UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea triennale

Teorema di Sard e controesempio in dimensione infinita

Candidato:
Michele Stecconi
Matricola 1031423

Relatore:
Roberto Monti

Data di Laurea: 26 Settembre 2014

Introduzione

In questa tesi ci proponiamo di studiare alcuni risultati collegati al Teorema di Sard, in particolare per spazi di dimensione infinita.

Data quindi una funzione differenziabile $f\colon E \to F$ tra due spazi di Banach, di classe $\mathcal{C}^k$, vorremmo studiare l'insieme dei punti in cui il differenziale di Fréchet $Df(x)$ non ha rango massimo. Ci occuperemo in particolare dell'insieme dei punti in cui $Df(x)$ non è suriettivo e della sua immagine tramite f, chiamandoli *insieme dei punti critici* e *insieme dei valori critici*, rispettivamente.

Il Teorema di Sard (Teorema 1.1.4) afferma che se $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ e $k > \max\{0, n-m\}$, allora l'insieme dei valori critici ha misura di Lebesgue $\mathcal{L}^m$ nulla. Questo è un risultato classico, che ha numerose applicazioni, ad esempio nella teoria del grado topologico e nella teoria di Morse.

Nel primo capitolo vedremo una dimostrazione di J. Milnor [1] del Teorema di Sard, per il caso $\mathcal{C}^\infty$. Inoltre richiameremo la nozione di *Misura di Hausdorff* con la quale si è in grado di dare informazioni molto precise, descrivendo anche come interviene la relazione tra n, m e k nella stima dell'insieme dei valori critici. Vedremo infatti (Teorema 1.4.1, senza dimostrazione) che per ogni $\nu < n$, si ha $\mathcal{H}^{\nu+(n-\nu)/k}(\{f(x)\colon \mathrm{rank}(Df(x)) \le \nu\}) = 0$ e che questa stima è ottimale. Infine dimostreremo che nel caso $\mathcal{C}^1$ è sufficiente richiedere che la funzione sia localmente lipschitziana per avere la stessa stima (Teorema 1.4.5).

Nel secondo capitolo mostreremo che il Teorema di Sard non vale se il dominio ha dimensione infinita. Usando una costruzione ideata da S.M. Bates [2], esibiremo infatti una funzione $f\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}^2$ suriettiva e con differenziale mai suriettivo (Teorema 2.1.1).

Nel terzo capitolo daremo condizioni sufficienti affinché l'insieme dei valori critici di una funzione $f\colon E \to F$, di classe $\mathcal{C}^k$, tra due spazi di Banach separabili, sia trascurabile. In questo caso con "trascurabile" intenderemo *di prima categoria.* Introdurremo le nozioni di *funzione di Fredholm* e di *indice* di una funzione di Fredholm, con le quali si è in grado di enunciare il Teorema di Smale (Teorema 3.2.3). Esso affferma che se la funzione f è di Fredholm, di indice opportuno, allora l'insieme dei valori critici è di prima categoria.

Indice

Capitolo 1

Teorema di Sard

In questo capitolo presentiamo il teorema di Sard ([4] Arthur Sard, 1942) e due risultati analoghi che coinvolgono la misura di Hausdorff.

1.1 Introduzione

Definizione 1.1.1. Sia $f\colon N \to M$ una funzione differenziabile tra due varietà differenziabili. Un punto $x \in N$ si dice *punto critico* di f se il differenziale $df_x\colon T_xN \to T_{f(x)}M$ non è suriettivo. Un punto $y \in M$ si dice *valore critico* se è immagine di un punto critico.

Definizione 1.1.2. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m. Un sottoinsieme $E \subseteq M$ si dice *di misura nulla* se per ogni carta (W, φ) di M, l'insieme $\varphi(E \cap W) \subseteq \mathbb{R}^m$ ha misura di Lebesgue nulla.

Teorema 1.1.3 (Sard)**.** *Siano N e M due varietà differenziabili di dimensione $n \geq 0$ e $m \geq 1$ rispettivamente, con N a base numerabile e sia $f\colon N \to M$ una funzione di classe $\mathcal{C}^k$, con $k > max\{0, n-m\}$. Allora l'insieme dei valori critici di f è un insieme di misura nulla in M.*

Una varietà N con dimensione $n = 0$ è un insieme al più numerabile con la topologia discreta. In tal caso per noi tutte le funzioni $f\colon N \to M$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ con differenziale identicamente nullo.

La richiesta "N a base numerabile" assicura l'esistenza di un'atlante numerabile di N, permettendo di passare alle carte e ridursi al seguente enunciato più semplice:

Teorema 1.1.4 (Sard)**.** *Siano $n \geq 0$ e $m \geq 1$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ di classe $\mathcal{C}^k$, con $k > max\{0, n-m\}$. Allora l'insieme dei valori critici di f ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^m$.*

Osservazione 1.1.5. Nel caso $n < m$ il teorema dice che l'immagine di una funzione $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ di classe $\mathcal{C}^1$ è un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^m$.

Daremo una dimostrazione del Teorema 1.1.4 valida solo se la funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$. Per una dimostrazione generale si veda [4]. La seguente dimostrazione è presa da [1].

1.2 Dimostrazione del Teorema 1.1.4 nel caso $\mathcal{C}^\infty$

Citiamo il seguente risultato classico. Per una dimostrazione si veda [6].

Teorema 1.2.1. *Siano E ed F due spazi di Banach, $U \subseteq E$ aperto e $g\colon U \to F$ di classe $\mathcal{C}^j$, con $j \geq 1$. Sia $x_0 \in U$ con differenziale di Fréchet $Df(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$ invertibile. Allora g è* localmente invertibile *in x_0, cioè esiste $V \subseteq U$ intorno aperto di x_0 tale che $g\colon V \to f(V)$ è biiettiva con inversa di classe $\mathcal{C}^j$.*

Nota. Questo teorema è una generalizzazione del noto teorema di inversione locale in $\mathbb{R}^n$. Lo presentiamo ora nella forma più generale perchè sarà necessaria nel Capitolo 3.

Notazione: Indichiamo con $\mathcal{L}^m$ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^m$.

La prova è per induzione su $n \geq 0$, la dimensione del dominio di f. Il caso $n = 0$ è banalmente dimostrato in quanto l'immagine $f(\mathbb{R}^0) = \{\cdot\}$ è un punto ed ha certamente misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^m$, poiché che $m \geq 1$. Dunque supponiamo che l'enunciato sia vero per $n - 1$ e mostriamo che in tal caso rimane vero anche per n.

Sia $C \subset U$ l'insieme dei punti critici di f e per ogni $i \geq 1$ sia

$$C_i := \{x \in U\colon \text{tutte le derivate parziali di ordine} \leq i \text{ di } f \text{ si annullano in } x\}.$$

Si ha che $C \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_i \supseteq \ldots$. Perciò si può concludere la prova mostrando i seguenti tre risultati:

1. $f(C \smallsetminus C_1)$ ha misura nulla;

2. $f(C_i \smallsetminus C_{i+1})$ ha misura nulla per ogni $i \geq 1$;

3. $f(C_i)$ ha misura nulla per i opportunamente grande.

1. Per ogni $x \in C \smallsetminus C_1$, cerchiamo un aperto V_x tale che $x \in V_x \subseteq U$ e $f(V_x \cap (C \smallsetminus C_1))$ abbia misura nulla. Tale condizione è sufficiente a provare la 1.2: sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di aperti di $\mathbb{R}^n$, per ogni $x \in C \smallsetminus C_1$ scegliamo un aperto $B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subseteq V_x$. In questo modo si ha che $C \smallsetminus C_1 \subseteq \bigcup_{x \in U}(B_x \cap (C \smallsetminus C_1))$ ed essendo quest'ultima un'unione al più numerabile, si ottiene:

$$\mathcal{L}^m(f(C \smallsetminus C_1)) \leq \sum_{x \in U} \mathcal{L}^m(f(B_x \cap (C \smallsetminus C_1))) = 0$$

perché $U_x \subseteq V_x$.

Sia quindi $x_0 \in C \smallsetminus C_1 = \{x \in U\colon df_x \text{ è non suriettivo, ma non nullo}\}$, quindi esistono $k \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$ t.c. $\frac{\partial f^k}{\partial x^j}(x_0) \neq 0$. Senza perdere di generalità posso supporre che $k = j = 1$. Usiamo la seguente notazione: $(x^1, x^2, \ldots, x^n) =: (x^1, u)$ con $u \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Definiamo la funzione:

$$g\colon U \to \mathbb{R}^n$$

$$g(x) = (f^1(x), u)$$

avente matrice jacobiana
$$Jg = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
che è invertibile in x_0. Perciò, per il teorema d'inversione locale, esiste $V \subseteq U$ intorno di x_0 tale che $g\colon V \to W := g(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$. Inoltre $V \cap C_1 = \emptyset$ perché $\frac{\partial f^1}{\partial x^1} \neq 0$ in V, perciò $V \cap (C \smallsetminus C_1) = V \cap C$. Ora consideriamo le funzioni:

- $h := f \circ g^{-1}\colon W \to \mathbb{R}^m$. Si noti che $h(w,u) = (w, *)$ per ogni $(w,u) \in W$.
- $h^w\colon W^w := \{u \in \mathbb{R}^{n-1}\colon (w,u) \in W\} \to \mathbb{R}^{m-1}$ definita da $(w, h^w(u)) := h(w,u)$ per ogni $w \in pr_1(W)$.

Siano ora D e D^w gli insiemi dei punti critici di h e h^w, rispettivamente. Osserviamo che:

i. Per ogni $x \in V$, il differenziale df_x non è suriettivo se e solo se $df_x \circ dg^{-1}_{g(x)} = dh_{g(x)}$ non è suriettivo ; ciò implica che $f|_V$ e h hanno gli stessi valori critici in quanto $h(g(x)) = f(x)$.

ii. Per ogni $(w,u) \in W$, si ha $Jh_{(w,u)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & Jh^w_{(u)} \end{pmatrix}$ quindi $(w,u) \in D$ se e solo se $u \in D^w$, ragion per cui $(w,f) \in h(D)$ se e solo se $f \in h^w(D^w)$.

Di conseguenza:
$$\mathcal{L}^m(f(V \cap (C \smallsetminus C_1))) = \mathcal{L}^m(f(V \cap C)) = \mathcal{L}^m(h(D)) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{h(D)} d\mathcal{L}^m = \dots$$
$$\dots = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \chi_{h^w(D^w)} d\mathcal{L}^{m-1} \right) dw = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^{m-1}\big(h^w(D^w)\big) dw = 0.$$
L'ultima uguaglianza deriva dall'ipotesi induttiva, infatti $h^w\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{m-1}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$, quindi la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^{m-1}$ dell'inisieme dei suoi valori critici è nulla.

2. Come nel punto precedente, è sufficiente provare che per ogni $x \in C_i \smallsetminus C_{i+1}$, esiste un aperto V tale che $x \in V \subseteq U$ e $f(V \cap (C_i \smallsetminus C_{i+1}))$ ha misura nulla.

Sia quindi $x_0 \in C_i \smallsetminus C_{i+1}$. Per la definizione di C_i esiste una derivata $\frac{\partial^i f^k}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_i}} := \rho$ tale che $\rho(x) = 0$, ma $\frac{\partial \rho}{\partial x^j}(x) \neq 0$, per un indice $j \in \{1, \dots, n\}$, che supporremo essere 1 per fissare le idee. Usando la notazione di prima, definiamo la funzione:
$$g\colon U \to \mathbb{R}^n$$
$$g(x) = (\rho(x), u)$$
avente matrice jacobiana
$$Jg = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x^1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che è invertibile in x_0. Perciò, per il teorema d'inversione locale, esiste $V \subseteq U$ intorno di x_0 tale che $g\colon V \to W := g(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$. Inoltre $V \cap C_{i+1} = \emptyset$ perchè ρ è una derivata di ordine i e $\frac{\partial \rho}{\partial x^1} \neq 0$ in V, perciò $V \cap (C_i \setminus C_{i+1}) = V \cap C_i$.
Ora consideriamo le funzioni:

- $h := f \circ g^{-1}\colon W \to \mathbb{R}^m$;
- $h^0\colon W^0 := \{u \in \mathbb{R}^{n-1}\colon (0,u) \in W\} \to \mathbb{R}^m$ definita da $h^0(u) := h(0,u)$.

Osserviamo che se $z = (z^1, u) \in V \cap C_i$, allora $g(z) = (\rho(z), u) \in \{0\} \times W^0$, dunque

$$z \in V \cap C_i \implies df_z = 0 \implies dh_{g(z)} = df_z \circ dg^{-1}_{g(z)} = 0 \implies \dots$$

$$\dots \implies dh^0_u = 0 \implies f(z) = h^0(u) \text{ è valore critico di } h^0.$$

Allora $f(V \cap C_i) \subseteq \{\text{valori critici di } h^0\}$, che ha misura nulla per l'ipotesi induttiva, in quanto $h^0\colon W^0 \to \mathbb{R}^m$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e W^0 è un aperto di $\mathbb{R}^{n-1}$.

3. Faremo uso del seguente lemma:

Lemma 1.2.2. *Dato $I \subseteq U$ cubo compatto, esiste $D > 0$ tale che*

$$|f(x+h) - f(x)| \leq D|h|^{i+1}$$

per ogni $x \in I \cap C_i$ e per ogni $h \in I - x := \{h \in \mathbb{R}^n\colon x + h \in I\}$.

Prova. Sia $x \in I \cap C_i$. Fissiamo $v = (v^1, \dots, v^m) \in \mathbb{R}^m$, $h = (h^1, \dots, h^n) \in I - x$ e definiamo $g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ tale che $g(t) = \langle f(x+th), v\rangle$. La funzione è ben definita perchè I è convesso. Usando la formula di Taylor possiamo scrivere:

$$g(t) - g(0) \;=\; g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2} + \dots + g^{(i)}(0)\frac{t^i}{i!} + g^{(i+1)}(\tau)\frac{t^{i+1}}{(i+1)!} \tag{1.1}$$

per qualche $\tau \in (0,t)$. Vale anche la formula

$$g^{(\ell)}(t) = \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} v^k \cdot \frac{\partial f^k}{\partial x^{j_1}, \dots, \partial x^{j_\ell}}(x+th) \cdot h^{j_1} \cdot \dots \cdot h^{j_\ell} \qquad \text{per ogni } \ell \geq 1$$

e ricordando la definizione di C_i si ha $g^{(\ell)}(t) = 0$ per ogni $\ell \leq i$. Perciò la (1.1) in $t = 1$ diventa

$$g(1) - g(0) \;=\; \frac{g^{i+1}(\tau)}{(i+1)!},$$

da cui

$$\langle f(x+h) - f(x), v\rangle = \frac{1}{(i+1)!} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_{i+1}=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} v^k \cdot \frac{\partial f^k}{\partial x^{j_1}, \dots, \partial x^{j_{i+1}}}(x+\tau h) \cdot h^{j_1} \cdot \dots \cdot h^{j_{i+1}} \leq \dots$$

$$\dots \leq |v| \cdot \underbrace{\frac{1}{(i+1)!} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_{i+1}=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x^{j_1}, \dots, \partial x^{j_{i+1}}}(x+\tau h) \right|}_{\clubsuit} \cdot |h|^{i+1}$$

per Cauchy-Schwartz e estraendo $|h|$.

Siccome f è di classe $\mathcal{C}^{i+1}$ (almeno), l'espressione in ♣ è una funzione continua, perciò ha massimo $D > 0$ al variare di $x + \tau h$ nel compatto I. La costante D dipende solo da f e da I, quindi per ogni $x \in I \cap C_i$, $h \in I - x$ si ha

$$\langle f(x+h) - f(x), v\rangle \leq D|v||h|^{i+1}$$

Ponendo $v = f(x+h) - f(x)$ si conclude. □

Nota. Per la validità del Lemma 1.2 basta l'ipotesi "f è di classe $\mathcal{C}^{i+1}$".

Sia ora I un n-cubo in $\mathbb{R}^n$ di lato $\delta > 0$ contenuto in U. Per il Lemma 1.2.2, esiste $D > 0$ che dipende solo da f e da I tale che

$$|f(y) - f(x)| \leq D|y-x|^{i+1} \quad \text{per ogni } x \in I \cap C_i \text{ e } y \in I. \tag{1.2}$$

Preso $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dividiamo I in r^n sottocubi di lato $\frac{\delta}{r}$. Ognuno di questi sottocubi J avrà le seguenti proprietà:

- $diam(J) = \frac{\delta}{r}\sqrt{n}$;
- per la (1.2): $|f(y) - f(x)| \leq D(diam(J))^{i+1}$ per ogni $x \in J \cap C_i$, $y \in J$.

Quindi l'insieme $f(J \cap C_i)$ è contenuto in una palla di raggio $D(\delta\sqrt{n})^{i+1}r^{-(i+1)}$ e centro in $f(x)$ con $x \in J \cap C_i$. Di conseguenza la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^m$ di $f(J \cap C_i)$ è $\leq \mu_i r^{-m(i+1)}$ per qualche costante $\mu_i > 0$. Perciò:

$$\mathcal{L}^m\big(f(I \cap C_i)\big) = \mathcal{L}^m\left(\bigcup_{k=1}^{r^n} f(J_k \cap C_i)\right) \leq \sum_{k=0}^{r^n} \mu_i r^{-m(i+1)} = \mu_i r^{n-m(i+1)}.$$

Quindi se $i > \frac{n}{m} - 1$, cioè se $n - (i+1)m < 0$, facendo tendere $r \to +\infty$ si ha che $f(C_i \cap I)$ ha misura nulla per ogni cubo $I \subseteq U$. Siccome è certamente possibile ricoprire $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con numerabili n-cubi, ne segue che $f(C_i)$ ha misura nulla se $i > \frac{n}{m} - 1$. La dimostrazione è conclusa. □

1.3 Misura di Hausdorff

Ricordiamo la definizione e le proprietà principali della misura di Hausdorff, si fa riferimento al testo [7].

In questa sezione il contesto sarà sempre quello di uno spazio metrico separabile X con metrica d, che indicheremo con (X, d). Inoltre definiamo il *diametro* di un sottoinsieme $E \subseteq X$ come $|E| := \sup\{d(x,y) \colon x, y \in E\}$ se $E \neq \emptyset$, altrimenti $|E| = 0$.

Definizione 1.3.1. Sia $0 \leq s < +\infty$. Fissato $0 < \delta \leq +\infty$, definiamo la funzione $\mathcal{H}^s_\delta \colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^s \colon A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, |E_i| \leq \delta\right\}.$$

Nel caso $s = 0$, usiamo la convenzione: $|A|^0 = 0$ se $A = \emptyset$, $|A|^0 = 1$ altrimenti.

È facile provare che $\mathcal{H}^s_\delta$ è isotòna e subadditiva. Si noti inoltre che $\mathcal{H}^s_\delta(A) \geq \mathcal{H}^s_\epsilon(A)$, se $0 < \delta < \epsilon \leq +\infty$.

Definizione 1.3.2. Sia $0 \leq s < +\infty$. Definiamo $\mathcal{H}^s \colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$,

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

La funzione $\mathcal{H}^s$ è una misura di Borel, cioè tale che tutti i Boreliani siano misurabili.

Teorema 1.3.3. *Per ogni $0 \leq s < +\infty$, la funzione $\mathcal{H}^s$ è una misura sulla σ-algebra dei boreliani $\mathcal{B}(X)$.*

Dimostrazione. Si veda P. Mattila [7, 4.2, 4.3]. □

Definizione 1.3.4. Chiameremo la misura $\mathcal{H}^s \colon \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$, *misura di Hausdorff s-dimensionale.*

Elenchiamo ora alcune proprietà della misura $\mathcal{H}^s$.

Proposizione 1.3.5. *Sia $0 \leq s < \infty$. Valgono le seguenti proprietà:*

i. $\mathcal{H}^0(A) =$ *"Cardinalità di A";*

ii. Se $X = \mathbb{R}^n$, allora $\mathcal{H}^n = c_n \cdot \mathcal{L}^n$, per una costante $c_n > 0$;

iii. Sia $0 \leq t < s$.

- $\mathcal{H}^t(A) < +\infty \implies \mathcal{H}^s(A) = 0$,
- $\mathcal{H}^s(A) > 0 \implies \mathcal{H}^t(A) = +\infty$;

iv. Se $M \subset X$ è una varietà differenziabile di dimensione n con la topologia indotta dalla metrica d di X, allora:

$$\sup\{s \colon \mathcal{H}^s(M) = +\infty\} = n = \inf\{s \colon \mathcal{H}^s(M) = 0\}.$$

v. $\mathcal{H}^s(A) = 0$ se e solo se $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ per qualche $\delta \in (0, +\infty]$.

Dimostrazione. i. Segue dal fatto che $\mathcal{H}^0$ è una misura tale che per ogni $x \in X$, si ha $\mathcal{H}^0_\delta(\{x\}) = 1$, perchè $|\{x\}|^0 = 1$.

ii. P. Mattila [7, 4.3].

iii. Le due affermazioni sono equivalenti. Proviamo la prima. Abbiamo la seguente disuguaglianza.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^{s-t} \cdot |E_i|^t \colon A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, |E_i| \leq \delta\right\} &\leq \\ &\leq \inf\left\{\delta^{s-t} \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^t \colon A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, |E_i| \leq \delta\right\} &= \delta^{s-t}\mathcal{H}^t_\delta(A)\ .\end{aligned}$$

Perciò se $\mathcal{H}^t(A) < +\infty$, si ha

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \lim_{\delta \to 0^+} \delta^{s-t}\mathcal{H}^t_\delta(A) = \mathcal{H}^t(A) \lim_{\delta \to 0^+} \delta^{s-t} = 0\ .$$

iv. P. Mattila [7, 4.8].

v. Ricordiamo che $\mathcal{H}^s(A) = \sup\{\mathcal{H}^s_\delta(A) \colon \delta > 0\}$. Quindi l'implicazione: $\mathcal{H}^s(A) = 0 \implies \mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ per ogni $\delta > 0$ è evidente.

Supponiamo che $\mathcal{H}^s_r(A) = 0$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un'unione $\bigcup_{i=1}^\infty E_i \supseteq A$, con $|E_i| < r$ tale che
$$\sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^s < \varepsilon.$$
Sia $\delta > 0$. Prendendo $\varepsilon = \delta^s$, gli insiemi E_i che si ottengono devono avere diametro $|E_i| < \delta$. Ciò implica che $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ per ogni $0 < \delta \leq +\infty$ e quindi $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

□

Particolarmente interessante è l'analogia con la misura di Lebesgue. Nella prossima sezione vedremo infatti che si può enunciare il Teorema di Sard 1.1.4 in termini della misura di Hausdorff.

1.4 Teoremi di tipo Sard per la misura di Hausdorff

Vale il seguente teorema.

Teorema 1.4.1. *Siano $n > \nu \geq 0$ e $k \geq 1$ interi. Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, X uno spazio normato separabile e sia $f \colon U \to X$ una funzione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$. Sia*
$$C_\nu := \{x \in U \colon \mathit{rank}(Df(x)) \leq \nu\}.$$
Allora
$$\mathcal{H}^{\nu+(n-\nu)/k}\big(f(C_\nu)\big) = 0.$$

Inoltre per ogni $\gamma > \nu + (n-\nu)/k$ esiste una funzione $f \colon U \to X$ differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ tale che $\mathcal{H}^\gamma\big(f(C_\nu)\big) > 0$.

Per una dimostrazione si veda H. Federer [8, pp. 310-318].

Osservazione 1.4.2. Si noti l'ipotesi $n > \nu$. Il Teorema non dice nulla sulla misura dell'insieme $f\big(\{x \in U \colon \mathrm{rank}(Df(x)) = n\}\big)$, i cui elementi sono valori critici nel caso $n < m$. D'altra parte sappiamo che nel caso $X = \mathbb{R}^m$, quell'insieme deve avere misura di Lebesgue nulla in X, per il Teorema di Sard 1.1.4. Questo fatto ci impedisce di considerare il Teorema 1.4.1 una generalizzazione del Teorema di Sard 1.1.4. Vedremo però, con la Proposizione 1.4.3, che nel caso $n \geq m$, il Teorema 1.4.1 implica il Teorema di Sard 1.1.4.

Proposizione 1.4.3. *Nel caso $n \geq m$, il Teorema 1.4.1 implica il Teorema di Sard 1.1.4.*

Dimostrazione. Richiamiamo le ipotesi del teorema di Sard nel caso in questione. Siano $n \geq m \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq n - m + 1$. Sia quindi $C \subseteq U$ l'insieme dei punti critici di f.

Ponendo $\nu = m - 1 < n$, avremo che $C = C_\nu$ e che

$$\nu + (n - \nu)/k = m - 1 + (n - m + 1)/k \leq m \ .$$

Per il Teorema 1.4.1 abbiamo che $\mathcal{H}^{\nu+(n-\nu)/k}\big(f(C)\big) = 0$, da cui per le proprietà 1.3.5.*ii* e 1.3.5.*iii*, otteniamo che $\mathcal{L}^m\big(f(C)\big) = 0$. □

Mostriamo ora un risultato analogo al Teorema di Sard 1.1.4 per funzioni lipschitziane, che generalizza il Teorema 1.4.1, nel caso in cui $X = \mathbb{R}^m$ e f è di classe $\mathcal{C}^1$. A tal proposito ricordiamo alcune proprietà delle funzioni lipschitziane:

Proposizione 1.4.4. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ una funzione lipschitziana, equivalentemente: esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \textit{per ogni } x, y \in A.$$

Valgono le seguenti proprietà:

i. Esiste una funzione $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lipschitziana con costante L, tale che $\widetilde{f}\big|_A = f$;

ii. $\widetilde{f}$ è una funzione continua;

iii. $\widetilde{f}$ è differenziabile $\mathcal{L}^n$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$ e si ha $\|D\widetilde{f}(x)\| \leq L$;

iv. $\mathcal{H}^s(\widetilde{f}(B)) \leq L^s \cdot \mathcal{H}^s(B)$ per ogni $B \subseteq \mathbb{R}^n$ e per ogni $0 \leq s < \infty$.

Dimostrazione. i. Teorema di Kirszbraun, si veda H. Federer [8, 2.10.43].

ii. Ovvio.

iii. Teorema di Rademacher, si veda P. Mattila [7, 7.3.].

iv. Segue dal fatto che $|\widetilde{f}(E)| = \sup\{|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)|\colon x, y \in E\} \leq L|E|$, quindi per ogni $\delta > 0$, si ha

$$\mathcal{H}^s_{L\delta}\big(\widetilde{f}(B)\big) \leq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} L^s|E_i|^s\colon B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, |E_i| \leq \delta\right\} = L^s \cdot \mathcal{H}^s_\delta(B).$$

Perciò

$$\mathcal{H}^s\big(\widetilde{f}(B)\big) = \lim_{L\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta\big(\widetilde{f}(B)\big) \leq \lim_{\delta \to 0^+} L^s \cdot \mathcal{H}^s_\delta(B) = L^s \cdot \mathcal{H}^s(B).$$

□

Teorema 1.4.5. *Siano $n \geq 0$ e $m \geq 1$ interi. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione lipschitziana. Sia*

$$C_{n-1} := \{x\colon Df(x) \textit{ esiste ed ha rango } \leq n - 1\}.$$

Allora

$$\mathcal{H}^n\big(f(C_{n-1})\big) = 0.$$

Per dimostrare il Teorema 1.4.5, ci servirà il seguente lemma di ricoprimento.

Lemma 1.4.6 (Vitali). *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una famiglia di palle chiuse con la proprietà: per ogni $x \in A$ e per ogni $\delta > 0$ esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$ e $|B| < \delta$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$, disgiunte, tali che*

$$\mathcal{L}^n \left(A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \right) = 0$$

e

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n (B_n) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon \ .$$

Per la dimostrazione si veda P. Mattila [7, 2.2].

Dimostrazione del Teorema 1.4.5. Sia $0 < R < \infty$. Definiamo

$$A_R := C_{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leq R\}.$$

Dato $x \in A_R$, definiamo la sottovarietà lineare $W_x := \{f(x) + D(x)h \colon h \in \mathbb{R}^n\}$, che ha quindi dimensione $\dim(W_x) \leq n-1$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per definizione di differenziale sappiamo che esiste $r > 0$ tale che

$$|h| < r \implies |f(x+h) - (f(x) + Df(x)h)| < \varepsilon|h| \implies \mathrm{dist}(f(x+h), W_x) < \varepsilon r.$$

Detta L la costante di Lipschitz della funzione f, avremo

$$f(B_r(x)) \subseteq B_{Lr}(f(x)) \cap \{y \in \mathbb{R}^m \colon \mathrm{dist}(y, W_x) < \varepsilon r\} := Q \ .$$

Notiamo che Q è contenuto in un insieme congruente ad un cilindro del tipo

$$\{x \in \mathbb{R}^\nu \colon |x| < Lr\} \times \{y \in \mathbb{R}^{m-\nu} \colon |y| < \varepsilon r\}, \quad \text{dove } \nu = \dim(W_x).$$

Ricopriamo l'insieme Q con palle di diametro εr. Siccome $\nu \leq n-1$, la quantità minima di palle necessarie per ricoprire Q è proporzionale a $\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{n-1}$. Di conseguenza avremo

$$\mathcal{H}^n_\infty(Q) \leq \gamma \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{n-1} (\varepsilon r)^n$$

per una costante $\gamma > 0$ dipendente solo da n.

A questo punto abbiamo che per ogni $x \in A_R$, esiste $r_x > 0$ tale che

$$\mathcal{H}^n_\infty\Big(f\big(B_{r_x}(x)\big)\Big) \leq \gamma\varepsilon L^{n-1}\ r_x^n \ ,$$

ciò vale anche per ogni $0 < r < r_x$. La famiglia di palle $\{B_r(x) \colon x \in A \text{ e } 0 < r < r_x\}$ soddisfa le ipotesi del Lemma 1.4.6, sia quindi $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di palle, di raggi $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tale che

$$\mathcal{L}^n \left(A_R \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \right) = 0$$

e

$$\mathcal{L}^n\big(B_1(0)\big)\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^n = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(B_i) \leq \mathcal{L}^n(A_R) + \varepsilon \ .$$

Avremo che

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\infty\big(f(A_R)\big) \leq\ & \mathcal{H}^n_\infty\left(f\left(A_R \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right)\right) + \mathcal{H}^n_\infty\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(B_i)\right) \leq \\
\leq\ & L^n c_n \mathcal{L}^n\left(A_R \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) + \gamma\varepsilon L^{n-1}\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^n \leq \\
\leq\ & \frac{\gamma\varepsilon L^{n-1}}{\mathcal{L}^n(B_1(0))}\big(\mathcal{L}^n(A_R)+\varepsilon\big) \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} 0 \ .
\end{aligned}$$

Perciò per la Proposizione 1.3.5.v, $\mathcal{H}^n\big(f(A_R)\big)= 0$ per ogni $0 < R < \infty$. Quindi

$$\mathcal{H}^n\big(f(C_{n-1})\big)\leq \sum_{1\leq k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n\big(f(A_k)\big)= 0 \ .$$

□

Corollario 1.4.7. *Siano $n \geq 0$ e $m \geq 1$ interi. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ una funzione localmente lipschitziana. Sia*

$$C_{n-1} := \{x \in U\colon Df(x) \textit{ esiste ed ha rango } \leq n-1\}.$$

Allora

$$\mathcal{H}^n\big(f(C_{n-1})\big)= 0.$$

Dimostrazione. Sia $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di palle in $\mathbb{R}^n$, tale che $U = \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ e $\overline{B_i} \subset U$. Siccome $\overline{B_i}$ è un compatto contenuto in U, la funzione $f|_{B_i}$ è lipschitziana, chiamiamo L_i la sua costante di Lipschitz e $\widetilde{f_i}$ la sua estensione a $\mathbb{R}^n$.

Sia $x \in B_i$, siccome B_i è aperto, se esiste il differenziale $Df(x)$, allora esiste anche $D\widetilde{f_i}(x) = Df(x)$, quindi

$$\mathcal{H}^n\big(f(C_{n-1}\cap B_i)\big) \leq\ \mathcal{H}^n\Big(\widetilde{f_i}\big(\{x \in \mathbb{R}^n\colon D\widetilde{f_i}(x) \text{ esiste ed ha rango } \leq n-1\}\big)\Big) =\ 0.$$

Ne segue che

$$\mathcal{H}^n\big(f(C_{n-1})\big)\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n\big(f(C_{n-1}\cap B_i)\big)= 0.$$

□

Nota. Se una funzione f è di classe $\mathcal{C}^1$, allora è localmente lipschitziana, ma non è detto che sia globalmente lipschitziana.

Mettiamo in relazione il Corollario 1.4.7 con il Teorema di Sard 1.1.4.

Siano $n \geq 0$ e $m \geq 1$. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ di classe $\mathcal{C}^k$, con $k > max\{0, n-m\}$. Sia poi $S := \big\{x \in U\colon \operatorname{rank}\big(Df(x)\big)< \min\{n, m\}\big\}$. Separiamo i tre casi:

I. $n < m$. Allora l'ipotesi su f è che sia di classe $\mathcal{C}^1$. Il Teorema di Sard 1.1.4 afferma che $\mathcal{L}^m\big(f(U)\big)= 0$. Dal Corollario 1.4.7 sappiamo invece che $\mathcal{H}^n\big(f(S)\big)= 0$. Possiamo dire che questo è il caso in cui il Teorema più interessante è il Teorema 1.4.5.

II. $n > m$. Il Corollario 1.4.7 è banale, in quanto dalle proprietà 1.3.5.*iii* e 1.3.5.*iv* abbiamo che $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^m) = 0$ per ogni $s > m$. Questo è il caso in cui il Teorema di Sard 1.1.4 è più interessante.

III. $n = m$. Entrambi i teoremi affermano la stessa cosa: $\mathcal{L}^m\big(f(S)\big)= 0$ (si ricordi la proprietà 1.3.5.*ii*), infatti in questo caso S coincide con l'insieme dei punti critici. Perciò il Corollario 1.4.7 è più forte del Teorema di Sard 1.1.4, in quanto richiede solo che la funzione f sia localmente lipschitziana.

Capitolo 2

Controesempio in dimensione infinita

Nel Capitolo 1 abbiamo visto che l'insieme dei valori critici di una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ tra due varietà di dimensioni n e m finite, ha misura nulla a patto che $k \geq 1$ sia almeno 1 e maggiore della differenza $n - m$. È quindi ragionevole chiedersi: «Se la differenza $n - m$ fosse infinita e la funzione fosse di classe $\mathcal{C}^\infty$, il teorema sarebbe ancora vero?». In questo capitolo mostriamo che, senza ulteriori ipotesi sulla funzione, la risposta è negativa.

2.1 Introduzione

Vogliamo trovare una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ a valori in $\mathbb{R}^m$ che abbia come dominio uno spazio di dimensione infinita e i cui valori critici costituiscano un insieme di misura di Lebesgue $\mathcal{L}^m$ non nulla. Mostreremo che si può fare molto di più, infatti dimostreremo il seguente teorema. La fonte è S. M. Bates [2]. Lo stesso risultato è stato mostrato precedentemente da I. Kupka [5].

Teorema 2.1.1. *Sia H uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita. Esiste una funzione $F\colon H \to \mathbb{R}^2$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, suriettiva e con differenziale mai suriettivo.*

Osservazione 2.1.2. Nell'articolo [2], Bates afferma che la costruzione che segue si può adattare facilmente al caso in cui H è uno spazio di Banach separabile (non necessariamente di Hilbert) e il codominio è un qualsiasi spazio di dimensione finita.

Indichiamo il prodotto scalare su H con il simbolo $(\cdot,\cdot)\colon H \times H \to \mathbb{R}$. Ricordiamo che ogni spazio di Hilbert separabile ammette una base ortonormale numerabile $\{e_n\}_{n\geq 1}$ tale che

$$v = \sum_{n\geq 1} (v, e_n) e_n \quad \text{e} \quad \|v\|^2 = \sum_{n\geq 1} |(v, e_n)|^2 \qquad \text{per ogni } v \in H.$$

Si ha quindi un'isometria tra H e $\ell^2(\mathbb{N})$. Perciò nel seguito supporremo che $H = \ell^2(\mathbb{N})$.

2.2 Dimostrazione del Teorema 2.1.1

Costruiremo una funzione $f\colon H \to \left[0, \frac{1}{2}\right]^2$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, suriettiva, e con differenziale mai suriettivo, poi useremo tale costruzione per definire la funzione F richiesta.

Iniziamo definendo gli oggetti che useremo per costruire la funzione f.

2.2.1 Definizioni

1. Per ogni $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in H$ si ha $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Scriveremo la parte frazionaria di α_n in base 5. Esistono uniche (escludendo le sequenze con 4 periodico): la parte intera $[\alpha_n] \in \mathbb{Z}$ e le cifre $(\alpha_{n,m})_{m\geq 1} \subseteq \{0,1,2,3,4\}$ tali che

$$\alpha_n = [\alpha_n] + \sum_{m\geq 1} \frac{\alpha_{n,m}}{5^m} \qquad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Sono le cifre della rappresentazione in base 5 della parte frazionaria di α_n. Chiameremo $m(\alpha)$ la matrice definita dalla seguente formula

$$m(\alpha)_{n,m} := (\alpha_{n,m+n}) \quad \text{per ogni } n, m \geq 1, \tag{2.1}$$

che avrà quindi entrate nell'insieme $\{0,1,2,3,4\}$.

2. Chiameremo $M_k := M_{k\times k}(\{1,3\})$ l'insieme delle matrici di ordine k con entrate in $\{1,3\}$ e $M := \cup_{k\geq 1} M_k$. Indicheremo gli elementi di M_k con il pedice k. Definiamo una relazione d'ordine parziale su M nel seguente modo:

$$m_k \prec m'_l \iff k \leq l \ \text{ e } \ m'_l = \begin{pmatrix} m_k & * \\ * & * \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } m_k, m'_l \in M.$$

Inoltre, per ogni $\alpha \in H$ e $m_k \in M$, diremo che $m_k \prec m(\alpha)$ se vale la relazione analoga tra le matrici m_k e $m(\alpha)$.

3. Per ogni matrice $m_k \in M$ definiamo il sottoinsieme $B(m_k) \subset H$

$$B(m_k) := \{\alpha = (\alpha_i)_{i\geq 1} \in H\colon \ [5^i \alpha_i] = 0 \text{ per ogni } i = 1,\dots,k \ \text{ e } \ m_k \prec m(\alpha)\}.$$

Chiameremo $B(m_k)$ il *cilindro su* m_k. Gli elementi dell'insieme $B(m_k)$ sono tutte e sole le successioni $(\alpha_i)_{i\geq 1} \in H$ le cui coordinate α_i per $i = 1,\dots,k$ hanno parte intera $[\alpha_i] = 0$ e come prime $k+i$ cifre della propria rappresentazione in base 5, hanno le cifre della i-esima riga della matrice m_k precedute da i zeri.

Esempio 2.2.1. Se $k = 3$ e $m_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ allora si ha

$$B(m_k) = \left\{ \alpha \in H\colon \begin{array}{l} \alpha_1 = 0{,}0131 * \dots * \dots \\ \alpha_2 = 0{,}00111 * \dots * \dots \\ \alpha_3 = 0{,}000331 * \dots * \dots \text{ in base 5} \\ \alpha_4 = *,* \dots * \dots \\ \quad\vdots \end{array} \right\}$$

Osservazione 2.2.2. Se $k \leq l$, allora $B(m_k) \cap B(m'_l) \neq \emptyset$ se e solo se $m_k \prec m'_l$ se e solo se $B(m_k) \supseteq B(m'_l)$.

Sia poi

$$\Lambda := \{\alpha \in H \colon \alpha \in B(m_k) \text{ per infiniti } m_k \in M\}.$$

Definiremo la funzione f sull'insieme Λ, per poi estenderla su tutto H.

Osservazione 2.2.3. Per ogni catena ordinata (da $\prec$) di matrici $(m_k)_{k\geq 1}$ esiste una unica successione reale $\lambda = (\lambda_i)_{i\geq 1}$ che soddisfa le condizioni:

$$[5^i \lambda_i] = 0 \quad \text{per ogni } i = 1, \ldots, k \quad e \quad m_k \prec m(\lambda)$$

per ogni $k \geq 1$ e in tal caso si ha $\lambda_i < 5^{-i}$ per ogni $i \geq 1$. Perciò $\lambda \in H$. Quindi $\Lambda \neq \emptyset$, anzi è possibile associare ad ogni catena di matrici, un elemento di Λ. Ciò spiega la definizione data in (2.1).

Per chiarire le idee, diamo ora una descrizione equivalente degli insiemi $B(m_k)$. Dati $c_1, \ldots, c_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, definiamo l'intervallo:

$$I(c_1, \ldots, c_k) := \{x \in [0, 1] \colon \ x \text{ si scrive in base 5 come: } 0, c_1 \ldots c_k * \ldots * \ldots\}.$$

In altri termini

$$I(c_1, \ldots, c_k) := \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{5^j} \ , \ \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{5^j} + 5^{-k} \right)$$

è un intervallo di ampiezza 5^{-k}.

Siano $m_k(i, j)$ con $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ le entrate della matrice m_k. Chiamiamo $I(m_k(i, \cdot))$ l'intervallo di ampiezza $5^{-(k+i)}$ definito da

$$I(m_k(i, \cdot)) := I\Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i \text{ volte}}, m_k(i, 1), \ldots, m_k(i, k)\Big).$$

Allora avremo

$$B(m_k) = \Big\{ (\alpha_i)_{i\geq 1} \in H \colon \alpha_i \in I(m_k(i, \cdot)) \quad \text{per ogni } i = 1, \ldots, k \Big\}.$$

4. Sia $R \subset \mathbb{R}^2$ un quadrato di lato $\frac{1}{2}$. Questo insieme sarà l'immagine della funzione f.

Tasselliamo l'insieme R in triangoli nel modo seguente. Tracciando una diagonale, dividiamo R in due triangoli rettangoli congruenti, che dividiamo ulteriormente in altri due triangoli rettangoli congruenti più piccoli, per un totale di 4. Ripetendo iterativamente (come in figura 1) si trova che al passo i si avrà tassellato R in 2^i triangoli rettangoli isosceli chiusi di ipotenusa $\frac{1}{(\sqrt{2})^i}$.

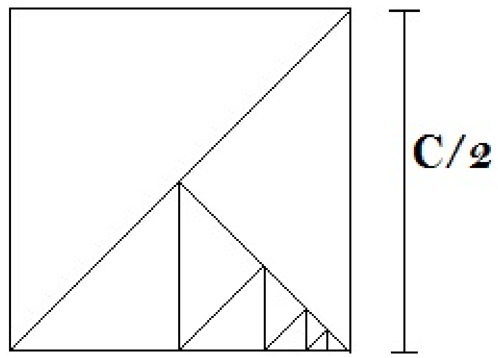

Figura 1.

Notiamo ora che, fissato $k \geq 1$, l'insieme M_k contiene esattamente 2^{k^2} elementi, quindi possiamo definire una biiezione tra M_k e l'insieme dei triangoli della tassellazione al passo k^2. Indichiamo il triangolo corrispondente alla matrice m_k con il simbolo $R(m_k)$. Possiamo inoltre fare in modo che la corrispondenza sia tale che se $m_k \prec m'_l$, allora $R(m_k) \supseteq R(m'_l)$.

5. Definiamo la funzione $f\colon \Lambda \to R$ nel seguente modo.

Sia $\lambda \in \Lambda$, per definizione esistono infinite matrici $m_k \in M$, tali che $\lambda \in B(m_k)$, le quali per l'Osservazione 2.2.2 devono essere tutte confrontabili tra loro secondo la relazione $\prec$, perciò costituiscono una catena $(m_k)_{k\geq 1}$ crescente per $\prec$. Di conseguenza i corrispondenti triangoli $\big(R(m_k)\big)_{k\geq 1}$ formano una successione decrescente per l'inclusione. Ricordando che i triangoli $R(m_k)$ sono chiusi e che

$$diam\big(R(m_k)\big) = \text{ ipotenusa } = \frac{1}{(\sqrt{2})^{k^2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

avremo che esiste $p \in R$ per cui vale

$$\bigcap_{k\geq 1} R(m_k) = \{p\}.$$

Poniamo $f(\lambda) = p$.

La funzione così definita è suriettiva, infatti per ogni $p \in R$ si può scegliere (in modo non unico) una successione di matrici $(m_k)_{k\geq 1}$ tale che $p \in R(m_k)$ e individuare un elemento $\lambda \in \Lambda$ con la formula $\{\lambda\} = \bigcap_{k\geq 1} B(m_k)$, si avrà allora che $f(\lambda) = p$.

2.2.2 Estensione di f

Ora estendiamo la funzione f in modo che sia definita su tutto H.

1. Sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ tale che

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 & \text{per ogni } x \notin \left(-\frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{5}\right) \\ \varphi(x) = 1 & \text{per ogni } x \text{ in un intorno aperto di } [0,1] \end{cases}$$

Sia $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a \neq b$, definiamo $\varphi_I\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, con $\varphi_I(x) = \varphi(\frac{x-a}{b-a})$. Infine, data $m_k \in M$ definiamo

$$\chi_{m_k}\colon H \to [0,1]$$

$$\chi_{m_k}(\alpha) := \prod_{i=1}^{k} \varphi_{I(m_k(i,\cdot))}(\alpha_i).$$

Osservazione 2.2.4. (a) $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \implies \chi_{m_k} \in \mathcal{C}^\infty(H)$ per ogni $m_k \in M$;

(b) $\chi_{m_k} \equiv 1$ in tutto un intorno aperto di $B(m_k)$;

(c) Per ogni $m_k \neq m'_k \in M_k$ esistono $U \supset supp(\chi_{m_k})$, $U' \supset supp(\chi_{m'_k})$ aperti in H, t.c. $U \cap U' = \emptyset$;

(d) $supp(\chi_{m_k}) \supset B(m_k) \supset supp(\chi_{m'_l}) \quad \forall m_k \precneqq m'_l \in M$.

2. Definiamo ora una partizione di H.
Siano

$$H_0 := H - \big(B\,(1) \cup B\,(3)\,\big),$$

dove (1) e (3) sono le matrici di M_1, e

$$H_{m_k} = B(m_k) - \left(\bigcup_{m'_{k+1} \succ m_k} B(m'_{k+1}) \right) \qquad \text{per ogni } m_k \in M.$$

Otteniamo l'unione:

$$H = \Lambda \ \cup \ H_0 \ \cup \ \bigcup_{m_k \in M} H_{m_k}.$$

Mostriamo che le reciproche intersezioni sono disgiunte.

Prova. Presi $m_k \neq m'_l \in M$ abbiamo due casi:

I. $m_k \prec m'_l$ **(o viceversa).** Allora esiste $m_{k+1} \in M_{k+1}$ tale che $m_k \prec m_{k+1} \prec m'_l$ e quindi $B(m'_l) \subseteq B(m_{k+1})$, perciò $H_{m_k} \cap H_{m'_l} = \emptyset$.

II. m_k **e** m'_l **non sono confrontabili.** Ciò significa che $B(m_k) \cap B(m'_l) = \emptyset$ (dall'Osservazione 2.2.2), di conseguenza anche $H_{m_k} \cap H_{m'_l} = \emptyset$.

In entrambi i casi abbiamo $H_{m_k} \cap H_{m'_l} = \emptyset$. Ragionando allo stesso modo si ottiene anche $\Lambda \cap H_{m_k} = \emptyset$.

Infine $H_{m_k} \cap H_0 = \emptyset$ per ogni $m_k \in M$ perché certamente $\big(1\big) \prec m_k$ oppure $\big(3\big) \prec m_k$. Per lo stesso motivo si ha anche $\Lambda \cap H_0 = \emptyset$. $\square$

Abbiamo quindi la partizione

$$H = \Lambda \ \sqcup \ H_0 \ \sqcup \bigsqcup_{m_k \in M} H_{m_k}.$$

3. Scegliamo per ogni $m_k \in M$, un punto $p(m_k) \in R(m_k)$ e anche un punto $p_0 \in R$. Ora siamo pronti per definire la funzione $f\colon H \to R$ su ogni insieme della partizione, separatamente:

$$\begin{cases} \alpha \in H_0: & f(\alpha) = p_0 + \chi_{(1)}(\alpha)\big(p(1) - p_0\big) + \chi_{(3)}(\alpha)\big(p(3) - p_0\big), \\ \alpha \in H_{m_k}: & f(\alpha) = p(m_k) + \displaystyle\sum_{m'_{k+1} \succ m_k} \chi_{m'_{k+1}}(\alpha)\big(p(m'_{k+1}) - p(m_k)\big), \\ \alpha \in \Lambda: & \text{come visto alla sezione precedente.} \end{cases}$$

2.2.3 Prova che f è $\mathcal{C}^\infty$

f è $\mathcal{C}^\infty$ su $H \setminus \Lambda$:

Per come è definita, è chiaro che f è $\mathcal{C}^\infty$ su $int(H_{m_k})$. In più, dai punti (b) e (c) dell'Osservazione 2.2.4 segue che i punti $\alpha \in H_{m_k} \cap \partial H_{m_k}$ di frontiera hanno un intorno in cui f è costante. Lo stesso vale per H_0. Quindi f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in ogni punto $\alpha \in H_0 \ \sqcup \ \bigsqcup_{m_k \in M} H_{m_k} = H \setminus \Lambda$.

f è continua e differenziabile su Λ:

Siano $\lambda \in \Lambda$ e $\alpha \in H \setminus \{\lambda\}$, sia quindi $m_k \in M$ la minima (per $\prec$) matrice tale che $\alpha \notin B(m_k) \ni \lambda$, se non esistesse vorrebbe dire che $\lambda = \alpha$ per l'Osservazione 2.2.3. Sia anche $m_{k+1} \in M_{k+1}$ tale che $\lambda \in B(m_{k+1})$, che esiste per la definizione di Λ. Di conseguenza esiste $i \in \{1, \ldots, k\}$ tale che $\alpha_i \notin I(m_k(i, \cdot)) \supset I(m_{k+1}(i, \cdot)) \ni \lambda_i$, quindi (come si vede in figura 2)

$$\|\lambda - \alpha\| \geq |\lambda_i - \alpha_i| \geq 5^{-(k+i+1)} \geq 5^{-(2k+1)}.$$

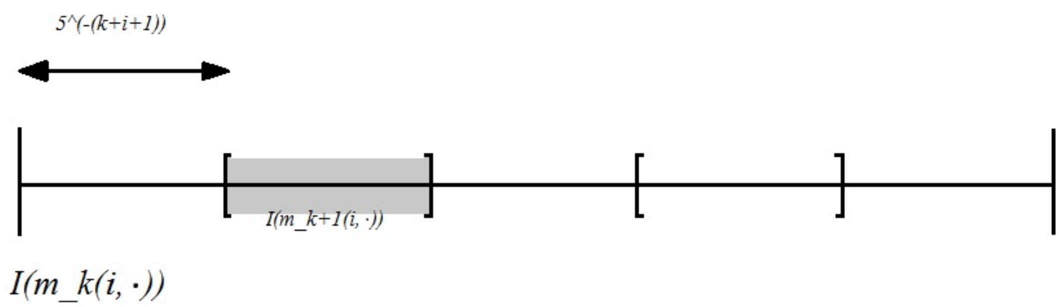

Figura 2.

Consideriamo il caso $k \geq 2$. Se m_k è la matrice minima, deve esistere $m_{k-1} \in M_{k-1}$ per cui $\lambda, \alpha \in B(m_{k-1})$, il che significa che $f(\lambda), f(\alpha) \in R(m_{k-1})$, quindi

$$|f(\lambda) - f(\alpha)| \leq C 2^{-\frac{(k-1)^2}{2}}.$$

Perciò ponendo $\delta(k) = \frac{(k-1)^2}{2(2k+1)} \log_5 2$ si ottiene la stima:

$$|f(\lambda) - f(\alpha)| \leq C \|\lambda - \alpha\|^{\delta(k)} \tag{2.2}$$

Si noti poi che k dipende da α (e da λ) e che $k \xrightarrow{\alpha \to \lambda} +\infty$, come pure $\delta(k) \xrightarrow{k \to +\infty} +\infty$, quindi la (2.2) implica che f è continua in ogni $\lambda \in \Lambda$, inoltre

$$\lim_{\alpha \to \lambda} \frac{|f(\lambda) - f(\alpha)|}{\|\lambda - \alpha\|} \leq \lim_{\alpha \to \lambda} C \|\lambda - \alpha\|^{\delta(k) - 1} = 0,$$

perciò f è differenziabile e $Df(\lambda) = 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda$.

f è $\mathcal{C}^\infty$ su Λ:

Proviamo per induzione su ℓ che esiste il differenziale ℓ-esimo di f in ogni $\lambda \in \Lambda$ e vale $D^\ell f(\lambda) = 0$ per ogni $\ell \geq 1$. Nel paragrafo precedente abbiamo dimostrato il caso $\ell = 1$, ora procediamo supponendo che esista il differenziale $D^\ell f(\lambda)$ e sia nullo per ogni $\lambda \in \Lambda$.

Introduciamo la notazione seguente. Poniamo $\psi_i = \varphi_{I(m_k(i,\cdot))}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$. Per ogni $j \geq 1$, chiamiamo $h_j \colon H \to \mathbb{R}$ la proiezione sulla j-esima coordinata, con differenziale $Dh_j \colon H \to H^*$, che vale $Dh_j(\alpha) = h_j$ per ogni $\alpha \in H$. Inoltre se $J = (j_1, \ldots, j_\ell) \in \{1, \ldots, k\}^\ell$, indichiamo con J_i la cardinalità dell'insieme $\{r \colon j_r = i\}$ e con h_J il funzionale multilineare definito da

$$h_J \colon H^\ell \to \mathbb{R}$$

$$h_J(\alpha^1, \ldots, \alpha^\ell) = h_{j_1}(\alpha^1) \cdot \ldots \cdot h_{j_\ell}(\alpha^\ell).$$

Si noti che $\sum_{i=1}^k J_i = \ell$.

Ricordiamo che dati due spazi di Banach X e Y, lo spazio $\mathcal{L}^\ell(X, Y)$ è lo spazio vettoriale delle funzioni multilineari $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{\ell \text{ volte}} \to Y$, con norma

$$\|T\| := \inf \big\{ t \geq 0 \colon \|T(x_1, \ldots, x_\ell)\|_Y \leq t \cdot \|x_1\|_X \cdot \ldots \cdot \|x_\ell\|_X \ , \ x_j \in X \big\}.$$

Usando la nuova notazione abbiamo

$$\chi_{m_k}(\alpha) = \prod_{i=1}^k \psi_i(h_i(\alpha)).$$

Allora applicando la regola della catena, possiamo scrivere il differenziale ℓ-esimo di χ_{m_k} nel modo seguente:

$$D^\ell \chi_{m_k} \colon H \to \mathcal{L}^\ell(H, \mathbb{R}),$$

$$D^\ell \chi_{m_k}(\alpha) = \sum_{J\in\{1,\dots,k\}^\ell} \prod_{i=1}^k \psi_i^{(J_i)}(h_i(\alpha))\ h_J.$$

Osserviamo che

$$\psi_i(x) = \varphi_{I(m_k(i,\cdot))}(x) = \varphi\bigg(5^{k+i}\Big(x - \sum_{j=1}^k \frac{m_k(i,j)}{5^j}\Big)\bigg),$$

quindi

$$\|\psi_i^{(J_i)}\|_\infty = \|\varphi^{(J_i)}\|_\infty\ 5^{J_i(k+i)} \le \|\varphi^{(J_i)}\|_\infty\ 5^{2kJ_i} \le \Phi_\ell\ 5^{2kJ_i},$$

dove $\Phi_\ell := \max\{\|\varphi^{(j)}\|_\infty \colon j \le \ell\}$.

Perciò per ogni $\ell \in \mathbb{N}$ esiste $G_\ell > 0$ tale che per ogni $\alpha \in H$ e per ogni matrice $m_k \in M_k$ vale

$$\|D^\ell \chi_{m_k}(\alpha)\|_{\mathcal{L}^\ell(H,\mathbb{R})} \le \sum_{J\in\{1,\dots,k\}^\ell} \Phi_\ell^k\ 5^{2k\ell} \le G_\ell^k.$$

Ora dalla definizione di f e dal punto (c) dell'Osservazione 2.2.4, deduciamo che se $\alpha \in H_{m_k}$, possiamo stimare la norma del differenziale $D^\ell f(\alpha)$ nel modo seguente

$$\|D^\ell f(\alpha)\|_{\mathcal{L}^\ell(H,\mathbb{R}^2)} \le \|D^\ell \chi_{m_{k+1}}(\alpha)\|_{\mathcal{L}^\ell(H,\mathbb{R})} \cdot |p(m_{k+1}) - p(m_k)|,$$

per una matrice $m_{k+1} \succ m_k$. Allora siccome $p(m_k)$ e $p(m_{k+1})$ stanno nell'insieme $R(m_k)$, si ha

$$\|D^\ell f(\alpha)\|_{\mathcal{L}^\ell(H,\mathbb{R}^2)} \le G_\ell^{k+1} \cdot 2^{-k^2} \qquad \text{per ogni } \alpha \in H_{m_k}.$$

Ne concludiamo che per ogni $\lambda \in \Lambda$, il differenziale $D^\ell f$ è contino in λ e che esiste $D^{\ell+1} f(\lambda) = 0$ in quanto, detto k_α il massimo intero k per il quale esiste una matrice $m_k \in M$ tale che $\alpha \in B(m_k)$ (se $\alpha \in \Lambda$, poniamo $k = +\infty$), allora $k_\alpha \xrightarrow{\alpha\to\lambda} +\infty$ e si ha:

$$\lim_{\alpha\to\lambda} \frac{\|D^\ell f(\alpha) - D^\ell f(\lambda)\|_{\mathcal{L}^\ell(H,\mathbb{R}^2)}}{\|\alpha-\lambda\|} = \lim_{\alpha\to\lambda} \frac{\|D^\ell f(\alpha)\|_{\mathcal{L}^\ell(H,\mathbb{R}^2)}}{\|\alpha-\lambda\|} \le \dots$$

$$\dots \le \lim_{\alpha\to\lambda} \frac{G_\ell^{k_\alpha+1} \cdot 2^{-k_\alpha^2}}{\|\alpha-\lambda\|} = 0$$

(l'ultima uguaglianza si ottiene facendo un ragionamento analogo a quello in (2.2)). Ciò conclude il passo induttivo e dimostra quanto si voleva: esiste $D^\ell f(\lambda) = 0$ per ogni $\ell \in \mathbb{N}$ e per ogni $\lambda \in \Lambda$.

2.2.4 Df ha rango ≤ 1

Se $\alpha \in \Lambda$, $Df(\alpha) = 0$. Se invece $\alpha \in H_{m_k}$, esiste un intorno U tale che $f\big|_U = p(m_k) + \chi_{m_{k+1}}\big(p(m_{k+1}) - p(m_k)\big)$ (segue dal punto *3* dell'Osservazione 2.2.4), quindi $Df(\alpha)$ ha rango ≤ 1; analogamente se $\alpha \in H_0$.

2.2.5 Suriettività

A partire dalla costruzione precedente possiamo costruire $F\colon H \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}^\infty$, con differenziale mai suriettivo, che sia anche suriettiva su tutto $\mathbb{R}^2$. Chiamiamo $B_0 := H - H_0 = B(1) \cup B(3)$ e $U_0 := \{\alpha \in H\colon \alpha_1 \in (0, 5^{-1})\}$; allora $B_0 \subset U_0$ che è aperto e per ogni $\alpha \notin U_0$, si ha $f(\alpha) = p_0$. Ora sia $\eta = (1, 0, \ldots, 0, \ldots) \in H$, definiamo:

$$B_m := B_0 + m \cdot \eta \qquad U_m := U_0 + m \cdot \eta \qquad \text{per ogni } m \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che $B_m \subset U_m$ e $U_m \cap U_k = \emptyset$ per ogni $m \neq k \in \mathbb{N}$, inoltre gli U_m sono tutti aperti. Fissato $m \in \mathbb{N}$ definiamo $f_m\colon H \to \mathbb{R}^2$ con la costruzione descritta in precedenza "traslata" di $m \cdot \eta$ in H (in modo che $B_m(m_k) = B(m_k) + m \cdot \eta$), usando come quadrato $R_m \subset \mathbb{R}^2$ il quadrato di lato $\frac{m}{2}$ concentrico a R e come p_0 sempre lo stesso punto. Definiamo infine la funzione

$$F\colon H \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{cases} F(\alpha) = f_m(\alpha) & \text{se } \alpha \in U_m, \\ F(\alpha) = p_0 & \text{se } \alpha \in H - \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m. \end{cases}$$

F è quindi di classe $\mathcal{C}^\infty$ per costruzione e ogni $\alpha \in H$ ha un intorno in cui la funzione F coincide con f_m per qualche $m \in \mathbb{N}$, perciò il differenziale DF ha rango ≤ 1. Inoltre F è suriettiva perché

$$F(H) = \{p_0\} \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f_m(U_m) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} R_m = \mathbb{R}^2.$$

□

Capitolo 3

Teorema di Smale

In questo Capitolo introduciamo la nozione di *operatore di Fredholm*, per poi enunciare e dimostrare il Teorema di Smale (si veda A. Smale [3]), una versione infinito dimensionale del Teorema di Sard.

3.1 Operatori di Fredholm

Si fa riferimento ai testi H. Brezis [9] e T. Kato [10].

Definizione 3.1.1. Siano E ed F due spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un operatore lineare continuo. Diciamo che T è un *operatore di Fredholm* se valgono le condizioni seguenti:

1. $Ker(T)$ ha dimensione finita;
2. $Im(T)$ è un sottospazio chiuso di F;
3. $Im(T)$ ha codimensione finita, ovvero $dim\big(F/Im(T)\big) < \infty$.

Chiamiamo $\phi(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ l'insieme degli operatori di Fredholm da E in F. Infine definiamo la funzione *indice* $\iota \colon \phi(E, F) \to \mathbb{Z}$

$$\iota(T) = dim\big(Ker(T)\big) - codim\big(Im(T)\big).$$

Osservazione 3.1.2. Si può mostrare che la condizione 2. è ridondante, infatti se la codimensione di $Im(T)$ è finita, necessariamente si ha che $Im(T)$ è chiuso in F (si veda H. Brezis [9, ex. 2.27]).

Proposizione 3.1.3. *Valgono le seguenti affermazioni:*

1. *L'insieme $\phi(E, F)$ è aperto in $\mathcal{L}(E, F)$;*
2. *La funzione ι è continua, quindi costante su ogni componente connessa di $\phi(E, F)$;*
3. *Sia $T \in \phi(E, F)$, allora esistono sottospazi $E_1 \leq E$ e $F_1 \leq F$ e un operatore lineare biiettivo $A \in \mathcal{L}(E_1, Im(T))$ con le seguenti proprietà:*
    - *E_1 è chiuso in E e $E = Ker(T) \oplus E_1$,*

- $dim(F_1) = codim\big(Im(T)\big) < \infty$ *e* $F = F_1 \oplus Im(T)$,
- *Usando le decomposizioni appena descritte si può raprresentare* T *con la formula:*

$$T \colon Ker(T) \oplus E_1 \to F_1 \oplus Im(T)$$
$$(u, v) \mapsto (0, A(v)) \ .$$

Dimostrazione. Per i punti 1. e 2. si veda T. Kato [10, 5.17]. 3. L'esistenza di E_1 e F_1, deriva dal fatto che sottospazi di dimensione o codimensione finita sono complementati. Si veda H. Brezis [9, cap. 11.1]. L'esistenza di A è un'immediata conseguenza. □

La nozione di *operatore di Fredholm* si può estendere in modo naturale alle funzioni differenziabili tra spazi di Banach.

Definizione 3.1.4. Siano E ed F due spazi di Banach, $U \subseteq E$ un aperto e sia $f \colon U \to F$ una funzione differenziabile con differenziale $Df \colon U \to \mathcal{L}(E, F)$. Diremo che f è una *funzione di Fredholm* se per ogni $x \in U$ il differenziale di f in x è un operatore di Fredholm.

Nel caso in cui f sia di classe $\mathcal{C}^1$, la mappa $\iota \circ Df \colon U \to \mathbb{Z}$ è continua, quindi se U è connesso tale mappa è costante, perciò la seguente definizione è ben posta.

Definizione 3.1.5. Siano E ed F due spazi di Banach, $U \subseteq E$ un aperto connesso e $f \colon U \to F$ una funzione di Fredholm di classe $\mathcal{C}^1$. Diremo che f è di indice $q \in \mathbb{Z}$ e scriveremo $\iota(f) = q$ se il differenziale $Df(x)$ calcolato in un qualsiasi punto $x \in U$ ha indice $\iota(Df(x)) = q$.

3.2 Teorema di Smale

Vogliamo ora dare una generalizzazione del teorema di Sard nel caso infinito dimensionale. Nel Capitolo 2 si è visto che non è sufficiente richiedere che la funzione in esame sia di classe C^∞, infatti richiederemo che sia una funzione di Fredholm. Inoltre una causa non irrilevante della difficoltà di estendere il teorema sta nel fatto che non esiste la misura di Lebesgue in spazi di dimensione infinita. Per questo motivo considereremo la nozione di *insieme di prima categoria.*

Definizione 3.2.1. Sia F uno spazio di Banach. Un suo sottoinsieme M si dice *mai denso* se la sua chiusura $\overline{M}$ ha interno vuoto, si dice *di prima categoria* o *magro* se può essere ottenuto come unione numerabile di insiemi mai densi.

Osservazione 3.2.2. Per il Teorema di Baire (si veda H. Brezis [9, cap. 2, pag. 31]) un insieme di prima categoria ha interno vuoto, quindi il complementare è un insieme denso.

Si noti che unioni numerabili di insiemi di prima categoria sono di prima categoria. Questa proprietà sarà utile nella dimostrazione del teorema di Smale, infatti rende sufficiente un analisi locale dell'insieme dei valori critici, a patto che lo spazio di partenza abbia una base numerabile di aperti. Perciò richiederemo che lo spazio di partenza sia separabile. Ora siamo pronti per enunciare e dimostrare il risultato principale di questo capitolo.

Teorema 3.2.3 (Smale). *Siano E ed F due spazi di Banach, E separabile, $U \subseteq E$ un aperto connesso e $f: U \to F$ una funzione di Fredholm di classe $\mathcal{C}^j$, con $j > max\{0, \iota(f)\}$. Allora l'insieme dei valori critici di f è di prima categoria.*

Osservazione 3.2.4. Nel caso in cui E ed F hanno dimensione finita, tutte le funzioni differenziabili sono funzioni di Fredholm e per la formula delle dimensioni si ha $\iota(f) = dim(E) - dim(F)$, quindi le ipotesi del teorema coincidono con quelle del teorema di Sard nel caso finito dimensionale. Di conseguenza l'insieme dei valori critici ha misura di Lebesgue nulla in F, e ciò implica che esso è un insieme di prima categoria per la seguente proposizione.

Nota. L'insieme dei punti critici di una funzione C^1 tra spazi di dimensione finita è un chiuso.

Proposizione 3.2.5. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f: U \to \mathbb{R}^m$, una funzione continua. Sia $C \subset U$ un chiuso con immagine $f(C)$ di misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^m$. Allora $f(C)$ è un insieme di prima categoria.*

Prova. Siccome lo spazio $\mathbb{R}^m$ ha dimensione finita, le palle chiuse sono compatte. Ricopriamo quindi l'aperto U con una quantità numerabile $\mathcal{B}$ di palle chiuse contenute in esso. Fissata $B \in \mathcal{B}$ una delle palle del ricoprimento, si ha che $f|_B$ è chiusa, in quanto funzione continua dal compatto B nello spazio Hausdorff $\mathbb{R}^m$. C è un chiuso, quindi lo è anche $B \cap C$, ne segue che l'insieme $f(B \cap C)$ è un chiuso di misura nulla, perciò ha interno vuoto, quindi è mai denso. Si ha infine che $f(C) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} f(B \cap C)$ è unione numerabile di insiemi mai densi. □

In generale non è vero il viceversa, infatti esistono insiemi di prima categoria con misura positiva, anche in spazi di dimensione finita. In conclusione quindi il teorema appena enunciato appare come un risultato più debole del Teorema di Sard 1.1.4 quando gli spazi considerati hanno entrambi dimensione finita.

Vediamo ora una dimostrazione del Teorema 3.2.3. La seguente dimostrazione è presa da S. Smale [3].

Dimostrazione del Teorema 3.2.3. Mostreremo che ogni punto di U è contenuto in un aperto V tale che l'insieme dei valori critici di $f|_V$ è di prima categoria. Questa condizione è sufficiente, perchè gli spazi separabili hanno una base numerabile di aperti, e la proprietà di essere di prima categoria è stabile per unione numerabile.

Fissiamo un punto $x_0 \in U$ e chiamiamo $T := Df(x_0)$ il differenziale di f calcolato nel punto x_0, allora $T \in \phi(E, F)$. Siano $E_1 \leq E$ chiuso, $F_1 \leq F$ di dimensione finita e $A \in \mathcal{L}(E, F)$ biiettiva come nella Proposizione 3.1.3. Abbiamo $E = Ker(T) \oplus E_1$, $F = F_1 \oplus Im(T)$ e

$$T: Ker(T) \oplus E_1 \to F_1 \oplus Im(T)$$

$$(u, v) \mapsto (0, A(v)) \ .$$

Possiamo usare una notazione analoga per f e scrivere

$$f: U \subseteq Ker(T) \oplus E_1 \to F_1 \oplus Im(T)$$

$$(p, q) \mapsto (r(p, q), s(p, q)) \ .$$

Notiamo che $A = D_q s(p_0, q_0)$ è il differenziale di s rispetto alla variabile $q \in E_1$ calcolato nel punto $x_0 = (p_0, q_0)$. Definiamo quindi la funzione di classe $\mathcal{C}^j$

$$g \colon U \to Ker(T) \times Im(T)$$

$$g(p, q) = (p, s(p, q))$$

avente differenziale

$$Dg(p, q) \colon Ker(T) \oplus E_1 \to Ker(T) \times Im(T)$$

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} id_{Ker(T)} & 0 \\ D_p s(p, q) & D_q s(p, q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

che è invertibile in (p_0, q_0), perciò per il Teorema di inversione locale 1.2.1 esiste un intorno V di $x_0 = (p_0, q_0)$ tale che $g \colon V \to W := g(V)$ è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^j$. Possiamo supporre che W sia del tipo $W_p \times W_s$, con $W_p \subset Ker(T)$ intorno aperto di p_0 e $W_s \subset Im(T)$ intorno aperto di $s(p_0, q_0)$. Consideriamo la seguente funzione ancora di classe $\mathcal{C}^j$:

$$h = f \circ g^{-1} \colon W \to F_1 \oplus Im(T)$$

$$h(p, s) = (\widetilde{r}(p, s), s),$$

con $\widetilde{r} = r \circ g^{-1}$. Ora osserviamo che vale la formula della catena $Df(x) = Dh(g(x)) \circ Dg(x)$, quindi siccome g è diffeomorfismo, si ha che $x \in V$ è punto critico per f se e solo se $g(x)$ è punto critico per h e $f(x) = h(g(x))$, di conseguenza i valori critici di $f|_V$ sono gli stessi di h.

Guardiamo ora il differenziale di h, $Dh(p, s) \colon Ker(T) \times Im(T) \to F_1 \times Im(T)$, che è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} D_p\widetilde{r}(p, s) & D_s\widetilde{r}(p, s) \\ 0 & id_{Im(T)} \end{pmatrix}.$$

Esso è suriettivo nel punto (p, s) se e solo se è suriettivo il differenziale $D_p\widetilde{r}(p, s)$ di $\widetilde{r}$ rispetto alla variabile $p \in Ker(T)$. Fissiamo ora $s \in W_s$ e definiamo la funzione $\widetilde{r}_s \colon W_p \to F_1$ tale che $\widetilde{r}_s(p) = \widetilde{r}(p, s)$, tale funzione sarà di classe $\mathcal{C}^j$. Si ha certamente che $D\widetilde{r}_s(p) = D_p\widetilde{r}(p, s)$. Abbiamo quindi che per ogni $s \in W_s$ i valori critici di h contenuti nell'insieme $F_1 \times \{s\}$ sono i valori critici della funzione $\widetilde{r}_s$.

Ricordiamo che gli spazi $Ker(T)$ e F_1 hanno entrambi dimensione finita e W_p è un sottoinsieme aperto di $Ker(T)$, per di più la funzione $\widetilde{r}_s \colon W_p \to F_1$ è di classe $\mathcal{C}^j$, con

$$j > max\{0, \iota(f)\} = max\{0, dim\big(Ker(T)\big) - dim(F_1)\} .$$

Perciò $\widetilde{r}_s$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Sard 1.1.4, in particolare possiamo dedurre che l'insieme dei suoi valori critici ha interno vuoto.

Abbiamo mostrato che fissato $s \in W_s$, l'insieme dei valori critici di h contenuti nella sezione $F_1 \times \{s\}$ ha interno vuoto per la topologia di F_1, ne segue che anche tutto l'insieme dei valori critici di h ha interno vuoto in $F = F_1 \oplus Im(T)$. Resta da mostrare che l'insieme dei valori critici si può ottenere come unione numerabile di chiusi.

Per ogni punto $(p,s) \in W$ possiamo scegliere un intorno chiuso $N \times R$, con $N \subset Ker(T)$ palla chiusa centrata in p e $R \subset Im(T)$ palla chiusa centrata in s; la restrizione di h a intorni di questo tipo è una funzione chiusa. Sia infatti $M \subset N \times R$ un chiuso e sia $\{(r_n, s_n)\}_{n\geq 1}$ una successione in $h(M)$ tale che

$$(r_n, s_n) \longrightarrow (r, s) \in F_1 \oplus Im(T).$$

Sia poi $\{(p_n, s_n)\}_{n\geq 1}$ una successione in M di antiimmagini. Ricordando che $p_n \in N$ e che N è compatto perchè ha dimensione finita, possiamo supporre che $p_n \longrightarrow p \in N$. Allora $(p_n, s_n) \longrightarrow (p, s)$ ed essendo una successione contenuta nel chiuso M, si avrà che $(p,s) \in M$. Per continuità allora avremo che $h(p,s) = (r,s)$, cioè che $(r,s) \in h(M)$. Quindi $h(M)$ è chiuso.

W è uno spazio metrico separabile perché è diffeomorfo all'aperto $U \subseteq E$ e lo spazio E è separabile. Percò possiamo ricoprire l'insieme W con una quantità numerabile di chiusi $N \times R$ tali che $h|_{N\times R}$ sia chiusa, perciò ricordando che l'insieme dei punti critici in $N \times R$ è un chiuso, concludiamo che l'insieme dei valori critici di h è unione numerabile di chiusi. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Bibliografia

[1] J. Milnor, *Topology from a differential viewpoint*, University of Virginia Press, 1965.

[2] S.M. Bates, *On smooth rank-1 mappings of Banach spaces onto the plane*, Journal of Differential Geometry 37 (1993), No. 3, 729–733. University of California, Berkeley.

[3] S. Smale, *An Infinite Dimensional Version of Sard's Theorem*, American Journal of Mathematics, Vol. 87 (Oct. 1965), No. 4, pp. 861-866, The Johns Hopkins University Press.

[4] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 48 (1942), pp. 883-890.

[5] I. Kupka, *Counterexample to the Morse-Sard Theorem in the case of infinite-dimensional manifolds*, Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 16, No. 5 (Oct., 1965), pp. 954-957.

[6] A. Ambrosetti e S.G. Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (Book 34), Cambridge University Press (April 28, 1995).

[7] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces - Fractals and rectificability*, Cambridge University Press (1995).

[8] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag (1969).

[9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equation*, Universitext, Springer (2010).

[10] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Universitext, Springer (1976).