{m,n}\|h\|_{L^1}}\right) + \|h\|_{L^1}\right) \leq \delta/2.$$

Questo contraddice la (2.18), ovvero contraddice la definizione di $\tau_{m,n}$ come estremo inferiore. Deve dunque essere $\tau_{m,n} \geq T$. Pertanto abbiamo ottenuto che

$$\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\xi_{m,n}(t) \leq \left(G^{-1}\left(G\left(\sqrt{2\delta\zeta_{m,n}\|h\|_{L^1}}\right) + \|h\|_{L^1}\right)\right)^2,$$

da cui si ottiene

$$\lim_{m,n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|X_t^m(x) - X_t^n(x)| = 0. \tag{2.19}$$

Abbiamo mostrato che $\{ X^n : n \geq 1 \}$ è una successione di Cauchy uniforme di funzioni continue su $[0,T] \times \mathbb{R}^d$. Esiste allora una mappa continua $X : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ che è il limite uniforme in $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ di questa successione. Mostriamo che tale mappa X è un flusso generato dal campo b.
Mostriamo che

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\int_0^t b_s^n(X_s^n(x))ds - \int_0^t b_s(X_s(x))ds\right| = 0.$$

Fissiamo $0 < \varepsilon < \delta$ e scegliamo $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ tale che, per ogni $n \geq \bar{n}$ si abbia $n > 1/\delta$ e

$$\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|X_t^n(x) - X_t(x)| < \varepsilon.$$

Ora

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t b_s^n(X_s^n(x))ds - \int_0^t b_s(X_s(x))ds\right| &\leq \int_0^t |b_s^n(X_s^n(x)) - b_s(X_s(x))|ds \\ &\leq \int_0^t |b_s^n(X_s^n(x)) - b_s(X_s^n(x))|ds + \int_0^t |b_s(X_s^n(x)) - b_s(X_s(x))|ds,\end{aligned}$$

ma per la stima (2.16) è

$$\int_0^t |b_s^n(X_s^n(x)) - b_s(X_s^n(x))|ds \leq \int_0^T h(s)g(1/n)ds = g(1/n)\|h\|_{L^1},$$

mentre per la disuguaglianza (2.13) è

$$\int_0^t |b_s(X_s^n(x)) - b_s(X_s(x))|ds \leq \int_0^T h(s)g(\varepsilon)ds = g(\varepsilon)\|h\|_{L^1},$$

quindi

$$\left|\int_0^t b_s^n(X_s^n(x))ds - \int_0^t b_s(X_s(x))ds\right| \leq (g(1/n) + g(\varepsilon))\,\|h\|_{L^1}$$

e abbiamo concluso, perché $g(z) \to 0^+$ per $z \to 0^+$ per ipotesi.
In conclusione, passando al limite per $n \to \infty$ nell'uguaglianza

$$X_t^n(x) = x + \int_0^t b_s^n(X_s^n(x))ds$$

entrambi i lati convergono uniformemente in $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ a $X_t(x)$ e $x + \int_0^t b_s(X_s(x))ds$ rispettivamente, quindi per ogni $t \in [0,T]$ e ogni $x \in \mathbb{R}^d$ si ha

$$X_t(x) = x + \int_0^t b_s(X_s(x))ds,$$

ovvero X è un flusso generato da b.

Step 2: Unicità. Supponiamo che $X, \bar{X} \colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ siano due flussi generati dal campo b. Fissato $x \in \mathbb{R}^d$, definiamo la funzione

$$\xi(t) \equiv \xi(t,x) := \left| X_t(x) - \bar{X}_t(x) \right|^2,$$

(omettiamo la dipendenza da x per semplicità) e la quantità

$$\tau \equiv \tau(x) := \inf \left\{ \, t > 0 : \xi(t) \geq \delta^2 \, \right\}.$$

in modo simile allo Step precedente. Osserviamo che $\xi(\tau) = \delta^2$ e che

$$0 \leq \xi(t) < \delta^2 \tag{2.20}$$

per ogni $0 \leq t < \tau \wedge T$ per definizione.
Osserviamo che, per ogni $0 \leq t \leq \tau$, si ha

$$\left| \frac{dX_t(x)}{dt} - \frac{d\bar{X}_t(x)}{dt} \right| = \left| b_t(X_t) - b_t(\bar{X}_t) \right| \leq h(t) g(|X_t(x) - \bar{X}_t(x)|)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d\xi(t)}{dt} \right| &= 2 \left| \left\langle X_t(x) - \bar{X}_t(x), \frac{dX_t(x)}{dt} - \frac{d\bar{X}_t(x)}{dt} \right\rangle \right| \\
&\leq 2|X_t - \bar{X}_t| \cdot \left| \frac{dX_t}{dt} - \frac{d\bar{X}_t}{dt} \right| \\
&\leq 2h(t)|X_t(x) - \bar{X}_t(x)| g(|X_t(x) - \bar{X}_t(x)|) \\
&= 2h(t)\sqrt{\xi(t)} \cdot g\left(\sqrt{\xi(t)} \right).
\end{aligned}$$

Integrando tra 0 e t otteniamo che

$$\xi(t) \leq 2 \int_0^t h(s)\sqrt{\xi(s)} \cdot g\left(\sqrt{\xi(s)} \right) ds \leq \varepsilon + \int_0^t h(s) w(\xi(s)) ds$$

per ogni $\varepsilon > 0$, dove w è definita come nello Step precedente. Applichiamo il Lemma 2.2.4: con gli stessi calcoli dello Step precedente otteniamo la stima uniforme in x e t

$$\xi(t) \leq \left(G^{-1} \left(G(\varepsilon) + \|h\|_{L^1} \right) \right)^2.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ deduciamo che $\xi(t,x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $0 \leq t \leq \tau$. Questo contraddice la (2.20), ovvero contraddice la definizione di τ come estremo inferiore. Deve dunque essere $\tau \geq T$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e quindi X e $\bar{X}$ coincidono su tutto $[0,T] \times \mathbb{R}^d$.
Questo conclude la dimostrazione. □

Remark 2.2.7 (Omeomorfismi). Nella dimostrazione del Teorema 2.2.1 abbiamo mostrato che, se X^n è il flusso generato dal campo regolarizzato b^n e X il flusso generato dal campo b, allora X^n converge uniformemente ad X, cioè

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |X_t^n(x) - X_t(x)| = 0. \tag{2.21}$$

Inoltre, è immediato verificare che i flussi inversi X_{-t}^n e X_{-t} soddisfano

$$\frac{dX_{-t}^n}{dt}(x) = -b_t^n(X_{-t}^n(x)), \quad \frac{dX_{-t}}{dt}(x) = -b_t(X_{-t}(x)), \quad \text{e} \quad X_{-t}^n(x) = X_{-t}(x) = x,$$

quindi allo stesso modo X_{-t}^n converge uniformemente a X_{-t} su $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ (la dimostrazione è la stessa di quella fatta per i flussi diretti). Questo mostra che la mappa $x \mapsto X_t(x)$ è un omeomorfismo di $\mathbb{R}^d$ in sé per ogni $t \in [0,T]$.

2.3. Equazione del trasporto con dato iniziale continuo e misura di Lebesgue

In questa sezione vogliamo utilizzare i risultati ottenuti con il Teorema 2.2.1 per risolvere il problema di Cauchy (2.10) (equazione del trasporto) con dato iniziale $\theta \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ e, di conseguenza, studiare la relazione tra il flusso e la misura di Lebesgue.

2.3.1. Soluzione debole all'equazione del trasporto

Nelle sue note, [24, pp. 5-6], Fang dimostra che, se b soddisfa la condizione (2.12) e ha divergenza limitata, allora l'equazione del trasporto (2.10) ha una *soluzione debole* (si veda la Definizione 2.3.1) per un dato iniziale $\theta \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$. Vogliamo ora estendere questo risultato ad un campo b come nel Teorema 2.2.1.

Prima di procedere diamo la definizione di soluzione debole.

Definizione 2.3.1 (Soluzione debole)**.** Sia $b\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale in $L^1([0,T];L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ con divergenza debole $\operatorname{div}(b) \in L^1([0,T];L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ e sia $\theta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Diciamo che una funzione $u\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ in $L^\infty_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ è una *soluzione debole* del problema di Cauchy (2.10) se, per ogni $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\mathbb{R}^d)$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_0(x)\theta(x)dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u_t(x) \left\{ \frac{\partial\phi_t}{\partial t}(x) + \operatorname{div}(\phi_t(x)b_t(x)) \right\} dxdt = 0. \tag{2.22}$$

Possiamo ora dimostrare il seguente risultato.

Teorema 2.3.2. *Sia $b \in L^1([0,T];L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ un campo vettoriale limitato come nel Teorema 2.2.1 con divergenza debole* $\operatorname{div}(b) \in L^1([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^d))$. *Sia $\theta \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$. Allora la funzione $u_t(x) = \theta(X_{-t}(x))$, $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$, dove X è il flusso generato dal campo b, è una soluzione debole dell'equazione del trasporto* (2.10).

Dimostrazione. La dimostrazione è divisa in due parti.

Step 1. Supponiamo inizialmente che $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$. Sia X^n il flusso generato dal campo regolarizzato $b^n = b * \chi_n$ come nello Step 1 della dimostrazione del Teorema 2.2.1. Poniamo $u_t^n(x) = \theta(X_{-t}^n(x))$. Allora, per ogni $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T[\times\mathbb{R}^d)$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_0(x)\theta(x)dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u_t^n(x) \left\{ \frac{\partial\phi_t}{\partial t}(x) + \operatorname{div}(\phi_t(x)b_t^n(x)) \right\} dxdt = 0. \tag{2.23}$$

Infatti, per ogni $t \in [0,T]$ abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_t^n(x)\phi_t(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \theta(X_{-t}^n(x))\phi_t(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \theta(y)\phi_t(X_t^n(y))\det \nabla X_t^n(y)dy$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo fatto il cambiamento di variabile $x = X_t^n(y)$. Pertanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} u_t^n(x)\phi_t(x)dx &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} \theta(y)\phi_t(X_t^n(y))\det \nabla X_t^n(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \theta(y)\frac{d}{dt}\left\{\phi_t(X_t^n(y))\det \nabla X_t^n(y)\right\}dy.\end{aligned}$$

Siccome, per la Proposizione 2.1.3,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\phi_t(X_t^n)\det \nabla X_t^n\right\} = \\ &= \left(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(X_t^n) + \nabla\phi_t \frac{\partial X_t^n}{\partial t}\right)\det \nabla X_t^n + \phi_t(X_t^n)\operatorname{div}(b_t^n(X_t^n))\det \nabla X_t^n \\ &= \left\{\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(X_t^n) + \operatorname{div}(\phi_t(X_t^n)b_t^n(X_t^n))\right\}\det \nabla X_t^n,\end{aligned}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} u_t^n(x)\phi_t(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \theta(y)\left\{\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(X_t^n(y)) + \operatorname{div}(\phi_t(X_t^n(y))b_t^n(X_t^n(y)))\right\}\det \nabla X_t^n(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u_t^n(x)\left\{\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) + \operatorname{div}(\phi_t(x)b_t^n(x))\right\}dx.\end{aligned}$$

Quindi, integrando tra 0 e T e ricordato che $\operatorname{supp}(\phi) \subset [0,T[\times\mathbb{R}^d$, troviamo

$$-\int_{\mathbb{R}^d} u_0^n(x)\phi_0(x)dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u_t^n(x)\left\{\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) + \operatorname{div}(\phi_t(x)b_t^n(x))\right\}dxdt$$

che è proprio la (2.23) con $u_0^n = \theta$.
Sia ora $K = \operatorname{supp}(\phi)$. Allora il supporto di $\operatorname{div}(\phi_t b_t^n) = \phi_t \operatorname{div}(b_t^n) + \nabla\phi_t b_t^n$ è contenuto nel compatto K. Poniamo

$$R = \sup_{0\le t\le T}\sup_{x\in K}|X_{-t}(x)| < \infty.$$

Per la convergenza uniforme (2.21), per ogni n sufficientemente grande si ha che $X_{-t}^n(x) \in \bar{B}(R+1)$ per ogni $t \in [0,T]$ e $x \in K$. Quindi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ tale che, per ogni $n \geq \bar{n}$, si ha

$$\sup_{0\le t\le T}\sup_{x\in K}|u_t^n(x) - u_t(x))| < \varepsilon.$$

Infatti, per ogni $t \in [0,T]$ e $x \in K$, abbiamo che

$$|u_t^n(x) - u_t(x))| = \left|\theta(X_{-t}^n(x)) - \theta(X_{-t}(x))\right| \le C \cdot \left|X_{-t}^n(x) - X_{-t}(x)\right|$$

dove

$$C = \sup_{x\in\bar{B}(R+1)}|\nabla\theta(x)|,$$

e si conclude per la convergenza uniforme (2.21).

Vogliamo ora concludere passando al limite per $n \to \infty$ nella (2.23), mostrando che si converge in L^1_{loc} alla (2.22). Siccome b^n converge in L^1_{loc} a b per regolarizzazione, ci basta solo mostrare che

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left(u^n_t(x)\,\mathrm{div}(b^n_t(x)) - u_t(x)\,\mathrm{div}(b_t(x))\right)\phi_t(x)dxdt\right| = 0. \tag{2.24}$$

Infatti, abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left(u^n_t(x)\,\mathrm{div}(b^n_t(x)) - u_t(x)\,\mathrm{div}(b_t(x))\right)\phi_t(x)dxdt\right| \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left|\left(u^n_t(x)\,\mathrm{div}(b^n_t(x)) - u_t(x)\,\mathrm{div}(b_t(x))\right)\right| \cdot |\phi_t(x)|dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left|\left(u^n_t(x)\,\mathrm{div}(b^n_t(x)) - u_t(x)\,\mathrm{div}(b^n_t(x))\right)\right| \cdot |\phi_t(x)|dxdt + \\
&+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left|\left(u_t(x)\,\mathrm{div}(b^n_t(x)) - u_t(x)\,\mathrm{div}(b_t(x))\right)\right| \cdot |\phi_t(x)|dxdt \\
&\leq \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{div}(b^n_t(x))| \cdot |\phi_t(x)|dxdt + \|u\|_{L^\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{div}(b^n_t(x)) - \mathrm{div}(b_t(x))||\phi_t(x)|dxdt \\
&\leq \varepsilon \|\phi\|_{L^\infty} \|\mathrm{div}(b^n)\|_{L^1(L^\infty)} + \|u\|_{L^\infty}\|\phi\|_{L^\infty}\|\mathrm{div}(b^n) - \mathrm{div}(b)\|_{L^1(L^\infty)}.
\end{aligned}$$

Ma, per ogni $t \in [0,T]$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(b^n_t) &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}(b^n_t)^i = \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} (b^n_t)^i \frac{\partial}{\partial x_i}\chi_n(x-y)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \langle b_t(y), \nabla_y \chi_n(x-y)\rangle dy = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(b_t)(y)\chi_n(x-y)dy \\
&= \mathrm{div}(b_t) * \chi_n
\end{aligned} \tag{2.25}$$

quindi $\|\mathrm{div}(b^n_t)\|_{L^\infty} \leq \|\mathrm{div}(b_t)\|_{L^\infty}$ per ogni $t \in [0,T]$ e $\mathrm{div}(b^n) \to \mathrm{div}(b)$ in $L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ per $n \to \infty$. Questo conclude la prova del limite (2.24).

Step 2. Sia ora $\theta \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$. Sfruttiamo i risultati ottenuti nello Step precedente usando un argomento di densità. Sia $\{\ \theta_n : n \geq 1\ \}$ una successione di funzioni in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ convergente (uniformemente) alla funzione θ su ogni insieme compatto (ad esempio, si può scegliere $\theta_n = \theta * \chi_n$). Fissiamo $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c([0,T[\times\mathbb{R}^d)$ e sia $K = \mathrm{supp}(\phi)$. Per lo Step precedente, la funzione $\hat{u}^n_t = \theta_n(X_{-t})$ soddisfa la (2.22) e converge uniformemente a u su K per costruzione. Vogliamo ora concludere passando al limite per $n \to \infty$ in

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_0(x)\theta_n(x)dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}^n_t(x)\left\{\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) + \mathrm{div}(\phi_t(x)b_t(x))\right\}dxdt = 0,$$

mostrando che si converge alla (2.22).
Siccome θ_n converge uniformemente a θ, ci basta solo mostrare che

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{u}^n_t(x) - u_t(x))\left\{\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) + \mathrm{div}(\phi_t(x)b_t(x))\right\}dxdt\right| = 0. \tag{2.26}$$

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ tale che, per ogni $n \geq \bar{n}$, si ha

$$\sup_{(t,x)\in K} |\hat{u}^n_t(x) - u_t(x))| < \varepsilon$$

per la convergenza uniforme, quindi

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{u}_t^n(x) - u_t(x)) \left\{ \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) + \operatorname{div}(\phi_t(x) b_t(x)) \right\} dxdt \right| \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}_t^n(x) - u_t(x)| \cdot \left| \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) + \operatorname{div}(\phi_t(x) b_t(x)) \right| dxdt \\
&\leq \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) + \phi_t \operatorname{div}(b_t) + \nabla \phi_t b_t \right| dxdt \leq C\varepsilon,
\end{aligned}$$

con C costante dipendente dalle norme delle funzioni integrande e dal compatto K. Abbiamo verificato il limite (2.26).
Questo conclude la dimostrazione. □

2.3.2. Relazione con la misura di Lebesgue

Il Teorema 2.2.1 permette di dimostrare alcune relazioni tra la misura di Lebesgue e il flusso associato al campo vettoriale b. Questo metodo è stato usato per la prima volta da DiPerna e Lions in [23] per dimostrare la disuguaglianza (2.6) sulla densità della misura push-forward della misura di Lebesgue tramite il flusso.

In quanto segue, continuiamo a seguire le note di Fang, [24], adattando i ragionamenti alle ipotesi, più generali, del Teorema 2.3.2.

Osserviamo preliminarmente quanto segue. Usando gli stessi argomenti della dimostrazione del Teorema 2.3.2, si può mostrare un'equazione più precisa della (2.22): se b, $\operatorname{div}(b)$ e θ sono come nel Teorema 2.3.2, allora, per ogni $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ ed ogni $s \in [0,T]$, la funzione $u_t(x) = \theta(X_{-t}(x))$, $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, soddisfa

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_0(x)\theta(x)dx + \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d} u_t(x) \left\{ \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) + \operatorname{div}(\phi_t(x) b_t(x)) \right\} dxdt = \int_{\mathbb{R}^d} u_s(x)\phi_s(x)dx. \tag{2.27}$$

Infatti, nella dimostrazione del Teorema 2.3.2, avevamo scelto in modo particolare $\operatorname{supp}(\phi) \subset [0,T[\times \mathbb{R}^d$, ma i calcoli nello Step 1 e l'argomento di densità nello Step 2 possono essere ripetuti anche nel caso in cui il supporto temporale di ϕ sia tutto $[0,T]$. Lasciamo al lettore la verifica di queste affermazioni.

Dimostriamo ora il seguente risultato sulla disuguaglianza (2.6).

Teorema 2.3.3. *Sia $b \in L^1([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ un campo vettoriale limitato come nel Teorema 2.2.1 e supponiamo che $\operatorname{div}(b) \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^d))$. Allora la misura di Lebesgue $\mathscr{L}^d$ è quasi-invariante sotto il flusso generato dal campo b, cioè vale la disuguaglianza* (2.6).

Dimostrazione. Sia $\theta \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ una funzione non negativa e sia $K = \operatorname{supp}(\theta)$. Poniamo

$$K_T = \bigcup_{0 \leq t \leq T} X_t(K)$$

l'immagine di $[0,T] \times K$ sotto la mappa $(t,x) \mapsto X_t(x)$; K_T è compatto perché immagine continua di compatto. Ora, se $x \in \mathbb{R}^d \setminus K_T$, allora $X_{-t}(x) \in \mathbb{R}^d \setminus K$ per ogni $t \in [0,T]$, quindi $\theta(X_{-t}(x)) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d \setminus K_T$ e $t \in [0,T]$. Poniamo

$$R = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in K_T} |X_{-t}(x)| < \infty.$$

Allora, posto $u_t(x) = \theta(X_{-t})$, si ha $u_t(x) = 0$ per $t \in [0,T]$ e $|x| > R$. Scegliamo ora $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ tale che $\phi_t(x) = 1$ per $t \in [0,T]$ e $|x| \leq R$. Allora la (2.27) diventa

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_s(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \theta(x)dx + \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d} u_t(x)\,\mathrm{div}(b_t(x))dxdt.$$

Questo mostra che la funzione $s \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u_s(x)dx$ è assolutamente continua su $[0,T]$ con

$$\left|\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}^d} u_s(x)dx\right| \leq \|\mathrm{div}(b_s)\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_s(x)dx$$

per la disuguaglianza di Hölder per ogni $s \in [0,T]$. Applichiamo il Lemma di Grönwall–Bellman 1.2.3. Ricordato che $u_0 = \theta$, otteniamo

$$e^{-\int_0^s \|\mathrm{div}(b_t)\|_{L^\infty} dt} \int_{\mathbb{R}^d} \theta(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \theta(X_{-s}(x))dx \leq e^{\int_0^s \|\mathrm{div}(b_t)\|_{L^\infty} dt} \int_{\mathbb{R}^d} \theta(x)dx \tag{2.28}$$

per ogni $s \in [0,T]$. Questo mostra che $(X_{-t})_\# \mathscr{L}^d$ è assolutamente continua rispetto a $\mathscr{L}^d$. Ma allora anche $(X_t)_\# \mathscr{L}^d$ è assolutamente continua rispetto a $\mathscr{L}^d$ con densità tale che la (2.6) sia soddisfatta. Questo conclude la dimostrazione. □

Dal Teorema 2.3.3 segue immediatamente il seguente risultato.

Corollario 2.3.4. *Sia $b \in L^1([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ un campo vettoriale limitato come nel Teorema 2.2.1 e supponiamo che* $\mathrm{div}(b) = 0$. *Allora il flusso X generato dal campo b preserva la misura di Lebesgue, cioè $(X_t)_\# \mathscr{L}^d = \mathscr{L}^d$ per ogni $t \in [0,T]$.*

2.4. La teoria di Crippa–De Lellis

In questa sezione vogliamo mostrare che le tecniche elementari utilizzate per dimostrare il Teorema 2.2.1 non sono efficaci quando la regolarità del campo b è di tipo Sobolev $W^{1,p}$ con $p > 1$. Più precisamente, dopo aver introdotto brevemente le idee di Crippa e De Lellis sviluppate in [20], mostreremo che, se il campo b ha *pseudo-gradiente* in L^p esponenzialmente equi-integrabile e divergenza limitata (si veda il Teorema 2.4.4), allora esiste un unico flusso Lagrangiano regolare associato a b.

2.4.1. Flusso Lagrangiano e l'approccio di Crippa e De Lellis

Nel loro articolo [20], Crippa e De Lellis dimostrano che il flusso Lagrangiano associato ad un campo b con regolarità di tipo Sobolev $W^{1,p}$ con $p > 1$ esiste ed è unico, e soddisfa inoltre alcune proprietà di stabilità, differenziabilità e compattezza. Diamo qui di seguito la definizione di flusso Lagrangiano regolare.

Definizione 2.4.1 (Flusso Lagrangiano regolare)**.** Sia $b \in L^1_{loc}([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ un campo vettoriale. Diciamo che una mappa $X : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è un *flusso Lagrangiano regolare* generato dal campo vettoriale b se

(i) per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$ la mappa $t \mapsto X_t(x)$ è assolutamente continua e soddisfa

$$X_t(x) = x + \int_0^t b_s(X_s(x))ds$$

per ogni $t \in [0,T]$;

(ii) esiste una costante $L > 0$, indipendente da $t \in [0, T]$, tale che $(X_t)_\# \mathscr{L}^d \leq L \mathscr{L}^d$ per ogni $t \in [0, T]$.

La costante $L > 0$ in (ii) è detta *costante di compressione* del flusso X.

Confrontiamo brevemente questa definizione con quella di flusso (Definizione 2.1.1) data all'inizio di questa parte (si veda anche [18, pp. 2-3]).

Il punto (i) della Definizione 2.4.1 dice che il flusso Lagrangiano risolve il problema (2.1) non per *tutti* i dati iniziali $x \in \mathbb{R}^d$, ma solamente per *quasi tutti* i dati iniziali nel senso della misura di Lebesgue. Questa richiesta è ragionevole per l'obiettivo che si vuole raggiungere, cioè che il problema (2.1) sia ben posto secondo la misura di Lebesgue: a meno di insiemi di misura $\mathscr{L}^d$-nulla, il flusso esiste, è unico e dipende in modo continuo dai dati iniziali.

Il punto (ii) della Definizione 2.4.1 coinvolge il push-forward della misura di Lebesgue tramite il flusso e, per il Lemma 2.1.5, può essere riformulato equivalentemente come segue: esiste una costante $L > 0$ tale che, per ogni $t \in [0, T]$ ed ogni $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ con $\phi \geq 0$, si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(X_t(x))\, dx \leq L \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, dx. \tag{2.29}$$

Questo significa che richiediamo *a priori* un controllo quantitativo sull'intensità della compressione che il flusso opera sugli insiemi $\mathscr{L}^d$-misurabili. Detto altrimenti, richiediamo a priori che valga il lato destro della disuguaglianza (2.6) per la densità della misura push-forward.

Focalizziamo la nostra attenzione sulla stima a priori (2.29), ovvero sul punto (ii) della Definizione 2.4.1, la proprietà basilare del flusso Lagrangiano.

Da un lato, banalmente, la disuguaglianza (2.29) implica il fatto che, nelle stime integrali che coinvolgono il flusso, cambiare variabile dà solamente una costante L di fronte al segno di integrale. Questa proprietà di regolarità del flusso permette pertanto di provare in modo più elastico delle stime a priori.

Dall'altro lato — e questo è il vero significato della (2.29) — individuiamo a priori una *condizione di selezione* per la nostra nozione di soluzione del problema (2.1) e chiediamo che il flusso non comprima troppo rapidamente gli insiemi $\mathscr{L}^d$-misurabili. Una compressione molto rapida (ad esempio un insieme contratto ad un punto) avviene solitamente lì dove il campo vettoriale b perde di regolarità o, meglio, dove la sua derivata degenera. Un esempio noto di questo fenomeno è dato dal cosiddetto *pennello di Peano* generato dal campo $b(x) = \sqrt{|x|}$ (1/2-Hölderiano ma non Lipschitz): il flusso non unico comprime lunghi segmenti verticali in un singolo punto, l'origine, dove la derivata del campo tende all'infinito.

Analizziamo ora brevemente le tecniche introdotte da Crippa e De Lellis in [20]. Riportiamo qui di seguito alcune considerazioni tratte da [18, p. 4]. L'esposizione è informale e, per semplicità, considera solo campi vettoriali indipendenti dal tempo.

Il modo più naturale per affrontare una regolarità più bassa del campo b rispetto alla condizione Lipschitz è quello di rendere stabili le tecniche introdotte all'inizio di questa parte anche quando il il gradiente del campo b degenera. In maniera formale, possiamo fare il seguente calcolo:

$$\frac{d}{dt} \log|\nabla X| \leq \frac{1}{|\nabla X|} \left| \frac{d}{dt} \nabla X \right| = \frac{1}{|\nabla X|} |\nabla b(X)| = |\nabla b|(X). \tag{2.30}$$

Notare che questo calcolo è del tutto rigoroso nel caso in cui b sia un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$. Ad ogni modo, nel conteso Lipschitziano classico, dalla stima (2.30) seguirebbero la stima (2.4) e l'unicità del flusso.

Da un lato, infatti, se b fosse Lipschitziano con costante di Lipschitz $L > 0$, allora $|\nabla b| \leq L$ e quindi integrando la (2.30) deduciamo che

$$\log|\nabla X| \leq Lt + \log|\nabla \operatorname{Id}| = Lt,$$

da cui immediatamente la (2.4) per il Lemma di Grönwall.

Dall'altro lato, sia $\delta > 0$ un parametro e siano X e $\bar{X}$ due flussi associati al campo b. Allora

$$\frac{d}{dt}\log\left(1+\frac{|X-\bar{X}|}{\delta}\right) \leq \frac{\delta}{\delta+|X-\bar{X}|}\frac{|b(X)-b(\bar{X})|}{\delta} \leq L,$$

da cui

$$\log\left(1+\frac{|X-\bar{X}|}{\delta}\right) \leq Lt + \log\left(1+\frac{|X_0-\bar{X}_0|}{\delta}\right) = Lt$$

e quindi

$$\frac{|X-\bar{X}|}{\delta} \leq e^{Lt}.$$

Siccome $\delta > 0$ può essere scelto arbitrariamente piccolo, deduciamo che $X = \bar{X}$ come voluto.

Queste nuove stime, oltre ad implicare i risultati visti per l'ambiente Lipschitziano, suggeriscono di studiare la seguente quantità integrale: dato un campo vettoriale b e due flussi Lagrangiani associati X e $\bar{X}$ (possibilmente distinti) e un parametro $\delta > 0$, definiamo

$$\Phi_\delta(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \log\left(1+\frac{|X_t(x)-\bar{X}_t(x)|}{\delta}\right) dx. \tag{2.31}$$

Si noti che è necessario fare un troncamento affinché tale integrale sia convergente; per non appesantire l'esposizione formale di queste tecniche ignoriamo questo dettaglio tecnico.

Concentriamo ora la nostra attenzione solamente sull'unicità del flusso (questa tecnica si può applicare anche per mostrare l'esistenza e alcune proprietà di regolarità). Se il flusso Lagrangiano associato al campo b non fosse unico, allora esiste un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$ di misura di Lebesgue $\alpha > 0$ tale che $|X_t(x) - \bar{X}_t(x)| \geq \gamma > 0$ per qualche $t \in [0, T]$ e per ogni $x \in A$. Allora possiamo stimare la funzione integrale $\Phi_\delta(t)$ dal basso come

$$\Phi_\delta(t) \geq \int_A \log\left(1+\frac{\gamma}{\delta}\right) dx \geq \alpha \log\left(1+\frac{\gamma}{\delta}\right).$$

Pertanto, una condizione che assicura l'unicità del flusso è la seguente: per $\delta \to 0^+$ si deve avere che

$$\frac{\Phi_\delta}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \to 0. \tag{2.32}$$

Questo significa che una buona strategia per provare l'unicità è di ottenere delle stime da sopra a priori sufficientemente precise per la quantità $\Phi_\delta(t)$. Il modo più naturale di fare questo è di differenziare nella variabile tempo, di modo che appaia nelle stime la derivata del campo b:

$$\Phi'_\delta(t) \leq \int \frac{\partial_t|X-\bar{X}|}{\delta+|X-\bar{X}|}dx \leq \int \frac{|b(X)-b(\bar{X})|}{\delta+|X-\bar{X}|}dx \leq \int \min\left\{\frac{2\|b\|_{L^\infty}}{\delta}; \frac{|b(X)-b(\bar{X})|}{|X-\bar{X}|}\right\} dx. \tag{2.33}$$

Se b è un campo vettoriale Lipschitziano, allora

$$\frac{|b(X) - b(\bar{X})|}{|X - \bar{X}|} \leq L$$

e quindi $\Phi'_\delta(t)$ è maggiorato da una costante. Ritroviamo ancora l'unicità nel caso classico.

Tuttavia, è ora sufficiente una condizione molto più debole di quella Lipschitziana sul campo b per ottenere l'unicità. Infatti, se esiste una funzione $\psi \in L^1_{loc}$ tale che

$$\frac{|b(x) - b(y)|}{|x - y|} \leq \psi(x) + \psi(y), \tag{2.34}$$

ed in tal caso ψ si dice uno *pseudo-gradiente* di b, allora dalla (2.33) si ottiene

$$\Phi'_\delta(t) \leq \int \psi(X) + \psi(\bar{X}) dx \leq 2L \int \psi(x)\, dx,$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo cambiato variabile secondo la (2.29) ed $L > 0$ è ora la costante di compressione del flusso Lagrangiano. Anche in questo caso $\Phi'_\delta(t)$ è maggiorato da una costante e si dimostra l'unicità del flusso.

Il problema dell'unicità è stato dunque risolto per campi vettoriali con pseudo-gradiente localmente integrabile. I campi vettoriali con regolarità Sobolev $W^{1,p}$ con $p > 1$, in particolare, sono di questo tipo. Vale infatti il seguente risultato, che caratterizza lo spazio $W^{1,p}$ con $p > 1$.

Teorema 2.4.2 (Hajłasz, [31])**.** *Sia $1 < p < \infty$ e sia $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione $\mathscr{L}^d$-misurabile. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:*

- *$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$;*
- *$u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, ed esiste una funzione $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tale che*

  $$|u(x) - u(y)| \leq (g(x) + g(y))|x - y|$$

  per q.o. $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Una dimostrazione di questo risultato si può trovare in [32, p. 405] o in [33, p. 6].

A partire dal Teorema 2.4.2, studiando quantità integrali del tipo (2.31), Crippa e De Lellis hanno riottenuto i risultati della Teoria DiPerna–Lions e alcune nuove proprietà di regolarità del flusso Lagrangiano associato ad un campo vettoriale $b \in W^{1,p}$.

Facciamo un'ultima osservazione. Il Teorema 2.4.2 è falso per $p = 1$, nel senso che rimane vera solo l'implicazione più debole $\Leftarrow$. Più precisamente, vale il seguente risultato.

Proposizione 2.4.3 (Hajłasz)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e sia $1 \leq p < \infty$. Sia $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione $\mathscr{L}^d$-misurabile. Supponiamo che esista $0 \leq g \in L^p(\Omega)$ tale che*

$$|u(x) - u(y)| \leq (g(x) + g(y))|x - y|$$

per q.o. $x, y \in \mathbb{R}^d$. Allora $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $|\nabla u(x)| \leq 4\sqrt{d} g(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$.

Una dimostrazione di questo fatto si può trovare in [33, p. 7]. Il controesempio fornito da P. Hajłasz in [33, p. 7] nel caso $p = 1$ è dato dalla funzione

$$u(x) = -\frac{x}{|x| \log|x|}$$

con $x \in]-1/2, 1/2[$: con un semplice calcolo si dimostra che $u \in W^{1,1}(]-1/2, 1/2[)$; tuttavia non esiste alcuna funzione $g \in L^1(]-1/2, 1/2[)$ tale che siano verificate le ipotesi della Proposizione 2.4.3.

Il caso $p = 1$, pertanto, non è raggiunto dai risultati di Crippa e De Lellis. Tuttavia, è importante osservare che il termine in L^∞ nella stima (2.33) non è stato considerato nei calcoli successivi. Ed è proprio grazie a quel termine limitato che Bouchut e Crippa, nel loro articolo [13], sono riusciti ad estendere le stime viste sopra al caso $p = 1$ e ad applicare l'*approccio Lagrangiano* a tutta la teoria di DiPerna–Lions.

Ad oggi si sta lavorando ad una possibile estensione di queste tecniche ai campi vettoriali di tipo BV studiati da Ambrosio.

2.4.2. Tecniche elementari: equi-integrabilità esponenziale del gradiente

Vogliamo ora applicare le idee sviluppate nella dimostrazione del Teorema 2.2.1 alla teoria del flusso Lagrangiano. Per non introdurre ulteriori inutili complicazioni e per meglio confrontare i nostri risultati con quelli di Crippa e De Lellis, in questa parte non consideriamo funzioni di Osgood nella regolarità del campo vettoriale.

Il risultato che ci proponiamo di dimostrare è il seguente.

Teorema 2.4.4. *Sia $b \in L^1([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ un campo vettoriale limitato con divergenza debole* $\mathrm{div}(b) \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^d))$. *Supponiamo che, per ogni $t \in [0,T]$ e per q.o. $x, y \in \mathbb{R}^d$, si abbia*

$$|b_t(x) - b_t(y)| \leq (h_t(x) + h_t(y))|x - y|, \tag{2.35}$$

dove lo pseudo-gradiente h è una funzione tale che

(i) $h_t(x) \geq 0$ *per ogni $t \in [0,T]$ ed ogni $x \in \mathbb{R}^d$;*

(ii) $h^p \in L^1([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ *per qualche $p > 1$ e* $\exp(4Th) \in L^1([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$*;*

(iii) si abbia

$$\sup_{n \geq 1} \|\exp(4qTh^n)\|_{L^1([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))} < \infty,$$

dove $h^n = h * \chi_n$ è la regolarizzata n-esima della funzione h e q è l'esponente coniugato dell'esponente p, cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Allora esiste un unico flusso Lagrangiano regolare $X : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ associato al campo b.

Ci riferiamo alle ipotesi (ii) e (iii) del Teorema 2.4.4 come alle condizioni di *equi-integrabilià esponenziale* dello pseudo-gradiente del campo b.

Nel seguito avremo bisogno della seguente definizione.

Definizione 2.4.5. Siano $T > 0$ e $1 \leq p < \infty$. Definiamo lo spazio $L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^0([0,T]; \mathbb{R}^d))$ come l'insieme di tutte le funzioni misurabili $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tali che $f(\cdot, x)\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$ è continua per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$ e

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^0([0,T]; \mathbb{R}^d))} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t,x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Lo spazio $L^p(\mathbb{R}^d;\mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}^d))$ dotato di questa norma è uno spazio di Banach. In modo analogo si definisce lo spazio $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d;\mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}^d))$.

Possiamo ora mostrare il Teorema 2.4.4 seguendo le idee della dimostrazione del Teorema 2.2.1.

Dimostrazione. La dimostrazione è divisa in due parti.

Step 1: Esistenza. Costruiamo una soluzione del problema (2.1) con un argomento di regolarizzazione. Sia $\{\, \chi_n : n \geq 1 \,\}$ una successione di mollificatori standard in $\mathbb{R}^d$. Per ogni $t \in [0,T]$, definiamo $b_t^n = b_t * \chi_n$ (il prodotto di convoluzione di b_t e χ_n in $\mathbb{R}^d$). Allora, per ogni $n \geq 1$, b^n è un campo vettoriale liscio e limitato con $\|b^n\|_{L^\infty} \leq \|b\|_{L^\infty}$ e tale che $b^n \to b$ in $L^1([0,T];L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$. Sia allora $X^n\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ l'unico flusso generato dal campo b^n per ogni $n \geq 1$, ovvero l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \dfrac{dX_t^n}{dt}(x) = b_t^n(X_t^n(x)) \\ X_0^n(x) = x \end{cases}$$

con $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$. Dalla (2.25) deduciamo che $\|\mathrm{div}(b_t^n)\|_{L^\infty} \leq \|\mathrm{div}(b_t)\|_{L^\infty}$ per ogni $t \in [0,T]$ e $\mathrm{div}(b^n) \to \mathrm{div}(b)$ in $L^1([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^d))$ per $n \to \infty$. Inoltre, dal Teorema 2.3.3, deduciamo che $(X_t^n)_\# \mathscr{L}^d \leq L_n \mathscr{L}^d$, dove

$$L_n := \exp\left(\int_0^T \|\mathrm{div}(b_t^n)\|_{L^\infty} dt\right) \leq \exp\left(\int_0^T \|\mathrm{div}(b_t)\|_{L^\infty} dt\right) =: L. \tag{2.36}$$

Quindi X_n è l'unico flusso Lagrangiano associato al campo b_n per ogni $n \geq 1$.
Mostriamo ora tre stime che coinvolgono i campi b e b^n di cui avremo bisogno nel seguito.

<u>Stima 1</u>. *Per ogni $t \in [0,T]$ e q.o. $x \in \mathbb{R}^d$ e per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$|b_t^n(x) - b_t(x)| \leq \frac{1}{n}(h_t^n(x) + h_t(x)). \tag{2.37}$$

Infatti, per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$, si ha che

$$\begin{aligned} |b_t^n(x) - b_t(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |b_t(x-y) - b_t(x)| \chi_n(y) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (h_t(x-y) + h_t(x)) |y| \chi_n(y) dy \\ &\leq \frac{1}{n}\left(\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x-y)\chi_n(y)dy + h_t(x)\right) \\ &= \frac{1}{n}(h_t^n(x) + h_t(x)) \end{aligned}$$

per la disuguaglianza (2.35).
In particolare, si ottiene la seguente

<u>Stima 2</u>. *Per ogni $t \in [0,T]$ e q.o. $x \in \mathbb{R}^d$ e per ogni $m, n \geq 1$ si ha*

$$|b_t^m(x) - b_t^n(x)| \leq \frac{1}{m}(h_t^m(x) + h_t(x)) + \frac{1}{n}(h_t^n(x) + h_t(x)). \tag{2.38}$$

Infatti, applicando la (2.37), si ha

$$\begin{aligned}|b_t^m(x) - b_t^n(x)| &\le |b_t^m(x) - b_t(x)| + |b_t^n(x) - b_t(x)|\\ &\le \frac{1}{m}(h_t^m(x) + h_t(x)) + \frac{1}{n}(h_t^n(x) + h_t(x)).\end{aligned}$$

<u>Stima 3</u>. *Per ogni $t \in [0,T]$ e per ogni $n \ge 1$ si ha*

$$|b_t^n(x) - b_t^n(y)| \le (h_t^n(x) + h_t^n(y))|x-y| \tag{2.39}$$

per q.o. $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Infatti, dalla disuguaglianza (2.35) si deduce che

$$\begin{aligned}|b_t^n(x) - b_t^n(y)| &\le \int_{\mathbb{R}^d} |b_t(x-z) - b_t(y-z)|\chi_n(z)dz\\ &\le \int_{\mathbb{R}^d} (h_t(x-z) + h_t(y-z))|x-y|\chi_n(z)dz\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x-z)\chi_n(z)dz + \int_{\mathbb{R}^d} h_t(y-z)\chi_n(z)dz\right)|x-y|\\ &= (h_t^n(x) + h_t^n(y))|x-y|\end{aligned}$$

per ogni $n \ge 1$.
Fissiamo ora $R > 0$ e consideriamo $x \in \bar{B}(R)$. Per ogni $t \in [0,T]$ definiamo la funzione

$$\xi_{m,n}(t) \equiv \xi_{m,n}(t,x) := |X_t^m(x) - X_t^n(x)|^2,$$

(omettiamo la dipendenza da x per semplicità).
Prima di stimare la funzione $\xi_{m,n}$, facciamo la seguente osservazione. Se $x \in \bar{B}(R)$, allora dalla (i) della Definizione 2.4.1 segue che

$$\sup_{0 \le t \le T} |X_t^n(x)| \le R + T\|b^n\|_{L^\infty} \le R + T\|b\|_{L^\infty} < \infty$$

per ogni $n \ge 1$. Nel seguito poniamo pertanto $\bar{R} = R + T\|b\|_{L^\infty}$.
Per ogni $t \in [0,T]$, troviamo

$$\begin{aligned}\left|\frac{dX_t^m(x)}{dt} - \frac{dX_t^n(x)}{dt}\right| &= |b_t^m(X_t^m) - b_t^n(X_t^n)|\\ &\le |b_t^m(X_t^m) - b_t^n(X_t^m)| + |b_t^n(X_t^m) - b_t^n(X_t^n)|\\ &\le \frac{1}{m}(h_t^m(X_t^m) + h_t(X_t^m)) + \frac{1}{n}(h_t^n(X_t^m) + h_t(X_t^m))\\ &\quad + (h_t^n(X_t^m) + h_t^n(X_t^n))|X_t^m - X_t^n|\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato le stime (2.38) e (2.39). Quindi, per ogni $t \in [0,T]$, ricaviamo che

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\xi_{m,n}(t)}{dt}\right| &= 2\left|\left\langle X_t^m(x) - X_t^n(x), \frac{dX_t^m(x)}{dt} - \frac{dX_t^n(x)}{dt}\right\rangle\right|\\ &\le 2|X_t^m - X_t^n| \cdot \left|\frac{dX_t^m}{dt} - \frac{dX_t^n}{dt}\right|\\ &\le 2\bar{R}\left(\frac{1}{m}(h_t^m(X_t^m) + h_t(X_t^m)) + \frac{1}{n}(h_t^n(X_t^m) + h_t(X_t^m))\right)\\ &\quad + 2(h_t^n(X_t^m) + h_t^n(X_t^n))|X_t^m - X_t^n|^2\\ &= \alpha_{m,n}(t) + B_{m,n}(t)\xi_{m,n}(t),\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo posto

$$\alpha_{m,n}(t) = 2\bar{R}\Big(\frac{1}{m}(h_t^m(X_t^m) + h_t(X_t^m)) + \frac{1}{n}(h_t^n(X_t^m) + h_t(X_t^m))\Big)$$

e

$$B_{m,n}(t) = 2(h_t^n(X_t^m) + h_t^n(X_t^n)).$$

Integrando tra 0 e t otteniamo

$$\begin{aligned}\xi_{m,n}(t) &\leq \int_0^t \alpha_{m,n}(s)ds + \int_0^t B_{m,n}(s)\xi_{m,n}(s)ds = A_{m,n}(t) + \int_0^t B_{m,n}(s)\xi_{m,n}(s)ds \\ &\leq A_{m,n}(T) + \int_0^t B_{m,n}(s)\xi_{m,n}(s)ds.\end{aligned}$$

Applichiamo ora il Lemma 2.2.4. Otteniamo che

$$\xi_{m,n}(t) \leq A_{m,n}(T)e^{\int_0^t B_{m,n}(s)ds} \leq A_{m,n}(T)e^{\int_0^T B_{m,n}(t)dt}.$$

Pertanto segue che

$$\int_{\bar{B}(R)} \sup_{0\leq t\leq T} |X_t^m(x) - X_t^n(x)|^2 dx \leq \int_{\bar{B}(R)} A_{m,n}(T)e^{\int_0^T B_{m,n}(t)dt}dx.$$

Stimiamo il membro destro della disuguaglianza. Abbiamo che

$$\int_{\bar{B}(R)} A_{m,n}(T)e^{\int_0^T B_{m,n}(t)dt}dx \leq \|A_{m,n}(T)\|_{L^p(\bar{B}(R))}\left\|e^{\int_0^T B_{m,n}(t)dt}\right\|_{L^q(\bar{B}(R))}$$

per la disuguaglianza di Hölder, dove q è l'esponente coniugato di p.
Da un lato, per la disuguaglianza di Jensen applicata alla funzione $u \mapsto u^p$, si ha

$$\|A_{m,n}(T)\|_{L^p(\bar{B}(R))} = \left(\int_{\bar{B}(R)}\left(\int_0^T \alpha_{m,n}(t)dt\right)^p dx\right)^{1/p} \leq T^{1/q}\left(\int_0^T\int_{\bar{B}(R)} \alpha_{m,n}^p(t)dxdt\right)^{1/p},$$

ma

$$\begin{aligned}\int_{\bar{B}(R)} \alpha_{m,n}^p(t)dx &= 2^p\bar{R}^p\int_{\bar{B}(R)}\left(\frac{1}{m}(h_t^m(X_t^m) + h_t(X_t^m)) + \frac{1}{n}(h_t^n(X_t^m) + h_t(X_t^m))\right)^p dx \\ &\leq 2^p\bar{R}^pL_m\int_{\bar{B}(\bar{R})}\left(\frac{1}{m}(h_t^m(y) + h_t(y)) + \frac{1}{n}(h_t^n(y) + h_t(y))\right)^p dy \\ &\leq 2^{3p-2}\bar{R}^pL\int_{\bar{B}(\bar{R})}\frac{1}{m^p}((h_t^m)^p(y) + (h_t)^p(y)) + \frac{1}{n^p}((h_t^n)^p(y) + (h_t)^p(y))dy \\ &= 2^{3p-2}\bar{R}^pL\left(\frac{1}{m^p}(\|(h_t^m)^p\|_{L^1} + \|(h_t)^p\|_{L^1}) + \frac{1}{n^p}(\|(h_t^n)^p\|_{L^1} + \|(h_t)^p\|_{L^1})\right) \\ &\leq 2^{3p-1}\bar{R}^pL\|(h_t)^p\|_{L^1(\bar{B}(\bar{R}))}\left(\frac{1}{m^p} + \frac{1}{n^p}\right)\end{aligned}$$

e quindi

$$\|A_{m,n}(T)\|_{L^p(\bar{B}(R))} \leq 8\bar{R}T^{1/q}L^{1/p}\|h^p\|^{1/p}_{L^1([0,T]\times\bar{B}(\bar{R}))}\left(\frac{1}{m^p} + \frac{1}{n^p}\right)^{1/p}.$$

Dall'altro lato, per la disuguaglianza di Jensen applicata prima alla funzione $u \mapsto e^u$ e poi alla funzione $u \mapsto u^q$, si ha

$$\left\| e^{\int_0^T B_{m,n}(t)dt} \right\|_{L^q(\bar{B}(R))} \leq \left\| \frac{1}{T}\int_0^T e^{TB_{m,n}(t)}dt \right\|_{L^q(\bar{B}(R))} = \left(\int_{\bar{B}(R)} \left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{TB_{m,n}(t)}dt \right)^q dx \right)^{1/q}$$
$$\leq T^{-1/q} \left(\int_0^T \int_{\bar{B}(R)} e^{qTB_{m,n}(t)} dxdt \right)^{1/q},$$

ma, per la disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{B}(R)} e^{qTB_{m,n}(t)}dx &= \int_{\bar{B}(R)} e^{2qT(h_t^n(X_t^m)+h_t^n(X_t^n))}dx \\
&= \int_{\bar{B}(R)} e^{2qTh_t^n(X_t^m)} \cdot e^{2qTh_t^n(X_t^n)}dx \\
&\leq \left(\int_{\bar{B}(R)} e^{4qTh_t^n(X_t^m)}dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\bar{B}(R)} e^{4qTh_t^n(X_t^n)}dx \right)^{1/2} \\
&\leq L_m^{1/2} L_n^{1/2} \left(\int_{\bar{B}(\bar{R})} e^{4qTh_t^n(y)}dy \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\bar{B}(\bar{R})} e^{4qTh_t^n(y)}dy \right)^{1/2} \\
&\leq L \int_{\bar{B}(\bar{R})} e^{4qTh_t^n(y)}dy = L\|\exp(4qTh_t^n)\|_{L^1(\bar{B}(\bar{R}))}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\left\| e^{\int_0^T B_{m,n}(t)dt} \right\|_{L^q(\bar{B}(R))} \leq \left(\frac{L}{T} \right)^{1/q} \|\exp(4qTh^n)\|_{L^1([0,T]\times\bar{B}(\bar{R}))}^{1/q}.$$

In conclusione, abbiamo trovato che

$$\int_{\bar{B}(R)} \sup_{0\leq t\leq T} |X_t^m(x) - X_t^n(x)|^2 dx \leq C \left(\frac{1}{m^p} + \frac{1}{n^p} \right)^{1/p}, \tag{2.40}$$

dove C è la costante

$$C = 8\bar{R}L\|h^p\|_{L^1([0,T]\times\bar{B}(\bar{R}))}^{1/p} \sup_{n\geq 1} \|\exp(4qTh^n)\|_{L^1([0,T]\times\bar{B}(\bar{R}))}^{1/q} < \infty$$

finita per le ipotesi (ii) e (iii).
Passando al limite per $m, n \to \infty$ nella (2.40), si ottiene che, per ogni $R > 0$,

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_{\bar{B}(R)} \sup_{0\leq t\leq T} |X_t^m(x) - X_t^n(x)|^2 dx = 0. \tag{2.41}$$

Abbiamo mostrato che $\{ X^n : n \geq 1 \}$ è una successione di Cauchy in $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}^d))$. Esiste allora una mappa $X \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}^d))$ che è il limite in $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ di questa successione. Mostriamo che tale mappa X è un flusso Lagrangiano regolare generato dal campo b.
Fissiamo $R > 0$. Osserviamo preliminarmente che possiamo estrarre una sottosuccessione $\{ X^{n_k} : k \geq 1 \}$ tale che, per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$, $X_t^{n_k}(x)$ converge uniformemente a $X_t(x)$ in $t \in [0,T]$, e pertanto si ha ancora

$$\sup_{0\leq t\leq T} |X_\cdot(x)| \leq R + T\|b\|_{L^\infty} = \bar{R}.$$

Da un lato, per ogni $\phi \in \mathcal{C}_c([0,T]\times\mathbb{R}^d)$, per il Lemma di Fatou abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(X_t(x))dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(X_t^{n_k}(x))dx \le L\int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)dy$$

e quindi $(X_t)_\# \mathscr{L}^d \le L\mathscr{L}^d$ per ogni $t\in[0,T]$. Abbiamo mostrato il punto (ii) della Definizione 2.4.1.
Dall'altro lato, abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\bar{B}(R)} \sup_{0\le t\le T} \left| \int_0^t b_s^n(X_s^n(x))ds - \int_0^t b_s(X_s(x))ds \right| dx = 0. \tag{2.42}$$

Infatti

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t b_s^n(X_s^n(x))ds - \int_0^t b_s(X_s(x))ds\right| &\le \int_0^T |b_s^n(X_s^n(x)) - b_s(X_s(x))|ds \\ &\le \int_0^T |b_s^n(X_s^n(x)) - b_s(X_s^n(x))|ds + \int_0^T |b_s(X_s^n(x)) - b_s(X_s(x))|ds,\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}&\int_{\bar{B}(R)} \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t b_s^n(X_s^n(x))ds - \int_0^t b_s(X_s(x))ds\right|dx \le \\ &\quad\le \underbrace{\int_0^T \int_{\bar{B}(R)} |b_t^n(X_t^n(x)) - b_t(X_t^n(x))|dxdt}_{J_1^n} + \underbrace{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |b_t(X_t^n(x)) - b_s(X_t(x))|dxdt}_{J_2^n}.\end{aligned}$$

Per il primo termine, abbiamo

$$J_1^n \le L_n \int_0^T \int_{\bar{B}(\bar{R})} |b_t^n(y) - b_t(y)|dydt \le L\|b^n - b\|_{L^1([0,T]\times\bar{B}(\bar{R}))}$$

e perciò $\lim_{n\to\infty} J_1^n = 0$.
Per il secondo termine ragioniamo come segue. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo un campo vettoriale

$$b^\varepsilon \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\bar{B}(\bar{R});\mathbb{R}^d) \quad \text{tale che} \quad \|b^\varepsilon - b\|_{L^1([0,T]\times\bar{B}(\bar{R}))} < \varepsilon.$$

Allora, per disuguaglianza triangolare, per il secondo termine possiamo scrivere

$$\begin{aligned} J_2^n \le &\int_0^T \int_{\bar{B}(R)} |b_t(X_t^n(x)) - b_t^\varepsilon(X_t^n(x))|dxdt && =: J_{2,1}^n \\ &+ \int_0^T \int_{\bar{B}(R)} |b_t^\varepsilon(X_t^n(x)) - b_t^\varepsilon(X_t(x))|dxdt && =: J_{2,2}^n \\ &+ \int_0^T \int_{\bar{B}(R)} |b_t^\varepsilon(X_t(x)) - b_t(X_t(x))|dxdt && =: J_{2,3}^n. \end{aligned}$$

Siccome $(X_t^n)_\# \mathscr{L}^d \le L\mathscr{L}^d$ per ogni $t\in[0,T]$, abbiamo

$$J_{2,1}^n \le L\int_0^T \int_{\bar{B}(\bar{R})} |b_t(y) - b_t^\varepsilon(y)|dyds < L\varepsilon$$

e, allo stesso modo,

$$J_{2,3}^n \leq L \int_0^T \int_{\bar{B}(\bar{R})} |b_t^\varepsilon(y) - b_t(y)| dy ds < L\varepsilon.$$

Inoltre, per la scelta di b^ε, esiste una costante $C_\varepsilon > 0$ tale che $\|\nabla b^\varepsilon\|_{L^\infty([0,T]\times\bar{B}(\bar{R}))} \leq C_\varepsilon$. Pertanto

$$J_{2,2}^n \leq C_\varepsilon \int_0^T \int_{\bar{B}(R)} |X_t^n(x) - X_t(x)| dx dt \leq C_\varepsilon T \|X^n - X\|_{L^1(\bar{B}(\bar{R}); \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}^d))} \to 0$$

quando $n \to \infty$. Abbiamo mostrato che $\limsup_{n\to\infty} J_2^n \leq 2L\varepsilon$ e perciò, siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, abbiamo ottenuto che $\lim_{n\to\infty} J_2^n = 0$.
Abbiamo mostrato il limite (2.42). Pertanto, passando al limite per $n \to \infty$ nell'uguaglianza

$$X_t^n(x) = x + \int_0^t b_s^n(X_s^n(x)) ds$$

per ogni $t \in [0,T]$, entrambi i lati convergono in $L^1(\bar{B}(R), \mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R}^d))$ a $X_t(x)$ e $x + \int_0^t b_s^n(X_s^n(x)) ds$ rispettivamente. Quindi, per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$, abbiamo

$$X_t(x) = x + \int_0^t b_s^n(X_s^n(x)) ds$$

per ogni $t \in [0,T]$, cioé $t \mapsto X_t(x)$ è una curva integrale generata dal campo vettoriale b. Questo mostra il punto (i) della Definizione 2.4.1.

Step 2: Unicità. Supponiamo che $X, \bar{X} \colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ siano due flussi Lagrangiani regolari generati dal campo b con costanti di compressione L e $\bar{L}$ rispettivamente. Fissiamo $R > 0$ e consideriamo $x \in \bar{B}(R)$. Definiamo la funzione

$$\xi(t) \equiv \xi(t,x) := \Big| X_t(x) - \bar{X}_t(x) \Big|^2$$

(omettiamo la dipendenza da x per semplicità) in modo simile allo Step precedente.
Osserviamo che, per ogni $t \in [0,T]$, si ha

$$\left| \frac{dX_t(x)}{dt} - \frac{d\bar{X}_t(x)}{dt} \right| = \Big| b_t(X_t) - b_t(\bar{X}_t) \Big| \leq (h_t(X_t(x)) + h_t(\bar{X}_t(x))) |X_t(x) - \bar{X}_t(x)|$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d\xi(t)}{dt} \right| &= 2 \left| \left\langle X_t(x) - \bar{X}_t(x), \frac{dX_t(x)}{dt} - \frac{d\bar{X}_t(x)}{dt} \right\rangle \right| \\
&\leq 2|X_t - \bar{X}_t| \cdot \left| \frac{dX_t}{dt} - \frac{d\bar{X}_t}{dt} \right| \\
&\leq 2(h_t(X_t) + h_t(\bar{X}_t)) \xi(t) = B(t)\xi(t)
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$B(t) = 2(h_t(X_t(x)) + h_t(\bar{X}_t(x))).$$

Integrando tra 0 e t otteniamo che

$$\xi(t) \leq \int_0^t B(s)\xi(s) ds \leq \varepsilon + \int_0^t B(s)\xi(s) ds$$

per ogni $t \in [0,T]$ ed ogni $\varepsilon > 0$. Applichiamo il Lemma 2.2.4. Otteniamo che

$$\xi(t) \leq \varepsilon e^{\int_0^t B(s)ds} \leq \varepsilon e^{\int_0^T B(s)ds}.$$

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo

$$\int_{\bar{B}(R)} \sup_{0\leq t\leq T} \left| X_t(x) - \bar{X}_t(x) \right|^2 dx \leq \varepsilon \int_{\bar{B}(R)} e^{\int_0^T B(s)ds} dx.$$

Stimiamo il secondo membro. Per la disuguaglianza di Jensen applicata alla funzione $u \mapsto e^u$, abbiamo che

$$e^{\int_0^T B(t)dt} \leq \frac{1}{T}\int_0^T e^{TB_{m,n}(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{2T(h_t(\bar{X}_t)+h_t(X_t))}dt,$$

pertanto, per la disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{B}(R)} e^{\int_0^T B(s)ds} dx &\leq \frac{1}{T}\int_0^T \int_{\bar{B}(R)} e^{2T(h_t(\bar{X}_t)} \cdot e^{2Th_t(X_t))} dx dt \\
&\leq \frac{1}{T}\int_0^T \left(\int_{\bar{B}(R)} e^{4Th_t(\bar{X}_t)}dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\bar{B}(R)} e^{4Th_t(X_t)}dx\right)^{1/2} dt \\
&\leq \frac{(\bar{L}L)^{1/2}}{T}\int_0^T \int_{\bar{B}(\bar{R})} e^{4Th_t(y)} dy dt \\
&= \frac{(\bar{L}L)^{1/2}}{T} \|\exp(4Th)\|_{L^1([0,T]\times\bar{B}(\bar{R}))}
\end{aligned}$$

Concludiamo dunque che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha

$$\int_{\bar{B}(R)} \sup_{0\leq t\leq T} \left| X_t(x) - \bar{X}_t(x) \right|^2 dx \leq \varepsilon \frac{(\bar{L}L)^{1/2}}{T} \|\exp(4Th)\|_{L^1([0,T]\times\bar{B}(\bar{R}))}.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ deduciamo che $\xi(t,x) = 0$ per q.o. $x \in \bar{B}(R)$ e per ogni $t \in [0,T]$. Ma allora i due flussi X e $\bar{X}$ coincidono q.o. su $[0,T] \times \mathbb{R}^d$.
Questo conclude la dimostrazione. □

Facciamo alcuni commenti sui risultati ottenuti e sulle idee che abbiamo utilizzato.

Il campo vettoriale b nel Teorema 2.4.4 ha sostanzialmente una regolarità di tipo Sobolev $W^{1,p}$ con $p > 1$. Infatti, supponiamo per semplicità che il campo non dipenda dal tempo. Allora lo pseudo-gradiente h, per l'ipotesi (ii), è tale che $h^p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, cioè $h \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, per qualche $p > 1$. Quindi, se $b \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, dalla disuguaglianza (2.35) segue che $b \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ per il Teorema 2.4.2.

Osserviamo inoltre che, se lo pseudo-gradiente h del campo b è localmente limitato, cioè se b è un campo Lipschitziano, allora b soddisfa banalmente le ipotesi del Teorema 2.4.4, perché le funzioni costanti sono localmente integrabili. Quindi il Teorema 2.4.4 è sicuramente valido per campi vettoriali classici. Tuttavia, la classe di campi vettoriali a cui possiamo applicare il Teorema 2.4.4 è strettamente più estesa di quella Lipschitziana, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.4.6. Sia $d = 1$ e consideriamo il campo

$$b(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{10}\log\log 10, & x < -1/10 \\ x\log\log\dfrac{1}{|x|}, & -1/10 \le x \le 1/10, \\ \dfrac{1}{10}\log\log 10, & x > 1/10. \end{cases}$$

Il campo b è limitato e continuo su $\mathbb{R}$, e pertanto localmente integrabile. Il campo b non è di Lipschitz, perché infatti abbiamo

$$b'(x) = \begin{cases} \log\log\dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{\log|x|}, & 0 < |x| < 1/10, \\ 0, & |x| > 1/10, \end{cases}$$

e tale funzione non è limitata in un intorno del punto $x = 0$. Tuttavia, il campo b soddisfa le ipotesi del Teorema 2.4.4.

Osserviamo infatti che b' è monotona a tratti e che $b'(x) > 0$ per ogni $x \in (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$, quindi $h(x) = b'(x)$. Ora, per calcolo diretto, si trova

$$\int_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} h(x)^2 dx = \int_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} \left(\log\log\frac{1}{|x|} + \frac{1}{\log|x|}\right)^2 dx \simeq 0.161$$

e quindi h appartiene allo spazio $L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Osserviamo poi che $x \mapsto \left|\frac{1}{\log|x|}\right|$ è continua e limitata sull'intervallo $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ e che

$$\exp\left(4T\log\log\frac{1}{|x|}\right) = (\log|x|)^{4T}$$

è localmente integrabile su $\mathbb{R}$ per ogni $T > 0$. Questo mostra che l'ipotesi (ii) del Teorema 2.4.4 è verificata.

Vogliamo ora verificare l'ipotesi (iii). Per fare questo possiamo supporre che

$$\chi_n = \frac{n}{2} \cdot \mathbf{1}_{[-1/n,1/n]}$$

(funzione caratteristica), perché per poter applicare il Teorema di Cauchy–Lipschitz ai campi regolarizzati è sufficiente che questi siano Lipschitziani. Dato che $|x| < 1/10$, per $n \ge 1$ sufficientemente grande si avrà che

$$\begin{aligned} h^n(x) = b' * \chi_n(x) &= \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} b'(x-y)dy = \frac{n}{2}\int_{x-1/n}^{x+1/n} b'(z)dz = \frac{n}{2}b(z)\Big|_{z=x-1/n}^{z=x+1/n} \\ &= \frac{n}{2}\left(\left(x+\tfrac{1}{n}\right)\log\log\frac{1}{\left|x+\frac{1}{n}\right|} - \left(x-\tfrac{1}{n}\right)\log\log\frac{1}{\left|x-\frac{1}{n}\right|}\right). \end{aligned}$$

Ora

$$\exp\left(x\log\log\frac{1}{|x|}\right) = (-\log|x|)^x$$

è una funzione continua per $x \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$. Quindi, per $x \neq \pm\frac{1}{n}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\exp(h^n(x)) &= \left(\frac{\exp\left(\left(x+\frac{1}{n}\right)\log\log\frac{1}{|x+\frac{1}{n}|}\right)}{\exp\left(\left(x-\frac{1}{n}\right)\log\log\frac{1}{|x-\frac{1}{n}|}\right)}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{\left(-\log\left|x+\frac{1}{n}\right|\right)^{\left(x+\frac{1}{n}\right)}}{\left(-\log\left|x-\frac{1}{n}\right|\right)^{\left(x-\frac{1}{n}\right)}}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(\left(-\log\left|x+\frac{1}{n}\right|\right)^{\left(x+\frac{1}{n}\right)} \cdot \left(-\log\left|x-\frac{1}{n}\right|\right)^{-\left(x-\frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(-\log\left|x+\frac{1}{n}\right|\right)^{\frac{1}{2}+\frac{nx}{2}} \cdot \left(-\log\left|x-\frac{1}{n}\right|\right)^{\frac{1}{2}-\frac{nx}{2}} \\
&= \left(\log\left|x+\frac{1}{n}\right| \cdot \log\left|x-\frac{1}{n}\right|\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\log\left|x+\frac{1}{n}\right|}{\log\left|x-\frac{1}{n}\right|}\right)^{\frac{nx}{2}}.
\end{aligned}$$

Per concludere, allora, è sufficiente mostrare che

$$\sup_{n\geq 1}\int_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} \left(\log\left|x+\frac{1}{n}\right| \cdot \log\left|x-\frac{1}{n}\right|\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\log\left|x+\frac{1}{n}\right|}{\log\left|x-\frac{1}{n}\right|}\right)^{\frac{nx}{2}} dx < \infty \tag{2.43}$$

(scegliamo $T = 1/8$ per semplicità). Ma infatti, siccome

$$\left(\log\left|x+\frac{1}{n}\right| \cdot \log\left|x-\frac{1}{n}\right|\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} |\log|x||$$

e

$$\left(\frac{\log\left|x+\frac{1}{n}\right|}{\log\left|x-\frac{1}{n}\right|}\right)^{\frac{nx}{2}} \sim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\frac{1}{1+\log|x|}}{\frac{nx}{2}}\right)^{\frac{nx}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{1}{1+\log|x|}}$$

per q.o. $x \in (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} \left(\log\left|x+\frac{1}{n}\right| \cdot \log\left|x-\frac{1}{n}\right|\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\log\left|x+\frac{1}{n}\right|}{\log\left|x-\frac{1}{n}\right|}\right)^{\frac{nx}{2}} dx = \int_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} |\log|x||e^{\frac{1}{1+\log|x|}}dx \simeq 0.425,$$

e da questo segue la (2.43). Lasciamo al lettore la verifica di questa affermazione. In conclusione, dunque, anche l'ipotesi (iii) del Teorema 2.4.4 è verificata.

Sebbene estenda effettivamente i risultati classici, il Teorema 2.4.4 è molto lontano dal fornire una risposta completa sull'esistenza e l'unicità del flusso associato ad un campo vettoriale di tipo Sobolev $W^{1,p}$, perché le ipotesi (ii) e (iii) sono condizioni estremamente forti sullo pseudo-gradiente del campo e restringono enormemente l'insieme dei campi di tipo $W^{1,p}$ a cui possiamo applicare il Teorema 2.4.4.

Le ipotesi di equi-integrabilità esponenziale dello pseudo-gradiente sono una conseguenza del nostro approccio elementare, e rappresentano il limite di queste tecniche. Nella dimostrazione del Teorema 2.4.4 abbiamo in sostanza valutato la quantità $\xi(t) = |X_t - \bar{X}_t|^2$ al variare di $t \in [0, T]$, dove X e $\bar{X}$ sono due flussi associati al campo vettoriale b: nelle nostre stime abbiamo fatto intervenire in modo essenziale la disuguaglianza di Grönwall, che ha inevitabilmente comportato un'eponenziazione dello pseudo-gradiente di b. Necessariamente, dunque, per ottenere i risultati di esistenza e unicità, abbiamo dovuto supporre di avere un controllo esponenziale uniforme dello pseudo-gradiente, dipendente pesantemente tanto dal suo grado di integrabilità $p > 1$ quanto dal tempo $T > 0$.

Il nostro approccio elementare, prima molto elastico e soddisfacente per la regolarità di tipo Osgood–Giuliano, si è ora rivelato inefficace e inutilmente macchinoso per una regolarità più bassa di tipo Sobolev $W^{1,p}$. Le quantità da valutare di tipo classico $|X_t - \bar{X}_t|^2$ non esprimono al meglio le proprietà del flusso Lagrangiano e male si prestano a stime integrali alla Grönwall. Per superare questi ostacoli — e per meglio comprendere il significato profondo del flusso Lagrangiano associato — sono necessari nuovi strumenti, più potenti, più sottili, più agili e più consoni alla teoria della misura e dell'integrazione. I lavori di Crippa–De Lellis, [20], e di Bouchut–Crippa, [13], a partire dalle teorie di DiPerna–Lions e di Ambrosio, hanno aperto con successo una nuova strada nello scioglimento di queste difficoltà ed hanno raggiunto risultati ragguardevoli, svelando nuovi e più freschi approcci e connessioni inaspettate.

E, tuttavia, rimane ancora molto da capire.

Bibliografia

[1] R. A. Adams e J. J. F. Fournier. *Sobolev spaces*. Pure and applied mathematics. Amsterdam, Boston, Heildelberg: Elsevier, 2003.

[2] R. P. Agarwal e V. Lakshmikantham. *Uniqueness and Nonuniqueness Criteria for Ordinary Differential Equations*. Wold Scientific, 1993.

[3] R. P. Agarwal e D. O'Regan. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Springer, 2008.

[4] G. Alberti. «Rank-one properties for derivatives of functions with bounded variation». In: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 123A (1993), pp. 239–274.

[5] L. Ambrosio. «Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields». In: *Inventiones Mathematicae* 158 (2004), pp. 227–260.

[6] L. Ambrosio. «Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields and applications». In: *Journées Équations aux dérivées partielles* (2004), pp. 1–11. URL: http://eudml.org/doc/10593.

[7] L. Ambrosio. «Transport equation and Cauchy problem for non-smooth vector fields». In: *Calculus of Variations and Nonlinear Partial Differential Equations*. Vol. 1927. Springer, 2008, pp. 1–41.

[8] L. Ambrosio e G. Crippa. *Continuity equations and ODE flows with non-smooth velocity*. Lecture notes in Edinburgh. 2013. URL: http://cvgmt.sns.it/media/doc/paper/2268/Edinburghtext.pdf.

[9] L. Ambrosio, N. Fusco e D. Pallara. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford University Press, 2000, p. 434.

[10] S. Banach. «Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales». In: *Fundamenta Mathematicae* 3 (1922), pp. 133–181.

[11] R. E. Bellman. «The stability of solutions of linear differential equations». In: *Duke Mathematical Journal* 10 (1943), pp. 643–647.

[12] I. A. Bihari. «Generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations». In: *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 7 (1956), pp. 81–94.

[13] F. Bouchut e G. Crippa. «Lagrangian flows for vector fields with gradient given by a singular integral». In: *J. Hyper. Differential Equations* 10 (2013), pp. 235–282.

[14] A. Bressan. «A lemma and a conjecture on the cost of rearrangments». In: *Rendiconti del Seminario Matematico – Univ. di Padova* 110 (2003), pp. 97–102.

[15] A. Bressan. «An ill posed Cauchy problem for hyperbolic system in two space dimensions». In: *Rendiconti del Seminario Matematico – Univ. di Padova* 110 (2003), pp. 103–117.

[16] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext Series. Springer, 2011.

[17] R. Caccioppoli. *Opere, I vol., Funzioni di variabili reali ed applicazioni, e II vol., Funzioni di variabili complesse. Equazioni funzionali.* A cura di Unione Matematica Italiana (UMI). 1963.

[18] G. Crippa. *Ordinary differential equations and singular integrals.* 2013. URL: https://math.unibas.ch/uploads/x4epublication/46880/Gianluca_Crippa.pdf.

[19] G. Crippa. «The flow associated to weakly differentiable vector fields». Tesi di dott. Scuola Normale Superiore di Pisa – Universität Zürich, 2007. URL: http://user.math.uzh.ch/delellis/uploads/media/Gianluca.pdf.

[20] G. Crippa e C. De Lellis. «Estimates and regularity results for the DiPerna–Lions flow». In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 616 (2008), pp. 15–46.

[21] C. De Lellis. «Odes with Sobolev Coefficients: the Eulerian and the Lagrangian Approach». In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S* 1.3 (set. 2008), pp. 405–426.

[22] N. Depauw. «Non unicité des solutions bornées pour un champ de vecteurs BV en dehors d'un hyperplan». In: *Comptes Rendus Mathematique* 337 (2003), pp. 249–252.

[23] R. J. DiPerna e P.-L. Lions. «Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces». In: *Inventiones Mathematicae* 98 (1989), pp. 511–547.

[24] S. Fang. *DiPerna-Lions and Ambrosio's approach to ordinary Differential Equations.* Lecture notes in University of Bielefeld. 2008. URL: http://fang.perso.math.cnrs.fr/Mini-cours/Bielefeld08.pdf.

[25] S. Fang e T. Zhang. «A study of a class of stochastic differential equations with non-Lipschitzian coefficients». In: *Probability Theory and Related Fields* 132 (2005), pp. 356–390.

[26] G. Fichera. «L'analisi matematica in Italia fra le due guerre». In: *Rendiconti Matematica e Applicazioni Accademia dei Lincei* 10 (1999), pp. 279–312.

[27] L. Giuliano. «Su un notevole teorema di confronto e su teorema di unicità per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie». In: *Rendiconti della Reale Accademia d'Italia* 1 (1940), pp. 330–336.

[28] L. Giuliano. «Sull'unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie». In: *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* 2 (1940), pp. 221–227.

[29] T. H. Grönwall. «Note on the derivative with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations». In: *Annals of Mathematics* 20 (1919), pp. 292–296.

[30] J. Hadamard. «Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique». In: *Princeton University Bulletin* 13 (1902), pp. 49–52.

[31] P. Hajłasz. «A new characterization of the Sobolev space». In: *Studia Mathematica* 159.2 (2003), pp. 263–275.

[32] P. Hajłasz. «Geometric approach to Sobolev spaces and badly degenerate elliptic equations». In: *GAKUTO International Series – Mathematical Sciences and Applications* 7 (1995), pp. 141–168.

[33] P. Hajłasz. «Sobolev spaces on an arbitrary metric space». In: *Potential Analysis* 5 (1996), pp. 403–415.

[34] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations.* John Wiley and Sons, 1964.

[35] E. Kamke. *Differentialgleichungen reeller Funktionen.* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930.

[36] C. Li, Y. Wu e R. Ye. *Recent Advances in Applied Nonlinear Dynamics With Numerical Analysis: Fractional Dynamics, Network Dynamics, Classical Dynamics and Fractal Dynamics With Their Numerical Simulations.* Vol. 15. Interdisciplinary Mathematical Sciences. World Scientific Publishing Company Incorporated, 2013, p. 416.

[37] H. Li e D. Luo. *A unified treatment of ODEs under Osgood and Sobolev type conditions.* arXiv:1107.2496. 2013. URL: http://arxiv.org/abs/1107.2496.

[38] X. Liu e W. Huang. «A note on the DiPerna–Lions flows». In: *Acta Mathematica Scientia* 31B.5 (2011), pp. 1719–1724.

[39] P. A. A. Montel. «Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle». In: *Bulletin des Sciences Mathématiques* 50 (1926), pp. 205–217.

[40] R. Monti. «Analisi 2 - Appunti del corso». Dispensa. Univ. di Padova, 2013. URL: http://www.math.unipd.it/~monti/A2_2013/App12.pdf.

[41] R. Monti. «Introduction to ordinary differential equations – Lecture Notes». Dispensa. Univ. di Padova, 2010. URL: http://www.math.unipd.it/~monti/ED2/PC13GiugnoFinale.pdf.

[42] W. Osgood. «Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy–Lipschitzschen Bedingung». In: *Monatsh. Math. Phys.* 9 (1898), pp. 331–345.

[43] B. G. Pachpatte. *Inequalities for Differential and Integral Equations.* A cura di W. F. Ames. Vol. 197. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, 1998, p. 623.

[44] G. Peano. «Démonstration de l'intégrabilité des équations differéntielles ordinaires». In: *Math. Ann.* 37 (1890), pp. 182–288.

[45] X. Y. Shen. «Remark on the uniqueness of solutions of differential equations». In: *Shuxue Jinzhan* 6 (1963), pp. 267–271.

[46] D. R. Smart. *Fixed Point Theorems.* Cambridge University Press, 1974.

[47] L. Tonelli. «Sull'unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria». In: *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei* 1.6 (1925), pp. 272–277.

[48] D. V. V. Wend. «Existence and uniqueness of solutions of ordinary differential equations». In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 23 (1969), pp. 27–33.

[49] D. V. V. Wend. «Uniqueness of solutions of ordinary differential equations». In: *American Mathematical Montly* 74 (1967), pp. 948–950.

[50] E. Zuazua. «Log-Lipschitz regularity and uniqueness of the flow for a field in $(W^{n/p+1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n))^n$». In: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Series I* 335 (2002), pp. 17–22.