

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



DIPARTIMENTO
MATEMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Teoremi di ricoprimento e differenziazione di misure di Radon in $\mathbb{R}^n$

Relatore:
Prof. Monti Roberto

Candidato:
Samuele Simeoni
Matricola 2076326

Anno accademico 2024/2025 - 19.09.2025

Indice

Indice	iii
Introduzione	1
1 Teoremi di Ricoprimento	3
1.1 Misure di Radon	3
1.2 Teoremi di Ricoprimento	3
1.2.1 Teorema di Ricoprimento di Vitali	4
1.2.2 Teorema di Ricoprimento di Morse-Besicovitch	5
1.2.3 Spazi direzionalmente limitati	16
2 Differenziazione di misure di Radon	19
2.1 Teorema di Differenziazione per misure di Radon	20
2.2 Teorema fondamentale del calcolo per misure di Radon	22
2.3 Famiglia arbitraria di rettangoli	24
Appendice	29
Bibliografia	33
Ringraziamenti	35

Introduzione

In analisi il concetto di derivata è fondamentale perché, in poche parole, permette di ottenere, attraverso opportuni teoremi, informazioni globali a partire da informazioni locali relative a una funzione. Per questo motivo, e per le numerose applicazioni che ne seguono, è naturale cercare di estendere la nozione di “derivata” ad altri oggetti matematici; in questa tesi esamineremo in particolare la sua generalizzazione alle misure di Radon in $\mathbb{R}^n$.

Date μ, ν misure di Radon in $\mathbb{R}^n$, possiamo definire la derivata, o densità, di ν rispetto a μ come

$$D_\mu \nu(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))},$$

quando questo limite esiste. Per dimostrare l’esistenza e la buona definizione di questo oggetto sono necessari, sorprendentemente, i teoremi di ricoprimento: tali risultati forniscono il ponte tecnico che collega proprietà locali e proprietà globali delle misure. Intuitivamente, dati $A \subset \mathbb{R}^n$ e un ricoprimento $\mathcal{F}$ di A , i teoremi di ricoprimento ci forniscono un sotto-ricoprimento $\mathcal{G}$ che ricopre ancora A e che è, in un senso opportuno, il più “disgiunta possibile”.

La cosa interessante, che proveremo a far cogliere, è che i teoremi di ricoprimento sono profondamente legati alla geometria (e quindi alla metrica) dello spazio su cui si lavora, indipendentemente dalla misura considerata. In questa tesi ci concentreremo su $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea.

I risultati presentati trovano applicazione in diverse branche della matematica, in particolare in Analisi Armonica, Calcolo delle Variazioni e Teoria Geometrica della Misura.

Outline della tesi

- Nel Capitolo 1 presentiamo i principali teoremi di ricoprimento, essenziali per lo studio della differenziazione delle misure di Radon; in particolare enunciamo e dimostriamo il teorema di Morse e ricaveremo come corollario il teorema di ricoprimento di Besicovitch, che risulta più semplice e utile nel contesto delle misure di Radon.
- Nel Capitolo 2 riportiamo i risultati fondamentali sulla differenziazione delle misure: mostriamo che la derivata $D_\mu \nu$ esiste, è μ -misurabile e μ -quasi ovunque

finita sotto opportune ipotesi; forniamo inoltre una condizione necessaria e sufficiente su ν per poterla ricostruire integrando $D_\mu \nu$ rispetto a μ . Vedremo infine una famiglia di insiemi per cui il teorema di differenziazione (di Lebesgue) fallisce.

Capitolo 1

Teoremi di Ricoprimento

L'ambiente in cui lavoreremo in questa tesi sarà $\mathbb{R}^n$, lo spazio euclideo n -dimensionale. Molti dei concetti che vedremo si possono estendere anche a spazi più generali, ad esempio spazi metrici con particolari proprietà; per una trattazione completa ed esauritiva rimandiamo il lettore al Capitolo 2.8 di *Geometric Measure Theory* di H.Federer [Fed69].

1.1 Misure di Radon

In questa sezione introdurremo il concetto di misura di Radon e altre definizioni utili.

Definizione 1.1 (Misure di Radon).

- (i) Una misura esterna μ su $\mathbb{R}^n$ è **regolare** se per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ esiste un insieme μ -misurabile B tale che

$$A \subseteq B \quad \text{e} \quad \mu(A) = \mu(B).$$

- (ii) Una misura esterna μ su $\mathbb{R}^n$ è **Borel-regolare** se μ è una misura definita sulla σ -algebra dei Boreliani e, per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$, esiste un boreliano B tale che

$$A \subseteq B \quad \text{e} \quad \mu(A) = \mu(B).$$

- (iii) Una misura esterna μ su $\mathbb{R}^n$ è una **misura di Radon** se Borel-regolare e, per ogni insieme compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, vale $\mu(K) < +\infty$.

1.2 Teoremi di Ricoprimento

Definizione 1.2.

- (i) Una collezione $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ è un **ricoprimento** di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ se

$$A \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F.$$

(ii) $\mathcal{F}$ è un **ricoprimento fine** di A se in più per ogni $x \in A$ si ha che

$$\inf\{\text{diam}F : x \in F, F \in \mathcal{F}\} = 0 \quad (1.1)$$

dove $\text{diam}F = \sup\{|a - b| : a, b \in F\}$.

(iii) Se inoltre μ è una misura di Radon diremo che $\mathcal{F}$ è μ -**adeguata** per A se e solo se per ogni aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ esiste una sotto-collezione disgiunta $\mathcal{G}$ di $\mathcal{F}$ tale che

$$\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F \subset V \quad \text{e} \quad \mu((A \cap V) \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{G}} F) = 0$$

Molto spesso, per derivare proprietà globali di una misura μ a partire da quelle locali, rispetto a un determinato sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$, si ha il bisogno di trovare, da un dato ricoprimento $\mathcal{F}$ di A , una sottofamiglia numerabile $\mathcal{G}$, tale che la somma

$$\sum_{B \in \mathcal{G}} \mu(B)$$

possa essere usata per stimare $\mu(A)$. Vorremmo quindi che $\mathcal{G}$ sia disgiunta. I teoremi di ricoprimento assolvono questo compito. Ne vedremo in particolare due, il teorema di ricoprimento di Vitali, utile se si lavora con la misura di Lebesgue e il teorema di ricoprimento di Besicovitch, più generale, essenziale per studiare arbitrarie misure di Radon in $\mathbb{R}^n$. Invece di dimostrare il teorema di Besicovitch, vedremo la dimostrazione del teorema di Morse, scoperto e dimostrato indipendentemente da Besicovitch, molto più generale e da cui ricaveremo quello di Besicovitch come caso particolare. Vedremo come alla base di questi due teoremi ci siano considerazioni puramente geometriche, indipendenti dalla misura considerata, legate alle proprietà di alcuni insiemi e, in particolare, di $\mathbb{R}^n$.

1.2.1 Teorema di Ricoprimento di Vitali

Notazione: Data $B = B(x, r)$ la palla chiusa in $\mathbb{R}^n$, con $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, allora indichiamo con $\hat{B} = B(x, 5r)$ la palla chiusa concentrica con il raggio 5 volte il raggio di B .

Teorema 1.3 (Teorema di Ricoprimento di Vitali). *Sia $\mathcal{F}$ una qualsiasi collezione di palle chiuse non degeneri in $\mathbb{R}^n$ con $\sup\{\text{diam}(B) : B \in \mathcal{F}\} < \infty$. Allora esiste una famiglia $\mathcal{G}$ di palle disgiunte di $\mathcal{F}$ tale che*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B}.$$

Grazie al lemma di Zorn è possibile fornire una rapida dimostrazione del precedente Teorema.

Dimostrazione. Poniamo $D := \sup\{\text{diam} B \mid B \in \mathcal{F}\}$. Sia poi

$$\mathcal{F}_j := \left\{ B \in \mathcal{F} \mid \frac{D}{2^j} < \text{diam} B \leq \frac{D}{2^{j-1}} \right\} \quad \text{con} \quad j = 1, 2, \dots$$

Definiamo $\mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{F}_j$ come segue:

1. Sia $\mathcal{G}_1$ una qualunque collezione massimale di palle disgiunte contenuta in $\mathcal{F}_1$.
2. Supponendo scelte $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{k-1}$, scegliamo $\mathcal{G}_k$ come una qualunque sottocollezione massimale disgiunta di

$$\{ B \in \mathcal{F}_k \mid B \cap B' = \emptyset \text{ per ogni } B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{G}_j \}.$$

Infine, definiamo

$$\mathcal{G} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_j.$$

Si ha quindi che $\mathcal{G}$ è una collezione di palle disgiunte e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Ci rimane da mostrare che per ciascuna palla $B \in \mathcal{F}$ esiste una palla $B' \in \mathcal{G}$ tale che $B \cap B' \neq \emptyset$ e $B \subset \widehat{B'}$. Fissiamo $B \in \mathcal{F}$, sappiamo che esiste un indice j tale che $B \in \mathcal{F}_j$. Per la massimalità di $\mathcal{G}_j$ esiste una palla $B' \in \bigcup_{k=1}^j \mathcal{G}_k$ con $B \cap B' \neq \emptyset$. Ma $\text{diam } B' \geq D/2^j$ e $\text{diam } B \leq D/2^{j-1}$; da cui $\text{diam } B < 2 \text{diam } B'$. Ne segue che $B \subset \widehat{B'}$, come volevo dimostrare. $\square$

Osservazione 1.4. La costante $c = 5$ non è ottimale. Se la collezione ha un numero finito di palle allora possiamo scegliere $c = 3$, in caso contrario il teorema continua a valere per ogni $c > 3$. Per verificare che $c = 3$ fallisce se $\text{card}(\mathcal{F}) = \infty$ possiamo considerare il seguente controesempio in $\mathbb{R}$ di O. Schramm: sia $\mathcal{F} = \{B(x, r) : |x| < \frac{1}{2}, |x| < r < \frac{|x|+1}{3}\}$, allora si ha che $0 \in B$ per ogni $B \in \mathcal{F}$, quindi ogni sottofamiglia disgiunta di $\mathcal{F}$ consiste in una singola palla. Notiamo che $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = (-1, 1)$, ma nessuna palla $\hat{B} = B(x, 3r)$ con $B \in \mathcal{F}$ ricopre l'intervallo $(-1, 1)$ per costruzione.

Il richiedere di ingrandire le palle può sembrare un fatto innocuo, ma rende questo risultato inutilizzabile per studiare misure di Radon arbitrarie. Infatti data μ misura di Radon in $\mathbb{R}^n$, non abbiamo nessun modo sistematico di stimare $\mu(\hat{B})$ a partire da $\mu(B)$. Questo è possibile solo se richiediamo alcune proprietà di regolarità alla misura, ad esempio l'invarianza per traslazioni. Nel caso della misura di Lebesgue infatti possiamo concludere che $\mathcal{L}^n(\hat{B}) = 5^n \mathcal{L}^n(B)$. Abbiamo quindi bisogno di un teorema che non richieda di allargare le palle. La soluzione ci è fornita dal teorema di Morse-Besicovitch, il quale estrae una sottofamiglia di palle, selezionate dalla famiglia originale, senza ingrandirle che ricopre ugualmente l'insieme di partenza al prezzo di avere un numero controllato di sovrapposizioni.

1.2.2 Teorema di Ricoprimento di Morse-Besicovitch

Come già preannunciato in questo capitolo vedremo la dimostrazione del teorema di Morse e ricaveremo come caso particolare il Teorema di Besicovitch. Il teorema di Besicovitch, essendo efficace tanto quanto quello di Morse e molto più semplice ha preso molto spazio in letteratura. Vedremo infatti che è più che sufficiente per trattare la differenziazione delle misure di Radon nel prossimo capitolo. L'idea alla base della dimostrazione di entrambi i teoremi è comunque la stessa.

Definizione 1.5. Un insieme $F \subset \mathbb{R}^n$ si dice:

- i. stellato rispetto ad un insieme $G \subset F$ se è stellato rispetto ogni punto di G , i.e. se $\theta x + (1 - \theta)y \in F$, per ogni $x \in F$, $y \in G$ e $0 < \theta < 1$.
- ii. convesso se è stellato rispetto a sé stesso, i.e. se $\theta x + (1 - \theta)y \in F$, per ogni $x, y \in F$ e $0 < \theta < 1$.
- iii. un γ -Morse set associato ad x , con $x \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma \geq 1$, se esiste un $r > 0$ tale che

$$B(x, r) \subset F(x) \subset B(x, \gamma r) \quad (1.2)$$

e $F(x)$ è stellato rispetto a $B(x, r)$.

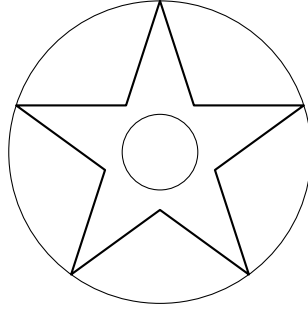


Figura 1.1: un semplice esempio di γ -Morse set. La stella in figura non è convessa, ma è stellata rispetto alla palla contenuta al suo interno e contenuta a sua volta da una palla più grande.

Definizione 1.6 (Ricoprimento di Morse). Dato $E \subset \mathbb{R}^n$, una famiglia $\mathcal{F}$ non vuota di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ diremo che è:

1. un ricoprimento di Morse per E se per ogni $x \in E$ esiste un γ -Morse set F associato ad x tale che $F \in \mathcal{F}$,
2. un ricoprimento fine di Morse se esiste $\gamma \geq 1$ tale che per ogni $x \in E$ esiste una sottofamiglia $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{F}$ di γ -Morse (chiusi) set associate ad x tale che valga (1.1).

Esempio 1.7. Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ allora le due famiglie

$$\{B(x, r) : 0 < r < \infty\}, \quad \{Q(x, r) : 0 < r < \infty\}$$

sono rivestimenti fini di Morse, dove con Q intendiamo il quadrato centrato in x e diagonale $2r$. Più in generale dato un qualsiasi insieme convesso, limitato e chiuso contenente l'origine nella sua parte interna allora

$$\{x + rC : 0 < r < 1, x \in E\}$$

è un ricoprimento fine di Morse.

Notazione: Dato $A \subset \mathbb{R}^n$, indicheremo con

$$\mathring{A} = \{x \in A : \text{esiste un intorno aperto } U(x) \text{ di } x \text{ tale che } U(x) \subset A\}$$

la parte interna di A . Quindi $\mathring{B}(x, r)$ indica la palla aperta di raggio r e centro x .

Teorema 1.8 (Teorema di Ricoprimento di Morse). *Sia $E \in \mathbb{R}^n$ limitato e $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ tale che*

$$\sup\{\text{diam } F : F \in \mathcal{F}\} < \infty \quad (1.3)$$

Assumiamo che $\mathcal{F}$ sia un ricoprimento di Morse per E . Allora esistono $\ell = \ell(\gamma, n) \in \mathbb{N}$ e delle famiglie $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_\ell$ tali che per ogni $i = 1, \dots, \ell$, $\mathcal{F}_i$ è una famiglia numerabile e disgiunta di insiemi $F \in \mathcal{F}$, tali che

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} \bigcup_{F \in \mathcal{F}_i} F.$$

Per la dimostrazione del Teorema 1.8 abbiamo bisogno del seguente lemma. È importante sottolineare come sia di natura puramente geometrica, dipendente quindi solo dallo spazio e dalla metrica con cui si lavora.

Lemma 1.9. *Sia $\gamma \geq 1$, $1 < t \leq 2$. Consideriamo poi $x_1, \dots, x_h \in \mathbb{R}^n$ e $F_1, \dots, F_h \subset \mathbb{R}^n$ tali che:*

- (i) F_i è un γ -Morse set associato a x_i per ogni $1 \leq i \leq h$. Useremo anche la notazione equivalente $F_i = F(x_i)$.
- (ii) $F_i \cap F_h \neq \emptyset$ per ogni $1 \leq i < h$
- (iii) se $i < j$ allora $x_j \notin F_i$ e $\text{diam } F_j < t \text{diam } F_i$

Allora esiste una costante $\zeta = \zeta(\gamma, n)$ tale che $h < \zeta$.

Osservazione 1.10. La condizione (ii) garantisce che esiste un insieme F_i , in questo caso F_h , che abbia intersezione non vuota con tutti gli altri insiemi. La condizione (iii) garantisce che tutti i diametri siano in qualche modo comparabili e che, in particolare, F_h sia l'insieme con il diametro quasi più piccolo. Il letteratura una famiglia di insiemi con queste caratteristiche prende il nome di configurazione t -satellite rispetto a F_h .

Dimostrazione. Per definizione di γ -Morse set, per ogni $i = 1, \dots, h$ esiste un $r_i > 0$ tale che

$$B(x_i, r_i) \subset F_i \subset B(x_i, \gamma r_i) \quad (1.4)$$

e F_i è stellato rispetto a $B(x_i, r_i)$.

Step 1: Iniziamo mostrando che dato un γ -Morse set $F \subset \mathbb{R}^n$ associato ad un qualche punto x_0 , se $x \in F$, $\theta \in (0, 1)$ e $y \in B(x_0, r)$ con r come nella definizione di γ -Morse set allora un qualsiasi punto della forma $\theta y + (1 - \theta)x$ appartiene alla parte interna di F .

Senza perdita di generalità possiamo assumere $x = 0$ e trovare $\rho > 0$ tale che $\mathring{B}(y, \rho) \subset \mathring{B}(x_0, r)$. Allora $B(\theta y, \theta \rho) \subset F$. Infatti $|\theta y - z| \leq \theta \rho$ implica $|y - z/\theta| \leq \rho$ e quindi che $z/\theta \in B(y, \rho) \subset B(x_0, r)$, di conseguenza $z = \theta \frac{z}{\theta} + (1 - \theta)0 \in F$, dal momento che F è stellato rispetto a $B(x_0, r)$. Quindi punti della forma θy appartengono alla parte interna F , come volevamo.

Step 2: Senza perdita di generalità possiamo assumere che $x_h = 0$. Poniamo per semplicità $r = r_h$ e $F = F_h$. Mostriamo ora che se i, j sono tali che

$$32\gamma^2 r < |x_i| \leq |x_j| \quad \text{e} \quad \left| \frac{x_i}{|x_i|} - \frac{x_j}{|x_j|} \right| \leq \frac{1}{16\gamma} \quad (1.5)$$

allora x_i appartiene alla parte interna di F_j . Come conseguenza di (ii) esiste $x \in F_j \cap F$. Poniamo

$$x_i = (1 - \theta)x + \theta y$$

dove, come conseguenza di (1.5) abbiamo,

$$y := (1 - s)x + sx_i, \quad s := \frac{|x_j|}{|x_i|} \geq 1, \quad \theta := \frac{1}{s}. \quad (1.6)$$

Vogliamo mostrare che $y \in \mathring{B}(x_j, r_j)$, infatti questo comporta per lo Step 1 che anche $x_i \in F_j$, in quanto $x_i = (1 - \theta)x + \theta y$, $x \in F_j$ e $y \in B(x_j, r_j)$. Qui entra quindi in gioco l'ipotesi degli F_i di essere stellati.

Siccome $F \subset B(0, \gamma r)$ implica che $\text{diam } F \leq 2\gamma r$, per la (1.5), abbiamo che

$$16\gamma \text{diam } F \leq 32\gamma^2 r < |x_i|.$$

Questo implica che $\text{diam } F \leq |x_i|/16\gamma$, mentre dalla (iii) abbiamo che $\text{diam } F < 2 \text{diam } F_j$, quindi siccome $x, 0 \in F$, concludiamo che

$$|x| \leq \text{diam } F \leq \min \left\{ \frac{|x_i|}{16\gamma}, 2 \text{diam } F_j \right\} \quad (1.7)$$

Siccome $s \geq 1$, $|1 - s| = s - 1 \leq s$, quindi combinando (1.5)-(1.7) con il fatto che $x, x_j \in F_j$, otteniamo:

$$\begin{aligned} |y - x_j| &= \left| (1 - s)x + |x_j| \overbrace{\left(\frac{x_i}{|x_i|} - \frac{x_j}{|x_j|} \right)}^{\leq 1/16\gamma} \right| \\ &\leq s|x| + \frac{|x_j|}{16\gamma} \stackrel{(1.5)}{\leq} s \frac{|x_i|}{16\gamma} + \frac{|x_j|}{16\gamma} \\ &\stackrel{(1.5)}{=} \frac{|x_j|}{8\gamma} \leq \frac{|x_j - x| + |x|}{8\gamma} \stackrel{(1.7)}{<} \frac{2 \text{diam } F_j + 2 \text{diam } F_j}{8\gamma} \\ &= \frac{\text{diam } F_j}{2\gamma} \leq r_j, \end{aligned}$$

dal momento che $\text{diam } F_j \leq 2\gamma r_j$, per (1.4). Quindi $y \in \mathring{B}(x_j, r_j)$.

Step 3: Sia $s > 0$. Consideriamo un insieme di punti tutti distinti $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{S}^{n-1}$ tali che presi qualsiasi due si ha sempre $|x_i - x_j| \geq 1/s$. Allora per la compattezza di $\mathbb{S}^{n-1}$ esiste un numero massimo di punti, chiamiamolo $L(s)$, con le caratteristiche descritte sopra, ovvero $k \leq L(s)$.

In modo analogo sia $M(s)$ la massima cardinalità di un qualsiasi insieme di punti contenuti in $B(0, 1)$, inclusa l'origine, tale che la distanza è almeno tra due punti qualunque dell'insieme sia almeno $1/s$.

Proposizione 1.11. *Sia $s > 0$ e $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto. Sia poi $A \subset K$, tale che presi due qualsiasi punti distinti $x_i, x_j \in A$ si ha $|x_j - x_i| \geq 1/s$. Allora $\text{card}(A) < \infty$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\text{card}(A) = \infty$. Sia quindi $\{x_k\}_{k \geq 1}$ con $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$. Dalla compattezza di K , possiamo trovare una sottosuccessione $\{x_{k_h}\}_{h \geq 1}$ che converge a qualche $x \in K$. Quindi $\{x_{k_h}\}_{h \geq 1}$ è di Cauchy, in particolare per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che per ogni $m, n \geq N_\varepsilon$ si ha $|x_{k_n} - x_{k_m}| < \varepsilon$. Ponendo $\varepsilon = 1/2s$ otteniamo una contraddizione, quindi $\text{card}(A) < \infty$.

Un altro modo è attraverso la totale limitatezza, infatti siccome K è compatto è anche totalmente limitato. Quindi dato $\varepsilon = 1/4s$ esistono $N_\varepsilon < \infty$ e $y_1, \dots, y_n$ punti tali che $K \subset \bigcup_i^{N_\varepsilon} B(y_i, \varepsilon)$. È chiaro che in ogni palla posso trovare al più un punto di A . Infatti se esistessero due punti $x_i, x_j \in A$, con $x_i \neq x_j$ tali che $x_i, x_j \in B(y_l, 1/4s)$ avremmo che $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{4s} + \frac{1}{4s} = \frac{1}{2s} < \frac{1}{s}$, assurdo. Quindi $\text{card}(A) \leq N_\varepsilon$. $\square$

Siano quindi $L(s)$ e $M(s)$, come definiti sopra. Il nostro obiettivo è ora dimostrare che

$$h \leq M(64\gamma^3) + M(8\gamma^2)N(16\gamma).$$

Decomponiamo $\{1, \dots, h\}$ come $J_1 \cup J_2$ dove

$$J_1 := \{1 \leq i \leq h : |x_i| \leq 32\gamma^2 r\}, \quad J_2 := \{1 \leq i \leq h : |x_i| > 32\gamma^2 r\}.$$

Mostreremo prima che la cardinalità di J_1 è al più $M(64\gamma^3)$. Ricordiamo che $t \in (1, 2]$ e per (iii) si ha

$$r \text{ diam } F \leq t \text{ diam } F_j \implies \text{diam } F_i \geq \frac{\text{diam } F}{2} \implies \frac{\text{diam } F}{2\gamma} \geq \frac{\text{diam } F_i}{4\gamma}$$

per ogni $i = 1, \dots, h$. Quindi se $i, j \in J_1$, con $i < j$, allora per (iii) e (1.4) si ha che:

$$|x_i - x_j| \geq r_i \geq \frac{\text{diam } F_i}{2\gamma} \geq \frac{\text{diam } F}{4\gamma} \geq \frac{r}{2\gamma}.$$

Quindi:

$$\left| \frac{x_i}{32\gamma^2 r} - \frac{x_j}{32\gamma^2 r} \right| = \frac{|x_i - x_j|}{32\gamma^2 r} \geq \frac{1}{64\gamma^3}$$

per ogni $x_i, x_j \in J_1$, $x_i \neq x_j$. Per definizione di J_1 entrambi i vettori appartengono a $B(0, 1)$, infatti $|x_i/32\gamma^2 r| \leq 1$ se $x_i \in J_1$. Quindi segue che J_1 ha al più $M(64\gamma^3)$ elementi.

Per dimostrare che la cardinalità di J_2 è al più $M(8\gamma^2)N(16\gamma)$, decomponiamo J_2 come:

$$J_2 = \bigcup_{i \in I} \hat{J}_i, \quad (1.8)$$

dove l'insieme I avrà al più $N(16\gamma)$, mentre per ogni i l'insieme $\hat{J}_i$ avrà cardinalità al più $M(8\gamma^2)$.

Per costruire I e $\hat{J}_i$ procediamo per induzione nel seguente modo. Sia $\mathcal{J}_0 = J_2$. Troviamo il più piccolo indice $i_1 \in \mathcal{J}_0$ tale che $|x_{i_1}| \leq |x_j|$ per ogni $j \in \mathcal{J}_0$. Mettiamo i_1 in I e definiamo

$$\mathcal{J}_1 := \mathcal{J}_0 \setminus \hat{J}_{i_1},$$

dove

$$\hat{J}_{i_1} := \{1 \leq i \leq h : x_{i_{i_1}} \text{ appartiene alla parte interna di } F_{i_1}\}.$$

Supponiamo che $\mathcal{J}_k$ e $\hat{J}_k$ sia stati costruiti e i_k selezionato in modo tale che

$$\mathcal{J}_k := \mathcal{J}_{k-1} \setminus \hat{J}_{i_k}.$$

Se $\mathcal{J}_k$ è vuoto allora il processo è completato. Altrimenti, sia i_{k+1} il più piccolo elemento in $\mathcal{J}_k$ tale che $|x_{i_{k+1}}| \leq |x_j|$ per ogni $j \in \mathcal{J}_k$. Si ponga $i_{k+1} \in I$ e si definisca

$$\mathcal{J}_{k+1} := \mathcal{J}_k \setminus \hat{J}_{i_{k+1}},$$

dove

$$\hat{J}_{i_{k+1}} := \{1 \leq i \leq n : x_{i_{i_{k+1}}} \text{ appartiene alla parte interna di } F_{i_{k+1}}\}.$$

Di conseguenza (1.8) è soddisfatta. Stimiamo ora la cardinalità di I . Notiamo come per costruzione se $i, j \in I$, con $i < j$, allora $|x_i| \leq |x_j|$ e $|x_i|$ non appartiene alla parte interna di F_j , quindi dallo Step 2 segue subito che:

$$\left| \frac{x_i}{|x_i|} - \frac{x_j}{|x_j|} \right| > \frac{1}{16\gamma}.$$

Quindi, per definizione di $L(s)$, deduciamo che I ha al più $L(16\gamma)$ elementi.

Infine, resta da mostrare che la cardinalità di ciascun $\hat{J}_i$ è minore o uguale a $M(8\gamma^2)$. Fissiamo $i \in I$ e consideriamo $k, j \in \hat{J}_i$ con $k < j$. Per costruzione x_i appartiene alla parte interna di F_k e F_j ; quindi $i < j, k$ e

$$|x_k - x_i| \leq \text{diam } F_k \leq 2 \text{diam } F_i \leq 4\gamma r_i, \quad (1.9)$$

dove abbiamo usato (1.4) e (iii), e analogamente

$$|x_j - x_i| \leq 4\gamma r_i. \quad (1.10)$$

Inoltre, poiché $k < j$ per (iii) abbiamo che $x_j \notin F_k$, e dunque

$$|x_k - x_j| \geq r_k \geq \frac{\text{diam } F_k}{2\gamma} \geq \frac{|x_k - x_i|}{2\gamma}, \quad (1.11)$$

dove abbiamo usato (1.4) e (1.9). Quindi, per (iii), siccome $x_i \in F_k$ abbiamo $i < k$, di conseguenza, sempre per (iii), $x_k \notin F_i$ e in particolare $|x_k - x_i| \geq r_i$. Otteniamo quindi:

$$|x_k - x_j| \geq r_k \stackrel{(1.4)}{\geq} \frac{\text{diam } F_k}{2\gamma} \geq \frac{|x_k - x_i|}{2\gamma} \geq \frac{r_i}{2\gamma}. \quad (1.12)$$

Da (1.9) e (1.10) otteniamo:

$$\frac{x_k - x_i}{4\gamma r_i}, \quad \frac{x_j - x_i}{4\gamma r_i} \in B(0, 1),$$

mentre, per (1.12),

$$\left| \frac{x_k - x_i}{4\gamma r_i} - \frac{x_j - x_i}{4\gamma r_i} \right| = \frac{|x_k - x_j|}{4\gamma r_i} \geq \frac{1}{8\gamma^2}.$$

Questo, insieme alla definizione di $M(s)$, implica che la cardinalità di $\hat{J}_i$ è al più $M(8\gamma^2)$. Geometricamente quello che abbiamo appena fatto corrisponde a dividere lo spazio in $L(16\gamma)$ coni e dimostrare che in ogni cono ci possono stare al più $M(8\gamma^2)$ insiemi F_i . $\square$

Siamo ora pronti per dimostrare il Teorema di Ricoprimento di Morse.

Dimostrazione del Teorema 1.8. Per ogni $x \in E$ scegliamo $F(x) \in \mathcal{F}$ tale che $F(x)$ sia un γ -Morse set associato a x . Dividiamo la dimostrazione in due passi.

Step 1: Ricordiamo che E è limitato. Costruiamo una sottofamiglia numerabile di $\mathcal{F}$ che ricopre ancora E . Per (1.3) possiamo scegliere $x_1 \in E$ tale che

$$\text{diam } F(x_1) > \frac{3}{4} \sup_{x \in E} \text{diam } F(x), \quad (1.13)$$

e poniamo $E_2 := E \setminus F(x_1)$. Per induzione, assumendo che $x_1, \dots, x_k$ siano stati scelti, definiamo

$$E_{k+1} := E \setminus \bigcup_{i=1}^k F(x_i). \quad (1.14)$$

Se E_{k+1} è vuoto allora poniamo $J := \{1, \dots, k\}$ e osserviamo che

$$E \subset \bigcup_{i=1}^k F(x_i). \quad (1.15)$$

Altrimenti, ancora per (1.3), scegliamo $x_{k+1} \in E_{k+1}$ tale che

$$\text{diam } F(x_{k+1}) > \frac{3}{4} \sup_{x \in E_{k+1}} \text{diam } F(x). \quad (1.16)$$

Se $E_k \neq \emptyset$ per ogni k , allora poniamo $J := \mathbb{N}$, e affermiamo che

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F(x_k). \quad (1.17)$$

Questo segue facilmente dal fatto che

$$\text{diam } F(x_k) \rightarrow 0. \quad (1.18)$$

Infatti, se (1.18) vale e $x \in E$, allora si può trovare k sufficientemente grande tale che

$$\text{diam } F(x_{k+1}) < \frac{3}{4} \text{diam } F(x).$$

Per (1.16) ne segue che $x \notin E_{k+1}$, e quindi, a seguito di (1.14), concludiamo che

$$x \in \bigcup_{i=1}^k F(x_i).$$

Dimostriamo (1.18). Per ogni $k \in J$ poniamo $F_k := F(x_k)$ e sia $r_k > 0$ tale che

$$B(x_k, r_k) \subset F_k \subset B(x_k, \gamma r_k).$$

e

$$\sup_k r_k \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in E} \text{diam } F(x) =: R < \infty, \quad (1.19)$$

dove abbiamo usato (1.3). Notiamo che, per costruzione, se $i, j \in J$ e $i < j$, allora

$$x_j \notin F_i \quad \text{e} \quad \text{diam } F_i > \frac{3}{4} \text{diam } F_j, \quad (1.20)$$

e quindi $r_i > \frac{3r_j}{4\gamma}$ per (1.4). Inoltre, le palle $\mathring{B}\left(x_i, \frac{r_i}{\beta}\right)$ e $\mathring{B}\left(x_j, \frac{r_j}{\beta}\right)$ sono disgiunte, dove $\beta := \max\{3, 2\gamma\}$. Infatti, poiché $x_j \notin F_i$, allora

$$|x_i - x_j| > r_i = \frac{r_i}{3} + \frac{2r_i}{3} \geq \frac{r_i}{3} + \frac{r_j}{2\gamma} \geq \frac{r_i}{\beta} + \frac{r_j}{\beta}.$$

Poiché

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{B}\left(x_k, \frac{r_k}{\beta}\right) \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, E) < \frac{R}{\beta}\right\},$$

dalla limitatezza di E segue che

$$\mathcal{L}^n \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{B}\left(x_k, \frac{r_k}{\beta}\right) \right) \leq \mathcal{L}^n \left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, E) < \frac{R}{\beta}\right\} \right) < \infty.$$

Concludiamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_k}{\beta} \right)^n < \infty,$$

e quindi $\text{diam } F_k \leq \gamma r_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$. Questo prova (1.18).

Step 2: sia $\{F_i\}_{i \in J}$ la sottofamiglia numerabile di $\mathcal{F}$ costruita nello Step 1 e che ricopre ancora l'insieme limitato E . Se $J = \{1\}$ allora non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, per ogni intero fissato $k > 1$ poniamo

$$I_k := \{i \in J : 1 \leq i < k, F_i \cap F_k \neq \emptyset\}.$$

Per il Lemma 1.9 e per (1.20) esiste un intero $\ell(\gamma, N)$ tale che la cardinalità di I_k è minore di $\ell(\gamma, N)$. Infatti per definizione di I_k abbiamo:

- (i) F_i è un γ -Morse set associato a x_i , ovvero $F_i = F(x_i)$ per ogni $1 \leq i < k$,
- (ii) $F_i \cap F_k \neq \emptyset$ per ogni $1 \leq i < k$,
- (iii) da (1.20) per ogni $i < j$, $x_j \notin F_i$ e $\text{diam } F_j \leq t \text{ diam } F_i$, con $t = 4/3$.

Quindi come già detto:

$$\begin{aligned} \text{card}(I_k) &\leq M(64\gamma^3) + M(8\gamma^2)N(16\gamma) \\ &< M(64\gamma^3) + M(8\gamma^2)N(16\gamma) + 1 = \ell(\gamma, n). \end{aligned}$$

Costruiamo una funzione $\sigma : J \rightarrow \{1, \dots, \ell(\gamma, n)\}$ nel seguente modo. Se $j \leq \ell(\gamma, n)$ poniamo $\sigma(j) := j$. Per $j > \ell(\gamma, n)$ definiamo $\sigma(j)$ ricorsivamente: assumendo che siano stati assegnati $\sigma(1), \dots, \sigma(j-1)$, poniamo $\sigma(j) := h$, dove $h \in \{1, \dots, \ell(\gamma, n)\}$ soddisfa la proprietà

$$F_j \cap F_i = \emptyset \quad (1.21)$$

ogni volta che $i \in \{1, \dots, j-1\}$ è tale che $\sigma(i) = h$. Notiamo che esiste sempre almeno un tale indice h . Infatti, se così non fosse, allora per ogni $h \in \{1, \dots, \ell(\gamma, n)\}$ esisterebbe $i_h \in \{1, \dots, j-1\}$ tale che $\sigma(i_h) = h$ e $F_j \cap F_{i_h} \neq \emptyset$. In particolare, $i_h \in I_{j-1}$. Poiché σ è una funzione si ha che $h \neq h'$ implica $i_h \neq i_{h'}$, questo comporterebbe che la cardinalità di I_{j-1} sia almeno $\ell(\gamma, n)$, assurdo per quanto visto prima. Per $k \in \{1, \dots, \ell(\gamma, n)\}$ poniamo $\mathcal{F}_k := \{F_i : \sigma(i) = k\}$. Poiché se $i \in J$ allora $F_i \in \mathcal{F}_{\sigma(i)}$, per (1.15) e (1.17) abbiamo

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\ell(\gamma, n)} \bigcup_{F \in \mathcal{F}_k} F.$$

Resta da mostrare che elementi distinti di $\mathcal{F}_k$ sono a due a due disgiunti. Infatti, se $i < j$ e $\sigma(i) = \sigma(j)$, allora j è strettamente maggiore di $\ell(\gamma, n)$, e quindi per (1.21) si ha $F_j \cap F_i = \emptyset$. $\square$

Come corollario otteniamo il teorema di ricoprimento di Besicovitch.

Teorema 1.12 (Teorema di ricoprimento di Besicovitch classico). *Esiste una costante ℓ , che dipende solo dalla dimensione $n \geq 1$ di $\mathbb{R}^n$, tale che per ogni collezione $\mathcal{F}$ di palle chiuse (non degeneri) con $\sup\{\text{diam } B : B \in \mathcal{F}\} < \infty$ esistono $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_\ell \subset \mathcal{F}$ sottofamiglie tali che ciascuna $\mathcal{F}_k$, $k = 1, \dots, \ell$, è una famiglia numerabile di palle disgiunte in $\mathcal{F}$ e*

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\ell} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_k} B,$$

dove E è limitato ed è l'insieme dei centri delle palle in $\mathcal{F}$.

Dimostrazione. È sufficiente prendere $\gamma = 1$ e, per ogni $x \in E$, definire $\mathcal{F}_x$ come la famiglia di tutte le palle in $\mathcal{F}$ che hanno centro in x . $\square$

Siamo in grado ora, come preannunciato all'inizio del capitolo sui teoremi di ricoprimento, di enunciare e dimostrare il seguente teorema.

Teorema 1.13 (Teorema di Vitali-Besicovitch-Morse). *Sia μ una misura di Borel su $\mathbb{R}^n$, e sia $\mathcal{F}$ una collezione qualsiasi di palle chiuse non degeneri. Sia A l'insieme dei centri delle palle in $\mathcal{F}$, assumiamo che $\mu(A) < \infty$ e che $\inf\{r : B(a, r) \in \mathcal{F}\} = 0$ per ogni $a \in A$. Allora per ogni insieme aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, esiste una collezione numerabile $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ di palle disgiunte tale che*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \subseteq U \quad e \quad \mu\left((A \cap U) \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) = 0.$$

Dimostrazione. Fissiamo $1 - \frac{1}{\ell} < \theta < 1$, dove ℓ è la costante del Teorema 1.12. Vogliamo mostrare che esiste una collezione finita $\{B_1, \dots, B_{N_1}\}$ di palle chiuse disgiunte in U tale che

$$\mu\left((A \cap U) \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i\right) \leq \theta \mu(A \cap U). \quad (1.22)$$

Sia $\mathcal{F}_1 := \{B \in \mathcal{F} : \text{diam } B \leq 1, B \subseteq U\}$. Dal Teorema di Besicovitch 1.12 esistono $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{\ell(n)}$ famiglie di palle disgiunte in $\mathcal{F}_1$ tali che

$$A \cap U \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell(n)} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B.$$

Dunque,

$$\mu(A \cap U) \leq \sum_{i=1}^{\ell(n)} \mu\left(A \cap U \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B\right).$$

Ne consegue che esiste un intero $j \in \{1, \dots, \ell(n)\}$ tale che

$$\mu\left(A \cap U \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_j} B\right) \geq \frac{1}{\ell(n)} \mu(A \cap U),$$

altrimenti la disuguaglianza sopra fallisce chiaramente. Quindi dalla continuità dal basso della misura μ segue che esistono $B_1, \dots, B_{N_1} \in \mathcal{G}_j$ palle tali che

$$\mu\left(A \cap U \cap \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i\right) \geq (1 - \theta) \mu(A \cap U).$$

Ma

$$\mu(A \cap U) = \mu\left(A \cap U \cap \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i\right) + \mu\left((A \cap U) \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i\right),$$

poiché $\bigcup_{i=1}^{N_1} B_i$ è μ -misurabile essendo la misura di μ di Borel. Quindi:

$$\mu(A \cap U) - \mu\left((A \cap U) \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i\right) \geq (1 - \theta)\mu(A \cap U).$$

Un semplice conto ci dice che la (1.22) è verificata.

Sia ora $U_2 := U - \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i$ e

$$\mathcal{F}_2 := \{B \in \mathcal{F} : \text{diam } B \leq 1, B \subseteq U_2\}.$$

Come sopra, troviamo un numero finito di palle disgiunte $B_{N_1+1}, \dots, B_{N_2}$ tali che

$$\mu\left((A \cap U) \setminus \bigcup_{i=1}^{N_2} B_i\right) = \mu\left((A \cap U_2) \setminus \bigcup_{i=M_1+1}^{N_2} B_i\right) \leq \theta\mu(A \cap U_2) \leq \theta^2\mu(A \cap U).$$

Continuando questo procedimento, si ottiene una collezione numerabile di palle disgiunte in $\mathcal{F}$, contenute in U , tale che

$$\mu\left((A \cap U) \setminus \bigcup_{i=1}^{N_k} B_i\right) \leq \theta^k\mu(A \cap U).$$

Poiché $\theta^k \rightarrow 0$ e $\mu(A) < \infty$, il teorema è dimostrato. $\square$

Osservazione 1.14. Questo teorema implica che l'insieme delle palle euclidee è un ricoprimento μ -adeguato per ogni μ misura di Radon in $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 1.15. Nella dimostrazione di questo teorema non sfruttiamo di per sé la forma geometrica delle palle, ma solamente l'applicabilità del teorema di Besicovitch. Infatti, al posto di un ricoprimento di fine di palle chiuse, possiamo prendere un ricoprimento fine di Morse come definito in (1.6) con l'ipotesi aggiuntiva degli insiemi F di essere chiusi.

Contrariamente ai teoremi di ricoprimento di Vitali, Morse e Besicovitch in cui non è essenziale richiedere che gli insiemi siano chiusi (infatti nel teorema di Morse non lo abbiamo mai specificato), nel teorema appena dimostrato la chiusura degli insiemi che compongono il ricoprimento è una **condizione necessaria** e non può essere abbandonata in generale.

Esempio 1.16. Sia μ una misura di Radon positiva sulla retta reale concentrata sull'insieme numerabile $S = \{1/n : n \geq 1\} \cup \{0\}$, con $\mu(\{x\}) > 0$ per ogni $x \in S$. Consideriamo il ricoprimento fine $\mathcal{F}$ di S i cui membri sono gli intervalli con centro 0 e raggio $1/n$ (per $n \geq 1$), e gli intervalli con centro $1/n$ e raggio $1/m$ con $m > n$. Se tali intervalli sono presi chiusi, allora un sotto-ricoprimento $\mathcal{G}$ di $\mathcal{F}$ si ottiene semplicemente prendendo l'intervallo $I = [-1, 1]$. D'altra parte, se gli intervalli sono presi aperti, non esiste un modo per ottenere un sotto-ricoprimento disgiunto $\mathcal{G}$ a meno di un insieme μ -trascurabile: infatti, se non si scegliesse alcun intorno di 0 in $\mathcal{G}$, allora $0 \notin \bigcup_{I \in \mathcal{G}} I$, mentre mantenere qualche intervallo $(-1/k, 1/k)$, che

quindi contiene lo zero, obbliga a non poter prendere nessuno degli intervalli centrati in $1/k$ per ottenere una famiglia disgiunta, perdendo così la massa concentrata nel punto $1/k$. Questo esempio mostra la necessità di avere palle chiuse nel caso di misure di Radon arbitrarie, mentre se invece consideriamo la misura di Lebesgue le palle possono essere aperte. Nei capitoli successivi le palle quindi saranno sempre considerate chiuse, dovendo utilizzare il Teorema 1.13.

1.2.3 Spazi direzionalmente limitati

Come già accennato all'inizio del capitolo H. Federer in [Fed69] ha esteso la validità del teorema di Besicovitch in spazi metrici in cui la metrica soddisfa la condizione di essere direzionalmente limitata.

Definizione 1.17. Sia (X, ρ) spazio metrico. Dicendo che ρ è *direzionalmente* (ξ, η, ζ) -limitata in A , intendiamo che $A \in X$, $\xi > 0$, $0 < \eta \leq 1/3$, ζ è un intero positivo ed è verificata la seguente condizione:

dato un qualsiasi $a \in A$, $D \subset A \cap (\mathring{B}(a, \xi) \setminus \{a\})$, se ogni volta che prendiamo $b, c \in D$ tali che $b \neq c$, $\rho(a, b) \geq \rho(a, c)$ e $x \in X$ tale che

$$\rho(a, x) = \rho(a, c), \quad \rho(x, b) = \rho(a, b) - \rho(a, c)$$

si verifica che

$$\frac{\rho(x, c)}{\rho(a, c)} \geq \eta,$$

allora $\text{card}(D) \leq \zeta$.

Questa definizione molto articolata ha in $\mathbb{R}^n$ un significato geometrico ben preciso (vedi Figura 1.2).

Proposizione 1.18. Sia $\|\cdot\|$ una qualsiasi norma su $\mathbb{R}^n$, sia ρ la metrica indotta dalla norma, ovvero $\rho(x, y) = \|x - y\|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e sia $A = \mathbb{R}^n$. Allora $(\mathbb{R}^n, \rho)$ è direzionalmente limitato per ogni $\eta > 0$, un opportuno ζ e per ogni $\xi > 0$.

Dimostrazione. Fissiamo $a \in \mathbb{R}^n$, prendiamo $b, c \in \mathbb{R}^n, b \neq c$ tali che $\rho(a, b) \geq \rho(a, c)$ e scegliamo

$$x = a + \frac{\|a - c\|}{\|a - b\|}(b - a),$$

allora x soddisfa banalmente $\rho(a, x) = \rho(a, c)$, $\rho(x, b) = \rho(a, b) - \rho(a, c)$. Possiamo ora riscrivere la prima condizione:

$$\frac{\rho(x, c)}{\rho(a, c)} = \frac{\|x - c\|}{\|a - c\|} = \frac{\|a + \frac{\|a - c\|}{\|a - b\|}(b - a) - c\|}{\|a - c\|} \geq \eta$$

ovvero

$$\frac{\rho(x, c)}{\rho(a, c)} = \left\| \frac{a - c}{\|a - c\|} - \frac{a - b}{\|a - b\|} \right\| \geq \eta.$$

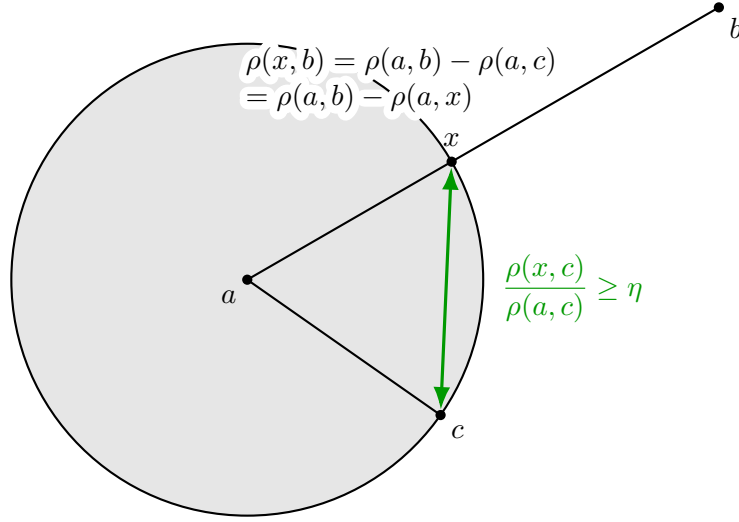


Figura 1.2: Il concetto di *direzionalmente limitato* racchiude e generalizza a contesti più astratti, l'idea secondo cui un cono in una data direzione può contenere solo un certo numero di punti con distanza $\eta > 0$ dal vertice e distanza η l'uno dall'altro. È proprio questa proprietà che permette di limitare il numero di famiglie disgiunte $\ell(n)$ e dimostrare i teoremi di Besicovitch e Morse.

Questo deve succedere per ogni coppia distinta di $b, c \in D$. Quindi, come già visto nel Lemma 1.9, siccome queste direzioni appartengono a $\mathbb{S}^{n-1}$, dalla compattezza di quest'ultima segue che data una qualsiasi $\eta > 0$ esiste sempre un opportuno ζ tale che $\text{card}(D) < \zeta$. Ne consegue che $(\mathbb{R}^n, \rho)$ è *direzionalmente limitato* per ogni $\xi > 0$, non avendo imposto nessuna condizione su ξ . $\square$

È proprio grazie a questa caratteristica che nel Lemma 1.9 possiamo limitare la cardinalità di J_2 e trovare un limite massimo al numero di insiemi disponibili in una configurazione t -satellite. Il ragionamento appena fatto vale per ogni spazio normato finito-dimensionale, non solo $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 1.19. Per dimostrare il fatto che $(\mathbb{R}^n, \rho)$ è *direzionalmente limitato* abbiamo usato la compattezza della sfera unitaria. Sorge quindi spontaneo chiedersi cosa succede se lo spazio in questione non ha questa proprietà. Uno spazio Hilbert di dimensione infinita e separabile (H, d) , non gode della proprietà di essere *direzionalmente limitato*. Infatti sia $V = \{e_n\}$ un base ortonormale infinita per H , $a \in H$, $b = a + e_i$ e $c = a + e_j$. Allora si ha che $b, c \in a + V$ e, sulla falsa riga di quanto fatto prima, preso

$$x = a + \frac{\|e_j\|}{\|e_i\|} e_i \quad \text{risulta verificata} \quad \frac{d(x, c)}{d(a, c)} = \|e_i - e_j\| = \sqrt{2} > \eta$$

per ogni $0 < \eta \leq 1/3$, per ogni $b, c \in a + V$, ma $\text{card}(a + V) = \infty$.

Capitolo 2

Differenziazione di misure di Radon

Utilizzeremo ora i risultati del capitolo precedente sui teoremi di ricoprimento per lo studio della differenziazione delle misure di Radon in $\mathbb{R}^n$. Per semplicità useremo le palle euclidee ma tutti i teoremi che vedremo sono validi anche se rimpiazziamo nelle definizioni e nelle dimostrazioni le palle con F un γ -Morse set chiuso definito come in (1.5) e il raggio con $\text{diam } F$.

Siano quindi μ e ν misure di Radon in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.1. Per ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo

$$\overline{D}_\mu \nu(x) := \begin{cases} \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))} & \text{se } \mu(B(x, r)) > 0 \text{ per ogni } r > 0 \\ +\infty & \text{se } \mu(B(x, r)) = 0 \text{ per qualche } r > 0 \end{cases}$$

e

$$\underline{D}_\mu \nu(x) := \begin{cases} \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))} & \text{se } \mu(B(x, r)) > 0 \text{ per ogni } r > 0 \\ +\infty & \text{se } \mu(B(x, r)) = 0 \text{ per qualche } r > 0. \end{cases}$$

Definizione 2.2. Se $\overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) < +\infty$, diremo che ν è differenziabile rispetto a μ in x e scriviamo

$$D_\mu \nu(x) := \overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x).$$

$D_\mu \nu$ è la **derivata** di ν rispetto a μ . $D_\mu \nu$ prende anche il nome di **densità** di ν rispetto a μ .

Lo scopo di questo capitolo sarà indagare quando $D_\mu \nu$ esiste e quando possiamo recuperare ν integrando $D_\mu \nu$. Per fare ciò abbiamo bisogno del seguente lemma.

Lemma 2.3. *Fissato $0 < \alpha < \infty$, valgono:*

- (i) Se $A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underline{D}_\mu \nu(x) \leq \alpha\}$ allora $\nu(A) \leq \alpha \mu(A)$.

(ii) Se $A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{D}_\mu \nu(x) \geq \alpha\}$ allora $\nu(A) \geq \alpha \mu(A)$.

Dimostrazione. Possiamo assumere $\mu(\mathbb{R}^n), \nu(\mathbb{R}^n) < \infty$, altrimenti basterebbe restringere μ e ν a sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia U un aperto con $A \subseteq U$, dove A soddisfa l'ipotesi di (i). Definiamo

$$\mathcal{F} := \{B \mid B = B(a, r), a \in A, B \subseteq U, \nu(B) \leq (\alpha + \varepsilon) \mu(B)\}.$$

Allora per ogni $a \in A$ si ha $\inf\{r \mid B(a, r) \in \mathcal{F}\} = 0$, e perciò il Teorema 1.13 garantisce l'esistenza di una collezione numerabile $\mathcal{G}$ di palle disgiunte in $\mathcal{F}$ tale che

$$\nu\left(A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) = 0.$$

Da ciò segue che

$$\nu(A) \leq \sum_{B \in \mathcal{G}} \nu(B) \leq (\alpha + \varepsilon) \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu(B) \leq (\alpha + \varepsilon) \mu(U).$$

Poiché questa stima vale per ogni aperto $U \supseteq A$ per la regolarità dall'esterno segue che $\nu(A) \leq (\alpha + \varepsilon) \mu(A)$. Dall'arbitrarietà di ε segue il punto (i). La dimostrazione di (ii) è del tutto analoga. $\square$

Osservazione 2.4. Consideriamo $\mu = \mathcal{L}^n$, la misura di Lebesgue n -dimensionale e definiamo $\nu(B) = \int_B |f| d\mathcal{L}^n$, dove $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Siano poi $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ tali che $B = B(x, r) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{D}_\mu \nu(x) \geq \alpha\}$. Allora dal punto (ii) del lemma precedente otteniamo che

$$\nu(B) = \int_B |f| d\mathcal{L}^n \geq \alpha \mu(B) = \alpha \mathcal{L}^n \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \int_B |f| d\mathcal{L}^n \geq \alpha \right\}.$$

Dividendo per $\alpha > 0$ si trova:

$$\mathcal{L}^n \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \int_B |f| d\mathcal{L}^n \geq \alpha \right\} \leq \frac{1}{\alpha} \int_B |f| d\mathcal{L}^n \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}.$$

Questa è una versione più precisa della stima sulla funzione massimale di Hardy-Littlewood, usata per dimostrare il teorema di differenziazione per la misura di Lebesgue.

2.1 Teorema di Differenziazione per misure di Radon

Teorema 2.5 (Differenziazione delle misure). *Siano μ e ν misure di Radon su $\mathbb{R}^n$. Allora:*

(i) $D_\mu \nu$ esiste ed è finita μ -quasi ovunque;

(ii) $D_\mu \nu$ è μ -misurabile.

Dimostrazione. Possiamo assumere $\nu(\mathbb{R}^n)$, $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$, altrimenti basterebbe restringere μ e ν a sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$.

(i) Sia $I := \{x \mid \overline{D}_\mu \nu(x) = +\infty\}$. Osserviamo che per ogni $\alpha > 0$, $I \subseteq \{x \mid \overline{D}_\mu \nu(x) \geq \alpha\}$. Quindi per il Lemma 2.3 abbiamo

$$\mu(I) \leq \frac{\nu(I)}{\alpha}.$$

Passando al limite per $\alpha \rightarrow \infty$, otteniamo $\mu(I) = 0$, quindi $\overline{D}_\mu \nu(x)$ è finita μ -quasi ovunque. Ora, per ogni $0 < a < b$, definiamo

$$R(a, b) := \{x \mid \underline{D}_\mu \nu(x) < a < b < \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty\}.$$

Ancora una volta dal Lemma 2.3 segue che

$$b\mu(R(a, b)) \leq \nu(R(a, b)) \leq a\mu(R(a, b)),$$

quindi $\mu(R(a, b)) = 0$ dal momento che $b > a$. Inoltre si ha

$$\{x \mid \underline{D}_\mu \nu(x) < \overline{D}_\mu \nu(x) < \infty\} = \bigcup_{\substack{0 < a < b \\ a, b \in \mathbb{Q}}} R(a, b),$$

e di conseguenza $D_\mu \nu$ esiste ed è finita μ -quasi ovunque. Questo conclude la dimostrazione di (i).

(ii) Per prima cosa mostriamo che la funzione $x \mapsto \mu(B(x, r))$ è superiormente semicontinua, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, $\limsup_{y \rightarrow x} \mu(B(y, r)) \leq \mu(B(x, r))$. La stessa asserzione vale anche per ν . Per mostrare ciò scegliamo $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tale che $y_k \rightarrow x$. Definiamo $f_k := \chi_{B(y_k, r)}$ e $f = \chi_{B(x, r)}$. Allora abbiamo che

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k \leq f \text{ e quindi } \liminf_{k \rightarrow \infty} (1 - f_k) \geq (1 - f).$$

Dal lemma di Fatou segue che

$$\int_{B(x, 2r)} (1 - f) d\mu \leq \int_{B(x, 2r)} \liminf_{k \rightarrow \infty} (1 - f_k) d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{B(x, 2r)} (1 - f_k) d\mu;$$

ovvero,

$$\mu(B(x, 2r)) - \mu(B(x, r)) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (\mu(B(x, 2r)) - \mu(B(y_k, r))),$$

semplificando i due termini uguali, notando che $\mu(B(x, 2r)) < \infty$ essendo μ misura di Radon e che $\liminf -\mu(B(y_k, r)) = -\limsup \mu(B(y_k, r))$ otteniamo

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu(B(y_k, r)) \leq \mu(B(x, r)),$$

come volevamo. Quindi essendo le due funzioni $x \mapsto \mu(B(x, r))$ e $x \mapsto \nu(B(x, r))$ superiormente semicontinue sono anche Borel misurabili. Di conseguenza per ogni $r > 0$ anche la funzione

$$f_r(x) := \begin{cases} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))} & \text{se } \mu(B(x, r)) > 0 \\ +\infty & \text{se } \mu(B(x, r)) = 0 \end{cases}$$

è μ -misurabile. Ma

$$D_\mu \nu = \lim_{r \rightarrow 0} f_r = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\frac{1}{k}} \quad \mu\text{-q.o.}$$

e quindi lo è anche $D_\mu \nu$ in quanto limite puntuale di funzioni μ -misurabili. $\square$

2.2 Teorema fondamentale del calcolo per misure di Radon

Daremo ora una condizione necessaria e sufficiente su ν per poterla ricostruire a partire da $D_\mu \nu$ integrando rispetto a μ .

Definizione 2.6. Siano μ e ν misure di Borel su $\mathbb{R}^n$.

- (i) La misura ν è **assolutamente continua** rispetto a μ se per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\mu(A) = 0$ allora $\nu(A) = 0$. Indicheremo ciò con la scrittura:

$$\nu \ll \mu.$$

- (ii) Le misure ν e μ sono **mutualmente singolari** se esiste un sottoinsieme di Borel $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = 0$ e $\nu(B) = 0$. Indicheremo ciò con:

$$\nu \perp \mu.$$

Teorema 2.7 (Differenziazione delle misure di Radon). Siano ν, μ misure di Radon su $\mathbb{R}^n$, con $\nu \ll \mu$. Allora

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu d\mu$$

per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile rispetto a μ .

Dimostrazione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ μ -misurabile. Allora essendo μ misura di Radon esiste un boreliano B tale che $A \subseteq B$ e $\mu(A \setminus B) = 0$, quindi dalla assoluta continuità di ν segue che $\nu(A \setminus B) = 0$, ovvero A è ν -misurabile. Quindi ogni insieme μ -misurabile è anche ν -misurabile. Definiamo

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^n \mid D_\mu \nu(x) = 0\}, \quad I := \{x \in \mathbb{R}^n \mid D_\mu \nu(x) = +\infty\}.$$

Notiamo che Z e I sono entrambi μ -misurabili perché $D_\mu \nu$ lo è. Dal Teorema 2.5 segue che $\mu(I) = 0$ e quindi $\nu(I) = 0$. Sia ora $Z_j = Z \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq j\}$. Abbiamo che Z_j è compatto e quindi ha misura finita. Dal Lemma 2.3 otteniamo che $\nu(Z_j) \leq \alpha \mu(Z_j)$ per ogni $\alpha > 0$. Quindi $\nu(Z_j) = 0$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Di conseguenza

$$\nu(Z) = \nu\left(\bigcup_{j \geq 1} Z_j\right) \leq \sum_{j \geq 1} \nu(Z_j) = 0.$$

Questo implica che

$$\nu(Z) = 0 = \int_Z D_\mu \nu \, d\mu \quad \text{e} \quad \nu(I) = 0 = \int_I D_\mu \nu \, d\mu.$$

Ora sia A μ -misurabile e sia $1 < t < \infty$ fissata. Definiamo per ogni intero m

$$A_m := A \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid t^m \leq D_\mu \nu(x) < t^{m+1}\}.$$

A_m è μ -misurabile e quindi anche ν -misurabile. Inoltre,

$$A \setminus \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} A_m \subseteq Z \cup I \cup \{x \mid \underline{D}_\mu \nu(x) \neq \overline{D}_\mu \nu(x)\};$$

e quindi per le osservazioni fatte sopra, tenendo conto che $A_m \cap A_n = \emptyset$ se $m \neq n$ per costruzione, si ha che

$$\nu\left(A \setminus \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} A_m\right) = 0 \quad \text{ossia} \quad \nu(A) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu(A_m).$$

Di conseguenza il punto (i) del Lemma 2.3 implica:

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu(A_m) \leq \sum_m t^{m+1} \mu(A_m) = \\ &= t \sum_m t^m \mu(A_m) = t \sum_m \int_{A_m} t^m \, d\mu \leq t \int_A D_\mu \nu \, d\mu. \end{aligned}$$

Analogamente, il punto (ii) dello stesso lemma implica:

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_m \nu(A_m) \geq \sum_m t^m \mu(A_m) = t^{-1} \sum_m t^{m+1} \mu(A_m) \geq \\ &\geq t^{-1} \sum_m \int_{A_m} D_\mu \nu \, d\mu = t^{-1} \int_A D_\mu \nu \, d\mu. \end{aligned}$$

Questo significa che:

$$\frac{1}{t} \int_A D_\mu \nu \, d\mu \leq \nu(A) \leq t \int_A D_\mu \nu \, d\mu \quad \text{per ogni } 1 < t < \infty.$$

Ora basta passare al limite per $t \rightarrow 1^+$. □

Osservazione 2.8. Questa è a tutti gli effetti una versione del Teorema di Radon–Nikodym. Abbiamo dimostrato infatti che non solo che ν ha una densità rispetto a μ , ma anche che questa densità $D_\mu \nu$ può essere calcolata «differenziando» ν rispetto a μ . Tali affermazioni costituiscono di fatto il teorema fondamentale del calcolo per le misure di Radon su $\mathbb{R}^n$.

2.3 Famiglia arbitraria di rettangoli

Nei capitoli precedenti, per dimostrare i risultati dei teoremi di differenziazione, abbiamo usato come base per la "differenziazione" di due misure la famiglia delle palle euclidee e abbiamo visto che si possono usare anche insiemi più generali, come quelli descritti da Morse. Infatti per questi insiemi è possibile enunciare e dimostrare il Teorema 1.13.

In questo capitolo invece porteremo un esempio di una collezione di insiemi per cui il teorema di differenziazione (di Lebesgue) fallisce. Vedremo inoltre come questa famiglia non ha delle buone proprietà di ricoprimento.

Lavoreremo in $\mathbb{R}^2$ e con la misura di Lebesgue che per non appesantire la notazione indicheremo con $\mathcal{L}^2 := m$.

Sia

$$\mathcal{R} = \{[a, b] \times [c, d] : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$$

la famiglia dei rettangoli arbitrari con lati paralleli agli assi cartesiani.

Il primo passo sarà mostrare che il teorema di differenziazione di Lebesgue, che non è altro che un caso particolare del Teorema 2.5, fallisce se differenziamo rispetto alla base $\mathcal{R}$. Questo è equivalente a mostrare che:

Proposizione 2.9. *Esiste una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ (positiva) tale che*

$$\limsup_{\text{diam}(R) \rightarrow 0} \frac{1}{m(R)} \int_R f(x-y) dy = \infty$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^2$, dove $R \in \mathcal{R}_0$.

Per dimostrare la precedente proposizione abbiamo bisogno dei seguenti lemmi.

Lemma 2.10. *Sia $\mathcal{R}$ l'insieme di tutti i rettangoli in $\mathbb{R}^2$ con i lati paralleli agli assi coordinati. Si consideri poi l'operatore massimale associato a questa famiglia, cioè*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} f(x) = \sup_{R \in \mathcal{R}} \frac{1}{m(R)} \int_R |f(x-y)| dy.$$

Allora l'applicazione $f \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{R}} f$ non soddisfa la disuguaglianza di tipo debole

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{\mathcal{R}} f(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1}$$

per ogni $\alpha > 0$, per ogni funzione integrabile f e per qualche costante $A > 0$.

Dimostrazione. Possiamo restringerci a considerare $\mathcal{R}_0$, ovvero l'insieme di tutti i rettangoli in $\mathbb{R}^2$ che contengono l'origine, hanno lati paralleli agli assi coordinati, lunghezze dei lati razionali e il cui diametro è al più 4 (notiamo che la famiglia è quindi numerabile). Questo perché essendo $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$ abbiamo che

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0} f > \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{M}_{\mathcal{R}} f > \alpha\}$$

e quindi $m(\{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0} f > \alpha\}) \leq m(\{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{M}_{\mathcal{R}} f > \alpha\})$.

Ci chiediamo se è possibile avere una disuguaglianza di tipo debole (1,1),

$$m(\{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0} f > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \int |f| dm, \quad (2.1)$$

per qualche $A > 0$. Consideriamo $\{f_j\}_{j \geq 1}$ tale che $\text{supp}(f_j) \subset \{|x| < 1/j\}$ e $\int f_j = 1$ per ogni j . Allora per ogni rettangolo $R \in \mathcal{R}_0$ si ha che:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{m(R)} \int f_j(x-y) dy = \frac{\chi_R(x)}{m(R)}.$$

Osserviamo che se $x = (x_1, x_2)$ è tale che $|x| \leq 1$ allora il rettangolo centrato all'origine di lati $4|x_1| \geq \ell_1 > 2|x_1|$, $4|x_2| \geq \ell_2 > 2|x_2|$, $\ell_i \in \mathbb{Q}$, contiene il punto x , $R \in \mathcal{R}_0$ e $m(R) \leq 16|x_1||x_2|$. Si ha quindi che:

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0} f_j(x) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{m(R)} \int f_j(x-y) dy = \frac{\chi_R(x)}{m(R)} \geq \frac{1}{16|x_1||x_2|},$$

dove ci siamo ristretti ad $|x| \leq 1$ e $R \in \mathcal{R}_0$. Dalla definizione di limite inferiore e dalla continuità dal basso della misura segue che:

$$\begin{aligned} m\left(\left\{x : |x| \leq 1, \frac{1}{16|x_1||x_2|} > \alpha\right\}\right) &\leq m\left(\left\{x : |x| \leq 1, \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0} f_j > \alpha\right\}\right) \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} m(\{x : |x| \leq 1, \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0} f_j > \alpha\}). \end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che esista $A > 0$ tale che

$$m(\{x : |x| \leq 1, \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0} f_j > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \int f_j = \frac{A}{\alpha} \quad \text{per ogni } j \geq 1.$$

Per quanto visto prima allora si deve avere che:

$$m\left(\left\{x : |x| \leq 1, \frac{1}{16|x_1||x_2|} > \alpha\right\}\right) \leq \frac{A}{\alpha} \quad (2.2)$$

per qualche $A > 0$. L'insieme che appare sulla sinistra può essere espresso più semplicemente come

$$\{x : |x| \leq 1, |x_1 x_2| < (16\alpha)^{-1}\}.$$

Corrisponde quindi al sottoinsieme del disco unitario compreso tra due iperboli. Si verifica (vedi Appendice A) che l'area dell'insieme per $\alpha \rightarrow \infty$ cresce almeno nell'ordine di grandezza di $\log(16\alpha)/16\alpha$. Questo basta per violare (2.2). $\square$

Lemma 2.11. *Sia $\{E_j\}$ una collezione di sottoinsiemi di un compatto fissato, tale che $\sum_j m(E_j) = \infty$. Allora esiste una successione di traslati $F_j = E_j + x_j$ tale che*

$$\limsup F_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=k}^{\infty} F_j \right) = \mathbb{R}^n,$$

a meno di un insieme di misura nulla.

Per una dimostrazione del precedente lemma si può consultare il Capitolo 10 di [Ste93].

Procediamo ora a costruire una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tale che il teorema di differenziazione di Lebesgue fallisca. L'idea è quella di, grazie al fatto che l'operatore massimale non soddisfa una disuguaglianza debole del tipo (1,1), costruire una funzione $f \in L^1$ che ha un comportamento patologico in un compatto e poi, grazie al lemma precedente, "traslarla" in tutto $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione della Proposizione 2.9. Consideriamo sempre $\mathcal{R}_0$ come nella dimostrazione del Lemma 2.10. Allora $\mathcal{R}_0$ è numerabile, di conseguenza possiamo indicarla come $\mathcal{R}_0 = \{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Segue che:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0} f &= \sup_{R \in \mathcal{R}_0} \frac{1}{m(R)} \int_R |f(x-y)| dy = \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{m(R_j)} \int_{R_j} |f(x-y)| dy \\ &= \sup_{j \in \mathbb{N}} |f| * \varphi_j := \mathcal{M}f \end{aligned}$$

Dove $\varphi_j(y) = \frac{\chi_{R_j}(y)}{m(R_j)}$ e quindi è a supporto compatto in quanto $\text{diam } R \leq 4$ e $0 \in R$ per ogni $R \in \mathcal{R}_0$, anzi possiamo dire che $\text{supp } \varphi_j \subset B(0, 5)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Sia ora B una palla che contenga il supporto tra la convoluzione del cubo unitario Q e $B(0, 5)$. In questo modo se $f \in L^1$ ha supporto in Q allora $\text{supp } \mathcal{M}f \subset \text{supp } f + \text{supp } \varphi_j \subset Q + B(0, 5) \subset B$. Il Lemma 2.10 ci garantisce che $\mathcal{M}f$ non soddisfa una disuguaglianza debole del tipo (1,1). Quindi possiamo trovare per ogni k , un numero positivo α_k , e una funzione $g_k \in L^1$ non nulla supportata nel cubo unitario Q , tali che

$$m(\{x \in B : \mathcal{M}g_k(x) > \alpha_k\}) \geq \frac{2^k}{\alpha_k} \|g_k\|_1.$$

Ora rimpiazziamo g_k con $g'_k = \frac{kg_k}{\alpha_k}$. Allora otteniamo una successione $\{g'_k\}_{k \geq 1} \in L^1$ tale che

$$\frac{m(\{x \in B : \mathcal{M}g'_k(x) > k\})}{\|g'_k\|_1} \geq \frac{2^k}{k} \rightarrow \infty, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Prendendo una sotto-successione da $\{g'_k\}_{k \geq 1}$ (con eventuali ripetizioni, vedi Appendice B), otteniamo una successione $\{f_k\}_{k \geq 1} \in L^1$, e una successione di costanti $L_k \rightarrow \infty$, tali che, ponendo

$$E_k = \{x \in B : \mathcal{M}f_k(x) > L_k\},$$

si ha

$$\sum_k m(E_k) = \infty, \quad \text{mentre} \quad \sum_k \|f_k\|_1 < \infty. \quad (2.3)$$

Senza perdere di generalità possiamo assumere che le f_k siano non negative. Ora, siccome $E_k \subset B$ per ogni $k \geq 1$ secondo il Lemma 2.11, possiamo trovare x_k tali che gli insiemi $F_k = E_k + x_k$ soddisfino la proprietà

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} F_k = \mathbb{R}^2 \quad \text{q.o..}$$

Sia $\tilde{f}_k(x) = f_k(x - x_k)$ e poniamo $F(x) = \sup_k \tilde{f}_k(x)$. Allora: $\mathcal{M}F \geq \sup_k \mathcal{M}\tilde{f}_k$, ma $\mathcal{M}\tilde{f}_k > L_k$ su F_k , quindi $\mathcal{M}F = \infty$ quasi ovunque. Inoltre:

$$\|F\|_1 \leq \sum_k \|\tilde{f}_k\|_1 = \sum_k \|f_k\|_1 < \infty,$$

e dunque $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$. □

Ora, come annunciato ad inizio capitolo, vediamo che un ricoprimento formato da elementi di $\mathcal{R}$ non ha delle buone proprietà di copertura. In particolare è possibile provare che:

Proposizione 2.12. *Sia $Q = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ il quadrato aperto di lato unitario. Allora esiste un sottoinsieme $F \subset Q$ tale che $m(F) = 1$ e per ogni $x \in F$ si può associare una famiglia*

$$\{R_k(x)\}_{k \geq 1}$$

di rettangoli aperti contenenti x e che si contraggono a x , ma per qualsiasi sottofamiglia disgiunta $\{R_{k_h}\}_{h \geq 1} \subset \{R_k(x) : x \in F, k \in \mathbb{N}\}$ di rettangoli valga

$$m\left(F \setminus \bigcup_{h=1}^{\infty} R_{k_h}\right) > \frac{1}{2}.$$

Osservazione 2.13. I rettangoli qui sono aperti, ma come già osservato in (1.16) quando lavoriamo con la misura di Lebesgue il Teorema 1.13 rimane valido anche per ricoprimenti aperti.

Il primo a portare questo controesempio, considerando rettangoli chiusi, fu C. Carathéodory in [Car27]. La dimostrazione della Proposizione 2.12 è da attribuire a M. De Guzmán in [Guz75], che riporta l'esempio di Carathéodory semplificandolo considerando, appunto, rettangoli aperti.

Appendice

Appendice A

Consideriamo l'insieme $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, |xy| \leq (16\alpha)^{-1}\}$. A noi basta una stima dal basso per $\alpha \rightarrow \infty$. Sia quindi $\alpha > 1/8$. Ci restringiamo nel primo quadrante e troviamo i punti di intersezione tra il ramo di iperbole e la circonferenza unitaria. Risolvendo (utilizzando l'identità $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ xy = \frac{1}{16\alpha}, \end{cases} \quad (x > 0, y > 0)$$

otteniamo che le ascisse sono:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{8\alpha}} \pm \sqrt{1 - \frac{1}{8\alpha}}}{2}.$$

Allora:

$$\begin{aligned} m(E) &\geq \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{16\alpha x} dx = \frac{1}{16\alpha} \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \\ &= \frac{1}{16\alpha} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{8\alpha}} + \sqrt{1 - \frac{1}{8\alpha}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{8\alpha}} - \sqrt{1 - \frac{1}{8\alpha}}}\right). \end{aligned}$$

Razionalizzando e passando al limite otteniamo:

$$m(E) \geq \frac{1}{16\alpha} \ln\left(8\alpha\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{64\alpha^2}}\right)\right) \sim \frac{\log(16\alpha)}{16\alpha} \text{ per } \alpha \rightarrow \infty.$$

Appendice B

Vediamo qui nel dettaglio un passaggio della dimostrazione della Proposizione 2.9. In particolare vedremo che esiste effettivamente una successione $\{f_k\}_{k \geq 1} \in L^1$ che soddisfa le proprietà richieste nella dimostrazione. Il lemma fondamentale è il seguente:

Lemma 2.14. *Sia $\{c_n\}_{n \geq 1}$ una successione di numeri tali che $0 < c_n < C/n$ per qualche $C > 0$. Allora esiste una funzione $N(n) : \{1, 2, \dots\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ tale che*

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} N(n)nc_n = \infty \quad e \quad (**) \quad \sum_{n=1}^{\infty} N(n)c_n < \infty.$$

Dimostrazione. Ci sono due casi:

- Se $\limsup_{n \rightarrow \infty} nc_n = \rho > 0$, scegliamo una sottosuccessione come segue:

$$n_1 = \min\{n : c_n < 1 \text{ e } nc_n > \rho/2\}$$

e proseguiamo per induzione:

$$n_{k+1} = \min\left\{n > n_k : c_n < 2^{-k-1} \text{ e } nc_n > \frac{\rho}{k+1}\right\}.$$

Poniamo $N(n) = 1$ se $n = n_k$ per qualche k , e zero altrimenti. Il risultato segue immediatamente.

- Altrimenti, $\lim_{n \rightarrow \infty} nc_n = 0$. Sia $n_k = 2^k$ per $k = 1, 2, \dots$, $N(n_k) = \left\lfloor \frac{1}{n_k c_{n_k}} \right\rfloor$, e per ogni altro n , poniamo $N(n) = 0$. Allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(n_k)n_k c_{n_k} = 1,$$

e quindi la serie $(*)$ diverge. Inoltre,

$$N(n_k)c_{n_k} \leq \frac{c_{n_k}}{n_k c_{n_k}} = \frac{1}{n_k} = 2^{-k},$$

e dunque la serie $(**)$ converge.

□

Siano B e g'_k come nella dimostrazione della Proposizione 2.9. Abbiamo quindi che $E_k = \{x \in B : \mathcal{M}g'_k(x) > k\}$. Per definizione $E_k \subset B$, si ha quindi $m(E_k) < m(2B)$ per ogni $k \geq 1$, dove $2B$ è la palla di raggio doppio concentrica a B . Siccome

$$\frac{m(\{x \in B : \mathcal{M}g'_k(x) > k\})}{\|g'_k\|_1} \geq \frac{2^k}{k}$$

abbiamo che:

$$0 < \|g'_k\| \leq \frac{k}{2^k} m(E_k) < \frac{1}{k} m(E_k) < \frac{1}{k} m(2B)$$

per ogni $k \geq 5$. Per quanto visto prima esiste $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $\frac{m(E_k)}{k} > c_k > \|g'_k\| > 0$ per ogni $k \geq 5$. Ponendo $C = m(2B)$, segue dal Lemma 2.14 che esiste una funzione $N(k) : \{1, 2, \dots\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ tale che

$$\sum_k N(k) \|g'_k\| < \sum_n N(k) c_k < \infty, \text{ mentre } \infty = \sum_n N(k) k c_k \leq \sum_k N(k) m(E_k).$$

La sotto-successione delle f_k corrisponde quindi alla successione delle g'_k prese $N(k)$ volte. Siccome ad ogni passo $N(k)$ è finito avremmo che la successione di costanti $L_k = k_1, \dots, k_1, k_2, \dots$ con k_i preso $N(k_i)$ volte divergerà in quanto $k_i < k_{i+1}$ per costruzione. Per $k = 1, \dots, 4$ è possibile porre $N(k) = 0$, visto che non soddisfano le ipotesi del lemma, ma comunque un numero finito di eccezioni non influisce sul risultato.

Bibliografia

- [AFP00] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco e Diego Pallara. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, Oxford University Press, 2000.
- [Car27] Constantin Carathéodory. *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Leipzig: B. G. Teubner, 1927, pp. 689–692.
- [EG15] Lawrence C. Evans e Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, 2015.
- [Fed69] Herbert Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer, 1969.
- [FL07] Irene Fonseca e Giovanni Leoni. *Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces*. Springer Science+Business Media, 2007.
- [Guz75] Miguel de Guzmán. *Differentiation of Integrals on $\mathbb{R}^n$* . Springer, 1975.
- [Mat95] Pertti Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidian Spaces. Fractals and Rectifiability*. Cambridge University Press, 1995.
- [Ste93] Elias M. Stein. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton University Press, 1993.

Ringraziamenti

Con molta semplicità ringrazio la mia famiglia e i miei amici per essermi vicino e per farmi sentire sempre il loro affetto.

Ringrazio il mio relatore, il professor Monti, per la disponibilità, pazienza e cura che ha avuto nei miei confronti.

Colgo l'occasione per ringraziare in modo speciale i miei compagni di corso. Sono riusciti infatti a rendere questi tre anni di università molto più leggeri. Senza di loro sarebbe stato più difficile e, sicuramente, meno divertente. Un grazie particolare a Giulia, Andrea, Mattia, Riccardo, Giorgio, Chiara, Alessandro, Simone ed Aris.