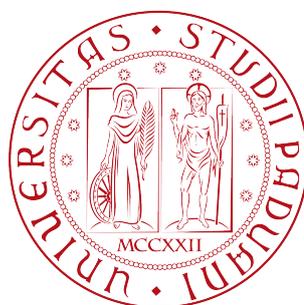


# Il problema isoperimetrico con densità gaussiana



Laura Meneghello

Facoltà di Scienze MM.FF.NN  
Università degli Studi di Padova

Tesi per la laurea triennale in

*Matematica*

Anno accademico 2010-2011

---

Relatore: Roberto Monti

Data della discussione: 29 Novembre 2011

Firma del relatore



*Ai miei genitori*



---

## Contenuti

In questa tesi ho studiato e ho integrato con dimostrazioni l'articolo "On the isoperimetric problem with respect to a mixed Euclidean-Gaussian density", scritto da Francesco Maggi, Nicola Fusco e Aldo Pratelli, pubblicato nel Luglio 2011 sulla rivista "Journal of Functional Analysis". Nell'articolo si analizza il problema isoperimetrico su uno spazio euclideo  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h$  dotato di densità gaussiana con particolare riferimento al caso  $k = 1$ . Il mio interesse per questo argomento è iniziato dopo aver ascoltato un seminario, tenuto da Francesco Maggi all'Università di Matematica di Padova.

Il problema isoperimetrico classico ha origine nella matematica greca e trova una soluzione completa solo nel 1958 con il lavoro di De Giorgi "Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita". È noto che le palle euclidee realizzano il minimo per il problema di minimizzare l'area del bordo di un insieme con volume fissato. Nell'articolo studiato si generalizza il problema isoperimetrico ponendo sullo spazio euclideo una densità gaussiana. In esso vengono dimostrate proprietà degli insiemi isoperimetrici quali l'esistenza, la simmetria, la stazionarietà e la regolarità. Quest'ultima proprietà viene solo enunciata in questa tesi, la cui dimostrazione necessita di argomenti e conoscenze molto complesse e avanzate.

I risultati più interessanti si trovano nel caso  $k = 1$ , dove possiamo classificare completamente gli insiemi isoperimetrici.

La natura del mio lavoro è stata quella di studiare l'articolo, integrando alcuni risultati con le dimostrazioni. In particolare ho dimostrato la Proposizione 3.8; un risultato che facilita lo studio degli insiemi isoperimetrici e che viene usato in tutto il corso della trattazione, ed anche la Proposizione 3.9, ovvero l'equazione di Eulero-Lagrange nel caso di densità generale (nell'articolo era richiamata solo nel caso di densità gaussiana). Si

---

tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine che fornisce una condizione necessaria affinché un insieme risulti essere isoperimetrico. In aggiunta ho studiato e richiamato argomenti necessari alla comprensione dell'articolo, facendo uso dei libri "Measure Theory and Fine Properties of Functions" di Lawrence C. Evans e di Ronald F. Gariepy, e "Function of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems" di L.Ambrosio, N.Fusco, D.Pallara.

# Indice

1	Preliminari: Misura di Hausdorff	1
2	Introduzione	3
3	Condizioni necessarie per insiemi isoperimetrici	7
4	Simmetrizzazioni di Steiner e di Ehrhard	17
5	Simmetria degli insiemi isoperimetrici	21
6	Esistenza degli insiemi isoperimetrici	29
7	Stazionarietà degli insiemi isoperimetrici	33
8	Funzioni isoperimetriche e insiemi isoperimetrici per $k = 1$	37
	Bibliografia	55

## INDICE

---

# 1

## Preliminari: Misura di Hausdorff

In questo capitolo introdurremo alcune nozioni sulla misura di Hausdorff, misura basilare nel corso di questa trattazione. Vedremo alcuni risultati principali, di cui faremo uso, ma non ne proponiamo la dimostrazione.

**Definizione 1.1** Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq s < \infty$ ,  $0 < \delta \leq +\infty$ . Definiamo

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \equiv \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam } C_j \leq \delta \right\}$$

dove

$$\alpha(s) \equiv \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}$$

con  $\Gamma(s) \equiv \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ , ( $0 < s < \infty$ ), l'usuale funzione gamma.

**Definizione 1.2** Per un insieme  $A$  e per  $s$  come sopra definiamo la misura di Hausdorff  $s$ -dimensionale come

$$\mathcal{H}_s \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

Osserviamo che una tale definizione di misura è definita in termini dei diametri dei vari ricoprimenti e che la nostra richiesta  $\delta \rightarrow 0$  forza i ricoprimenti a seguire la geometria locale dell'insieme  $A$ .

**Teorema 1.3**  $\mathcal{H}^s$  è una misura regolare di Borel.

## 1. PRELIMINARI: MISURA DI HAUSDORFF

---

Vediamo ora alcune principali proprietà della misura di Hausdorff.

**Teorema 1.4** (*Proprietà elementari*)

- (i)  $\mathcal{H}^0$  è la misura che conta i punti.
- (ii)  $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ , su  $\mathbb{R}^1$ , dove per  $\mathcal{L}^1$  s'intende l'usuale misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}$ .
- (iii)  $\mathcal{H}^s \equiv 0$  su  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $s > n$ .
- (iv)  $\mathcal{H}^s(\lambda(A)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$  per ogni  $\lambda > 0$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ .
- (v)  $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$  per ogni isometria affine  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

Vediamo ora l'uguaglianza della misura di Hausdorff con la misura di Lebesgue per sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.5** (*Uguaglianza isodiametrica*)

Per un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha  $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$ .

## 2

# Introduzione

Che cos'è un problema isoperimetrico? La storia del primo di questi problemi è narrata nell'Eneide. La regina Didone, in fuga da Tiro in Fenicia, approdò sulle sponde dell'attuale Tunisia e chiese al Re di quelle terre che le fosse concesso un pezzo di terra per fondarvi il proprio regno. Il Re rispose che le avrebbe dato tutta la terra che lei fosse riuscita a circondare con una pelle di bue. Didone fece tagliare la pelle a strisce sottilissime con le quali formò un filo lungo abbastanza per recintare il terreno ove fondò Cartagine.

Didone si trovò dunque ad affrontare il seguente problema: determinare la figura piana di area massima avendo a disposizione un perimetro fissato. Questo è appunto un tipo di problema isoperimetrico.

Nel caso che tratteremo andremo a studiare l'esistenza e la caratterizzazione in  $\mathbb{R}^n$  di quegli insiemi che minimizzano il cosiddetto perimetro misto con fissato volume misto.

Diamo ora le prime nozioni di base del problema.

**Definizione 2.1** *Chiamiamo potenziale una funzione  $\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  positiva e di classe almeno  $C^2$ .*

*Data una funzione potenziale  $\nu$  chiamiamo densità la funzione  $e^\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .*

## 2. INTRODUZIONE

---

Data una densità positiva  $e^\nu$ ,  $\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  il problema isoperimetrico si può tradurre nel ricercare le soluzioni (che a priori non sono uniche) della seguente espressione

$$\inf \left\{ \int_{\partial E} e^\nu d\mathcal{H}^{n-1} : \int_E e^\nu = m \right\}, \quad m > 0 \quad (2.1)$$

Ci poniamo ora nel modello di base dato dal prodotto cartesiano di due spazi euclidei

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k = \{z = (x, y) : x \in \mathbb{R}^h, y \in \mathbb{R}^k\}, \quad n = h + k \geq 1$$

dotato della densità

$$\frac{e^{-\frac{|x|^2}{2}}}{(2\pi)^{h/2}}.$$

Questo ci permette quindi di considerare e studiare le corrispondenti nozioni di volume e perimetro per un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^n$ .

Infatti, se  $E \subset \mathbb{R}^n$  ha bordo  $C^1$ , possiamo definire il volume misto e il perimetro misto di  $E$  come

$$V_{mix}(E) = \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_E e^{-\frac{|x|^2}{2}} dz, \quad (2.2)$$

$$P_{mix}(E) = \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\partial E} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mathcal{H}^{n-1}(z), \quad (2.3)$$

e riformulare il problema isoperimetrico nel seguente modo: dato un  $m > 0$  trovare quegli insiemi  $E$  che minimizzano la seguente espressione

$$\lambda(m) = \inf\{P_{mix}(E) : V_{mix}(E) = m\}.$$

---

Si noti che quando  $h = 0$  il problema si riduce al classico problema isoperimetrico classico per insiemi  $E \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}^k \approx \mathbb{R}^k$ . Infatti ciò significa ricercare le soluzioni di

$$\inf\{\mathcal{H}^{k-1}(\partial E) : \mathcal{H}^k(E) = m\}$$

che si dimostrano essere le palle euclidee. Nel caso invece in cui  $k = 0$  il problema si riduce al problema gaussiano isoperimetrico per insiemi  $E \subset \mathbb{R}^h \times \{0\} \approx \mathbb{R}^h$ ,

$$\inf\left\{\frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\partial E} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mathcal{H}^{h-1}(x) : \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_E e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = m\right\}$$

e si dimostra che gli insiemi isoperimetrici risultano essere i semi-spazi.

## 2. INTRODUZIONE

---

### 3

## Condizioni necessarie per insiemi isoperimetrici

In questo capitolo daremo alcuni primi importanti risultati sugli insiemi isoperimetrici. Vedremo cioè due condizioni necessarie per cui un insieme risulta essere isoperimetrico. La prima, presente nel Teorema “Esistenza, simmetria e regolarità”, afferma l’esistenza di una funzione che caratterizza gli insiemi isoperimetrici e tramite la quale ci risulta più facile studiarli. La seconda è l’equazione di Eulero-Lagrange, ovvero una condizione di stazionarietà al secondo ordine.

Iniziamo con alcune definizioni basilari.

**Definizione 3.1** *Dato un insieme boreliano  $E \subset \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in [0, 1]$  chiamiamo  $E^{(\lambda)}$  l’insieme dei punti aventi densità  $\lambda$  rispetto ad  $E$ , cioè*

$$E^{(\lambda)} = \left\{ z = (x, y) \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^n(E \cap B(z, r))}{\omega_n r^n} = \lambda \right\}.$$

Intuitivamente i punti interni ad  $E$  hanno densità  $\lambda = 1$  e i punti esterni  $\lambda = 0$ .

Infatti se  $z = (x, y) \in \text{Int}(E)$ , esiste un  $r > 0$  tale che  $B(z, r) \subset E$ , perciò

$$\mathcal{H}^n(E \cap B(z, r)) = \mathcal{H}^n(B(z, r)) = \omega_n r^n.$$

Analogamente se  $z \in \text{Int}(\mathbb{R}^n \setminus E)$  si ottiene che  $\mathcal{H}^n(E \cap B(z, r)) = \mathcal{H}^n(\emptyset) = 0$ .

Risulta perciò intuitiva la nozione di bordo che andremo a definire.

### 3. CONDIZIONI NECESSARIE PER INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

**Definizione 3.2** Il bordo essenziale  $\partial^M E$  di  $E$  è definito come l'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^n$  aventi densità  $\lambda \in (0, 1)$ , ossia

$$\partial^M E = \mathbb{R}^n \setminus (E^{(0)} \cup E^{(1)}).$$

**Definizione 3.3** Il Perimetro euclideo  $P(E)$  di un insieme è

$$P(E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^M E).$$

Possiamo andare così a definire un importante e ricorrente nel corso di questa trattazione classe d'insiemi: gli insiemi con perimetro localmente finito. Vedremo più avanti che il problema isoperimetrico ammette soluzione in questa famiglia d'insiemi.

**Definizione 3.4** Diciamo che un insieme  $E$  ha perimetro localmente finito se

$$\mathcal{H}^n(K \cap \partial^M E) < \infty \quad \text{per ogni insieme compatto } K \subset \mathbb{R}^n.$$

Per chiarire le idee su questa nozione un po' astratta vediamo due esempi di insiemi, dei quali solo uno con perimetro localmente finito.

**Esempio 3.5** Se prendo  $E = \{\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1] : n \in \mathbb{N}\} \cup \{[0, 1] \times \{0\}\}$  (tale insieme è chiamato il "pulce e la pettine" a causa della sua forma geometrica) ottengo intuitivamente un insieme che non ha perimetro localmente finito.

**Esempio 3.6** Siano  $\{x_h\}_h \in \mathbb{N}$  una successione di punti densa in  $\mathbb{R}^2$  e  $\{\varepsilon_h\}_h \in \mathbb{N}$  tale che  $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h < \infty$ , (ad esempio posso prendere  $\varepsilon_h = \frac{1}{h^2}$ ) e definiamo  $E = \bigcup_{h=1}^{\infty} B_{\varepsilon_h}(x_h)$ . Si dimostra allora (ma non è facile farlo) che  $P(E) \leq \sum_{h=1}^{\infty} P(B_{\varepsilon_h}(x_h)) = 2\pi \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h < \infty$ , ossia  $E$  ha perimetro localmente finito.

Siamo pronti ora per enunciare uno dei più importanti e complessi teoremi che dimostreremo solo per passi nel corso di questa trattazione. In esso si afferma tra l'altro una prima condizione necessaria per le soluzioni del problema isoperimetrico, ovvero la simmetria.

**Teorema 3.7** Siano  $h \geq 1, k \geq 1$ . Per ogni  $m > 0$ , il problema isoperimetrico ammette soluzione nella classe degli insiemi con perimetro localmente finito in  $\mathbb{R}^n$ . Se  $E$  è un

---

insieme isoperimetrico allora esiste una funzione crescente  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  tale che, sotto una rotazione orizzontale e una traslazione verticale, si ha

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y| < \tau(x_1)\}. \quad (3.1)$$

Inoltre, la funzione  $\tau$  è localmente assolutamente continua su  $\mathbb{R}$  e

$$\partial E \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y = 0\}$$

è una varietà analitica. Infine se  $k < 7$ , allora  $\partial E$  è una varietà analitica.

Questo essenziale teorema porta in particolare all'equivalenza del problema isoperimetrico con un problema variazionale in una dimensione che è indipendente dalla "dimensione orizzontale"  $h$ . Vediamo infatti la seguente proposizione.

**Proposizione 3.8** *Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  tale che  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y| < \tau(x_1)\}$ , con  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  crescente e localmente assolutamente continua. Allora*

$$P_{mix}(E) = \mathcal{P}(\tau), \quad V_{mix}(E) = \mathcal{V}(\tau)$$

dove

$$\mathcal{P}(\tau) = \frac{k\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau(s)^{k-1} \sqrt{1 + \tau'(s)^2} ds, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{V}(\tau) = \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau(s) ds. \quad (3.3)$$

**Dim.** —

Dalle ipotesi possiamo riscrivere  $E$  come prodotto cartesiano di due insiemi

$$E = \mathbb{R}^{h-1} \times \{(x_1, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} : |y| < \tau(x_1)\}.$$

Quindi otteniamo con semplici calcoli d'integrali e ponendo  $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$ ,

### 3. CONDIZIONI NECESSARIE PER INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

$$\begin{aligned}
V_{mix}(E) &= \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\mathbb{R}^{h-1}} e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \left( \int_{B_k(0, \tau(x_1))} d\mathcal{H}^k(y) \right) dx_1 \right) d\mathcal{H}^{h-1}(\bar{x}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\mathbb{R}^{h-1}} e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \mathcal{L}^k(B_k(0, \tau(x_1))) dx_1 \right) d\bar{x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\mathbb{R}^{h-1}} e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \omega_k \tau(x_1)^k dx_1 \right) d\bar{x} \\
&\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \frac{\omega_k (2\pi)^{h-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau(s)^k ds \\
&= \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau(s)^k ds = \mathcal{V}(\tau).
\end{aligned}$$

Vediamo ora la seconda uguaglianza. Anche in questo caso dalle ipotesi possiamo riscrivere  $\partial E$  come prodotto cartesiano di due insiemi:

$$\begin{aligned}
\partial E &= \mathbb{R}^{h-1} \times \{(x_1, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} : |y| = \tau(x_1)\} \\
&= \mathbb{R}^{h-1} \times \{(x_1, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} : y_1^2 + \dots + y_k^2 = \tau(x_1)^2\} \\
&= \mathbb{R}^{h-1} \times \{(x_1, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} : y_k = \pm \sqrt{\tau^2 - |\bar{y}|^2}\}.
\end{aligned}$$

Ed essendo l'insieme

$$\{(x_1, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} : y_k = \sqrt{\tau^2 - |\bar{y}|^2}\} = \text{Graf}(\Phi(x_1, y)),$$

dove abbiamo chiamato  $\Phi$  la funzione regolare

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{h-1} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\
(x, y) &\longmapsto \sqrt{\tau^2 - |\bar{y}|^2},
\end{aligned}$$

si ha

---


$$\begin{aligned}
P_{mix}(E) &= \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\partial E} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mathcal{H}^{n-1}(x, y) \\
&= \frac{2}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\mathbb{R}^{h-1}} e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}} \left( \int_{\mathbb{R} \times B_{k-1}(0, \tau(x_1))} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \sqrt{1 + |\nabla \Phi|^2} dx_1 d\bar{y} \right) d\bar{x} \\
&= \frac{2}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\mathbb{R}^h} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \tau(x_1) \sqrt{1 + \tau'(x_1)^2} \left( \int_{B_{k-1}(0, \tau(x_1))} \frac{1}{\sqrt{\tau(x_1)^2 - |\bar{y}|^2}} d\bar{y} \right) dx
\end{aligned}$$

Analizziamo ora l'espressione tra parentesi:

$$\begin{aligned}
\int_{B_{k-1}(0, \tau(x_1))} \frac{1}{\sqrt{\tau(x_1)^2 - |\bar{y}|^2}} d\bar{y} &\stackrel{z=\bar{y}/\tau(x_1)}{=} \int_{B_{k-1}(0, 1)} \frac{\tau(x_1)^{k-1}}{\tau(x_1) \sqrt{1 - |z|^2}} dz \\
&= \frac{1}{2} \int_{B_{k-1}(0, 1)} \frac{2}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz = 2s_{k-2} \int_0^1 \frac{r^{k-2}}{\sqrt{1 - r^2}} dr \\
&\stackrel{r^2=t}{=} s_{k-2} \int_0^1 t^{\left(\frac{k-1}{2}-1\right)} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt = s_{k-2} B\left(\frac{k-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = k\omega_k
\end{aligned}$$

Dove abbiamo usato le uguaglianze

$$\begin{aligned}
s_{k-2} B\left(\frac{k-1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= s_{k-2} \left( \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \right) = (k-1) \omega_{k-1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \\
&= (k-1) \omega_{k-1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+1\right)}{\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\frac{k}{2}}} = (k-1) \omega_{k-1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+1\right)}{\frac{k-1}{2}} \frac{\omega_k k}{2(\pi)^{k/2}} \\
&= k\omega_k \left( \omega_{k-1}(\pi)^{\frac{1-k}{2}} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}+1\right) \right) \\
&= k\omega_k \left( \omega_{k-1}(\pi)^{\frac{1-k}{2}} \frac{(\pi)^{\frac{k-1}{2}}}{\omega_{k-1}} \right) = k\omega_k.
\end{aligned}$$

Ritornando ora alla formula per il perimetro misto di  $E$  otteniamo il risultato voluto:

### 3. CONDIZIONI NECESSARIE PER INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

$$P_{mix}(E) = \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\mathbb{R}^h} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \tau(x_1)^{k-1} \sqrt{1 + \tau'(x_1)^2} (k\omega_k) dx$$

$$\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \frac{k\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau(s)^{k-1} \sqrt{1 + \tau'(s)^2} ds = \mathcal{P}(\tau).$$

□

Vediamo ora la forma generale dell'equazione di Eulero-Lagrange. Equazione che fornisce una condizione necessaria per cui un insieme risulta essere isoperimetrico. Vedremo poi un corollario che è l'applicazione di questo importante risultato nel caso in cui ci poniamo in uno spazio euclideo dotato della densità gaussiana, ossia il caso che stiamo trattando. Ritorniamo perciò momentaneamente nel caso generale.

Sia  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V \in C^2$ , una funzione potenziale e siano il perimetro e il volume di  $E$

$$P(E) = \int_{\partial E} e^{V(z)} d\mathcal{H}^{n-1}(z), \quad V(E) = \int_E e^{V(z)} dz.$$

**Proposizione 3.9** (*Equazione di Eulero-Lagrange per insiemi isoperimetrici*)

*Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  con bordo di classe almeno  $C^2$ . Supponiamo che  $E$  sia soluzione del problema*

$$\min\{P(E) : V(E) = m\} \quad m > 0$$

*Allora  $E$  risolve l'equazione di Eulero-Lagrange, ossia*

$$H_{\partial E}(z) + \nabla V(z) \cdot \nu_{\partial E}(z) = \text{costante}, \quad (3.4)$$

*dove  $H_{\partial E}$  denota la curvatura media del bordo di  $E$  e  $\nu_{\partial E}$  denota il versore normale esterno (stiamo supponendo di aver deciso un orientamento dell'insieme  $E$ ).*

**Dim.** — Diamo dapprima le linee generali della dimostrazione. Quello che vorremo fare è deformare localmente e in modo regolare il bordo di  $E$  in maniera da ottenere nuovi insiemi aventi lo stesso volume di  $E$ . Fatto questo troveremo un'espressione che, imposta la condizione di minimalità, restituisce l'equazione di Eulero-Lagrange ricercata. Andiamo perciò a scrivere formalmente quanto detto.

Localmente il bordo di  $E$  è del tipo  $\text{Graf}(f)$  con  $f : D \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ossia localmente il bordo di  $E$  è del tipo:

$$\{(x', f(x')) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x' \in D\} \subset \partial E$$

---

Prendo allora  $\Phi \in C_c^1(D)$  e un  $\varepsilon$  piccolo ( $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  opportuno) e definisco la deformazione

$$f_\varepsilon(x') = f(x') + \varepsilon\Phi(x').$$

Avrò perciò insiemi corrispondenti  $E_\varepsilon$ , ottenuti localmente come epigrafico delle funzioni  $f_\varepsilon$ . Devo imporre ora la conservazione del volume degli insiemi  $E_\varepsilon$  rispetto al volume dell'insieme isoperimetrico  $E$ .

Sia  $C = D \times I$  con  $I \subset \mathbb{R}$  intorno opportuno in  $\mathbb{R}$  di  $f_\varepsilon(x')$ ,  $x' \in D$ . Risulterà allora

$$\begin{aligned} V(E) &= \int_E e^{V(x)} dx = \int_{E \setminus C} e^{V(x)} dx + \int_{E \cap C} e^{V(x)} dx, \\ V(E_\varepsilon) &= \int_{E_\varepsilon} e^{V(x)} dx = \int_{E_\varepsilon \setminus C} e^{V(x)} dx + \int_{E_\varepsilon \cap C} e^{V(x)} dx. \end{aligned}$$

Poichè la deformazione del perimetro di  $E$  è solo locale, sappiamo che

$$\int_{E \setminus C} e^{V(x)} dx = \int_{E_\varepsilon \setminus C} e^{V(x)} dx.$$

Analizziamo quindi solo gli integrali ristretti al cilindro. Definiamo la funzione  $\varepsilon \rightarrow A(\varepsilon)$  come

$$A(\varepsilon) = \int_{E_\varepsilon \cap C} e^{V(x)} dx = \int_D \left( \int_{f(x') + \varepsilon\Phi(x')}^h e^{V(x)} dx_n \right) dx'.$$

Imporre la conservazione del volume è equivalente perciò alla richiesta  $A(\varepsilon) \equiv A(0)$ .

Consegue allora che

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} A(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_D \frac{d}{d\varepsilon} \left( \int_{f(x') + \varepsilon\Phi(x')}^h e^{V(x)} dx_n \right) dx' |_{\varepsilon=0} \\ &= - \int_D e^{V(x', f(x') + \varepsilon\Phi(x'))} \Phi(x') dx' |_{\varepsilon=0} \\ &= - \int_D e^{V(x', f(x'))} \Phi(x') dx'. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi come conseguenza della conservazione del volume che

$$\int_D e^{(V(x'), f(x'))} \Phi(x') dx' = 0 \quad \forall \Phi \in C_c^1(D). \quad (3.5)$$

Intuitivamente quello che voglio è che la deformazione locale del perimetro di  $E$  mi aggiunga tanto volume quanto ne tolga, ossia non produca variazioni volumetriche.

### 3. CONDIZIONI NECESSARIE PER INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

Osserviamo quindi che la condizione di minimalità (ossia che  $E$  sia l'insieme isoperimetrico) è equivalente a richiedere che la funzione

$$\theta(\varepsilon) := P(E_\varepsilon)$$

abbia minimo per  $\varepsilon = 0 \forall \Phi$ . Sia quindi

$$\theta(\varepsilon) = \int_D e^{V(x', f_\varepsilon(x'))} \sqrt{1 + |\nabla f_\varepsilon(x')|^2} dx' + \text{cost.} \quad \text{e imponiamo} \quad \frac{\partial \theta(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Quindi ricordando che,  $|\nabla f_\varepsilon|^2 = |\nabla f|^2 + \varepsilon^2 |\nabla \Phi|^2 + 2\varepsilon \nabla f \cdot \nabla \Phi$ , si ottiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} = \int_D e^{V(x', f_\varepsilon(x'))} \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \sqrt{1 + |\nabla f_\varepsilon|^2} + \frac{\varepsilon |\nabla \Phi|^2 + \nabla f \cdot \nabla \Phi}{\sqrt{1 + |\nabla f_\varepsilon|^2}} e^{V(x', f_\varepsilon(x'))} dx',$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_D e^{V(x', f(x'))} \frac{\partial V}{\partial x_n} \Phi(x') \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx' + \int_D \frac{\nabla f \cdot \nabla \Phi}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} e^{V(x', f(x'))} dx'.$$

Calcolando il secondo integrale per parti e ricordando che  $\Phi \in C_c^2(D)$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \int_D \frac{e^{V(x', f(x'))}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \nabla f \cdot \nabla \Phi dx' &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_D \frac{e^{V(x', f(x'))}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx' \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{e^{V(x', f(x'))}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Phi dx' \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} \int_D \frac{\Phi(x') e^V}{(1 + |\nabla f|^2)^{3/2}} \left( (1 + |\nabla f|^2) \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right) - \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i} \right) dx' \\ &= - \int_D e^{V(x', f(x'))} \Phi(x') g(x') dx'. \end{aligned}$$

Quindi otteniamo

$$\int_D e^{V(x', f(x'))} \Phi(x') \left( \frac{\partial V}{\partial x_n} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} - g(x') \right) dx' = 0 \quad \forall \Phi \in C_c^2(D).$$

Ricordando allora il risultato 3.5

$$\int_D e^V \Phi(x') dx' = 0 \quad \forall \Phi \in C_c^1(D),$$

si ha che l'ultima espressione è verificata se e solo se

$$\frac{\partial V}{\partial x_n} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} - g(x') = \text{cost.},$$

dove

$$g(x') = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + |\nabla f|^2)^{3/2}} \left( (1 + |\nabla f|^2) \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right) - \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i} \right)$$

Si ritrova così l'equazione di Eulero-Lagrange. Infatti sviluppando la curvatura media del bordo di  $E$ , e il secondo termine dell'equazione si trova

$$H_{\partial E} = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = \frac{1}{(1 + |\nabla f|^2)^{3/2}} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i} (1 + |\nabla f|^2) - \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i} \right),$$

$$\nabla V(z) \cdot \nu_{\partial E}(z) = -\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_n} \right).$$

□

**Corollario 3.10** (*Equazione di Eulero-Lagrange nel caso di densità gaussiana*)

Sia  $E$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  con bordo  $C^2$  tale che  $E$  è soluzione del problema isoperimetrico  $\lambda(m)$ . Allora  $E$  risolve l'equazione di Eulero-Lagrange, ossia

$$H_E(z) - (x, 0) \cdot \nu_E(z) = \text{costante}, \quad \forall z \in \partial E \quad (3.6)$$

dove  $H_E$  denota la curvatura media del  $\partial E$ , e  $\nu_E$  il vettore esterno normale a  $E$ .

**Dim.** — Basta applicare la Proposizione 3.9 tenendo conto che

$$\nabla(V(z)) = \nabla(e^{-\frac{|x|^2}{2}}) = (-x, 0)$$

.

□

Otteniamo facilmente allora che i cilindri risolvono sempre l'equazione di Eulero-Lagrange.

### 3. CONDIZIONI NECESSARIE PER INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

**Proposizione 3.11** *I cilindri  $K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y| < r\}$ ,  $r > 0$ , sono sempre stazionari per il problema isoperimetrico.*

**Dim.** — Immediata essendo  $H_{\partial E(z)} = \frac{1}{r}$  (la curvatura è nulla secondo tutte le altre direzioni), e  $(x, 0) \cdot \nu_E(z) = 0$ .

□

Osserviamo fin da subito che questa famiglia d'insiemi sarà basilare per la risoluzione del problema isoperimetrico. Vale quindi la pena di studiarli in dettaglio. Vediamo ad esempio che grazie alla Proposizione 3.7 si trova che

$$V_{mix}(K_r) = \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau(s) ds \stackrel{\tau(s)=r}{=} \omega_k r^k,$$
$$P_{mix}(K_r) = \frac{k\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau(s)^{k-1} \sqrt{1 + \tau'(s)^2} ds \stackrel{\tau(s)=r}{=} k\omega_k r^{k-1}.$$

In particolare, se  $k = 1$  allora  $P_{mix}(K_r) = 2$  per ogni  $r > 0$ .

## 4

# Simmetrizzazioni di Steiner e di Ehrhard

In questo capitolo introdurremo due nozioni geometriche, chiamate simmetrizzazioni, che serviranno in seguito per dimostrare l'esistenza, la simmetria e la regolarità degli insiemi isoperimetrici. La prima simmetrizzazione, detta di Steiner, è verticale, ovvero agisce sulle variabili  $y \in \mathbb{R}^k$ . Mentre la simmetrizzazione di Ehrhard è orizzontale, cioè agisce sulle variabili  $x \in \mathbb{R}^h$ . Daremo perciò una caratterizzazione geometrica dei simmetrizzati di un insieme e studieremo il comportamento degli insiemi con perimetro localmente finito (proprietà che abbiamo visto essere peculiare per gli insiemi isoperimetrici) rispetto alle due simmetrizzazioni. Il goal decisivo sarà un risultato che permette di affermare, sotto alcune ipotesi, l'isoperimetria di particolari sezioni d'insiemi.

Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  un insieme boreliano. Definiamo due funzioni Borel misurabili, non-negative su  $\mathbb{R}^h$  ponendo

$$v_E(x) = \mathcal{H}^k(E_x), \quad p_E(x) = \mathcal{H}^{k-1}(\partial^M(E_x)), \quad x \in \mathbb{R}^h.$$

Si ha allora che l'insieme definito da

$$\bar{B} = \{y \in \mathbb{R}^k : \omega_k |y|^k < v_E(x)\}$$

è una palla  $k$ -dimensionale con centro nell'origine. Inoltre si ha

$$\mathcal{H}^k(\bar{B}) = \mathcal{H}^k\left(B\left(0, \left(\frac{v_E(x)}{\omega_k}\right)^{1/k}\right)\right) = v_E(x) = \mathcal{H}^k(E_x).$$

#### 4. SIMMETRIZZAZIONI DI STEINER E DI EHRHARD

---

**Definizione 4.1** Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  un insieme boreliano. Definiamo la simmetrizzazione di Steiner di  $E$  come l'insieme

$$\mathbf{SE} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : \omega_k |y|^k < v_E(x)\}.$$

Troviamo subito un semplice ma importante risultato. Osserviamo infatti che, essendo  $\mathcal{H}^k((\mathbf{SE})_x) = \mathcal{H}^k(E_x)$  e  $(\mathbf{SE})_y = E_y$ , si trova che il volume misto di un insieme  $E$  è uguale al volume misto del suo simmetrizzato:

$$V_{mix}(\mathbf{SE}) = \int_{\mathbf{SE}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{(\mathbf{SE})_y} \left( \int_{(\mathbf{SE})_x} dy \right) e^{-\frac{z^2}{2}} dx = \int_{(E)_y} \mathcal{H}^k((E)_x) e^{-\frac{z^2}{2}} dx = V_{mix}(E).$$

Abbiamo visto quindi che il volume misto è un invariante per la simmetrizzazione di Steiner. Analizziamo ora il comportamento del perimetro misto di un insieme simmetrizzato.

**Lemma 4.2** Se  $E$  è un insieme con perimetro localmente finito, allora  $v_E \in BV_{loc}(\mathbb{R}^h)$  e

$$\begin{aligned} P_{mix}(E) &\geq \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\mathbb{R}^h} \sqrt{p_E(x)^2 + |\nabla v_E(x)|^2} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\mathbb{R}^h} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d|D_S v_E|. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Vediamo ora due corollari che chiariscono il comportamento del simmetrizzato di un insieme.

**Corollario 4.3** Nelle ipotesi del Lemma 4.2 se consideriamo  $E = \mathbf{SE}$  allora in 4.1 si ha un'uguaglianza. Viceversa, se si ha un'uguaglianza allora per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^h$  la sezione  $E_x$  è equivalente a una palla  $k$ -dimensionale.

**Corollario 4.4** Se  $E \subset \mathbb{R}^n$  è un insieme con perimetro localmente finito, allora

$$P_{mix}(\mathbf{SE}) \leq P_{mix}(E). \quad (4.2)$$

Inoltre se si ha l'uguaglianza allora per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^h$  la sezione verticale  $E_x$  è una palla in  $\mathbb{R}^k$ .

**Dim.** — Essendo  $E$  un insieme con perimetro localmente finito basta applicare il Lemma 4.2 e il Corollario 4.3. Ricordiamo inoltre che  $v_{\mathbf{SE}} = v_E$ , mentre, essendo le

palle euclidee insiemi isoperimetrici,  $p_{\mathbf{S}E} \leq p_E$ . Quindi

$$\begin{aligned} (2\pi)^{h/2} P_{mix}(E) &\geq \int_{\mathbb{R}^h} \sqrt{p_E(x)^2 + |\nabla v_E(x)|^2} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx + \int_{\mathbb{R}^h} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d|D_S v_E| \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^h} \sqrt{p_{\mathbf{S}E}(x)^2 + |\nabla v_{\mathbf{S}E}(x)|^2} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx + \int_{\mathbb{R}^h} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d|D_S v_{\mathbf{S}E}| \\ &= (2\pi)^{h/2} P_{mix}(\mathbf{S}E). \end{aligned}$$

Inoltre, se si ha l'uguaglianza allora dev'esserci uguaglianza ovunque, quindi per il Corollario 4.3 si ha che per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^h$  la sezione verticale  $E_x$  è una palla in  $\mathbb{R}^k$ .  $\square$

Passiamo ora all'analisi della simmetrizzazione di Ehrhard. Consideriamo perciò la sezione orizzontale  $E^y$  di un insieme boreliano  $E \subset \mathbb{R}^n$  e definiamo due funzioni Borel misurabili, non-negative

$$v_E(y) = \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{E^y} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx \quad p_E(y) = \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\partial M(E^y)} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mathcal{H}^{h-1}(x), \quad y \in \mathbb{R}^k.$$

Nella simmetrizzazione verticale avevamo rimpiazzato ogni sezione verticale  $E_x$  con una palla  $k$ -dimensionale, ovvero un insieme euclideo isoperimetrico, avente la stessa misura di  $E_x$ . Quello che faremo questa volta sarà rimpiazzare ogni sezione orizzontale  $E^y$  con un semispazio  $h$ -dimensionale, ovvero un insieme gaussiano isoperimetrico, avente la stessa misura di  $E^y$ . Per fare questo notiamo che per ogni  $s \in \mathbb{R}$  la misura gaussiana del semi-spazio

$$\{x \in \mathbb{R}^h : x_1 > s\} \subset \mathbb{R}^h$$

è data da

$$\frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\{x: x_1 > s\}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = \Psi(s),$$

dove abbiamo definito  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  strettamente decrescente e liscia, ponendo

$$\Psi(s) = \frac{1}{2\pi} \int_s^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Dalla continuità si vede che  $\Psi(-\infty) = 1$  e  $\Psi(+\infty) = 0$ .

**Definizione 4.5** *Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  un insieme boreliano. Chiamiamo la simmetrizzazione gaussiana o di Ehrhard di  $E$  l'insieme definito da*

$$\mathbf{G}E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \Psi^{-1}(v_E(y)) \right\}.$$

#### 4. SIMMETRIZZAZIONI DI STEINER E DI EHRHARD

---

Osserviamo che, se nel caso della simmetrizzazione euclidea avevamo deciso di porre nell'origine i centri delle palle, in questo caso decidiamo di porre tutti i semi-spazi ortogonali alla direzione  $x_1$ . Inoltre dalla costruzione si ha, come per il caso della simmetrizzazione verticale, che il volume misto di  $E$  è invariante per simmetrizzazione gaussiana. Infatti da

$$v_E(y) = v_{\mathbf{G}E}(y)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} V_{mix}(\mathbf{G}E) &= \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\mathbf{G}E} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = \int_{(\mathbf{G}E)_x} \left( \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{(\mathbf{G}E)_y} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx \right) dy \\ &= \int_{(E)_x} v_{\mathbf{G}E}(x) dx = \int_{(E)_x} v_E(x) dx = V_{mix}(E). \end{aligned}$$

Analogamente al caso del simmetrizzato verticale, vediamo il comportamento di un insieme sotto la simmetrizzazione orizzontale.

**Lemma 4.6** *Se  $E$  è un insieme con perimetro localmente finito, allora  $v_E \in BV_{loc}(\mathbb{R}^k)$  e*

$$P_{mix}(E) \geq \int_{\mathbb{R}^k} \sqrt{p_E(y)^2 + |\nabla v_E(y)|^2} dy + |D_S v_E|(y). \quad (4.3)$$

**Corollario 4.7** *Sia  $E$  un insieme che soddisfa le ipotesi del Lemma 4.6. Se  $E = \mathbf{G}E$  allora si ha un'uguaglianza in 4.3. Viceversa se si ha l'uguaglianza, allora per quasi ogni  $y \in \mathbb{R}^k$  la sezione  $E^y$  è equivalente a un semi-spazio  $h$ -dimensionale.*

**Corollario 4.8** *Dato  $E$  un insieme con perimetro localmente finito si ha*

$$P_{mix}(\mathbf{G}E) \leq P_{mix}(E).$$

*Inoltre se si ha un'uguaglianza, allora per quasi ogni  $y \in \mathbb{R}^k$  la sezione orizzontale  $E^y$  è un semispazio in  $\mathbb{R}^h$ .*

**Dim.** — Basta applicare il Lemma 4.6 e il Corollario 4.7. Inoltre si ricordi che  $v_{\mathbf{G}E} = v_E$  e che, essendo  $\mathbf{G}E$  un semi-spazio, e quindi un insieme isoperimetrico, si ha  $p_{\mathbf{G}E} \leq p_E$ . Quindi

$$\begin{aligned} P_{mix}(E) &\geq \int_{\mathbb{R}^k} \sqrt{p_E(y)^2 + |\nabla v_E(y)|^2} dy + |D_S v_E|(y) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^k} \sqrt{p_{\mathbf{G}E}(y)^2 + |\nabla v_{\mathbf{G}E}(y)|^2} dy + |D_S v_{\mathbf{G}E}|(y) = P_{mix}(\mathbf{G}E). \end{aligned}$$

Inoltre se si ha l'uguaglianza allora si ha, per il Corollario 4.7, che per quasi ogni  $y \in \mathbb{R}^k$  la sezione  $E^y$  è un semi-spazio.

## 5

# Simmetria degli insiemi isoperimetrici

In questo capitolo proveremo la simmetria degli insiemi isoperimetrici. Dimosteremo cioè che, se l'insieme  $E$  risulta essere isoperimetrico, esiste una funzione  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , crescente non-negativa tale che

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y| < \tau(x_1)\}.$$

Per farlo introdurremo una classe d'insiemi con perimetro localmente finito con particolari proprietà.

Dato  $m > 0$  definiamo la famiglia d'insiemi  $Z_0(m)$  come

$$Z_0(m) = \{E \subset \mathbb{R}^n : E \text{ ha perimetro localmente finito e } V_{mix}(E) = m\}$$

Introduciamo poi una sottofamiglia d'insiemi di  $Z_0(m)$ ,

$$\{Z_i(m)\}_{i=1}^k, X(m), Y(m)$$

verificanti le seguenti inclusioni

$$X(m) \subset Y(m) \subset Z_k(m) \subset Z_{k-1}(m) \subset \cdots \subset Z_1(m) \subset Z_0(m).$$

Diremo che:

(a)  $E \in Z_i(m)$ ,  $1 \leq i \leq k$  se  $E \in Z_0(m)$  ed esistono  $i$  iperpiani ortogonali affini  $H_1, \dots, H_i$  in  $\mathbb{R}^k$ , tale che per ogni  $x \in \mathbb{R}^h$ , la sezione verticale  $E_x$  è simmetrica per

## 5. SIMMETRIA DEGLI INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

riflessione rispetto a ogni iperpiano;

(b)  $E \in Y(m)$ , se  $E \in Z_0(m)$  e esiste un  $y_E \in \mathbb{R}^k$  e una funzione misurabile  $u : \mathbb{R}^h \rightarrow (0, +\infty)$  tale che

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y - y_E| < u(x)\}.$$

(c)  $E \in X(m)$ , se  $E \in Z_0(m)$  e esiste un  $y_E \in \mathbb{R}^k$ ,  $\nu \in \mathbb{S}^{h-1}$  e una funzione crescente  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  tale che

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y - y_E| < \tau(x \cdot \nu)\}.$$

Osserviamo che tali definizioni sono ben poste e verificano effettivamente le inclusioni richieste. Per definizione infatti ogni insieme  $E$  appartenente alla sotto-famiglia, sta in  $Z_0(m)$ . Inoltre si ha

- $X(m) \subset Y(m)$  prendendo  $u = \tau$ ;
- $Y(m) \subset Z_k(m)$  poichè un insieme  $E$  così definito dalla funzione  $u$  risulta essere sicuramente simmetrico e perciò è simmetrico rispetto ad ogni iperpiano in  $\mathbb{R}^k$ ;
- $Z_i(m) \subset Z_{i-1}(m)$  risulta ovvio dalla definizione.

Dimostriamo più avanti che, se un insieme  $E$  risulta essere isoperimetrico con  $V_{mix}(E) = m$ , allora  $E$  è un sottoinsieme di  $X(m)$  e perciò risulta essere simmetrico.

Vediamo ora alcuni risultati necessari alla dimostrazione di quanto appena detto.

**Lemma 5.1** *Se  $\tau \in BV_{loc}(\mathbb{R}, [0, \infty))$  e se*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y| < \tau(x_1)\},$$

*allora  $V_{mix}(E) = \mathcal{V}(\tau)$  e  $P_{mix}(E) = \mathcal{P}(\tau)$  dove*

$$\mathcal{P}(\tau) = \frac{k\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau(s)^{k-1} \sqrt{1 + \tau'(s)^2} ds + \frac{k\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau(s)^{k-1} d|D_S \tau|(s) \quad (5.1)$$

$$\mathcal{V}(\tau) = \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau(s)^k ds. \quad (5.2)$$

**Dim.** — Per quanto riguarda l'espressione per il volume misto la dimostrazione è già stata vista nella Proposizione 3.7. Essendo poi, il simmettrizzato verticale di  $E$  uguale ad  $E$  (in quanto l'insieme è simmetrico) possiamo utilizzare la formula 4.1. Quindi, tenendo conto che  $v_E(x) = \omega_k \tau(x_1)^k$ ,  $p_E(x) = k\omega_k \tau(x_1)^{k-1}$  e usando la formula di cambiamento di variabili per funzioni  $BV$ , si ha

$$\begin{aligned} P_{mix}(E) &= \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\mathbb{R}^h} \sqrt{p_E(x)^2 + |\nabla v_E(x)|^2} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx + \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\mathbb{R}^h} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d|D_S v_E| \\ &= \frac{k\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau(s)^{k-1} \sqrt{1 + \tau'(s)^2} ds + \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau(s)^{k-1} d|D_S \tau|(s) \right) = \mathcal{P}(\tau) \end{aligned}$$

□

**Lemma 5.2** *Se  $E^+$ ,  $E^-$  sono insiemi con perimetro localmente finito in  $\mathbb{R}^n$  che sono simmetrici per riflessione rispetto all'iperpiano  $\{y_k = 0\}$  e se definiamo*

$$E = \{z \in E^+ : y_k > 0\} \cup \{z \in E^- : y_k < 0\}$$

allora

$$P_{mix}(E) \geq \frac{P_{mix}(E^+) + P_{mix}(E^-)}{2}. \quad (5.3)$$

Se inoltre esistono due funzioni Borel misurabili  $u_+$ ,  $u_- : \mathbb{R}^h \rightarrow [0, +\infty)$ , tali che

$$E^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y| < u_+(x)\}, \quad E^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y| < u_-(x)\},$$

allora in 5.3 si ha un'uguaglianza se e solo se

$$E^+ = E^- \subset \mathbb{R}^n \text{ (quando } k > 1\text{);}$$

$$pE^+ = pE^- \subset \mathbb{R}^h \text{ (quando } k = 1\text{),}$$

dove  $pE^+$ ,  $pE^-$  denotano le proiezioni principali su  $\mathbb{R}^h$ .

**Dim.** — Dalla costruzione  $E^+$  è simmetrico rispetto all'iperpiano  $\{y_k = 0\}$ .

Inoltre, essendo  $E^+$  insieme con perimetro localmente finito, si ha che

$\mathcal{H}^{n-1}(\partial^{1/2} E^+ \cap \{y_k = 0\}) = 0$ , e perciò è facile trovare che

$$P_{mix}(E^+) = \frac{2}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\partial^M E^+ \cap \{y_k > 0\}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{2}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\partial^M E^+ \cap \{y_k < 0\}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mathcal{H}^{n-1}.$$

## 5. SIMMETRIA DEGLI INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

E analoghe identità per  $E^-$ .

Tenendo conto che, per come viene definito l'insieme  $E$ ,

$$\partial^{1/2}E^+ \cap \{y_k > 0\} = \partial^{1/2}E \cap \{y_k > 0\}, \quad \partial^{1/2}E^- \cap \{y_k < 0\} = \partial^{1/2}E \cap \{y_k < 0\},$$

concludiamo che

$$\begin{aligned} P_{mix}(E^+) &= \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\partial^M E^+ \cap \{y_k > 0\}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\partial^M E^- \cap \{y_k < 0\}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\partial^M E^+ \cap \{y_k = 0\}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\geq \frac{P_{mix}(E^+) + P_{mix}(E^-)}{2}. \end{aligned}$$

Inoltre si ha l'uguaglianza se e solo se

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial^{1/2}E^+ \cap \{y_k = 0\}) = 0.$$

Assumiamo ora l'esistenza delle due funzioni  $u_+$ ,  $u_-$  e studiamo separatamente i casi  $k = 1$  e  $k > 1$ .

(i) *Caso*  $k = 1$ .

Per ogni  $x \in pE$ , si ha che  $E_x = (-u_-(x), u_+(x))$  e quindi  $(\partial^{1/2}E)_x = \{-u_-(x), u_+(x)\}$  per quasi ogni  $x \in pE$ . Ricordando allora che  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial^{1/2}E^+ \cap \{y_k = 0\}) = 0$  e, per definizione  $u_+, u_- > 0$ , concludiamo che

$$pE^+ = pE^-.$$

(ii) *Caso*  $k > 1$ .

Per quasi ogni  $x \in p(E)$  abbiamo

$$\begin{aligned} (\partial^{1/2}E)_x &= \{y \in \mathbb{R}^k : y_k > 0, |y| = u_+(x)\} \cup \{y \in \mathbb{R}^k : y_k < 0, |y| = u_-(x)\} \\ &\quad \cup \{y \in \mathbb{R}^k : y_k = 0, \min\{u_-(x), u_+(x)\} \leq |y| \leq \max\{u_-(x), u_+(x)\}\}. \end{aligned}$$

Ed essendo

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{H}^{n-1}(\partial^{1/2}E \cap \{y_k = 0\}) = \int_{pE} \mathcal{H}^{k-1}((\partial^{1/2}E)_x \cap \{y_k = 0\}) dx \\ &= \omega_{k-1} \int_{pE} |u_+(x)^k - u_-(x)^k| dx, \end{aligned}$$

concludiamo che  $u_+(x) = u_-(x)$  per quasi ogni  $x \in pE$ .

□

Osserviamo che il caso  $k = 1$  è originale rispetto a  $k > 1$ . Infatti, poichè si richiede che le proiezioni su  $\mathbb{R}^h$  di  $E^+$ ,  $E^-$  coincidano, il fatto che  $E^+$  e  $E^-$  siano differenti non dà in realtà nessun contributo orizzontale al bordo di  $E$  su  $y = 0$ . Questo differisce da quanto accade nel caso  $k > 1$ . Infatti quando le due differenti parti del bordo s'incontrano generano un'altro pezzo di frontiera su  $\{y_k = 0\}$ .

Siamo pronti per dimostrare la simmetria degli insiemi isoperimetrici.

**Proposizione 5.3** *Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  un insieme isoperimetrico. Allora esiste una funzione  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  crescente tale che l'insieme  $E$  risulta essere*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y| < \tau(x_1)\}.$$

**Dim.** — La dimostrazione si dividerà in quattro passaggi.

(i) *Se  $E \in Y(m)$  è un insieme isoperimetrico, allora  $E \in X(m)$ .*

Poichè  $E \in Y(m)$  si ha che, sotto una traslazione verticale

$$E = \{x \in \mathbb{R}^h : |y| < u(x)\},$$

per qualche funzione misurabile  $u : \mathbb{R}^h \rightarrow [0, \infty)$ . Poichè per 4.1  $P_{mix}(\mathbf{G}E) \leq P_{mix}(E)$  e stiamo assumendo  $E$  isoperimetrico, si avrà  $P_{mix}(\mathbf{G}E) = P_{mix}(E)$ . Inoltre si ha che per quasi ogni  $y \in \mathbb{R}^k$  la sezione orizzontale  $E^y$  è un semi-spazio in  $\mathbb{R}^h$ . Più precisamente esistono due funzioni  $\nu : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{S}^{h-1}$  e  $\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow [-\infty, \infty]$  tali che

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^h : x \cdot \nu(y) > \xi(y)\} \quad \text{per q.o. } y \in \mathbb{R}^k.$$

Si ha inoltre che

$$(x, y) \in E \implies (x, \bar{y}) \in E, \quad \forall |\bar{y}| \leq |y|,$$

cioè

$$|\bar{y}| \leq |y| \implies E^y \subseteq E^{\bar{y}}.$$

Poichè un'inclusione tra due semi-spazi non vuoti può sussistere se e solo se i due semi-spazi sono paralleli, deduciamo l'esistenza di  $\nu \in \mathbb{S}^{h-1}$  tale che  $\nu(y) = \nu$  per q.o.  $y \in \mathbb{R}^k$ . Quindi

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^h : x \cdot \nu > \xi(y)\} \quad \text{per q.o. } y \in \mathbb{R}^k.$$

## 5. SIMMETRIA DEGLI INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

Deduciamo allora che  $u(x) = \tau(x \cdot \nu)$  per qualche funzione misurabile  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ . Per far vedere che  $\tau$  è crescente è sufficiente far vedere che, se  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^h$  tali che  $\bar{x} \cdot \nu \geq x \cdot \nu$ , allora per q.o.  $y \in \mathbb{R}^k$  si ha

$$(x, y) \in E \iff x \in E^y \iff x \cdot \nu > \xi_y \implies \bar{x} \cdot \nu > \xi_y \iff (\bar{x}, y) \in E.$$

Quindi  $E \in X(m)$ .

(ii) Se  $E \in Z_k(m)$  è un insieme isoperimetrico, allora  $E \in X(m)$ .

Poichè  $E \in Z_k(m)$  possiamo assumere che, sotto una traslazione verticale,

$$(x, y) \in E \iff (x, -y) \in E.$$

Essendo  $E$  isoperimetrico, si ha  $P_{mix}(E) = P_{mix}(SE)$ . E per quanto visto nel Corollario 4.3, per q.o.  $x \in \mathbb{R}^h$  la sezione verticale  $E_x$  di  $E$  è una palla in  $\mathbb{R}^k$ . Se  $E_x$  è una sezione allora il punto  $(x, 0)$  è il centro della palla  $E_x$ . Se  $u(x)$  denota il raggio della palla, abbiamo appena provato che

$$y \in E_x \iff |y| < u(x),$$

per qualche funzione misurabile  $u : \mathbb{R}^h \rightarrow [0, \infty)$ . Quindi  $E \in Y(m)$  e dal passo (i),  $E \in X(m)$ .

(iii) Caso  $k > 1$ .

Sia  $0 \leq i \leq k$ . È sufficiente far vedere che se  $E \in Z_i(m)$  è un insieme isoperimetrico, allora  $E \in X(m)$ .

Lo dimostreremo per induzione su  $i$ . Il caso  $i = k$  è già stato visto nel passo precedente. Sia allora  $0 \leq i \leq k - 1$ , assumiamo vero per  $j$  con  $i < j \leq k$ , e sia  $E \in Z_i(m)$  un insieme isoperimetrico. Denotiamo con  $H_1, \dots, H_i$  gli iperpiani affini ortogonali rispetto ai quali  $E$  è simmetrico per riflessione. Poichè  $i < k$  esiste  $\nu \in \mathbb{S}^{k-1}$  e  $\xi \in \mathbb{R}$  tali che l'iperpiano

$$H_{i+1} = \{y \in \mathbb{R}^k : y \cdot \nu = \xi\},$$

è ortogonale agli iperpiani  $H_1, \dots, H_i$ , e divide  $E$  in due parti di uguale volume misto, diciamo

$$E_1 = \{(x, y) \in E : y \cdot \nu > \xi\} \quad E_2 = \{(x, y) \in E : y \cdot \nu < \xi\},$$

e  $V_{mix}(E_1) = V_{mix}(E_2) = m/2$ .

La riflessione in  $\mathbb{R}^n$  rispetto a  $H_{i+1}$  è data dalla mappa lineare  $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita come

$$R(x, y) = \left( x, y - 2\nu(y \cdot \nu - \xi) \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n.$$

---

Consideriamo infine i due insiemi  $E^+$  e  $E^-$  definiti come

$$E^+ = E_1 \cup R(E_1), \quad E^- = E_2 \cup R(E_2).$$

Per costruzione  $V_{mix}(E^+) = V_{mix}(E^-) = m$  ed entrambi gli insiemi sono simmetrici per riflessione rispetto agli iperpiani  $H_1, \dots, H_i, H_{i+1}$ . In particolare,  $E^+, E^- \in Z_{i+1}(m)$ . Poichè tali insiemi sono simmetrici rispetto all'iperpiano  $H_{i+1}$  dal Lemma 5.2 troviamo che

$$P_{mix}(E) \geq \frac{P_{mix}(E^+) + P_{mix}(E^-)}{2}.$$

Poichè  $E$  è isoperimetrico e  $V_{mix}(E^+) = V_{mix}(E^-) = m$ , deduciamo

$$P_{mix}(E) = \frac{P_{mix}(E^+) + P_{mix}(E^-)}{2}.$$

In particolare entrambi gli insiemi  $E^+, E^-$  sono isoperimetrici in  $Z_{i+1}(m)$ . Per ipotesi induttiva,  $E^+, E^- \in X(m)$ . In particolare,  $E^+, E^- \in Y(m)$  e sempre per il Lemma 5.2, deduciamo che, per  $k > 1$ ,  $E^+ = E^-$ . Questo assicura che  $E$  è equivalente a  $E^+ \in X(m)$ , quindi  $E \in X(m)$ .

(iv) *Caso  $k=1$ .*

In questo caso l'argomento del passo (iii) assicura l'esistenza di due funzioni crescenti  $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  tali che, sotto una rotazione orizzontale, per qualche  $s_0 \in [-\infty, +\infty]$  si ha

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : -\tau_1(x_1) < y < \tau_2(x_1)\},$$

con

$$(s_0, \infty) = \{s \in \mathbb{R} : \tau_1(s) > 0\} = \{s \in \mathbb{R} : \tau_2(s) > 0\},$$

$$V_{mix}(E \cap \{y > 0\}) = V_{mix}(E \cap \{y < 0\}).$$

Quindi  $\mathcal{V}(\tau_1) = \mathcal{V}(\tau_2)$ . Essendo  $k = 1$  vediamo dal Lemma 5.1 che la funzione

$$\tau \rightarrow \mathcal{V}(\tau) = \frac{2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tau(s) e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

è lineare. Quindi se poniamo  $\tau_0 = (\tau_1 + \tau_2)/2$  e definiamo

$$E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y| < \tau_0(x_1)\},$$

allora concludiamo che  $V_{mix}(E) = V_{mix}(E')$ . Troviamo inoltre che

$$P_{mix}(E') = \mathcal{P}(\tau_0) \leq \frac{\mathcal{P}(\tau_1) + \mathcal{P}(\tau_2)}{2} = P_{mix}(E).$$

## 5. SIMMETRIA DEGLI INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

E poichè  $E$  è isoperimetrico con  $V_{mix}(E) = V_{mix}(E')$  dev'essere  $P_{mix}(E') = P_{mix}(E)$ , ovvero  $\mathcal{P}(\tau_0) = \frac{\mathcal{P}(\tau_1) + \mathcal{P}(\tau_2)}{2}$ . Ed essendo  $\tau_1, \tau_2$  localmente assolutamente continue posso affermare che  $\tau_1' = \tau_2'$ . Infine, dall' identità  $\tau_1(s_0) = \tau_2(s_0)$ , concludo che  $\tau_1 = \tau_2$ , ovvero che  $E \in X(m)$ .

□

## 6

# Esistenza degli insiemi isoperimetrici

In questo capitolo dimostreremo l'esistenza degli insiemi isoperimetrici. Per quanto visto nel capitolo precedente se esiste un insieme isoperimetrico, esso dovrà necessariamente appartenere alla famiglia d'insiemi  $X(m)$ , con  $m$  il volume misto.

**Teorema 6.1** *Per ogni  $m > 0$ , esiste un insieme isoperimetrico con volume misto  $m$ .*

**Dim.** — La dimostrazione si dividerà in due passi.

(i) *Se  $E \in X(m)$  minimizza il perimetro tra gli elementi di  $X(m)$  allora  $E$  è isoperimetrico.*

La simmetria degli insiemi isoperimetrici assicura che

$$\inf\{P_{mix}(E) : E \in X(m)\} \leq \inf\{P_{mix}(F) : V_{mix}(F) = m\}.$$

Per far vedere questa disuguaglianza basta prendere un insieme con perimetro localmente finito  $F \subset \mathbb{R}^n$  con  $V_{mix}(F) = m$ , e porre  $E = \mathbf{S}GF$ , ovvero il simmetrizzato verticale del simmetrizzato orizzontale di  $F$ . Chiaramente si ha  $V_{mix}(E) = V_{mix}(\mathbf{G}F) = V_{mix}(F) = m$  e  $P_{mix}(E) \leq P_{mix}(\mathbf{G}F) \leq P_{mix}(F)$ . Quindi basta dimostrare che  $E \in X(m)$ . Dalla definizione si ha

$$(\mathbf{G}F)_x = \{y \in \mathbb{R}^h : x_1 > \Psi^{-1}(v_F(y))\},$$

in particolare, se  $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^h$  con  $x_1 < \tilde{x}_1$ , allora  $(\mathbf{G}F)_x \subset (\mathbf{G}F)_{\tilde{x}}$ .

Quindi la funzione  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  definita da

$$\tau(s) = \left( \frac{\mathcal{H}^k((\mathbf{G}F)_{se_1})}{\omega_k} \right)^{1/k}, \quad s \in \mathbb{R}$$

## 6. ESISTENZA DEGLI INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

è crescente. Infine, essendo per definizione

$$E = \mathbf{SGF} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : \omega_k |y|^k < \mathcal{H}^k((\mathbf{GF})_x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y| < \tau(x_1)\},$$

concludiamo che  $E \in X(m)$ .

(ii) *Esistenza degli insiemi isoperimetrici in  $X(m)$ .*

Grazie al passo (i) bisogna solo far vedere che esiste un insieme che minimizza il perimetro misto nella classe degli insiemi  $X(m)$ . Dal Lemma 5.1 si deve perciò dimostrare che il problema

$$\inf\{\mathcal{P}(\tau) : \tau \text{ è crescente}, \tau \geq 0, \mathcal{V}(\tau) = m\},$$

ammette un minimo  $\tau_0$ . Sappiamo che esiste una successione minimizzante, ovvero esiste  $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , con  $\tau_i$  crescenti, non negative e  $\mathcal{V}(\tau_i) = m$ , e tali che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\tau_i) = \inf\{\mathcal{P}(\tau) : \tau \text{ è crescente}, \tau \geq 0, \mathcal{V}(\tau) = m\}.$$

Possiamo direttamente assumere che  $\tau_i \in C^\infty$  e che sia strettamente crescente nella semiretta  $(\tau_i, \infty) = \{\tau_i > 0\}$ . Per ogni  $M > 0$  si ha

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |D\tau_i|(-M, M) \leq e^{M^2/2} \frac{2\pi}{k\omega_k} \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(\tau_i),$$

quindi esiste una funzione crescente  $\tau_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  tale che, a meno di estrarre una sottosuccessione,  $\tau_i \rightarrow \tau_0$  in  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  e q.o. in  $\mathbb{R}$ . Dalla semicontinuità inferiore si ha che  $\mathcal{P}(\tau_0) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\tau_i)$ . Dal lemma di Fatou si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\tau_0) &= \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau_0(s)^k ds = \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \liminf_i \tau_i(s)^k ds \\ &\leq \liminf_i \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau_i(s)^k ds = m. \end{aligned}$$

Resta quindi da dimostrare che  $\mathcal{V}(\tau_0) = m$ . Per fare questo assumiamo che

$$\mathcal{V}(\tau_0) = m - 2\varepsilon,$$

per qualche  $\varepsilon > 0$ . Consideriamo una successione  $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$  tale che

$$\frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} (\min\{\tau_i(s), r_i\})^k ds = m - \varepsilon, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dimostriamo che  $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = \infty$ . Infatti, se

$$r = \sup_{i \in \mathbb{N}} r_i < \infty,$$

---

allora possiamo applicare il teorema di convergenza dominata e trovare che

$$\begin{aligned} m - \varepsilon &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} (\min\{\tau_i(s), r_i\})^k ds \\ &= \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} (\min\{\tau_0(s), r\})^k ds \leq m - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

arrivando così a una contraddizione. Inoltre  $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i^{-1}(r_i) = \infty$ , infatti

$$m - \varepsilon = \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} (\min\{\tau_i(s), r_i\})^k ds \geq \frac{\omega_k r_i^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau_i^{-1}(r_i)}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds,$$

e poichè  $r_i \rightarrow \infty$  deve essere

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\tau_i^{-1}(r_i)}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = 0,$$

e quindi  $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i^{-1}(r_i) = \infty$ . Infine se poniamo  $M_i = \sup_{\mathbb{R}} \tau_i$ , allora tramite il cambiamento di variabile  $w = \tau_i(s)$  e usando la disuguaglianza

$$\int_s^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt < \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s},$$

troviamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\tau_i) &\geq \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau_i^{-1}(r_i)}^{\infty} \tau_i'(s) \tau_i(s)^{k-1} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \geq \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{r_i}^{M_i} w^{k-1} e^{-\frac{\tau_i^{-1}(w)^2}{2}} dw \\ &\geq \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \tau_i^{-1}(w) \int_{\tau_i^{-1}(w)}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \tau_i^{-1}(r_i) \frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau_i^{-1}(w)}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned}$$

Dalla definizione di  $r_i$ ,

$$\frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau_i^{-1}(w)}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \varepsilon,$$

e, ricordando che  $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i^{-1}(r_i) = \infty$ , si conculde che  $\mathcal{P}(\tau_i) \rightarrow \infty$ , arrivando così a una contraddizione. □

## 6. ESISTENZA DEGLI INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

# 7

## Stazionarietà degli insiemi isoperimetrici

Abbiamo visto che se  $E$  è un insieme isoperimetrico allora all'insieme  $E$  è associata una funzione non negativa, crescente e localmente assolutamente continua tale che

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y| < \tau(x_1)\}.$$

Abbiamo visto inoltre che una condizione necessaria affinché un insieme risulta essere isoperimetrico è che risolva l'equazione di Eulero-Lagrange. In questo capitolo vedremo un'analoga condizione necessaria. Essa è ottenuta per derivazione dell'equazione di Eulero-Lagrange, in termini della funzione  $\tau$ . Ricordiamo allora l'equazione di Eulero-Lagrange: se  $E$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$  con bordo di classe  $C^2$  la condizione di stazionarietà al secondo ordine è equivalente alla richiesta

$$H_E(z) - (x, 0) \cdot \nu_E(z) = \text{costante}, \quad \forall z \in \partial E$$

dove  $H_E$  denota la curvatura media del  $\partial E$ , e  $\nu_E$  il vettore esterno normale a  $E$ .

**Lemma 7.1** (Equazione di stazionarietà)

*Sia  $m > 0$  e sia  $E$  un insieme isoperimetrico con  $V_{\text{mix}}(E) = m$  tale che esiste una funzione  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  crescente, localmente assolutamente continua tale che*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |y| < \tau(x_1)\}.$$

*Sia*

$$s_0 = \inf\{s \in \mathbb{R} : \tau(s) > 0\} \in [-\infty, \infty),$$

## 7. STAZIONARITÀ DEGLI INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

e definiamo due funzioni Borel misurabili  $\sigma : (s_0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  e  $\kappa : (s_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  ponendo

$$\sigma(s) = \frac{\tau'(s)}{\sqrt{1 + \tau'(s)^2}}, \quad s > s_0,$$

$$\kappa(s) = \frac{k-1}{\tau(s)\sqrt{1 + \tau'(s)^2}}, \quad s > s_0.$$

Allora esiste una costante positiva  $\lambda$  tale che  $\sigma$  è una soluzione debole dell'equazione differenziale ordinaria

$$-\sigma' + \kappa + s\sigma = \lambda, \quad (7.1)$$

su  $(s_0, \infty)$ . Inoltre

$$\lambda = \frac{1}{m} \left\{ \left(1 - \frac{1}{k}\right) P_{mix}(E) + \frac{1}{k} \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\partial E} e^{-\frac{|x|^2}{2}} (\nu_E \cdot e_1)^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right\}.$$

In particolare si ha

$$\frac{k-1}{k} \frac{\lambda(m)}{m} \leq \lambda \leq \frac{\lambda(m)}{m}.$$

**Dim.** — Osserviamo innanzitutto che, essendo  $E$  isoperimetrico, la funzione  $\tau$  risulta essere un minimo per il problema variazionale

$$\inf \{ \mathcal{P}(\tau) : \tau \in BV_{loc}(\mathbb{R}; [0, \infty)), \mathcal{V}(\tau) = m \}.$$

Dividiamo la dimostrazione in due passi.

(i) *Derivazione dell'equazione differenziale.*

Sia  $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  con  $\text{spt} \Psi \subset (s_0, \infty)$ . Poichè  $\{\tau > 0\} = (s_0, \infty)$  possiamo definire una funzione test limitata  $\varphi \in W^{1,1}(\mathbb{R}; [0, \infty))$  con  $\text{spt} \varphi \subset (s_0, \infty)$  ponendo

$$\varphi(s) = \frac{e^{\frac{s^2}{2}} \Psi(s)}{\tau(s)^{k-1}} \chi_{(s_0, \infty)}(s)$$

Inoltre l'esistenza di  $\varepsilon > 0$  tale che  $\tau + t\varphi \leq 0$  su  $\mathbb{R}$  per ogni  $|t| < \varepsilon$  è facilmente provata. Per ogni  $|t| < \varepsilon$  definiamo  $\alpha(t) \geq 0$  come soluzione dell'equazione

$$m = \mathcal{V}(\alpha(t)(\tau + t\varphi)),$$

ovvero,

$$\alpha(t)^k \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} (\tau + t\varphi)^k ds = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^k ds.$$

In particolare  $\alpha(t)$  è una funzione liscia, con

$$\alpha(0) = 1, \quad \alpha'(0) = -\frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \varphi ds}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^k ds}.$$

La minimalità di  $\tau$  implica che la funzione

$$\beta(t) = \mathcal{P}(\alpha(t)(\tau + t\varphi)) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \alpha(t)^{k-1} (\tau + t\varphi)^{k-1} \sqrt{1 + \alpha(t)^2 (\tau' + t\varphi')^2} ds, \quad |t| < \varepsilon,$$

ha un minimo in  $t = 0$ . Tenendo conto che  $\alpha(0) = 1$  troviamo che

$$\begin{aligned} 0 = \beta'(0) &= \int_{\mathbb{R}} (k-1) \alpha'(0) e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \sqrt{1 + (\tau')^2} ds + \int_{\mathbb{R}} (k-1) e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-2} \varphi \sqrt{1 + (\tau')^2} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \frac{\alpha'(0) (\tau')^2}{\sqrt{1 + (\tau')^2}} ds + \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \varphi' \sigma ds. \end{aligned}$$

E, ricordando l'espressione per  $\alpha'(0)$ , siamo in grado di raccogliere il primo e il terzo integrale e introdurre un fattore positivo  $\lambda(\tau)$  tale che

$$0 = -\lambda(\tau) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \varphi ds + (k-1) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-2} \varphi \sqrt{1 + (\tau')^2} ds + \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \varphi' \sigma ds.$$

Poichè  $\Psi(s) = e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1}(s) \varphi(s)$  e

$$\Psi'(s) = -s\Psi(s) + e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1}(s) \varphi'(s) + \frac{(k-1)\tau'(s)}{\tau(s)} \Psi(s),$$

concludiamo che

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \left( (k-1) \frac{1 + (\tau'(s))^2}{\tau(s)} - \lambda(\tau) \right) \Psi(s) ds + \int_{\mathbb{R}} \sigma(s) \left( \Psi'(s) + s\Psi(s) - \frac{(k-1)\tau'(s)}{\tau(s)} \Psi(s) \right),$$

cioè

$$\int_{\mathbb{R}} \sigma(s) \Psi'(s) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(s) \left( \lambda - s\sigma(s) - \frac{k-1}{\tau(s) \sqrt{1 + (\tau'(s))^2}} \right) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(s) \left( \lambda - s\sigma(s) - \kappa(s) \right),$$

## 7. STAZIONARITÀ DEGLI INSIEMI ISOPERIMETRICI

---

e quindi concludiamo, ricordando la nozione di derivata debole, che

$$-\sigma'(s) = \lambda - \kappa(s) - s\sigma(s).$$

(ii) *Espressione per la costante  $\lambda(\tau)$ .*

Per quanto visto nel passo precedente, la costante positiva  $\lambda(\tau)$  è stata definita in modo da soddisfare la seguente espressione:

$$-\lambda(\tau) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \varphi = (k-1)\alpha'(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \sqrt{1 + (\tau')^2} + \alpha'(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \frac{(\tau')^2}{\sqrt{1 + (\tau')^2}}.$$

Quindi, dalle espressioni 3.2 e 3.3 per  $\mathcal{P}(\tau)$  e  $\mathcal{V}(\tau)$ , troviamo

$$\begin{aligned} \lambda(\tau) &= (k-1) \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \sqrt{1 + (\tau')^2}}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^k} + \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \frac{(\tau')^2}{\sqrt{1 + (\tau')^2}}}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^k} \\ &= \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{\mathcal{P}(\tau)}{\mathcal{V}(\tau)} + \frac{\frac{k\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \frac{(\tau')^2}{\sqrt{1 + (\tau')^2}}}{k\mathcal{V}(\tau)}. \end{aligned}$$

Poichè

$$(\nu_E \cdot e_1)^2 = \frac{(\tau')^2}{1 + (\tau')^2},$$

applicando lo stesso ragionamento usato nella dimostrazione della Proposizione 3.8 otteniamo

$$\frac{k\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau^{k-1} \frac{(\tau')^2}{\sqrt{1 + (\tau')^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\partial E} e^{-\frac{|x|^2}{2}} (\nu_E \cdot e_1)^2 d\mathcal{H}^{n-1}.$$

In definitiva otteniamo perciò

$$\lambda = \frac{1}{m} \left\{ \left(1 - \frac{1}{k}\right) P_{mix}(E) + \frac{1}{k} \frac{1}{(2\pi)^{h/2}} \int_{\partial E} e^{-\frac{|x|^2}{2}} (\nu_E \cdot e_1)^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right\}.$$

□

## 8

# Funzioni isoperimetriche e insiemi isoperimetrici per $k = 1$

Ricordiamo che stiamo studiando il problema isoperimetrico posto nella forma di ricercare quegli insiemi che risolvono la seguente espressione

$$\lambda(m) = \inf\{P_{mix}(E) : V_{mix}(E) = m\}, \quad m > 0.$$

dove  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$ .

Quello che faremo in questo capitolo sarà analizzare il problema per  $k = 1$ .

Vedremo un importante teorema che afferma l'esistenza di un  $m_0$ , prima del quale  $\lambda(m)$  trova soluzione in una particolare classe d'insiemi e, dopo del quale, ha unicamente soluzione nei cilindri, insiemi che abbiamo già introdotto e parzialmente studiato. Insomma per  $k = 1$ , grazie a questo teorema, possiamo affermare con sicurezza come sono fatti gli insiemi isoperimetrici.

Introduciamo una famiglia di funzioni, dipendenti da un parametro,  $\{\tau_{s_0}\}_{s_0 \in \mathbb{R}}$ ,  $\tau_{s_0} : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$ , definendo

$$\tau_{s_0}(s) = 0 \quad s \leq s_0,$$

$$\tau'_{s_0}(s) = \frac{\zeta(s)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2}} \quad s > s_0,$$

dove  $\zeta : \mathbb{R} \mapsto (0, +\infty)$  è una funzione decrescente definita da

$$\zeta(s) = e^{\frac{s^2}{2}} \int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad s \in \mathbb{R}.$$

## 8. FUNZIONI ISOPERIMETRICHE E INSIEMI ISOPERIMETRICI PER $K = 1$

---

Dimostreremo tra breve che una funzione  $\tau_{s_0}$  così definita è strettamente crescente e strettamente concava in  $[s_0, +\infty)$ .

Dato allora un  $s_0 \in \mathbb{R}$ , definiamo l'insieme

$$E(s_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R} : |y| < \tau_{s_0}(x_1)\}.$$

Possiamo perciò chiamare le corrispondenti nozioni di perimetro misto e di volume misto per un insieme del tipo  $E(s_0)$  come

$$p(s_0) := P_{mix}(E(s_0)) \quad v(s_0) := V_{mix}(E(s_0)).$$

Vedremo più avanti che, definiti i cilindri  $K_r$  e gli insiemi del tipo  $E(s_0)$ , abbiamo completato la caratterizzazione degli insiemi isoperimetrici per il caso  $k = 1$ . Resta perciò solo da studiarli.

**Lemma 8.1** *Sia  $k = 1$  e sia  $E$  un insieme isoperimetrico con*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{h+1} : |y| < \tau(x_1)\},$$

con  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  non negativa, crescente e localmente assolutamente continua. Siano

$$s_0 = \inf\{s \in \mathbb{R} : \tau(s) > 0\} \in [-\infty, \infty),$$

e  $\sigma : (s_0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  Borel-misurabile

$$\sigma(s) = \frac{\tau'(s)}{\sqrt{1 + \tau'(s)^2}}, \quad s > s_0.$$

Allora:

(i) se  $s_0 = -\infty$ , allora  $\tau$  è costante e  $E = K_r$  cilindro per qualche  $r > 0$ ;

(ii) se  $s_0 \in \mathbb{R}$ , allora  $\tau = \tau_{s_0}$  e  $E = E(s_0)$  risolve l'equazione di stazionarietà al secondo ordine 7.1 con

$$\lambda = \frac{1}{\zeta(s_0)}.$$

**Dim.** — (i) Se  $s_0 = -\infty$  allora

$$\mathcal{P}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \sqrt{1 + \tau'(s)^2} ds \geq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \mathcal{P}(r),$$

dove  $r > 0$  è una costante positiva tale che  $\mathcal{V}(r) = \mathcal{V}(\tau)$ . Se  $s_0 = -\infty$ , allora  $\tau > 0$  su  $\mathbb{R}$  e  $\tau$  crescente. Quindi, ricordando che  $E$  è isoperimetrico, dev' essere  $\tau' = 0$  q.o. su  $\mathbb{R}$ , ovvero  $\tau = r$ , ovvero  $E$  è un cilindro.

---

(ii) Se  $s_0 > -\infty$  allora  $(s_0 e_1, 0) \in \partial E$ , infatti per come definito  $s_0$  si ha  $\tau(s_0) = 0$ . Poichè  $k = 1 < 7$ , per la regolarità degli insiemi isoperimetrici,  $\partial E$  è una varietà analitica. In particolare  $\partial E$  ammette un piano tangente in  $(s_0 e_1, 0)$ , che, per simmetria, dev'essere ortogale a  $e_1$ . Quindi dev'essere  $\lim_{s \rightarrow s_0} \tau(s) = +\infty$  e in particolare troviamo  $\sigma(s_0) = 1$ . Troviamo allora, ricordando che  $\kappa(s) = 0$  per  $k = 1$ , che  $\sigma$  è una soluzione debole del problema di Cauchy

$$\begin{cases} -\sigma' + s\sigma = \lambda, & \text{su } (s_0, \infty) \\ \sigma(s_0) = 1 \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione differenziale ordinaria troviamo che

$$\sigma(s) = C e^{\frac{s^2}{2}} + \lambda \zeta(s), \quad s > s_0,$$

per  $C \in \mathbb{R}$ . Infatti per separazioni di variabili troviamo facilmente la soluzione  $C e^{\frac{s^2}{2}}$  dell'equazione omogenea associata, a cui aggiungiamo la soluzione particolare  $\lambda \zeta(s)$ . Poichè sappiamo che  $0 \leq \sigma \leq 1$  e poichè  $\zeta(s) \rightarrow 0$  per  $s \rightarrow +\infty$ , deduciamo che dev'essere  $C = 0$ . Quindi

$$\sigma(s) = \lambda \zeta(s), \quad s > s_0.$$

Dalla condizione al bordo  $\sigma(s_0) = 1$  troviamo  $\lambda = 1/\zeta(s_0)$  e perciò

$$\sigma(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}, \quad s > s_0,$$

e deduciamo immediatamente

$$\tau'(s) = \frac{\zeta(s)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2}}, \quad \forall s > s_0,$$

quindi  $\tau = \tau_{s_0}$ .

□

Studiamo ora alcune importanti proprietà dei funzionali  $p(s_0) = P_{mix}(E_{s_0})$  e  $v(s_0) = V_{mix}(E_{s_0})$ . Intuitivamente si può osservare che se  $s_0$  tende a  $+\infty$  allora, essendo  $\{s \in \mathbb{R} : \tau(s) > 0\} = (s_0, +\infty) \xrightarrow{s_0 \rightarrow +\infty} \emptyset$ , i funzionali  $v$  e  $p$  tendono a 0. Analogamente se  $s_0$  tende a  $-\infty$ , per il Lemma 8.1 si ha che l'insieme  $E(s_0)$  si avvicina ad essere un cilindro e quindi il perimetro di  $E$  tende al perimetro di un cilindro che, come abbiamo visto nel precedente capitolo, è costantemente uguale a 2. Ovviamente queste sono solo considerazioni intuitive e poco formali, le cui dimostrazioni sono complesse. Andiamo perciò, da bravi matematici, a verificare formalmente quanto appena detto e a dimostrare altre proprietà dei funzionali  $p$  e  $v$ .

## 8. FUNZIONI ISOPERIMETRICHE E INSIEMI ISOPERIMETRICI PER $K = 1$

---

**Definizione 8.2** Definiamo la funzione  $M : \mathbb{R} \rightarrow (0, \sqrt{2\pi})$ , ponendo

$$M(s) = \int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ovviamente  $M$  è strettamente decrescente, con  $M(-\infty) = \sqrt{2\pi}$  e  $M(+\infty) = 0$ .

Inoltre troviamo un upper bound per  $M$  essendo

$$\int_s^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt < \int_s^{\infty} \frac{t}{s} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{(-e^{-\frac{t^2}{2}})|_s^{\infty}}{s} = \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s}, \quad \forall s > 0. \quad (8.1)$$

Possiamo infine trovare anche un lower bound osservando che

$$M(s) > \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s + (1/s)}, \quad \forall s > 0. \quad (8.2)$$

Infatti denotando con  $F(s) = M(s) - \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s + (1/s)}$ , è facile vedere che

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} F(s) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} > 0, & \lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) &= 0 \\ F'(s) &= -e^{-\frac{s^2}{2}} \left( 2 + s + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) < 0 \quad \forall s > 0. \end{aligned}$$

Quindi  $F(s) > 0$  per ogni  $s > 0$ . Infatti se fosse  $F(s) < 0$  per qualche  $s > 0$  allora, dovendo la funzione tendere a 0 all'infinito, si avrebbe una stretta crescita di  $F$  in un particolare sottoinsieme della semiretta  $s > 0$ .

**Lemma 8.3** (*Proprietà di  $\tau_{s_0}$* ).

Per ogni  $s_0 \in \mathbb{R}$ , la funzione  $\tau_{s_0}$  è strettamente crescente e strettamente concava su  $[s_0, \infty)$  e si ha

$$\lim_{s \rightarrow s_0^+} \tau'_{s_0}(s) = +\infty,$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\tau_{s_0}(s)}{\sqrt{s - s_0}} = \sqrt{\frac{2\zeta(s_0)}{|\zeta'(s_0)|}},$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s\zeta(s_0)\tau'_{s_0}(s) = 1.$$

---

In particolare, per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha

$$\frac{1 - \varepsilon}{\zeta(s_0)} \log(s) \leq \tau_{s_0}(s) \leq \frac{1 + \varepsilon}{\zeta(s_0)} \log(s),$$

per  $s$  grande abbastanza (dipendente solo da  $s_0$  e da  $\varepsilon$ ).

**Dim.** — Vediamo dapprima la stretta crescenza e stretta concavità della funzione  $\tau_{s_0}$  in  $[s_0, \infty)$ :

$$\tau'_{s_0}(s) = \frac{\zeta(s)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2}} > 0 \quad \text{se e solo se} \quad \zeta(s) > 0,$$

$$\tau''_{s_0}(s) = \frac{\zeta(s_0)^2 \zeta'(s)}{(\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2)^{3/2}} < 0 \quad \text{se e solo se} \quad \zeta'(s) < 0.$$

Perciò quello che bisogna fare non è altro che dimostrare la stretta decrescenza della funzione  $\zeta$  ove definita. Vediamo che  $\zeta'$  è strettamente crescente:

$$\zeta'(s) = s\zeta(s) + e^{\frac{s^2}{2}} \left[ e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_s^{+\infty} = s\zeta(s) - 1 \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Quindi se  $s < 0$  la disuguaglianza  $\zeta'(s) < 0$  è banalmente verificata. Sia perciò  $s > 0$ . Dalle espressioni 8.1 e 8.2

$$\frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s + (1/s)} < M(s) < \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s} \quad \forall s > 0$$

si ottiene che

$$\frac{1}{s + \frac{1}{s}} < \zeta(s) < \frac{1}{s} \quad \forall s > 0 \tag{8.3}$$

e perciò

$$\zeta'(s) = s\zeta(s) - 1 < 1 - 1 = 0.$$

Vediamo analogamente la stretta convessità di  $\zeta$ :

$$\zeta''(s) = \zeta(s) + s\zeta'(s) = \zeta(s)(1 + s^2) - s \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Troviamo allora banalmente che  $\zeta''(s) > 0$  se  $s < 0$ , mentre se  $s > 0$  si arriva alla stessa conclusione usando la disuguaglianza:

$$\zeta(s) > \frac{1}{s + \frac{1}{s}}.$$

## 8. FUNZIONI ISOPERIMETRICHE E INSIEMI ISOPERIMETRICI PER $K = 1$

---

Vediamo ora i due limiti: dallo sviluppo in serie di Taylor al secondo ordine

$$\left( \frac{\zeta(s_0)}{\zeta(s_0 + t)} \right)^2 = 1 - \frac{2\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}t + o(t),$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \tau_{s_0}(s) &= \int_{s_0}^s \frac{\zeta(s)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2}} ds = \int_{s_0}^s \frac{1}{\sqrt{\frac{\zeta(s_0)^2}{\zeta(s)^2} - 1}} ds \\ &\stackrel{s=s_0+t}{=} \int_0^{s-s_0} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\zeta(s_0)}{\zeta(s_0+t)}\right)^2 - 1}} dt = \int_0^{s-s_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{-2\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}t + o(t)}} dt \\ &= \sqrt{\frac{\zeta(s_0)}{2|\zeta'(s_0)|}} \int_0^{s-s_0} \frac{dt}{\sqrt{t + o(t)}} \approx \sqrt{\frac{\zeta(s_0)}{2|\zeta'(s_0)|}} 2\sqrt{s-s_0} \end{aligned}$$

e perciò

$$\lim_{s \rightarrow s_0+} \frac{\tau_{s_0}(s)}{\sqrt{s-s_0}} = \sqrt{\frac{2\zeta(s_0)}{|\zeta'(s_0)|}}.$$

Dalle disuguaglianze 8.3

$$\frac{1}{s + \frac{1}{s}} < \zeta(s) < \frac{1}{s} \quad \forall s > 0, \quad (8.4)$$

mandando  $s \rightarrow +\infty$  si ottiene per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 0.$$

Analogamente dalle disuguaglianze

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{s^2}{2}} < \zeta(s) < \sqrt{2\pi} e^{\frac{s^2}{2}}, \quad \forall s < 0$$

si ottiene

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \zeta(s) = +\infty.$$

Ma, grazie alle disuguaglianze appena viste, si ottiene

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^2}{s^2 + 1} \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} s\zeta(s) \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} 1$$

---


$$0 \leq \lim_{s \rightarrow -\infty} \sqrt{2\pi} e^{\frac{s^2}{2}} - \zeta(s) \leq \lim_{s \rightarrow -\infty} \sqrt{2\pi} e^{\frac{s^2}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{s^2}{2}} = 0$$

e perciò si ha

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s\zeta(s) = 1, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \sqrt{2\pi} e^{\frac{s^2}{2}} - \zeta(s) = 0.$$

Infine poichè

$$s\zeta(s_0)\tau'_{s_0}(s) = \frac{s\zeta(s)}{\sqrt{1 - (\zeta(s)/\zeta(s_0))^2}}$$

si deduce

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s\zeta(s_0)\tau'_{s_0}(s) = 1.$$

□

**Lemma 8.4** (*Proprietà di  $v$  e di  $p$* ).

*Le funzioni  $v$  e  $p$  sono analitiche su  $\mathbb{R}$ , con*

$$p(s_0) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} M(s_0), \quad \forall s_0 \in \mathbb{R}, \quad (8.5)$$

$$\lim_{s_0 \rightarrow +\infty} p(s_0) = 0, \quad (8.6)$$

$$\lim_{s_0 \rightarrow -\infty} p(s_0) = 2, \quad (8.7)$$

$$\lim_{s_0 \rightarrow +\infty} v(s_0) = 0, \quad (8.8)$$

$$\lim_{s_0 \rightarrow -\infty} v(s_0) = 0, \quad (8.9)$$

**Dim.** — Troviamo dapprima una formula per  $p$  e  $v$ . Essendo

$$E(s_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |y| < \tau_{s_0}(x_1)\}, \quad \text{con } \tau_{s_0} \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}; [0, \infty)),$$

le formule per  $p$  e  $v$  discendono direttamente dalla Proposizione 3.8:

$$\begin{aligned} p(s_0) &= \frac{k\omega_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau_{s_0}(s)^{k-1} \sqrt{1 + \tau'_{s_0}(s)^2} ds \\ &\stackrel{k=1}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \sqrt{1 + \tau'_{s_0}(s)^2} ds \\ &\stackrel{\tau=0 \text{ se } s < 0}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{s_0}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \sqrt{1 + \tau'_{s_0}(s)^2} ds \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{s_0}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \frac{\zeta(s_0)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2}} ds \end{aligned}$$

## 8. FUNZIONI ISOPERIMETRICHE E INSIEMI ISOPERIMETRICI PER $K = 1$

---

e analogamente

$$\begin{aligned}
 v(s_0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{s_0}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \tau_{s_0}(s) ds \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ (-\tau_{s_0} M(s)) \Big|_{s_0}^{+\infty} + \int_{s_0}^{+\infty} \tau'_{s_0}(s) M(s) ds \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{s_0}^{+\infty} M(s) \frac{\zeta(s)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2}} ds.
 \end{aligned}$$

Dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che, essendo (per 8.1 e 8.2)

$$0 \leq \tau_{s_0}(s) M(s) \leq \tau_{s_0}(s) \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s} \quad \text{e che} \quad \tau_{s_0}(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \log(s)$$

si conclude dal teorema dei carabinieri

$$\tau_{s_0}(s) M(s) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad s \rightarrow \infty.$$

Notiamo subito che, essendo  $\frac{\zeta(s_0)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2}} \geq 1$ , si ha

$$p(s_0) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} M(s_0), \quad \forall s_0 > 0.$$

Il primo punto del lemma è quindi dimostrato.

Cerchiamo ora una stima per la funzione  $\zeta'$ . Come diretta conseguenza della disuguaglianza 8.4

$$\frac{1}{s + \frac{1}{s}} < \zeta(s) < \frac{1}{s} \quad \forall s > 0$$

e dall'uguaglianza  $\zeta'(s) = -1 + s\zeta(s)$ , sappiamo che

$$\zeta'(s) = -1 + s\zeta(s) > -\frac{1}{s^2 + 1} \geq -\frac{1}{s^2}, \quad \zeta'(s) = -1 + s\zeta(s) < 0 < \frac{1}{s^2}$$

quindi otteniamo

$$|\zeta'(s)| \leq \frac{1}{s^2}, \quad \forall s > 0.$$

Abbiamo trovato così una stima per  $\zeta'$ . Vediamo in dettaglio però che  $\zeta'$  non tende a zero molto velocemente, ovvero proviamo che per ogni  $\lambda \in (0, 1)$  esiste  $\varepsilon(\lambda) > 0$  tale che

$$|\zeta'(s)| \leq \frac{\lambda}{6s^2}, \quad \forall s > \frac{1}{\varepsilon(\lambda)}.$$

È sufficiente scegliere  $\varepsilon(\lambda)$  tale che

$$e^{-\frac{w^2}{2}} \leq 1 - \frac{\lambda}{2}w^2, \quad \forall |w| < \varepsilon(\lambda)$$

la cui esistenza è garantita dal fatto che dallo sviluppo in serie di Taylor

$$e^{-\frac{w^2}{2}} = 1 - \frac{w^2}{2} + R_{\text{positivo}}.$$

Infatti si trova che

$$\begin{aligned} |\zeta'(s)| &= 1 - s\zeta(s) = e^{\frac{s^2}{2}}(e^{-\frac{s^2}{2}}) - se^{\frac{s^2}{2}} \int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= e^{\frac{s^2}{2}} \left( e^{-\frac{s^2}{2}} - s \int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\ &= e^{\frac{s^2}{2}} \left( \int_s^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt - s \int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\ &= e^{\frac{s^2}{2}} \left( \int_s^{+\infty} (t-s)e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \stackrel{w=t-s}{=} e^{\frac{s^2}{2}} \int_0^{+\infty} we^{-\frac{(w+s)^2}{2}} dw \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-sw} we^{-\frac{w^2}{2}} dw \geq \int_0^{1/s} (1-sw)we^{-\frac{w^2}{2}} dw \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2s^2}} - s \int_0^{1/s} w^2 e^{-\frac{w^2}{2}} dw. \end{aligned}$$

Integrando ora per parti si ottiene

$$\int_0^{\frac{1}{s}} w^2 e^{-\frac{w^2}{2}} dw = (-we^{-\frac{w^2}{2}}) \Big|_0^{\frac{1}{s}} + \int_0^{\frac{1}{s}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = -\frac{e^{-\frac{1}{2s^2}}}{s} + \int_0^{\frac{1}{s}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw$$

quindi concludiamo che

$$|\zeta'(s)| \geq 1 - s \int_0^{\frac{1}{s}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw \geq 1 + s \int_0^{1/s} -1 + \frac{\lambda}{2}w^2 = \frac{\lambda}{6s^2}.$$

## 8. FUNZIONI ISOPERIMETRICHE E INSIEMI ISOPERIMETRICI PER $K = 1$

---

Vediamo ora i limiti di  $v$  e  $p$  per  $s \rightarrow +\infty$ . Poichè  $\zeta$  è decrescente, per ogni  $s_0 \in \mathbb{R}$  e  $t \in (0, 1)$  esiste un'unica  $F(s_0, t) > s_0$  tale che

$$\zeta(F(s_0, t)) = t\zeta(s_0).$$

Poichè  $\zeta$  è analitica, con  $\zeta' < 0$  ovunque, il teorema d'inversione assicura che  $F(s_0, t)$  è una funzione analitica con

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(s_0, t)}{\partial t} &= \frac{\zeta(s_0)}{\zeta'(F(s_0, t))}, \\ \frac{\partial F(s_0, t)}{\partial s_0} &= \frac{t\zeta'(s_0)}{\zeta'(F(s_0, t))}. \end{aligned}$$

Troviamo allora che

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}}v(s_0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{s_0}^{+\infty} \frac{M(s)\zeta(s)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2}} ds \stackrel{s=F(s_0, t)}{=} \int_0^1 \frac{t\zeta(s_0)M(F(s_0, t))}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - t^2\zeta(s_0)^2}} \frac{\zeta(s_0)}{|\zeta'(F(s_0, t))|} dt \\ &= \zeta(s_0) \int_0^1 \frac{M(F(s_0, t))}{|\zeta'(F(s_0, t))|} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \end{aligned}$$

e analogamente

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}p(s_0) = \zeta(s_0) \int_0^1 \frac{e^{-\frac{F(s_0, t)^2}{2}}}{|\zeta'(F(s_0, t))|} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Da queste espressioni deriva immediatamente l'analicità delle funzioni  $p$  e  $v$ .

Fissiamo ora  $\lambda \in (0, 1)$  e sia  $\varepsilon(\lambda) > 0$  tale che

$$|\zeta'(s)| \leq \frac{\lambda}{6s^2}, \quad \forall s > \frac{1}{\varepsilon(\lambda)},$$

la cui esistenza è stata provata sopra.

Facendo decrescere il valore di  $\varepsilon(\lambda)$ , possiamo assumere che le funzioni  $s \mapsto s^2 e^{-\frac{s^2}{2}}$  e  $s \mapsto s e^{-\frac{s^2}{2}}$  siano decrescenti sulla semiretta  $(\varepsilon(\lambda)^{-1}, \infty)$ .

Se  $s_0 > \varepsilon(\lambda)^{-1}$ , allora dal fatto che  $F(s_0, t) > s_0$ , dalla stima per  $|\zeta'|$  e da  $M(s) < \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s}$  troviamo che

$$\begin{aligned} \frac{M(F(s_0, t))}{|\zeta'(F(s_0, t))|} &\leq \frac{6F(s_0, t)e^{-\frac{F(s_0, t)^2}{2}}}{\lambda} \leq \frac{6s_0 e^{-\frac{s_0^2}{2}}}{\lambda}, \\ \frac{e^{-\frac{F(s_0, t)^2}{2}}}{|\zeta'(6F(s_0, t))|} &\leq \frac{F(s_0, t)^2 e^{-\frac{F(s_0, t)^2}{2}}}{\lambda} \leq \frac{6s_0^2 e^{-\frac{s_0^2}{2}}}{\lambda}, \end{aligned}$$

quindi, usando,  $\frac{1}{s+(1/s)} < \zeta(s) < \frac{1}{s}$  si ottiene

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{2}}v(s_0) &\leq \zeta(s_0) \int_0^1 \frac{6s_0 e^{-\frac{s_0^2}{2}}}{\lambda} \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{6e^{-\frac{s_0^2}{2}}}{\lambda} \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}}, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}p(s_0) &\leq \zeta(s_0) \int_0^1 \frac{6s_0^2 e^{-\frac{s_0^2}{2}}}{\lambda} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{6s_0^2 e^{-\frac{s_0^2}{2}}}{\lambda} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

Si ottengono perciò i limiti cercati mandando  $s_0 \rightarrow +\infty$  e tenendo conto che le funzioni  $p$  e  $v$  sono non-negative.

Vediamo ora il limite di  $p$  per  $s_0 \rightarrow -\infty$ . Poichè  $M(-\infty) = \sqrt{2\pi}$ , è sufficiente far vedere che

$$\limsup_{s_0 \rightarrow -\infty} p(s_0) \leq 2.$$

Infatti dalla disuguaglianza 8.5  $p(s_0) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}}M(s_0)$ , si sa già che

$$\liminf_{s_0 \rightarrow -\infty} p(s_0) \geq 2.$$

Per fare questo notiamo allora che per ogni  $\lambda \in (0, 1)$  si ha

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}p(s_0) \leq \int_{s_0}^{F(s_0, \lambda)} \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{1 - (\zeta(s)/\zeta(s_0))^2} ds + \frac{M(s_0)}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Facendo ora un cambiamento di variabile  $s = F(s_0, t)$  e tenendo conto che, essendo la funzione  $\zeta$  strettamente decrescente e strettamente convessa,  $|\zeta'| = -\zeta'$  è decrescente, troviamo che

$$\begin{aligned}\int_{s_0}^{F(s_0, \lambda)} \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{1 - (\zeta(s)/\zeta(s_0))^2} ds &= \zeta(s_0) \int_{\lambda}^1 \frac{e^{-\frac{F(s_0, t)^2}{2}}}{|\zeta'(F(s_0, t))|\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= M(s_0) \int_{\lambda}^1 \frac{dt}{|\zeta'(F(s_0, t))|\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{M(s_0)}{|\zeta'(F(s_0, \lambda))|} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

ove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disuguaglianza  $F(s_0, t) \leq F(s_0, \lambda)$  per  $t > \lambda$ . Poichè  $M(-\infty) = \sqrt{2\pi}$ ,  $\zeta'(-\infty) = +\infty$ , e  $F(s_0, \lambda) \rightarrow -\infty$  per  $s_0 \rightarrow -\infty$ , concludiamo che

$$\lim_{s_0 \rightarrow -\infty} \int_{s_0}^{F(s_0, \lambda)} \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{1 - (\zeta(s)/\zeta(s_0))^2} ds = 0, \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

## 8. FUNZIONI ISOPERIMETRICHE E INSIEMI ISOPERIMETRICI PER $K = 1$

---

Quindi mandando prima  $s_0 \rightarrow -\infty$  e poi  $\lambda \rightarrow 0^+$  si ottiene il limite cercato.

Proviamo ora l'ultimo limite del lemma. Poichè la funzione  $x \rightarrow (x^2 - 1)^{-1/2}$  è decrescente per  $x > 1$ , troviamo che

$$\int_{s_0+1}^{\infty} M(s) \frac{\zeta(s)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2}} ds \leq \frac{\zeta(s_0+1)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s_0+1)^2}} \int_{s_0+1}^{\infty} M(s) ds.$$

Se  $s_0$  è negativo e grande abbastanza allora dal fatto che  $M(s) < \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s}$  troviamo

$$\begin{aligned} \int_{s_0+1}^{\infty} M(s) ds &= \int_{s_0+1}^1 M(s) ds + \int_1^{+\infty} M(s) ds \\ &\stackrel{|s_0|=-s_0}{\leq} |s_0| \sqrt{2\pi} + \int_1^{\infty} M(s) ds \leq |s_0| \sqrt{2\pi} + \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s} ds \leq C|s_0| \end{aligned}$$

per un'opportuna costante  $C$  indipendente da  $s_0$ . Inoltre dalle disuguaglianze

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{s^2}{2}} < \zeta(s) < \sqrt{2\pi} e^{\frac{s^2}{2}}, \quad \forall s < 0 \quad \text{otteniamo}$$

$$\frac{\zeta(s_0+1)}{\zeta(s_0)} \leq \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{(s_0+1)^2}{2}}}{\sqrt{\pi/2} e^{\frac{s_0^2}{2}}} = 2e^{s_0+\frac{1}{2}} \leq C e^{s_0},$$

fino a crescere il valore di  $C$  e per  $s_0$  negativo e grande abbastanza. Quindi, combinando le ultime due stime trovate, concludiamo che

$$\limsup_{s_0 \rightarrow -\infty} \int_{s_0+1}^{\infty} M(s) \frac{\zeta(s)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2}} ds \leq C \lim_{s_0 \rightarrow -\infty} |s_0| e^{s_0} = 0.$$

Quello che ci resta da fare è perciò far vedere che anche il limite sull'intervallo rimanente è zero. Ovvero dimostriamo che

$$\lim_{s_0 \rightarrow -\infty} \int_{s_0}^{s_0+1} M(s) \frac{\zeta(s)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2}} ds = 0.$$

Dalla definizione di  $\zeta$  e di  $M$  notiamo che, se  $s_0 < s < 0$  si ha

$$\begin{aligned} \left( \frac{\zeta(s_0)}{\zeta(s)} \right)^2 - 1 &= e^{s_0^2 - s^2} \left( \frac{M(s_0)}{M(s)} \right)^2 - 1 \\ &\stackrel{M \text{ decres.}}{\geq} e^{s_0^2 - s^2} - 1 \stackrel{s_0^2 - s^2 < 0}{\geq} s_0^2 - s^2 \\ &= (s - s_0)(-s_0 - s) \geq (s - s_0)|s_0|. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{s_0}^{s_0+1} \frac{M(s)\zeta(s)}{\sqrt{\zeta(s_0)^2 - \zeta(s)^2}} ds \leq \frac{1}{\sqrt{|s_0|}} \int_{s_0}^{s_0+1} \frac{M(s)}{\sqrt{s-s_0}} \leq \sqrt{\frac{2\pi}{|s_0|}} \int_{s_0}^{s_0+1} \frac{ds}{\sqrt{s-s_0}} = 2\sqrt{\frac{2\pi}{|s_0|}}$$

e mandando  $s_0 \rightarrow -\infty$  si ottiene il limite cercato.

Manca ora solo da provare che  $p$  è strettamente decrescente nella semiretta  $[\sqrt{3/2}, \infty)$ . Proviamo dapprima che, come conseguenza delle note disuguaglianze 8.3 per la funzione  $\zeta(s)$ , si ha

$$\zeta(s) < \frac{1}{s + \frac{1}{2s}}, \quad \forall s > \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Infatti, definiamo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$f(s) = M(s) - \frac{2s}{2s^2 + 1} e^{-\frac{s^2}{2}} = \zeta(s) e^{-\frac{s^2}{2}} - \frac{1}{s + \frac{1}{2s}} e^{-\frac{s^2}{2}}, \quad \in \mathbb{R}.$$

Facendo allora la derivata di  $f$  e ricordando che  $\zeta'(s) = -1 + s\zeta(s)$ , otteniamo

$$f'(s) = \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{(1 + 2s^2)^2} (2s^2 - 3) > 0 \quad \forall s \in (\sqrt{3/2}, \infty).$$

Poichè  $f(+\infty) = 0$ , concludiamo che  $f < 0$  sulla semiretta  $((\sqrt{3/2}, \infty)$ . Calcoliamo ora  $p'(s_0)$  dall'espressione precedentemente verificata

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} p(s_0) = \zeta(s_0) \int_0^1 \frac{e^{-\frac{F(s_0, t)^2}{2}}}{|\zeta'(F(s_0, t))| \sqrt{1-t^2}} dt.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} p'(s_0) &= \zeta'(s_0) \int_0^1 \frac{e^{-\frac{F^2}{2}}}{|\zeta'(F)| \sqrt{1-t^2}} dt + \zeta(s_0) \int_0^1 \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{|\zeta'(r)|} \right) \Big|_{r=F} \frac{\partial F}{\partial s_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} p(s_0) + \zeta(s_0) \zeta'(s_0) \int_0^1 \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{|\zeta'(r)|} \right) \Big|_{r=F} \frac{1}{\zeta'(s)} \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}}. \end{aligned}$$

Poichè  $\zeta$  è strettamente decrescente, il primo termine della precedente somma è strettamente negativo per ogni  $s_0 \in \mathbb{R}$ . Tenendo conto che  $F(s_0, t) > s_0$  per ogni  $s_0 \in \mathbb{R}$  e  $t \in (0, 1)$ , dobbiamo far vedere che

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{|\zeta'(r)|} \right) \leq 0, \quad \forall r > \sqrt{3/2}.$$

## 8. FUNZIONI ISOPERIMETRICHE E INSIEMI ISOPERIMETRICI PER $K = 1$

---

Ricordando allora che  $\zeta'(r) = -1 + r\zeta(r)$  e  $\zeta''(r) = (1 + r^2)\zeta(r) - r$ , troviamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{|\zeta'(r)|} \right) &= \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{\zeta'(r)^2} (r\zeta'(r) + \zeta''(r)) = \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{\zeta'(r)^2} ((1 + 2r^2)\zeta(r) - 2r) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \zeta(r) \leq \frac{2r}{1 + 2r^2} \Leftrightarrow r > \sqrt{3/2}. \end{aligned}$$

□

Siamo ora nella posizione di enunciare e dimostrare il più importante risultato per il caso  $k = 1$ .

**Teorema 8.5** (*Funzioni isoperimetriche e insiemi isoperimetrici per  $k = 1$* )

*Sia  $k = 1$ ,  $h \geq 1$ . Allora esiste un  $m_0 > 0$  tale che ogni insieme isoperimetrico  $E$  con volume misto  $m$ , sotto una traslazione verticale e una rotazione orizzontale, soddisfa le seguenti proprietà:*

- (i) se  $m < m_0$ , allora  $E = E(s_0)$ , per qualche  $s_0 \in \mathbb{R}$ ;
- (ii) se  $m = m_0$ , allora  $E = K_r$  con  $r = m_0/\omega_1$ , oppure  $E = E(s_0)$ , per qualche  $s_0 \in \mathbb{R}$ ;
- (iii) se  $m > m_0$ , allora  $E = K_r$  con  $r = m/\omega_1$ .

*Inoltre,  $\Lambda$  è strettamente crescente su  $[0, m_0]$ , è costantemente uguale a 2 su  $[m_0, \infty)$ , ed è strettamente concava su  $(0, m_1)$ , per qualche  $m_1 \in (0, m_0]$ .*

**Dim.** —

*Passo 1-Caratterizzazione degli insiemi isoperimetrici e alcune proprietà di  $\lambda$ .*

Osserviamo innanzitutto alcune elementari proprietà della funzione  $\lambda(m)$ : la funzione isoperimetrica è crescente, continua, e con

$$\lim_{m \rightarrow 0^+} \lambda(m) = 0.$$

Inoltre  $0 \leq \lambda(m) \leq 2$  per ogni  $m > 0$ . Infatti per ogni  $m > 0$  esiste un cilindro con volume misto  $m$  e perciò, dovendo la funzione isoperimetrica minimizzare i perimetri,  $\lambda(m) \leq P_{mix}(K_r) = 2$ . Dimostriamo ora che, se per qualche  $s_0 \in \mathbb{R}$  l'insieme  $E(s_0)$  è isoperimetrico, allora esiste  $\delta \in (0, v(s_0))$  tale che  $\lambda$  è strettamente crescente in  $(v(s_0) - \delta, v(s_0))$ . Infatti in questo caso possiamo definire un insieme di confronto

$$E_\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R} : |y| < \max\{\tau_{s_0}(x_1) - \varepsilon, 0\} \right\}, \quad \varepsilon > 0,$$

che è ottenuto prima "tagliando" una piccola striscia orizzontale da  $E(s_0)$ , e poi "in-collando" insieme i due rimanenti pezzi. È immediato osservare che

$$V_{mix}(E_\varepsilon) < v(s_0), \quad \text{con} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V_{mix}(E_\varepsilon) = v(s_0)$$

e

$$P_{mix}(E_\varepsilon) < p(s_0), \quad \text{con} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P_{mix}(E_\varepsilon) = p(s_0).$$

Infatti dato  $m \in (v(s_0) - \delta, v(s_0))$  per il teorema dei valori intermedi applicato alla funzione continua  $\varepsilon \rightarrow V(E_\varepsilon)$ , esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che  $V_{mix}(E_\varepsilon) = m$  e  $P_{mix}(E_\varepsilon) < p(s_0)$ . Quindi si ottiene  $\lambda(m) \leq p(E_\varepsilon) < p(s_0) = \lambda(v(s_0))$ , per ogni  $m \in (v(s_0) - \delta, v(s_0))$ . Sia ora  $E$  un insieme isoperimetrico con  $V_{mix}(E) = m$ . Dal teorema (1.1) possiamo scrivere l'insieme  $E$ , sotto una traslazione verticale e una rotazione orizzontale, come

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R} : |y| < \tau(x_1) \right\}.$$

Inoltre dal lemma 8.1 possiamo affermare che o la funzione  $\tau$  è costante (e quindi abbiamo corrispondenti cilindri) oppure  $\tau = \tau(s_0)$  per qualche  $s_0 \in \mathbb{R}$ . Nel secondo caso  $\lambda(m) = 2$ , e questo è escluso se  $m$  è abbastanza piccolo, poichè  $\lambda(m) \xrightarrow{m \rightarrow 0^+} 0$ . Possiamo dunque definire

$$m_0 := \sup\{m < 0 : \text{gli insiemi isoperimetrici con volume misto } m \text{ non sono cilindri}\} \in (0, \infty].$$

Dal fatto che  $v(s_0) \xrightarrow{s_0 \rightarrow \pm\infty} 0$  possiamo affermare che l'insieme  $\{v(s_0) : s_0 \in \mathbb{R}\}$  è un intervallo limitato. Otteniamo quindi che  $m_0 < \infty$ .

Dalla costruzione si ha  $\lambda(m) < 2$  per ogni  $m < m_0$ . Infatti se per assurdo esistesse un  $\bar{m} < m_0$  tale che  $\lambda(\bar{m}) = 2$ , allora per ogni  $m \geq \bar{m}$  si avrebbe  $\lambda(m) = 2$ , che è in contraddizione con la stretta crescita di  $\lambda$ . Abbiamo così provato il punto (i) del teorema. In particolare si ottiene che  $\lambda$  è strettamente crescente in  $(0, m_0)$ . Perciò dalla continuità,  $\lambda(m_0) = 2$ . Poichè  $\lambda$  è crescente e  $0 \leq \lambda \leq 2$ , concludiamo che

$$[m_0, \infty) = \{m > 0 : \lambda(m) = 2\}.$$

Da questo e dalla stretta crescita di  $\lambda$  in  $(0, m_0)$ , possiamo concludere che se  $m > m_0$  allora gli unici insiemi isoperimetrici sono i cilindri, e questo prova il punto (iii) del teorema. Per provare il punto (ii) faremo vedere l'esistenza di un  $s_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $E(s_0)$  è isoperimetrico con  $v(s_0) = m_0$ . Sia  $\{m_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  una successione tale che  $m_h \rightarrow m_0^-$ . Per quanto detto sopra, esiste allora una successione  $\{s_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  tale che  $m_h = v(s_h)$  e  $p(s_h) = \lambda(m_h) \rightarrow \lambda(m_0) = 2$ . Poichè  $p(s_h) \rightarrow 2$  e  $p(s_0) \xrightarrow{s_0 \rightarrow +\infty} 0$ ,  $s_h$  è limitata da sopra. Inoltre poichè  $v(s_h) \rightarrow m_0 > 0$  e  $v(s_0) \xrightarrow{s_0 \rightarrow -\infty} 0$ ,  $s_h$  è limitata da sotto. Quindi,

## 8. FUNZIONI ISOPERIMETRICHE E INSIEMI ISOPERIMETRICI PER $K=1$

---

a meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo assumere che  $s_h \rightarrow s_0$  per qualche  $s_0 \in \mathbb{R}$ . Dalla continuità di  $\lambda$  si ha perciò,

$$\lambda(m_0) = \lim_{h \rightarrow \infty} \lambda(m_h) = \lim_{h \rightarrow \infty} p(s_h) = p(s_0),$$

e quindi  $E(s_0)$  è un insieme isoperimetrico con volume  $m_0$ .

*Passo 2-Concavità stretta della funzione  $\lambda$ .*

Faremo vedere che se  $I$  è un intervallo aperto tale che  $\lambda(v(s)) = p(s)$  per ogni  $s \in I$ , e  $p$  è strettamente decrescente su  $I$ , allora  $v$  è strettamente decrescente su  $I$ , e  $\lambda$  è analitica, strettamente crescente e strettamente concava su  $J = \{v(s) : s \in I\}$ , con

$$\lambda'(v(s)) = \frac{1}{\zeta(s)}, \quad \forall s \in I.$$

Infatti, se  $(s_1, s_2) \subset I$ , allora  $\lambda(v(s_1)) = p(s_1) > p(s_2) = \lambda(v(s_2))$ . Siccome  $\lambda$  è crescente dev'essere  $v(s_1) > v(s_2)$ , cioè  $v$  è strettamente decrescente su  $I$ , e in particolare dal teorema di inversione,  $\lambda = p \circ v^{-1}$  è analitica su  $J$ .

Sia  $s \in I$  e definiamo una famiglia di diffeomorfismi ponendo

$$\Phi_t(x) = x + t\varphi(x)N(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

dove  $N$  è un'estensione liscia di  $\nu_{E(s)}$  a un intorno aperto  $A$  del  $\partial E(s)$ , e dove  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n; [0, 1])$  con  $\varphi = 1$  sul  $\partial E(s)$  e con  $\text{spt}\varphi \subset A$ . Si osserva che una tale famiglia di funzioni definiscono effettivamente dei diffeomorfismi su  $\mathbb{R}^n$ . E si vede che

$$V_{mix}(\Phi_t(E(s))) = v(s) + tp(s) + o(t), \quad P_{mix}(\Phi_t(E(s))) = p(s) + t\frac{p'(s)}{\zeta(s)} + o(t).$$

Se ora definiamo

$$f(t) = \Lambda(V_{mix}(\Phi_t(E(s))))), \quad g(t) = P_{mix}(\Phi_t(E(s))),$$

allora abbiamo che  $f(t) \leq g(t)$  in un intorno di  $t = 0$ , con  $f(0) = g(0)$  essendo  $E$  isoperimetrico. Poichè sia  $f$  che  $g$  sono lisce in un intorno di  $t = 0$ , concludiamo che  $f'(0) = g'(0)$ , dove

$$f'(0) = \Lambda'(v(s))p(s), \quad g'(0) = \frac{p'(s)}{\zeta(s)}.$$

Questo prova che

$$\Lambda'(v(s)) = \frac{f'(0)}{p(s)} = \frac{g'(0)}{p(s)} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Quindi

$$\Lambda''(v(s))v'(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)^2} > 0 \quad \forall s \in I,$$

---

quindi, in particolare,  $\Lambda'' < 0$  in  $J$ .

*Passo 3-* Vediamo infine l'esistenza di  $m_1 \in (0, m_0)$  tale che  $\Lambda$  è strettamente concava nella semiretta  $(0, m_1)$ . Sappiamo che  $p$  è strettamente decrescente nella semi-retta  $(\sqrt{3/2}, \infty)$  e che  $p(s) \geq \sqrt{2/\pi}M(s)$  per ogni  $s \in \mathbb{R}$ . Quindi esiste  $\varepsilon_* \in (0, 2)$  tale che

$$I = \{s \in \mathbb{R} : p(s) < \varepsilon_*\}$$

è una semiretta, contenuta in  $(\sqrt{3/2}, \infty)$ . Poichè  $\Lambda$  è crescente e continua, con  $\Lambda(m) = 2$  se e solo se  $m \geq m_0$ , e con  $\Lambda'(0^+) = 0$ , vediamo che

$$\{m > 0 : \Lambda(m) < \varepsilon_*\} = (0, m_1),$$

per qualche  $m_1 \leq m_0$ . Sappiamo inoltre che per ogni  $m \in (0, m_1)$  esiste  $s \in I$  tale che  $v(s) = m$  e  $\Lambda(m) = p(s)$ . Dal passo 2 possiamo quindi affermare la stretta concavità di  $\Lambda$  nell'intervallo  $(0, m_1)$ .

□

Questo Teorema fornisce quindi una classificazione completa degli insiemi isoperimetrici nel caso  $k = 1$ . Inoltre, poichè in  $m_0$  il problema isoperimetrico trova soluzione in entrambi i tipi di insieme, in generale non possiamo affermare l'unicità della soluzione. C'è da osservare infine che non è ancora stata trovata una possibile stima per  $m_0$ .

**8. FUNZIONI ISOPERIMETRICHE E INSIEMI ISOPERIMETRICI  
PER  $K = 1$**

---

# Bibliografia

- [1] F. Maggi, A. Pratelli, N. Fusco *On the isoperimetric problem with gaussian density*. Journal of Functional Analysis, 2011.
- [2] L.C. Evans *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 1992.
- [3] L. Ambrosio, D. Pallara, N. Fusco *Functions of bounded variations and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs, 2000.
- [4] E. De Giorgi *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insime*i* aventi frontiera orientata di misura finita*. Accademia Nazionale dei Lincei, 1958.