Università degli Studi di Padova
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di laurea triennale in Matematica

Disuguaglianza di Brunn-Minkowski per la capacità: il caso di uguaglianza

Relatore: Roberto Monti

Laureando: Alessandro Pirrello

Padova, 24 settembre 2009

Introduzione

In questa tesi discutiamo il caso di uguaglianza nella disuguaglianza di Brunn-Minkowski per la capacità, seguendo il lavoro di Caffarelli, Jerison e Lieb [2].

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, un aperto limitato non vuoto con frontiera lipschitziana. Consideriamo $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, soluzione unica del *problema esterno*

$$\begin{cases} \Delta U = 0, \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega} \\ U = 1, \text{ su } \partial\Omega \\ \lim_{|x| \to +\infty} U(x) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

U si dice *potenziale capacitario* di Ω. Si definisce *capacità* di Ω il numero reale

$$\operatorname{cap} \Omega = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{U(x)}{-\Gamma(x)},$$

dove $\Gamma(x) = \frac{1}{N(2-N)\,\omega_N} \frac{1}{|x|^{N-2}}$, con $x \neq 0$ e ω_N misura di Lebesgue di $B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$, è la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace Δ in $\mathbb{R}^N$.

Osservazione 1. Elenchiamo alcune proprietà della *capacità* e del *potenziale capacitario* U.

i) $0 < U(x) < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$.

ii) $\operatorname{cap}(\Omega) > 0$.

iii) $\operatorname{cap}(\Omega) = \operatorname{cap}(x + \Omega)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

iv) $\operatorname{cap}(\lambda\Omega) = \lambda^{N-2}\operatorname{cap}(\Omega)$ per ogni $\lambda > 0$.

v) Se $\Omega_1 \subset \Omega_2$ allora $\operatorname{cap}(\Omega_1) \leq \operatorname{cap}(\Omega_2)$.

Teorema 1 (Borell)**.** *Siano $N \geq 3$, Ω_0 e Ω_1 due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}^N$ aperti, convessi e limitati. Allora*

$$(\operatorname{cap} \Omega_t)^{1/(N-2)} \geq (1-t) \operatorname{cap} \Omega_0^{1/(N-2)} + t \operatorname{cap} \Omega_1^{1/(N-2)}, \tag{2}$$

dove

$$\Omega_t = (1-t)\,\Omega_0 + t\,\Omega_1 := \{(1-t)\,x + t\,y : x \in \Omega_0, y \in \Omega_1\},$$

con $0 \leq t \leq 1$, è la combinazione convessa di Ω_0 e Ω_1.

Questo risultato è dovuto a Borell, [1].

Osservazione 2. Se Ω_0 e Ω_1 differiscono per una traslazione e una dilatazione, allora, usando i punti *iii*) e *iv*) dell'Osservazione 1, si deduce che nella disuguaglianza (2) vale l'uguaglianza per ogni $t \in (0,1)$. Infatti, dato Ω_1, sia $\Omega_0 = x_0 + \lambda\,\Omega_1$, con $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$. Allora

$$\begin{aligned}(1-t)\operatorname{cap}\Omega_0^{1/(N-2)} + t\operatorname{cap}\Omega_1^{1/(N-2)} &= (1-t)\,\lambda\operatorname{cap}\Omega_1^{1/(N-2)} + t\operatorname{cap}\Omega_1^{1/(N-2)}\\ &= \operatorname{cap}\Omega_1^{1/(N-2)}\big((1-t)\,\lambda + t\big).\end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}(\operatorname{cap}\Omega_t)^{1/(N-2)} = \operatorname{cap}\Big((1-t)\ \lambda\ \Omega_1 + t\ \Omega_1\Big)^{1/(N-2)} &= \operatorname{cap}\Big(\big((1-t)\ \lambda + t\big)\Omega_1\Big)^{1/(N-2)}\\ &= (\operatorname{cap}\Omega_1)^{1/(N-2)}\big((1-t)\ \lambda + t\big),\end{aligned}$$

poiché, per la convessità di Ω_1,

$$\begin{aligned}(1-t)\ \lambda\ \Omega_1 + t\ \Omega_1 &= \{(1-t)\ \lambda\ x + t\ y,\ \text{con } x, y \in \Omega_1\}\\ &= \Big\{\big((1-t)\ \lambda + t\big)\Big(\frac{(1-t)\ \lambda}{(1-t)\ \lambda + t}\ x + \frac{t}{(1-t)\ \lambda + t}\ y\Big),\ \text{con } x, y \in \Omega_1\Big\}\\ &= \big\{\big((1-t)\ \lambda + t\big)z,\ \text{con } z \in \Omega_1\big\} = \big((1-t)\ \lambda + t\big)\Omega_1.\end{aligned}$$

In questo lavoro di tesi mostriamo che vale anche il viceversa dell'Osservazione 2, e precisamente:

Teorema 2 (Caffarelli-Jerison-Lieb)**.** *Se in* (2) *vale l'uguaglianza per un* $t \in (0,1)$ *allora* Ω_0 *e* Ω_1 *sono l'uno il traslato e il dilatato dell'altro.*

Si considera il caso $N \geq 3$. Per $N = 2$ esiste una teoria simile, dove però la *capacità* è sostituita dal *capacità logaritmica* (vedi [4]).

La dimostrazione del Teorema 2 è dovuta a Caffarelli, Jerison e Lieb, [2]. Si veda anche l'articolo di Colesanti e Salani [3], dove è discusso il caso della p-capacità per $1 < p < N$.

La dimostrazione del Teorema 2 è suddivisa in quattro capitoli. I primi due sono dedicati a fissare la notazione e a fornire alcuni risultati preliminari. Gli insiemi convessi limitati e regolari verranno individuati dalle loro *funzioni di supporto*. Nel capitolo 2 vengono calcolate la *variazione prima e seconda della capacità*, che possono essere espresse tramite un operatore differenziale lineare del secondo ordine sulla sfera. I capitoli 3 e 4 sono il corpo della dimostrazione. Nel capitolo 3 si dimostra il Teorema 2 nel caso in cui gli insiemi Ω_0 e Ω_1 siano prossimi alla palla unitaria di $\mathbb{R}^N$. Nel capitolo 4 si discute il caso generale usando un argomento di continuazione analitica.

Il Teorema 2 è stato motivato dalla risoluzione del problema di Minkowski per la capacità elettrostatica, formulato e risolto da Jerison in [8]. Sia U il potenziale capacitario del convesso Ω. Per un teorema di Dahlberg (vedi [5], Teorema 3) $|\nabla U|^2$ è $\mathcal{H}^{N-1}$-integrabile su $\partial\Omega$. Consideriamo su $\mathbb{S}^{N-1}$ la misura push-forward $\nu_\Omega := g_*(|\nabla U|^2\mathcal{H}^{N-1})$, dove g è la mappa di Gauss di $\partial\Omega$. Il problema di Minkowski per la capacità consiste nel dare condizioni su una misura ν su $\mathbb{S}^{N-1}$ affinché esista un convesso $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tale che $\nu_\Omega = \nu$. In effetti, se $N \geq 4$, un tale Ω esiste se e solo se

a) $\nu\big(\{\xi \in \mathbb{S}^{N-1} : (\xi \cdot e) > 0\}\big) > 0$ per ogni $e \in \mathbb{S}^{N-1}$,

b) $\int_{\mathbb{S}^{N-1}} e \cdot \xi \, d\nu(\xi) = 0$ per ogni $e \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Per $N = 3$, le condizioni *a)* e *b)* sono equivalenti all'esistenza di un $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tale che $\nu = c\nu_\Omega$ per qualche $c > 0$.

Dal Teorema 2 segue che la soluzione Ω è unica a meno di traslazioni per $N \geq 4$, ovvero a meno di una traslazione e una dilatazione per $N = 3$.

Concludiamo con una considerazione terminologica. La denominazione "disuguaglianza di Brunn-Minkowski" allude alla disuguaglianza classica di Brunn-Minkowski per la misura N-dimensionale di Lebesgue V_N in $\mathbb{R}^N$ (vedi [9]).

Teorema 3 (Disuguaglianza di Brunn-Minkowski classica)**.** *Siano K_0 e K_1 due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ compatti convessi con interno non vuoto e sia $t \in [0,1]$. Allora*

$$V_N\Big((1-t)K_0 + tK_1\Big)^{1/N} \geq (1-t)V_N(K_0)^{1/N} + tV_N(K_1)^{1/N}. \tag{3}$$

L'uguaglianza per un $t \in (0,1)$ in (3) *vale se e solo se K_0 e K_1 differiscono per una traslazione e una dilatazione.*

La disuguaglianza (3) vale per insiemi qualsiasi, a patto di intendere con V_N la misura esterna di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ (vedi [7]). Al contrario, non è noto se la disuguaglianza (2) valga per insiemi non convessi (eventualmente regolari).

Capitolo 1

Mappa di Gauss, funzione di supporto e sue derivate covarianti

1.1 Mappa di Gauss

Definizione 1 (Insieme aperto di classe $\mathcal{C}^k$). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Si dice che Ω è di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, se, per ogni punto $x_0 \in \partial\Omega$, esistono un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^N$ di x_0 e una funzione $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$ (chiamata* funzione definiente*) tali che $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ e $\partial\Omega \cap U = \{x \in U : \varphi(x) = 0\}$.*

Se $\varphi(x) < 0$ per $x \in U \cap \Omega$, il vettore

$$\nu(x_0) = \frac{\nabla\varphi(x_0)}{|\nabla\varphi(x_0)|}$$

si dice normale esterna *a $\partial\Omega$ nel punto $x_0 \in \Omega$.*

Definizione 2 (Insieme convesso). *Un insieme A si dice* convesso *se per ogni $x, y \in A$, si ha $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$, con $\lambda \in]0,1[$.*

Un insieme A si dice strettamente convesso *se è convesso e per ogni $x, y \in \partial A$, si ha $\lambda x + (1-\lambda)y \in Int(A)$, con $\lambda \in]0,1[$.*

Definizione 3 (Mappa di Gauss). *Dato un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ di classe $\mathcal{C}^1$, si chiama* mappa di Gauss *relativa ad Ω l'applicazione*

$$\begin{aligned} g : \partial\Omega &\longrightarrow \mathbb{S}^{N-1} \\ x &\longmapsto g(x) = \nu(x), \end{aligned}$$

dove $\nu(x)$ è la normale esterna a $\partial\Omega$ spiccata dal punto x.

Definizione 4 (Curvatura di Gauss). *Sia S una* superficie *in $\mathbb{R}^N$, e sia $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{S}^{N-1}$ la* mappa di Gauss*. Si definisce* curvatura di Gauss *la funzione*

$$K = \det(dg), \tag{1.1}$$

dove $dg\colon T_x\partial\Omega \to T_{g(x)}\mathbb{S}^{N-1}$ è il differenziale *di g in $x \in \partial\Omega$.*

Osservazione 3. (*i*) Se Ω è un insieme convesso allora, in generale, $\partial\Omega$ non è un insieme di classe $\mathcal{C}^1$. Tuttavia, $\partial\Omega$ è localmente il grafico di una funzione lipischitziana. Inoltre, per il teorema di Rademacher, le funzioni lipschitziane sono differenziabili quasi ovunque. Quindi, considerando la mappa di Gauss g, essa è definita per $\mathcal{H}^{N-1}$ - quasi ogni punto del bordo, dove $\mathcal{H}^{N-1}$ è la misura di Hausdorff $(N-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^N$.

(*ii*) Aggiungendo ipotesi sull'aperto convesso Ω possiamo conferire a g una maggiore regolarità.

Se $\Omega \in \mathcal{C}^2$, allora g è *suriettiva* e di classe $\mathcal{C}^1$.

Se, inoltre, Ω ha *curvatura di Gauss* strettamente positiva, allora g è anche *iniettiva.*

Suriettività: consideriamo un vettore unitario $v \in \mathbb{S}^{N-1}$. E' così individuata una famiglia di piani ad esso ortogonali. Poiché $\partial\Omega$ è di classe $\mathcal{C}^2$, localmente, attorno ad ogni punto del bordo, è definita con continuità una base ortonormale per ogni spazio tangente. In particolare, dunque, fra tutti i piani ortogonali a v, posso scegliere quello tangente a $\partial\Omega$ in un certo punto $x \in \partial\Omega$. Siccome Ω è convesso, Ω sta interamente da una sola parte rispetto a tale piano tangente. In questo modo v, per una scelta opportuna del verso, rappresenta la normale esterna a $\partial\Omega$ in x.

Iniettività: supponiamo che la curvatura di Gauss, K, di Ω sia strettamente maggiore di zero. Se ci fossero due punti $x_1, x_2 \in \partial\Omega$, $x_1 \neq x_2$, tali che $g(x_1) = g(x_2)$, allora il piano tangente a $\partial\Omega$ in x_1 dovrebbe coincidere con quello in x_2. Tuttavia, ancora per la convessità, Ω sta tutto da una sola parte rispetto a ciascuno dei suoi piani tangenti. Quindi il segmento $[x_1, x_2]$ risulterebbe tutto contenuto in $\partial\Omega$. Questo sarebbe in contraddizione con l'ipotesi di curvatura $K(x) > 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

(*iii*) Se $K(x) > 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$, allora Ω è *strettamente convesso.*

Consideriamo quindi un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato, di classe $\mathcal{C}^2$ e con curvatura di Gauss K strettamente positiva. In tal caso g è *biiettiva* e ha dunque senso introdurre la funzione f, inversa di g, ponendo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^{N-1} &\longrightarrow \partial\Omega \\ \xi &\longmapsto f(\xi) = g^{-1}(\xi). \end{aligned}$$

1.2 Funzione di supporto

Definizione 5. *Si chiama* funzione di supporto*, relativa ad un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, la funzione*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{S}^{N-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto u(\xi) = \sup_{x\in\Omega} \langle \xi, x \rangle , \end{aligned} \tag{1.2}$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$.

Lemma 1. *Sia u la* funzione di supporto *di un aperto convesso limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Allora*

$$u(\xi) = \langle \xi, f(\xi) \rangle \,, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{S}^{N-1}, \tag{1.3}$$

dove $f : \mathbb{S}^{N-1} \to \partial\Omega$ è la funzione inversa della mappa di Gauss relativa a $\partial\Omega$.

Dimostrazione. Sia $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Non è restrittivo supporre che Ω sia contenuto interamente nel primo quadrante, $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0 \ \ \forall\, i = 1, \dots, N\}$. Consideriamo $\langle \xi, x\rangle$, al variare di tutti gli elementi $x \in \Omega$. Il valore $\langle \xi, x\rangle$, con $x \in \Omega$, esprime la lunghezza della proiezione ortogonale di x sulla retta generata da ξ. Tale lunghezza risulta massima esattamente per $x_0 = f(\xi)$. Infatti ξ individua il piano tangente ad Ω in x_0, e, per convessità, Ω giace tutto da un'unica parte rispetto a $T_{x_0}\partial\Omega$. Questo significa che per ogni altro $x \in \Omega$, $x \neq x_0$, si ha $u(x) \leq u(x_0)$. □

Osservazione 4. La funzione u, definita su $\mathbb{S}^{N-1}$, si può estendere su tutto $\mathbb{R}^N$ in modo *1-omogeneo*

$$u(r\xi) = r\, u(x), \qquad r \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{S}^{N-1}. \tag{1.4}$$

Analogamente, la funzione f, definita su $\mathbb{S}^{N-1}$, si estende su tutto $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ in modo *0-omogeneo*

$$f(r\xi) = f(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{S}^{N-1}. \tag{1.5}$$

Lemma 2. *Sia Ω un aperto limitato tale che $K(x) > 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Siano u ed f di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{S}^{N-1})$, rispettivamente la sua funzione di supporto e l'inversa della mappa di Gauss ad esso relativa. Allora, in $\mathbb{R}^N$ vale*

$$\nabla u(\xi) = \Big(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_N}\Big) = f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{S}^{N-1}. \tag{1.6}$$

Dimostrazione. Per quanto visto nel Lemma precedente, in $\mathbb{R}^N$ abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_{k=1}^N \xi_k f_k(\xi) = \sum_{k=1}^N \Big(\delta_{ik} f_k(\xi) + \xi_k \frac{\partial f_k(\xi)}{\partial \xi_i}\Big) = f_i(\xi) + \Big\langle \xi, \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi) \Big\rangle \,,$$

con $i = 1, \dots, N$.
Indicando $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$, si tratta di provare che $\langle \xi, \partial_i f(\xi)\rangle = 0$.
Scomponiamo l'operatore ∂_i nelle sue componenti *tangenziale* e *normale* rispetto a $\mathbb{S}^{N-1}$, e riscriviamolo come *somma diretta*

$$\partial_i = \partial_i^T + \partial_i^N.$$

La proprietà (1.5), che esprime un comportamento di *invarianza radiale* della funzione f, implica che $\partial_i^N f(\xi) = 0$, per ogni $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Allora rimane

$$\langle \xi, \partial_i f(\xi)\rangle = \big\langle \xi, \partial_i^T f(\xi) \big\rangle \,.$$

Fissiamo ora $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$, e consideriamo una *curva* $\gamma\colon]-\delta,\delta[\to \mathbb{S}^{N-1}$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $\gamma(0) = \xi$ e $\dot\gamma(0) = \partial_i^T(\xi)$. I vettori $\partial_i^T(\xi)$ appartengono (ed, anzi, ne formano una *base*) allo *spazio tangente* di $\mathbb{S}^{N-1}$ in ξ.
Definiamo la funzione

$$\begin{aligned} \varphi :]-\delta,\delta[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \langle \xi, f(\gamma(t)) \rangle \,. \end{aligned}$$

Per il punto (1.3) e poiché $\partial\Omega$ è compatto φ assume massimo in $t = 0$. Dunque

$$0 = \varphi'(0) = \left\langle \xi, \partial_i^T f(\xi) \right\rangle,$$

che conclude la prova. □

1.3 Derivata covariante *prima* e *seconda* della funzione u

Definizione 6 (Piano tangente)**.** *Data una ipersuperficie $S \subset \mathbb{R}^N$ di classe $\mathcal{C}^1$, e considerato un punto $p \in S$, si definisce* piano tangente *ad S in p l'insieme T_pS generato dai vettori tangenti alle curve contenute in S e che passano per p.*

$$T_pS = \left\{ \dot\gamma(t_0) \mid \gamma\colon]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\to S \text{ è una curva di classe } \mathcal{C}^1, \exists\, \varepsilon > 0, \gamma(t_0) = p \right\}$$

Vogliamo definire la *derivata covariante seconda* di una funzione $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{S}^{N-1})$. Sfruttando la proprietà (1.4), estendiamo la funzione $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}^{N-1})$ a tutto $\mathbb{R}^N$. Sia $\{e_1, \dots, e_{N-1}\}$ una base *ortonormale* per $T_\xi\mathbb{S}^{N-1}$. Essa non è definita globalmente su $\mathbb{S}^{N-1}$: lo è su $\mathbb{S}^{N-1} \setminus \{\xi_0\}$, dove ξ_0 è un qualsiasi punto di $\mathbb{S}^{N-1}$. Ciònonstante tale situazione non sarà una difficoltà per il seguito, dal momento che il nostro studio sarà locale.

La nozione di *derivata covariante* riguarda i campi vettoriali. Quando ci si riferisce ad una funzione, si chiama *derivata covariante prima* la sua derivata usuale, e *derivata covariante seconda* la *derivata covariante* del campo vettoriale gradiente generato dalla funzione.

Fissiamo alcune notazioni.
Definiamo

$$D_iu = \langle \nabla u, e_i \rangle\,, \qquad\qquad i = 1, \dots, N-1.$$

Data una curva $\gamma\colon]-\delta,\delta[\to \mathbb{S}^{N-1}$ di classe $\mathcal{C}^1$, tale che $\dot\gamma(0) = e_i$, indichiamo

$$D_ie_j = \frac{d}{dt}\, e_j\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t=0}, \tag{1.7}$$

dove e_j e D_ie_j sono pensati come elementi di $\mathbb{R}^N$.
Definiamo il *gradiente sferico* di u come

$$\nabla_{\mathbb{S}^{N-1}}u = \sum_{i=1}^{N-1} \langle \nabla u, e_i \rangle\, e_i = \sum_{i=1}^{N-1} (D_iu)e_i. \tag{1.8}$$

Definizione 7 (Derivata convariante)**.** *Sia dato un* campo vettoriale $Z = \sum_{k=1}^{N-1} v_k e_k$*, con* $v_k \colon \mathbb{S}^{N-1} \to \mathbb{R}$*. Si definisce* derivata covariante *di* Z lungo e_i*, il vettore*

$$\nabla_{e_i} Z := D_{e_i} Z - \langle D_{e_i} Z, \nu_{\mathbb{S}^{N-1}} \rangle \, \nu_{\mathbb{S}^{N-1}}, \tag{1.9}$$

dove $\nu_{\mathbb{S}^{N-1}}$ *è il* campo normale esterno *ad* $\mathbb{S}^{N-1}$*.*

Nel seguito scriviamo ν in luogo di $\nu_{\mathbb{S}^{N-1}}$, e anche $\nabla_i Z = \nabla_{e_i} Z$. In particolare, applichiamo la Definizione 7 al *campo vettoriale* $Z = \nabla_{\mathbb{S}^{N-1}} u$. Ricordando il punto (1.8), troviamo la formula

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} Z &= D_i \sum_{k=1}^{N-1} (D_k u) e_k - \left\langle D_i \sum_{k=1}^{N-1} (D_k u) e_k, \nu \right\rangle \nu \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \big((D_i D_k u) e_k + (D_k u) D_i e_k \big) - \sum_{k=1}^{N-1} D_k u \, \langle D_i e_k, \nu \rangle \, \nu. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Se moltiplichiamo la (1.10) scalarmente con il vettore e_j, ovvero proiettiamo lungo la compontente *j-esima*, otteniamo l'entrata di posto (i, j) della matrice quadrata

$$\big(\nabla_{ij} u \big)_{\substack{i=1,\dots,N-1 \\ j=1,\dots,N-1}}$$

così definita:

$$\nabla_{ij} u = \langle \nabla_{e_i} Z, e_i \rangle = D_i D_j u + \sum_{k=1}^{N-1} D_k u \, \langle D_i e_k, e_j \rangle \,. \tag{1.11}$$

$\nabla_{ij} u$, $i, j = 1 \dots, N-1$, sono le *derivate covarianti seconde* di u rispetto alla base $\{e_1, \dots, e_{N-1}\}$. Vogliamo esprimere la *curvatura di Gauss* di $\partial\Omega$ tramite la *matrice jacobiana* di f. Abbiamo scelto, per ipotesi, Ω di classe $\mathcal{C}^2$ e con $K(x) > 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$, così che le funzioni f e g siano globalmente l'una l'inversa dell'altra (Osservazione 3). Sfruttiamo questa situazione. Poiché $g \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$ è un *diffeomorfismo* tra $\partial\Omega$ e $\mathbb{S}^{N-1}$, il *Teorema della funzione inversa* garantisce che $dg(x) = \big(df(g(x))\big)^{-1} = \big(df(\xi)\big)^{-1}$, con $\xi = g(x)$, $x \in \partial\Omega$. Per fare i conti possiamo dunque partire da df, e per concludere considerarne il reciproco.

Proposizione 1. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto limitato di classe* $\mathcal{C}^2$ *tale che* $K(x) > 0$ *per ogni* $x \in \partial\Omega$*. Allora*

$$\frac{1}{K} = \det(\nabla_{ij} u + u \, \delta_{ij}), \tag{1.12}$$

dove u *è la funzione di supporto di* Ω*.*

Dimostrazione. Fissiamo $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$, e consideriamo la "mappa tangente"

$$df(\xi) : T_\xi \mathbb{S}^{N-1} \longrightarrow T_{f(\xi)} \partial\Omega.$$

Questa è una mappa *lineare*, e, poiché $T_\xi \mathbb{S}^{N-1} = T_{f(\xi)}\partial\Omega$, df è un *endomorfismo* di $T_\xi \mathbb{S}^{N-1}$ in sé. Ovvero, si ha

$$df(\xi) : T_\xi \mathbb{S}^{N-1} \longrightarrow T_\xi \mathbb{S}^{N-1}.$$

Sia data la *base canonica* di $T_\xi \mathbb{S}^{N-1}$, $\{e_1, \ldots, e_{N-1}\}$. Con essa ci è possibile rappresentare $df(\xi)$ tramite una matrice quadrata $(N-1) \times (N-1)$.
Calcoliamone la generica entrata di posto (i, j).
Per definizione di *differenziale*, scelta una curva $\gamma :]-\delta, \delta[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{S}^{N-1}$, con $\delta > 0$, tale che $\gamma(0) = \xi$ e $\dot\gamma(0) = e_i$, si ha

$$df(\xi)\, e_i := \frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \nabla u\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t=0} \tag{1.13}$$

D'altra parte, rispetto alla *base* $\{e_1, \ldots, e_{N-1}, \nu\}$ di $\mathbb{R}^N$, il *gradiente* ∇u si può riscrivere in questo modo,

$$\nabla u = \sum_{k=1}^{N-1} \langle \nabla u, e_k \rangle\, e_k + \langle \nabla u, \nu \rangle\, \nu = \sum_{k=1}^{N-1} D_k u\; e_k + \langle \nabla u, \xi \rangle\, \xi, \qquad \xi = \nu(x),\ x \in \partial\Omega.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \nabla u\big(\gamma(t)\big) &= \sum_{k=1}^{N-1} D_k u\big(\gamma(t)\big) e_k + \big\langle \nabla u\big(\gamma(t)\big), \gamma(t) \big\rangle\, \gamma(t) \\ \text{per il punto (1.6)} \ &= \sum_{k=1}^{N-1} D_k u\big(\gamma(t)\big) e_k + \big\langle f\big(\gamma(t)\big), \gamma(t) \big\rangle\, \gamma(t) \\ \text{per il punto (1.3)} \ &= \sum_{k=1}^{N-1} D_k u\big(\gamma(t)\big) e_k + u\big(\gamma(t)\big)\gamma(t). \end{aligned}$$

Continuiamo quindi da (1.13):

$$\frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{N-1} \big(D_i D_k u\;\, e_k + D_k u\;\, D_i e_k \big) + \frac{d}{dt}\, u\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t=0} \xi + u(\xi)\, e_i.$$

Ora selezioniamo la componente $j-esima$, per ottenere l'elemento di posto (i, j)

$$\langle df(\xi)\, e_i, e_j \rangle = D_i D_j u + \sum_{k=1}^{N-1} D_k u\, \langle D_i e_k, e_j \rangle + u\, \delta_{ij} \tag{1.14}$$

infatti $\langle \xi, e_h \rangle = 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ e per ogni $h \in \{1, \ldots, N-1\}$.
Confontando (1.11) con (1.13) e (1.14), giungiamo alla relazione

$$\langle df\, e_i, e_j \rangle = \nabla_{ij} u + u\, \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, N-1, \tag{1.15}$$

da cui segue

$$\frac{1}{K} = \det(df) = \det(\nabla_{ij} u + u\, \delta_{ij}).$$

□

Capitolo 2

Variazione prima e seconda della capacità

Definizione 8 (Misura push-forward)**.** *Sia* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *uno spazio misurato, e* $(Y, \mathscr{B})$ *uno spazio misurabile. Data una funzione* $\psi\colon\ X \to\ Y$ $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$*-misurabile, si dice* misura push-forward *(o* image measure*) la misura* μ_ψ *definita su* Y *da*

$$\mu_\psi(E) := \mu(\psi^{-1}(E))$$

per ogni $E \in \mathscr{B}$*. Notazioni equivalenti sono:* $\mu_\psi(E) = \psi_*\mu(E)$*.*

Fino a che non sarà esplicitamente modificato, sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato di classe $\mathcal{C}^2$ con curvatura di Gauss strettamente positiva.
Denoteremo con u_Ω la *funzione di supporto* di Ω.

È noto che, data $\mathscr{A}$ σ-algebra dei boreliani di $\partial\Omega$, e $\mathscr{B}$ σ-algebra dei boreliani di $\mathbb{S}^{N-1}$, la funzione $g : \partial\Omega \to \mathbb{S}^{N-1}$ è $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-misurabile.
Definiamo su $\mathbb{S}^{N-1}$ la misura μ_Ω, ponendo

$$\mu_\Omega = g_*(\mathcal{H}^{N-1}),$$

dove g è la *mappa di Gauss* di $\partial\Omega$, e $\mathcal{H}^{N-1}$ è la misura standard di superficie su $\partial\Omega$.
Sappiamo che il *potenziale capacitario* in (1) soddisfa per $|x| \to +\infty$ le stime asintotiche

$$U(x) = \frac{\alpha}{|x|^{N-2}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N-1}}\Big), \qquad \nabla U(x) = (2-N)\,\alpha\,\frac{x}{|x|^N} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^N}\Big), \tag{2.1}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}^N$ è una costante tale che $\operatorname{cap}\Omega = N(N-2)\,\alpha\,\omega_N$, con ω_N misura di Lebesgue della palla unitaria N-dimensionale.
Per un teorema di Dahlberg (vedi [5], Teorema 3), $|\nabla U|^2$ è definito $\mathcal{H}^{N-1}$-quasi ovunque su $\partial\Omega$ e integrabile rispetto alla misura di superficie $\mathcal{H}^{N-1}$. Possiamo definire la misura su $\mathbb{S}^{N-1}$

$$\nu_\Omega := g_*(|\nabla U|^2\mathcal{H}^{N-1}). \tag{2.2}$$

Notazione. Scriveremo talvolta $|\nabla U(x)| = h(x)$, con $x \in \partial\Omega$.

Ricordiamo il

Lemma 3 (Prima identità di Green)**.** *Siano $D \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto limitato di classe $\mathcal{C}^1$, ed η, $\theta \in \mathcal{C}^2(\bar{D})$ due funzioni. Allora $\int_D \Big(\eta\, \Delta\theta - \Delta\eta\, \theta\Big)\, dx = \int_{\partial D} \Big(\eta\, \frac{\partial\theta}{\partial\nu} - \frac{\partial\eta}{\partial\nu}\, \theta\Big)\, d\mathcal{H}^{N-1}$, dove ν è il campo di versori normali esterni a ∂D.*

Proposizione 2. *Vale la formula per la* capacità

$$\operatorname{cap}\Omega = \frac{1}{N-2} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_\Omega \, d\nu_\Omega. \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Consideriamo una palla N-dimensionale B_R centrata nell'origine di $\mathbb{R}^N$, di raggio R abbastanza grande tale che $\bar{\Omega} \subset B_R$. Applichiamo l'*identità di Green* alle funzioni $\langle x, \nabla U\rangle$ e $(1-U)$, armoniche in $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$. Si trova

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B_R \setminus \bar{\Omega}} \Big(\langle x, \nabla U\rangle \ \Delta(1 - U(x)) - (1-U(x))\, \Delta \langle x, \nabla U\rangle \Big)\, dx \\
&= \int_{\partial B_R} \Big(\langle x, \nabla U\rangle \ \Big\langle \frac{x}{R}, \nabla(1-U(x))\Big\rangle - \Big\langle \frac{x}{R}, \nabla \langle x, \nabla U\rangle \Big\rangle \ (1-U(x))\Big)\, d\mathcal{H}^{N-1} + \\
&\qquad - \int_{\partial\Omega} \langle x, \nabla U\rangle \ \langle g(x), \nabla(1-U(x))\rangle \ d\mathcal{H}^{N-1}.
\end{aligned}$$

Riscriviamo il termine $\langle x, \nabla U\rangle$ su $\partial\Omega$ come

$$\begin{aligned}
\langle x, \nabla U\rangle &= -\Big\langle x, \frac{-\nabla U(x)}{h(x)}\, h(x)\Big\rangle = -\langle x, g(x)\rangle\, h(x) \\
&= -\langle f(\xi), \xi\rangle \ h(f(\xi)) = -u(\xi)\, h(f(\xi)) = -u(g(x))\, h(x),
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $x = f(\xi)$, e abbiamo usato la relazione (1.3). Inoltre, su $\partial\Omega$ si ha $\langle g(x), \nabla(1-U(x))\rangle = \langle g(x), \nabla U(x)\rangle = h(x)$, poiché $g(x) = -\frac{\nabla U(x)}{|\nabla U(x)|}$ è la normale esterna a $\partial(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$. Quindi

$$\int_{\partial\Omega} \langle x, \nabla U\rangle \ \langle g(x), \nabla(1-U(x))\rangle \ d\mathcal{H}^{N-1} = -\int_{\partial\Omega} u(g(x))\, h^2(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Quanto al primo addendo, studiamo separatamente

$$\begin{aligned}
A_R^1 &:= \int_{\partial B_R} \langle x, \nabla U\rangle \ \Big\langle \frac{x}{R}, \nabla(1-U(x))\Big\rangle \ d\mathcal{H}^{N-1}, \\
A_R^2 &:= -\int_{\partial B_R} \Big\langle \frac{x}{R}, \nabla \langle x, \nabla U\rangle\Big\rangle \ (1-U(x))\, d\mathcal{H}^{N-1}.
\end{aligned}$$

Nei conti, usiamo le stime (2.1).

$$\begin{aligned}
A_R^1 &= -\int_{\partial B_R} \langle x, \nabla U\rangle \left\langle \frac{x}{R}, \nabla U(x)\right\rangle \, d\mathcal{H}^{N-1} = -\frac{1}{R}\int_{\partial B_R} \langle x, \nabla U\rangle^2 \, d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= -\frac{1}{R}\int_{\partial B_R} \left\langle x, \frac{(2-N)\,\alpha\, x}{|x|^N} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^N}\Big)\right\rangle^2 \, d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= -\frac{1}{R}\,(2-N)^2\alpha^2 \int_{\partial B_R} \big\{ |x|^{2(2-N)} + o(|x|^{2(2-N)})\big\}\, d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= -\frac{1}{R}\,(2-N)^2\alpha^2\, N\omega_N\, R^{N-1}\, R^{2(2-N)} = C_N\, R^{3-N} \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Passiamo ad A_R^2. Siano $\frac{\partial}{\partial x_i}U = U_i$, ed e_i l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^N$. Innanzitutto

$$\begin{aligned}
\nabla\, \langle x, \nabla U\rangle &= \nabla \sum_{i=1}^N x_i\, U_i = \sum_{i=1}^N \nabla(x_i\, U_i) = \sum_{i=1}^N e_i\, U_i + \sum_{i=1}^N x_i\,(U_{i1}, \dots, U_{iN}) \\
&= \nabla U + \Big(\langle x, \nabla U_1\rangle, \dots, \langle x, \nabla U_N\rangle \Big).
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\langle x, \nabla\, \langle x, \nabla U\rangle\rangle = \langle x, \nabla U\rangle + \langle (HU)\, x, x\rangle\,,$$

dove HU è la matrice hessiana di U. Ora consideriamo i due contributi di A_R^2.
Il primo fornisce

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{R}\int_{\partial B_R} \langle x, \nabla U\rangle \, d\mathcal{H}^{N-1} &= -\frac{1}{R}\int_{\partial B_R} \left\langle x, \frac{(2-N)\,\alpha\, x}{|x|^N}\right\rangle + \text{ Resto} \\
&= (N-2)\,\alpha\, \frac{1}{R}\frac{1}{R^N}\, R^2\, N\omega_N\, R^{N-1} + \text{ Resto} \\
&= N(N-2)\,\omega_N\,\alpha + \text{ Resto.}
\end{aligned}$$

Prima di trattare il secondo, osserviamo come dalle (2.1) si ricavino stime per derivate di U di ordine superiore ad 1. Procediamo con un conto formale.

$$\begin{aligned}
U_{ij}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} U = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big((2-N)\,\alpha\, x_i\,(|x|^2)^{-\frac{N}{2}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N+1}}\Big)\Big) \\
&= (2-N)\,\alpha\,\Big(\delta_{ij}\,\frac{1}{|x|^N} - N(|x|^2)^{-\frac{N}{2}-1}\, x_i\, x_j\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N+1}}\Big) \\
&= (2-N)\,\alpha\,\Big(\delta_{ij}\,\frac{1}{|x|^N} - N\,\frac{x_i\, x_j}{|x|^{N+2}}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N+1}}\Big).
\end{aligned}$$

Allora

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{R}\int_{\partial B_R} \langle (HU)\,x, x\rangle \, d\mathcal{H}^{N-1} &= -\frac{1}{R}\int_{\partial B_R} \sum_{ij} U_{ij}\, x_i\, x_j \, d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= -\frac{1}{R}\Big[\int_{\partial B_R} (2-N)\,\alpha \sum_{ij}\Big(\delta_{ij}\,\frac{x_i\,x_j}{|x|^N} - N\,\frac{x_i^2\,x_j^2}{|x|^{N+2}}\Big)\, d\mathcal{H}^{N-1} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N+1}}\Big)\Big] \\
&= -\frac{1}{R}\Big[(2-N)\,\alpha \int_{\partial B_R}\Big(\frac{1}{|x|^N}\,|x|^2 - N\,\frac{|x|^2\,|x|^2}{|x|^{N+2}}\Big)\, d\mathcal{H}^{N-1} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N+1}}\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{R}\Big[N(N-2)\,\omega_N\,\alpha\,R^{N-1}\Big(\frac{1}{R^{N-2}} - N\frac{R^4}{R^{N+2}}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N+1}}\Big)\Big] \\
&= N(N-2)\,\omega_N\,\alpha\,(1-N) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N+2}}\Big).
\end{aligned}
$$

In conclusione, facendo tendere $R \to +\infty$,

$$
0 = A_R^1 + A_R^2 + \int_{\partial\Omega} u(g(x))\, h^2(x)\, d\mathcal{H}^{N-1},
$$

ovvero

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} u(g(x))\, h^2(x)\, d\mathcal{H}^{N-1} &= -N(N-2)\,\omega_N\,\alpha\,(1+1-N) \\
&= -N(N-2)\,\omega_N\,\alpha\,(2-N) \\
&= N(N-2)^2\,\omega_N\,\alpha \\
&= (N-2)\,\mathrm{cap}\,\Omega.
\end{aligned}
$$

□

Consideriamo la mappa $\Omega \mapsto \nu_\Omega$ e calcoliamone le *derivate direzionali*. Ricordiamo che stiamo trattando solo il caso di insiemi regolari (almeno di *classe* $\mathcal{C}^2$) e strettamente convessi.
La formula (1.12) permette di caratterizzare gli insiemi con curvatura di Gauss strettamente positiva tramite la loro funzione di supporto. Definiamo l'insieme

$$
\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{N-1}) : \det(\nabla_{ij}u + u\,\delta_{ij}) > 0\}. \tag{2.4}
$$

Osservazione 5. Una funzione $u \in \mathcal{U}$ individua uno ed un solo aperto convesso Ω di *classe* $\mathcal{C}^\infty$ con curvatura di Gauss strettamente positiva.

Prova. $\Omega \mapsto u_\Omega$ è una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{O} = \{\Omega \in \mathbb{R}^N : \partial\Omega \in \mathcal{C}^\infty,\ K(x) > 0\ \forall x \in \partial\Omega\}$ e $\mathcal{U}$. Infatti $u \in \mathcal{U}$ è la funzione di supporto dell'insieme $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : x\cdot\xi < u(\xi)\ \forall \xi \in \mathbb{S}^{N-1}\}$, aperto di *classe* $\mathcal{C}^\infty$ e con curvatura di Gauss strettamente positiva (per (1.12)). Viceversa, la funzione di supporto di un insieme $\Omega \in \mathcal{O}$, soddisfa, sempre per (1.12), le condizioni per appartenere ad $\mathcal{U}$. □

Notazione. D'ora in poi sarà $\Omega \in \mathscr{D}$, dove

$$\mathscr{D} := \{D \subset \mathbb{R}^N :\ D \text{ è aperto convesso limitato di classe } \mathcal{C}^\infty, \text{ con } u_D \in \mathcal{U}\ \}.$$

Enunciamo, senza dimostrarlo, il seguente

Lemma 4. *Se $\Omega \in \mathscr{D}$ allora il* potenziale capacitario *U di Ω è in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, ovvero se $\Omega \in \mathscr{D}$ allora U si estende in modo $\mathcal{C}^\infty$ fino a $\partial\Omega$.*

Ne segue che $h = |\nabla U| \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$. Introduciamo l'operatore $\mathcal{F} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$

$$u \longmapsto \mathcal{F}(u) = S,$$

dove S è la densità che compare nella misura $g_*(h^2\mathcal{H}^{N-1}) = S\,d\xi$. Per il Lemma 4 e poiché $g \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega; \mathbb{S}^{N-1})$, S è una funzione in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$. Qui $d\xi$ è la misura uniforme normalizzata sulla sfera unitaria $(N-1)$-dimensionale. Mantenendo la notazione del paragrafo (1.3), possiamo scrivere

$$S(\xi) = \frac{h^2(f(\xi))}{K(f(\xi))}, \qquad \xi \in \mathbb{S}^{N-1}.$$

Osservazione 6. (i) Dilatando la funzione u, si ha

$$\mathcal{F}\big((1+t)\,u\big) = (1+t)^{N-3}\,\mathcal{F}(u), \qquad t \geq 0. \tag{2.5}$$

Prova. La funzione $(1+t)\,u$ è di supporto per $\Omega + t\,\Omega$. Sappiamo che S si può esprimere come $S_\Omega = \frac{|\nabla U_\Omega(f(\xi))|^2}{K_\Omega(\xi)}$, dove il pedice ricorda la dipendenza da Ω, U_Ω risolve il problema esterno (1), e K_Ω è la curvatura gaussiana di Ω. Posto $x = f(\xi)$, ricordiamo che $K_\Omega(x) = \det(dg : T_{f(\xi)}\partial\Omega \to T_{f(\xi)}\partial\Omega) = \det(dg : T_\xi\mathbb{S}^{N-1} \to T_\xi\mathbb{S}^{N-1}) = k_1 \cdots k_{N-1}$, dove k_i, con $i = 1, \ldots, N-1$, sono le curvature principali di Ω in $x \in \partial\Omega$. Bisogna capire come cambiano K_Ω e U_Ω passando da Ω a $(1+t)\,\Omega$.
La curvatura di Gauss si trasforma da K_Ω in $K_{(1+t)\,\Omega} = \frac{K_\Omega}{(1+t)^{N-1}}$, perché, per ogni $i = 1, \ldots, N-1$, k_i diventa $\frac{k_i}{(1+t)}$. Riguardo a U_Ω, $U_{(1+t)\,\Omega}(x) = U_\Omega(\frac{x}{(1+t)})$, $\nabla U_{(1+t)\,\Omega} = \frac{1}{(1+t)}\,\nabla U_\Omega$, e quindi $|\nabla U_{(1+t)\,\Omega}|^2 = \frac{1}{(1+t)^2}\,|\nabla U_\Omega|^2$. Si ha allora $S_{(1+t)\,\Omega} = \frac{(1+t)^{N-1}}{(1+t)^2}\,\frac{|\nabla U_\Omega|^2}{K_\Omega} = (1+t)^{N-3}\,S_\Omega$. □

(ii) $\mathcal{F}(u+v) = \mathcal{F}(u)$ per ogni $v \in \operatorname{span}\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$.

Prova. Sia $b \in \mathbb{R}^N$. Per definizione di funzione di supporto,

$$u_\Omega(\xi) = \sup_{x\in\Omega} \langle x, \xi\rangle\,,$$
$$u_{b+\Omega}(\xi) = \sup_{x\in b+\Omega} \langle x, \xi\rangle = \sup_{y\in\Omega} \langle b+y, \xi\rangle = \langle b, \xi\rangle + \sup_{y\in\Omega} \langle y, \xi\rangle = \langle b, \xi\rangle + u_\Omega(\xi).$$

La mappa di Gauss è invariante per traslazioni, e quindi $\nu_\Omega(x) = \nu_{b+\Omega}(x+b)$, per ogni $x \in \partial\Omega$. Segue che $f_\Omega(\xi) = x$ se e solo se $f_{b+\Omega}(\xi) = b + x$. Inoltre $U_{b+\Omega}(b+x) = U_\Omega(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Allora, posto $v = \langle b, \xi\rangle$,

$$\mathcal{F}(u_\Omega + \langle b, \xi\rangle) = \frac{|\nabla U_{b+\Omega}(f_{b+\Omega}(\xi))|^2}{K_{b+\Omega}(f_{b+\Omega}(\xi))} = \frac{|\nabla U_\Omega(f_\Omega(\xi))|^2}{K_\Omega(f_\Omega(\xi))} = \mathcal{F}(u_\Omega).$$

□

Cerchiamo un'espressione per la derivata dell'applicazione $\mathcal{F}$, e per fare ciò, introduciamo altri due strumenti: la matrice dei *cofattori* di $\left(\nabla_{ij}u + u\,\delta_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,N}$, e l'operatore di *derivata normale* relativo alla soluzione di un *problema esterno*. Iniziamo con la

Definizione 9. *Data una matrice quadrata A, si definisce matrice dei cofattori di A, la matrice quadrata C, dello stesso ordine di A, le cui entrate sono i determinanti $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, dove A_{ij} è la matrice quadrata privata della i-esima riga e della j-esima colonna.*
Segue che $AC = CA = \det(A)I$,

Quindi, data $\left(\nabla_{ij}u + u\,\delta_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,N}$, le entrate c_{ij} della sua matrice dei cofattori sono definite dalla condizione

$$\sum_{j=1}^{N-1} c_{ij} \det\left(\nabla_{jl}u + u\,\delta_{jl}\right) = \delta_{il} \det\left(\nabla_{pq}u + u\,\delta_{pq}\right) = \frac{\delta_{il}}{K},$$

nella quale il secondo passaggio è una conseguenza del calcolo del determinante di una matrice secondo la *regola di Laplace*.

Passiamo alla *derivata normale*. Data una funzione $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$, e posto $\psi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, con $\psi(x) = \varphi(\nu(x))$, sia $w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ l'*estensione armonica* di ψ, soluzione del *problema esterno*

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \ \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \bar\Omega \\ w(x) = \psi(x), \ \text{su } \partial\Omega \\ \lim_{|x|\to+\infty} w(x) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Definiamo l'operatore $\Lambda : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{N-1}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi \longmapsto \Lambda(\varphi) = \left\langle \xi, \nabla w\big(f(\xi)\big)\right\rangle,$$

derivata normale di w.

Osservazione 7. L'operatore Λ è autoaggiunto nello spazio $L^2(\partial\Omega, \mathcal{H}^{N-1})$.

Prova. Prendiamo due funzioni $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$, e facciamo il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{S}^{N-1}, d\xi)$ di α con $\Lambda(\beta)$. Ci chiediamo se vale $\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \alpha\,\Lambda(\beta)\,d\xi = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \Lambda(\alpha)\,\beta\,d\xi$. Siano $\hat\alpha$ e $\hat\beta$ le rispettive estensioni armoniche di α e β come in (2.6). Allora

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \alpha\,\Lambda(\beta)\,d\xi = \int_{\partial\Omega} \hat\alpha\ \left\langle \xi, \nabla\hat\beta\big(f(\xi)\big)\right\rangle\,d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\Omega} \hat\alpha\ \left\langle g(x), \nabla\hat\beta(x)\right\rangle\,d\mathcal{H}^{N-1},$$

e

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \Lambda(\alpha)\,\beta\,d\xi = \int_{\partial\Omega} \hat{\beta}\ \langle g(x), \nabla\hat{\alpha}(x)\rangle\ d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Sia $R > 0$ tale che $\bar{\Omega} \subset B(0,R) \equiv B_R$, e consideriamo l'insieme $\Omega_R := B_R \setminus \bar{\Omega}$. Applichiamo la *prima identità di Green* ad $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ su Ω_R. Siano $\nu_{\partial\Omega_R}$, $\nu_{\partial B_R}$ e ν i campi di versori normali esterni a $\partial\Omega_R$, ∂B_R e $\partial\Omega$ rispettivamente. Si ha

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Omega_R} \left(\hat{\alpha}\,\Delta\hat{\beta} - \hat{\beta}\,\Delta\hat{\alpha}\right) dx &= \int_{\partial\Omega_R} \hat{\alpha}\,\frac{\partial\hat{\beta}}{\partial\nu_{\partial\Omega_R}} - \frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial\nu_{\partial\Omega_R}}\,\hat{\beta}\,d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_{\partial B_R} \hat{\alpha}\,\frac{\partial\hat{\beta}}{\partial\nu_{\partial B_R}} - \frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial\nu_{\partial B_R}}\,\hat{\beta}\,d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\partial\Omega} \hat{\alpha}\,\frac{\partial\hat{\beta}}{\partial\nu} - \frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial\nu}\,\hat{\beta}\,d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned}$$

Per $R \to +\infty$, l'integrale su ∂B_R tende a zero. Infatti $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ sono armoniche ad infinito, e poiché $\nabla\hat{\alpha}$, $\nabla\hat{\beta}$ soddisfano stime analoghe a (2.1), le funzioni $\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial\nu_{\partial B_R}}$ e $\frac{\partial\hat{\beta}}{\partial\nu_{\partial B_R}}$ sono limitate su ∂B_R. Si conclude per il fatto che $\lim_{R\to+\infty}\Omega_R = \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$ e

$$\int_{\partial\Omega} \hat{\alpha}\,\frac{\partial\hat{\beta}}{\partial\nu} - \frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial\nu}\,\hat{\beta}\,d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\Omega} \alpha\,\Lambda(\beta) - \Lambda(\alpha)\,\beta\,d\mathcal{H}^{N-1}.$$

□

Osservazione 8. Se $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$ e $u \in \mathcal{U}$ allora esiste $t_0 > 0$ tale che per ogni $t \in \mathbb{R}^N$ con $|t| < t_0$ si ha che $u + tv \in \mathcal{U}$. Per la corrispondenza tra u_Ω e Ω, se v è la funzione di supporto di un insieme Ω_1, allora $u + t\,v$ lo è per $\Omega + t\,\Omega_1$.

Proposizione 3. *La derivata direzionale dell'operatore $\mathcal{F}$ è data da*

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{F}(u + t\,v)\Big|_{t=0} = L_u\,v,$$

dove L_u, che dipende da u, indica l'operatore differenziale del secondo ordine definito da

$$L_u\,v = \nabla_i(h^2\,c_{ij}\,\nabla_j v) - \left(\frac{2}{K}\right) h\,\Lambda(h\,v) - h^2\,tr(c_{ij})\,v.$$

Osservazione 9. $L_u\,u = (N-3)\,\mathcal{F}(u)$, per la (2.5).

Osservazione 10. L'operatore L_u è autoaggiunto in $L^2(\mathbb{S}^{N-1}, d\xi)$. Segue dall'Osservazione 7.

Siano Ω_0, $\Omega_1 \in \mathscr{D}$. Se la derivata

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{cap}(\Omega_0 + t\,\Omega_1)\Big|_{t=0^+}$$

esiste finita, essa si dice *variazione prima della capacità* di Ω_0 nella direzione Ω_1. Analogamente, se

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{cap}(\Omega_0 + t\,\Omega_1)\Big|_{t=0^+}$$

esiste finita, essa si dice *variazione seconda della capacità* di Ω_0 nella direzione Ω_1.

Proposizione 4. *Siano Ω_0, $\Omega_1 \in \mathscr{D}$, e u_0, u_1 le rispettive funzioni di supporto. Poniamo, per brevità, $\nu_0 = \nu_{\Omega_0}$. Allora*

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{cap}(\Omega_0 + t\,\Omega_1)\Big|_{t=0^+} = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_1\, d\nu_0, \tag{2.7}$$

da cui segue

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{cap}\big((1-t)\,\Omega_0 + t\,\Omega_1\big)\Big|_{t=0^+} = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} (u_1 - u_0)\, d\nu_0. \tag{2.8}$$

Inoltre

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{cap}(\Omega_0 + t\,\Omega_1)\Big|_{t=0^+} = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_1\, L_{u_0}(u_1)\, d\xi. \tag{2.9}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione nella variabile t, $\mathrm{cap}(\Omega_0 + t\,\Omega_1)$. Per (2.3) si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{cap}(\Omega_0 + t\,\Omega_1) &= \frac{1}{N-2}\int_{\partial(\Omega_0 + t\,\Omega_1)} (u_0 + t\,u_1)\,|\nabla(U_0 + t\,U_1)(x)|^2\, d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} (u_0 + t\,u_1)\,\frac{|\nabla(U_0 + t\,U_1)(f(\xi))|^2}{K(f(\xi))}\, d\xi \\
&= \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} (u_0 + t\,u_1)\,\mathcal{F}(u_0 + t\,u_1)\, d\xi
\end{aligned}$$

Derivando,

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{cap}(\Omega_0 + t\,\Omega_1) = \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_1\,\mathcal{F}(u_0 + t\,u_1)\, d\xi + \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} (u_0 + t\,u_1)\,\frac{d}{dt}\,\mathcal{F}(u_0 + t\,u_1)\, d\xi.$$

In quest'ultimo integrale si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\mathcal{F}(u_0 + t\,u_1) &= \lim_{\delta\to 0} \frac{\mathcal{F}(u_0 + (t+\delta)\,u_1) - \mathcal{F}(u_0 + t\,u_1)}{\delta} \\
&= \lim_{\delta\to 0} \frac{\mathcal{F}(u_0 + t\,u_1 + \delta\,u_1) - \mathcal{F}(u_0 + t\,u_1)}{\delta} = \frac{d}{ds}\mathcal{F}(u_0 + t\,u_1 + s\,u_1)\Big|_{s=0} \\
&= L_{u_0 + t\,u_1} u_1,
\end{aligned}$$

da cui, per l'Osservazione 9 e per l'autoaggiunzione di $L_{u_0+t\,u_1}$ in $L^2(\mathbb{S}^{N-1}, d\,\xi)$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} (u_0 + t\,u_1)\,\frac{d}{dt}\,\mathcal{F}(u_0 + t\,u_1)\, d\xi &= \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} (u_0 + t\,u_1)\, L_{u_0+t\,u_1} u_1\, d\xi \\
&= \frac{N-3}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \mathcal{F}(u_0 + t\,u_1)\, u_1\, d\xi,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\mathrm{cap}(\Omega_0 + t\,\Omega_1) &= \frac{(1 + N - 3)}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_1\,\mathcal{F}(u_0 + t\,u_1)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_1\,\mathcal{F}(u_0 + t\,u_1)\, d\xi.
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\mathrm{cap}(\Omega_0 + t\,\Omega_1)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_1\,\mathcal{F}(u_0)\,d\xi + \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_0\,L_{u_0}(u_1)\,d\xi \\
&= \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_1\,\mathcal{F}(u_0)\,d\xi + \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} L_{u_0}(u_0)\,u_1\,d\xi \\
&= \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_1\,\mathcal{F}(u_0)\,d\xi + \frac{N-3}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_1\,\mathcal{F}(u_0)\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_1\,\mathcal{F}(u_0)\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Infine,

$$
\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{cap}(\Omega_0 + t\,\Omega_1)\Big|_{t=0} = \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_1\,\frac{d}{dt}\,\mathcal{F}(u_0 + t\,u_1)\Big|_{t=0}\,d\xi = \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_1\,L_{u_0}(u_1)\,d\xi.
$$

$\square$

Capitolo 3

Piccole perturbazioni della sfera

Lemma 5. *Siano* $\Omega \in \mathscr{D}$, *u la sua funzione di supporto, ed* L_u *l'operatore differenziale del secondo ordine della Proposizione 3. Se* $u - 1$ *ha norma* $\mathcal{C}^{2N}(\mathbb{S}^{N-1})$ *sufficientemente piccola, allora*

(i) se $N \geq 4$, $\ker L_u = \mathcal{P}_1 :=$ *span*$\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ *ed esiste una base ortonormale (rispetto al prodotto di* $L^2(\mathbb{S}^{N-1}, d\xi)$*) per* $(\ker L_u)^\perp$ *della forma* $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *tale che* $L_u\phi_0 = \alpha_0\phi_0$ *e* $L_u\phi_k = -\alpha_k\phi_k$ *per* $k \geq 1$, *dove* $\alpha_k \geq 1$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$, *e* $\alpha_k \in \mathcal{O}(k^{\frac{2}{N-1}})$ *per* $k \to +\infty$;

(ii) se $N = 3$, $\ker L_u =$ *span*$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, u\}$ *ed esiste una base ortonormale per* $(\ker L_u)^\perp$ *della forma* $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$, *tale che* $L_u\phi_k = -\alpha_k\phi_k$ *per* $k \geq 1$, *dove* $\alpha_k \geq 1$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$, *e* $\alpha_k \in \mathcal{O}(k^{\frac{2}{N-1}})$ *per* $k \to +\infty$.

Dimostrazione. Ricordiamo innanzitutto la definizione di norma $\mathcal{C}^{2N}(\mathbb{S}^{N-1})$. Per ipotesi ($\Omega \in \mathscr{D}$) $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$. Estendiamo u in modo 0-omogeneo su $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, e chiamiamo ancora u tale estensione. Allora si pone $||u||_{\mathcal{C}^{2N}} = \sum_{|\alpha|\leq 2N} \max_{\xi\in\mathbb{S}^{N-1}} |\partial^\alpha u(\xi)|$, con $\alpha \in \mathbb{N}^N$ multiindice.
Sia $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$, $u \mapsto \mathcal{F}(u) = S$ l'operatore già introdotto in precedenza assieme alla densità S. Sappiamo che

$$L_u u = (N-3)\,\mathcal{F}(u). \tag{3.1}$$

Inoltre, $\mathcal{F}(u + v) = \mathcal{F}(u)$ per ogni $v \in \mathcal{P}_1$, il che implica $Lv = 0$ per ogni $v \in \mathcal{P}_1$. Quindi $\mathcal{P}_1 \subseteq \ker L$ (in (3.1) si legge che span$\{\mathcal{P}_1, u\} \subseteq \ker L$, se $N = 3$).
Che l'inclusione sia un'uguaglianza segue da un argomento di perturbazione della sfera.
Proviamo che $\ker L_u = \mathcal{P}_1$ nel caso in cui Ω sia una palla, ovvero con $u = 1$. Sia quindi $\Omega = B(0,1)$, $\partial\Omega = \mathbb{S}^{N-1}$. Rispettando la notazione fin qui utilizzata, si ha $U(x) = |x|^{2-N}$, $h(x) := |\nabla U(x)| = (N-2)$, con $x \in \mathbb{S}^{N-1}$, $K = 1$, $c_{ij} = \delta_{ij}$.

Introduciamo gli insiemi

$$\mathscr{P}_k = \{p_k \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N] : p_k \text{ è omogeneo di grado } k\},$$
$$\mathcal{H}_k = \{p_k \in \mathscr{P}_k : \Delta p_k = 0\},$$

e prendiamo un elemento $p_k \in \mathcal{H}_k$. Risolviamo il *problema esterno* relativo al dato $p_k\big|_{\mathbb{S}^{N-1}}$. La soluzione si trova con la *trasfomata di Kelvin* di p_k, $w(x) = |x|^{2-N}\, p_k(\frac{x}{|x|^2})$, armonica per

$|x| \neq 0$, infinitesima per $|x| \to +\infty$, e uguale a p_k per $|x| = 1$. La funzione w è omogenea di grado $(2 - N - k)$, quindi, per il teorema di Eulero riguardo alle funzioni omogenee, $\Lambda(p_k) = (2 - N - k)\, p_k$.
Ricaviamo l'operatore di Laplace-Beltrami sulla sfera, ovvero l'operatore $\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}} = \sum_{i=1}^{N-1} \nabla_{ii}$, utilizzando la formula per il laplaciano in coordinate sferiche di $\mathbb{R}^N$. Sappiamo che per $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ il laplaciano soddisfa la relazione

$$\Delta_{\mathbb{R}^N} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}},$$

da cui

$$\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}} = r^2\,\Delta_{\mathbb{R}^N} - r^2\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} - r\,(N-1)\,\frac{\partial}{\partial r}. \tag{3.2}$$

Applicata ad un polinomio $p_k \in \mathcal{H}_k$ e utilizzando nuovamente il teorema di Eulero, (3.2) restituisce

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}\, p_k &= r^2\,\Delta_{\mathbb{R}^N}\, p_k - r^2\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\, p_k - r\,(N-1)\,\frac{\partial}{\partial r}\, p_k \\
&= -r^2\, k(k-1)\, p_{k-2} - r\,(N-1)k\, p_{k-1} \\
(r^2\, p_{k-2} = p_k) \qquad &= -k(k-1)\, p_k - (N-1)\, p_k \\
&= -k(k+N-2)\, p_k.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\sum_{ij} c_{ij}\,\nabla_{ij}\, p_k = \sum_{ij} \delta_{ij}\,\nabla_{ij}\, p_k = \sum_{i} \nabla_{ii}\, p_k = -k(k+N-2)\, p_k.$$

Sia L_1 l'operatore di derivazione del secondo ordine associato alla funzione $u = 1$, definito nella Proposizione 3. Usando la convenzione di sommazione di Einstein, che sottointende una sommatoria sugli indici ripetuti, si ha

$$\begin{aligned}
L_1\, p_k &= \nabla_i\,(h^2\,\delta_{ij}\,\nabla_j\, p_k) - \frac{2}{K}\, h\,\Lambda(h\, p_k) - h^2\,\mathrm{tr}(\delta_{ij})\, p_k \\
&= \nabla_i\big((N-2)^2\,\nabla_i\, p_k\big) - 2(N-2)^2(2-N-k)\, p_k - (N-2)^2(N-1)\, p_k \\
&= (N-2)^2\,\nabla_{ii}\, p_k - 2(N-2)^2(2-N-k)\, p_k - (N-2)^2(N-1)\, p_k \\
&= (N-2)^2(-k(k+K-2))\, p_k - 2(N-2)^2(2-N-k)\, p_k - (N-2)^2(N-1)\, p_k \\
&= -(N-2)^2\Big(k(k+N-2) - 2(N+k-2) + (N-1)\Big)\, p_k.
\end{aligned}$$

Nel caso di $p_0 \in \mathcal{H}_0$, ovvero quando p_0 è una costante, si trova

$$L_1\, p_0 = (N-2)^2(2N-4-N+1)\, p_0 = (N-2)^2(N-3)\, p_0,$$

e nel caso di polinomi lineari $p_1 \in \mathcal{H}_1$,

$$L_1\, p_1 = 0.$$

Per $p_k \in \mathcal{H}_k$ con $k > 1$, gli autovalori di L_1 sono strettamente negativi.
Inoltre,

$$\ker L_1 = \begin{cases} \mathcal{P}_1, \text{ se } N \geq 4 \\ \operatorname{span}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, 1\}, \text{ se } N = 3. \end{cases}$$

Ora proviamo l'asserto per $u \in \mathcal{U}$ con $||u-1||_{\mathcal{C}^{2N}} < \delta$, per un $\delta > 0$ opportuno. La teoria standard delle perturbazioni garantisce che, approssimando Ω a $B(0,1)$, ovvero considerando u vicina ad 1, i *primi* autovalori di L_u rimangono a distanza al più unitaria dai corrispondenti autovalori di L_1. Diciamo cioè che, ordinando gli autovalori α_k^u di L_u in ordine crescente, per ogni $s \in \mathbb{N}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $||u-1||_{\mathcal{C}^{2N}} < \delta$ allora $|\alpha_k^u - \alpha_k^1| < \varepsilon$ per ogni $k = 1, \ldots, s$.
Il comportamento asintotico $\alpha_k \in \mathcal{O}(k^{\frac{2}{N-1}})$ per $k \to +\infty$ segue da stime note in teoria ellittica (vedi [6], §6.3).
Consideriamo $L^2(\mathbb{S}^{N-1}) = \ker L_1 \oplus (\ker L_1)^\perp$, dove $\oplus$ denota la somma diretta ortogonale rispetto al prodotto scalare di L^2. Tale spazio è munito della norma $||\cdot||_{L^2(\mathbb{S}^{N-1},d\xi)}$. L'operatore

$$L_1\Big|_{(\ker L_1)^\perp} : (\ker L_1)^\perp \to L_1\,(\ker L_1)^\perp$$

è iniettivo, quindi ha senso definirne l'inverso,

$$A_1 : L_1\,(\ker L_1)^\perp \to (\ker L_1)^\perp.$$

Si ha che $\ker A_1 = \ker L_1$. Difatti $A_1 v = 0 \Rightarrow L_1 0 = v \Rightarrow v = 0$; inoltre

$$\ker L_1 = [L_1\,(\ker L_1)^\perp]^\perp,$$

poiché

$$\begin{aligned} L_1 v = 0 &\Longrightarrow \langle v, L_1 w\rangle = 0 \quad \forall\, w \in (\ker L_1)^\perp \\ &\Longrightarrow v \perp L_1\,(\ker L_1)^\perp, \\ \langle v, L_1 w\rangle = 0 \quad \forall\, w \in (\ker L_1)^\perp &\Longrightarrow \langle L_1 v, w\rangle = 0 \quad \forall\, w \in (\ker L_1)^\perp \\ &\Longrightarrow L_1 v = 0. \end{aligned}$$

Sia T_1 la proiezione ortogonale di $L^2(\mathbb{S}^{N-1})$ su $\ker L_1$. Allora $A_1 L_1 = 1 - T_1$. Infatti

$$\begin{aligned} &\text{se } w \in \ker L_1, && A_1 L_1\, w = 0 \\ & && w - T_1\, w = w - w = 0 \\ &\text{se } w \in (\ker L_1)^\perp, && A_1 L_1\, w = w \\ & && w - T_1\, w = w - 0 = w. \end{aligned}$$

Chiamiamo con V_u lo spazio $\mathcal{P}_1$ se $N \geq 4$, lo spazio $\operatorname{span}\{\mathcal{P}_1, u\}$ se $N = 3$. Abbiamo già visto due fatti. $V_u \subseteq \ker L_u$, e inoltre, per $u = 1$, $V_1 = \ker L_1$. Per concludere la dimostrazione, dobbiamo provare che $\ker L_u \subseteq V$. Procediamo in tre passi.

a)
$$\left.\begin{array}{l} ||u-1||_{\mathcal{C}^{2N}} < \frac{1}{4} \\ w \perp V_u \end{array}\right\} \Longrightarrow ||T_1 \tfrac{w}{||w||}||_{L^2} < \tfrac{1}{4}.$$

Se $N \geq 4$, si ha $V_u = \operatorname{span}\{\xi_1, \ldots, \xi_N\} = \ker L_1$. Quindi

$$w \perp V_u \Longleftrightarrow w \perp \ker L_1 \Longrightarrow T_1 w = 0.$$

Se $N = 3$, sia $w \perp V_u = \operatorname{span}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, u\}$. Allora $\langle w, u \rangle = 0$, e

$$\begin{aligned} T_1 w &= \langle w, \xi_1 \rangle \, \xi_1 + \langle w, \xi_2 \rangle \, \xi_2 + \langle w, \xi_3 \rangle \, \xi_3 + \langle w, 1 \rangle \, 1 \\ &= \langle w, 1 \rangle \, 1 = \langle w, 1-u \rangle \, 1. \end{aligned}$$

Quindi

$$||T_1 w||_{L^2} \leq |\, \langle w, 1-u \rangle \,| = \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} w\,(1-u)\, d\xi \right| \leq ||w||_{L^2} \, ||1-u||_{L^2} < \frac{1}{4} \, ||w||_{L^2}.$$

b) Se $||u-1||_{\mathcal{C}^{2N}(\mathbb{S}^{N-1})} < \delta$ per un conveniente $\delta > 0$, allora

$$||A_1 \, (L_u - L_1) \, w||_{L^2} < \frac{1}{4} \, ||w||_{L^2}.$$

Date w e $\tilde{u} \in \mathcal{C}^\infty$, sia $v \in \mathcal{C}^\infty$ tale che $L_1 v = \tilde{u}$. Dunque

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} A_1(L_u - L_1) w \; \tilde{u} \, d\xi &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} A_1(L_u - L_1) w \; L_1 v \, d\xi = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} L_1 A_1(L_u - L_1) w \; v \, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} (L_u - L_1) w \; v \, d\xi = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} w \; (L_u - L_1) v \, d\xi \\ &\leq ||w||_{L^2} ||(L_u - L_1)||_{L^2} \leq C_1 \, ||w||_{L^2} ||u-1||_{\mathcal{C}^{2N}} ||v||_{H^2(\mathbb{S}^{N-1})} \\ (||v||_{H^2} \leq C_2 \, ||L_1 v||_{L^2}) \qquad &\leq C_1 \, C_2 \, ||u-1||_{\mathcal{C}^{2N}} ||\tilde{u}||_{L^2} ||w||_{L^2}, \end{aligned}$$

per ogni funzione test $\tilde{u}$ e per opportune costanti C_1, $C_2 > 0$. Ne segue che

$$||A_1(L_u - L_1)||_{L^2} \leq C_1 \, C_2 \, ||u-1||_{\mathcal{C}^{2N}} ||w||_{L^2}.$$

c) Sia $w \perp V_u$ tale che $L_u \, w = 0$. Ricordiamo che $A_1 \, 0 = 0$. Allora

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 L_u \, w = A_1(L_u - L_1) \, w + A_1 L_1 \, w = A_1(L_u - L_1) \, w + w - T_1 \, w \\ &\Longrightarrow w = T_1 \, w - A_1(L_u - L_1) \, w \\ &\Longrightarrow ||w|| \leq ||T_1 \, w|| + ||A_1(L_u - L_1) \, w|| < \frac{1}{4} \, ||w|| + \frac{1}{4} \, ||w|| = \frac{1}{2} \, ||w|| \\ &\Longrightarrow w = 0. \end{aligned}$$

Dunque $V_u = \ker L_u$.

$\square$

Sarà presto utile la seguente

Osservazione 11. Se una funzione concava Φ coincide in almeno tre punti distinti con una funzione affine, allora Φ è affine nell'intervallo compreso fra tali punti.

Prova. Siano $x_1 < x_2 < x_3$ tre punti nel dominio di Φ. Sia l una funzione affine (definita sul dominio di Φ, o comunque almeno su $[x_1, x_3]$), tale che

$$l(x_i) = \Phi(x_i) \qquad \text{per } i = 1, 2, 3.$$

Se, per assurdo, Φ non fosse affine in $[x_1, x_3]$, allora

$$\Phi(t\,x + (1-t)\,y) > t\,\Phi(x) + (1-t)\,\Phi(y) \qquad \forall x \in [x_1, x_2[, \quad \forall y \in]x_2, x_3], \quad \forall t \in]0, 1[.$$

Ma siano $x \in [x_1, x_2[$, $y \in]x_2, x_3]$, e $\hat{t} \in]0, 1[$ tali che

$$\hat{t}\,x + (1-\hat{t})\,y = x_2.$$

Si arriva ad avere

$$\Phi(\hat{t}\,x + (1-\hat{t})\,y) = \Phi(x_2) \leq \hat{t}\,\Phi(x) + (1-\hat{t})\,\Phi(y),$$

contro l'ipotesi di assurdo. Quindi Φ deve essere affine in $[x_1, x_3]$. $\square$

Proposizione 5. *Siano Ω_0, $\Omega_1 \in \mathscr{D}$, ed u, v le rispettive funzioni di supporto. Se $||u - 1||_{\mathcal{C}^{2N}(\mathbb{S}^{N-1})} < \delta$, $||v - 1||_{\mathcal{C}^{2N}(\mathbb{S}^{N-1})} < \delta$ con $\delta > 0$ opportuno, e vale*

$$\operatorname{cap}\Big((1-t)\,\Omega_0 + t\,\Omega_1\Big)^{\frac{1}{N-2}} = (1-t)\operatorname{cap}(\Omega_0)^{\frac{1}{N-2}} + t\operatorname{cap}(\Omega_1)^{\frac{1}{N-2}}, \tag{3.3}$$

per un $t \in (0, 1)$, allora $v(\xi) = a\,u(\xi) + b \cdot \xi$ per qualche $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}^N$. In altre parole, Ω_1 è ottenuto traslando e dilatando Ω_0.

Dimostrazione. Siano $F(t) := \operatorname{cap}(\Omega_0 + t\Omega_1)$, e $m(t) := \operatorname{cap}\Big((1-t)\,\Omega_0 + t\,\Omega_1\Big)^{\frac{1}{N-2}} = (1-t)\,F(\frac{t}{1-t})^{\frac{1}{N-2}}$, con $t \in [0, 1]$. Per il punto (2.3) è lecito scrivere

$$F(t) = \frac{1}{N-2} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} (u + tv)\,\mathcal{F}(u + tv)\,d\xi.$$

Così, derivando si ha (ved. Proposizione 4)

$$F'(t) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} v\,\mathcal{F}(u + tv)\,d\xi$$

Per la formula di *variazione seconda della capacità*,

$$F''(0) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} v\,Lu\,d\xi.$$

Noi stiamo assumendo vera la disuguaglianza di Brunn-Minkowski per la capacità, dimostrata da Borell in [1]. In particolare m è una funzione concava. Essa coincide per $0, t$ ed 1 con una funzione affine. Dall'*Osservazione 11* segue che m è affine in $[0,1]$, suo dominio di definizione. Dunque deve essere $m'' \equiv 0$. Calcoliamo $m''(t)$.

$$\begin{aligned}
m''(t) &= \Big[-F\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{\frac{1}{N-2}} + (1-t)\,F\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{\frac{1}{N-2}-1} F'\Big(\frac{t}{1-t}\Big)\,\frac{(1-t)+t}{(1-t)^2}\,\frac{1}{N-2}\Big]' \\
&= \Big[-F\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{\frac{1}{N-2}} + \frac{1}{N-2}\,\frac{1}{(1-t)}\,F\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{\frac{3-N}{N-2}} F'\Big(\frac{t}{1-t}\Big)\Big]' \\
&= -\frac{1}{N-2}\,\frac{1}{(1-t)^2}\,F\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{\frac{3-N}{N-2}} F'\Big(\frac{t}{1-t}\Big) + \frac{1}{N-2}\,\frac{1}{(1-t)^2}\,F\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{\frac{3-N}{N-2}} F'\Big(\frac{t}{1-t}\Big) \\
&\qquad + \frac{1}{N-2}\,\frac{1}{(1-t)}\,\Big(\frac{3-N}{N-2}\Big)\,F\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{\frac{1}{N-2}-2}\,\frac{\Big(F'\Big(\frac{t}{1-t}\Big)\Big)^2}{(1-t)^2} \\
&\qquad + \frac{1}{N-2}\,\frac{1}{(1-t)}\,F\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{\frac{3-N}{N-2}} F''\Big(\frac{t}{1-t}\Big)\,\frac{1}{(1-t)^2} \\
&= \frac{3-N}{(N-2)^2}\,\frac{1}{(1-t)^3}\,F\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{\frac{1}{N-2}-2}\Big(F'\Big(\frac{t}{1-t}\Big)\Big)^2 \\
&\qquad + \frac{1}{N-2}\,\frac{1}{(1-t)^3}\,F\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{\frac{1}{N-2}-1} F''\Big(\frac{t}{1-t}\Big).
\end{aligned}$$

In $t=0$,

$$\begin{aligned}
m''(0) &= \frac{3-N}{(N-2)^2}\,F(0)^{\frac{1}{N-2}-2}\,F'(0)^2 + \frac{1}{N-2}\,F(0)^{\frac{1}{N-2}-1}\,F''(0) \\
&= (N-2)^{-2}\,F(0)^{\frac{1}{N-2}-2}\Big[(N-2)\,F(0)\,F''(0) - (N-3)\,F'(0)^2\Big].
\end{aligned}$$

$$m''(0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (N-2)\,F(0)\,F''(0) = (N-3)\,F'(0)^2. \tag{3.4}$$

Indicando con $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare di $L^2(\mathbb{S}^{N-1}, d\xi)$, scriviamo

$$F(0) = \frac{(u,S)}{(N-2)}, \qquad F'(0) = (v,S), \qquad F''(0) = (v, Lv).$$

Ci sono ora due casi. Quando $N=3$, da (3.4) si ha che $(v,Lv) = F''(0) = 0$. Così, per il Lemma 5, $Lv = 0$ e $v \in \operatorname{span}\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,u\}$. Analizziamo cosa accade se $N \geq 4$.
Per prima cosa possiamo esprimere la (3.4) in questo modo,

$$(u,Lu)\,(v,Lv) = (v,Lu)^2. \tag{3.5}$$

Poniamo poi $a_k = (u,\phi_k)$ e $b_k = (v,\phi_k)$, così che $u - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\phi_k \in \mathcal{P}_1$ e $v - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k\phi_k \in \mathcal{P}_1$. Quindi

$$0 = L\Big(u - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\phi_k\Big) = Lu - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,L\phi_k = Lu + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\alpha_k\phi_k - a_0\alpha_0\phi_0$$

e

$$0 = L\Big(v - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k\phi_k\Big) = Lv + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\alpha_k\phi_k - b_0\alpha_0\phi_0,$$

da cui (3.5) diventa

$$\begin{aligned}
&\Big(u, a_0\alpha_0\phi_0 - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\alpha_k\phi_k\Big)\ \Big(v, b_0\alpha_0\phi_0 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\alpha_k\phi_k\Big) \\
&\quad = \Big[(u, a_0\alpha_0\phi_0) - \Big(u, \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\alpha_k\phi_k\Big)\Big]\Big[(u, b_0\alpha_0\phi_0) - \Big(v, \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\alpha_k\phi_k\Big)\Big] \\
&\quad = \Big[(u,\phi_0)a_0\alpha_0 - \sum_{k=1}^{+\infty}(u,\phi_k)a_k\alpha_k\Big]\Big[(v,\phi_0)b_0\alpha_0 - \sum_{k=1}^{+\infty}(v,\phi_k)b_k\alpha_k\Big] \\
&\quad = \Big[\alpha_0 a_0^2 - \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k a_k^2\Big]\Big[\alpha_0 b_0^2 - \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k b_k^2\Big] \\
&\quad = \Big[\alpha_0 a_0 b_0 - \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k a_k b_k\Big]^2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Supponiamo per il momento di aver dimostrato che *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ tale che se $||u-1||_{\mathcal{C}^{2N}} < \delta$ e $||v-1||_{\mathcal{C}^{2N}} < \delta$, allora

1) $|a_0 - 1| < \varepsilon$ e $|b_0 - 1| < \varepsilon$;

2) $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) < \varepsilon$.

$(\bigstar)$

Dal Lemma 5 sappiamo che $\alpha_0 \geq 1$ e $\beta_0 \geq 1$. Possiamo dunque scegliere un opportuno ε tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k a_k^2 < \alpha_0 a_0^2 \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k b_k^2 < \alpha_0 b_0^2. \tag{3.7}$$

Mostriamo che

$$\frac{a_k}{a_0} = \frac{b_k}{b_0},$$

da cui si avrà

$$\frac{v}{b_0} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b_k}{b_0}\phi_k = \frac{v}{b_0} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{a_0}\phi_k,$$

ed infine

$$\Big(\frac{v}{b_0} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{a_0}\phi_k\Big) - \Big(\frac{u}{a_0} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{a_0}\phi_k\Big) = \frac{v}{b_0} - \frac{u}{a_0} \in \mathcal{P}_1,$$

in quanto i due elementi tra parentesi appartengono allo spazio vettoriale $\mathcal{P}_1$.
Per fare questo, cominciamo con il porre

$$x_k = \frac{a_k\sqrt{\alpha_k}}{a_0\sqrt{\alpha_0}} \qquad \text{e} \qquad y_k = \frac{b_k\sqrt{\alpha_k}}{b_0\sqrt{\alpha_0}}.$$

Le relazioni (3.6) e (3.7) diventano rispettivamente

$$(-1+|x|^2)(-1+|y|^2) = (-1+(x,y))^2, \tag{3.8}$$
$$|x|<1 \qquad \text{e} \qquad |y|<1, \tag{3.9}$$

dove $|\cdot|$ è la norma l^2. Poniamo anche $A=|x|$ e $B=|y|$. Vogliamo provare che $x=y$.
Supponiamo per assurdo che $x \neq y$. Notiamo che $\left|\frac{x}{AB}\right| > 1$ e $\left|\frac{y}{AB}\right| > 1$. Allora

$$\left|\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right|^2 < \left|\frac{x}{AB} - \frac{y}{AB}\right|^2 = \frac{|x-y|^2}{A^2B^2}, \tag{3.10}$$

dove la prima relazione equivale ad affermare che $\frac{2}{AB} > 2$, ed è verificata poiché $AB<1$.
Inoltre,

$$AB - (x,y) = \frac{AB}{2}\left|\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right|^2.$$

Quindi, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz ($(x,y) \le |x||y| = AB$) e per (3.10),

$$\begin{aligned} A^2B^2 - (x,y)^2 &= (AB+(x,y))(AB-(x,y)) = (AB+(x,y))\frac{AB}{2}\left|\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right|^2 \\ &\le A^2B^2\left|\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right|^2 < |x-y|^2. \end{aligned}$$

L'equazione (3.9) si riscrive come

$$|x|^2 + |y|^2 - 2(x,y) = |x|^2|y|^2 - (x,y)^2,$$

che implica

$$|x-y|^2 = A^2B^2 - (x,y)^2 < |x-y|^2,$$

assurdo.
Per concludere, rimane da dimostrare i punti 1 e 2 di ($\bigstar$).

1) Scriviamo $\alpha_k = \alpha_k^u$ e $\phi_k = \phi_k^u$, con $k \ge 0$. L'autovalore α_0^u è positivo ed ha ϕ_0^u come unico autovettore. Nel corso della dimostrazione del Lemma 5 si è visto che $\phi_0^1 = p_0 = 1$ e che per ogni $s \in \mathbb{N}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $||u-1||_{\mathcal{C}^{2N}} < \delta$ allora $|\alpha_k^u - \alpha_k^1| < \varepsilon$ per ogni $k = 1, \ldots, s$. Consideriamo $|a_0 - 1|$.

$$\begin{aligned} |a_0 - 1| &= |(u,\phi_0^u) - (1,\phi_0^1)| = |(u-1,\phi_0^u) + (1,\phi_0^u) - (1,\phi_0^1)| \\ &= |(u-1,\phi_0^u) + (1,\phi_0^u - \phi_0^1)| \le ||u-1||_{L^2} + ||\phi_0^u - \phi_0^1||_{L^2}. \end{aligned}$$

Proviamo che $||\phi_0^u - \phi_0^1||_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ per $||u-1||_{\mathcal{C}^{2N}} < \delta$.
Per assurdo, esistano $\varepsilon > 0$ e una successione di funzioni $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ convergente ad 1 nella norma $\mathcal{C}^{2N}$ per $h \to +\infty$, ma tale che $||\phi_0^{u_h} - \phi_0^1||_{L^2} \geq \varepsilon$. La successione $\{\phi_0^{u_h}\}_{h\in\mathbb{N}}$ soddisfa

$$L_{u_h}\phi_0^{u_h} = \alpha_0^{u_h}\phi_0^{u_h}, \quad ||\phi_0^{u_h}||_{L^2} = 1. \tag{3.11}$$

Possiamo supporre che esista ψ_0 tale che $\phi_0^{u_h} \rightharpoonup \psi_0$ debolmente in L^2, per $h \to +\infty$. Vogliamo provare che, a meno di sottosuccessioni, si ha anche convergenza forte in L^2. Mostriamo che esiste $C > 0$ tale che $||\nabla\phi_0^{u_h}||_{L^2} \leq C < +\infty$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Moltiplichiamo ambo i membri di (3.11)(i) per $\phi_0^{u_h}$ scalarmente in $L^2(\mathbb{S}^{N-1}, d\xi)$.

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} L_{u_h}\phi_0^{u_h}\ \phi_0^{u_h}\, d\xi = \alpha_0^{u_h},$$

da cui

$$\begin{aligned}-2\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{h^{u_h}}{K^{u_h}}\,\Lambda(h^{u_h}\phi_0^{u_h})\ \phi_0^{u_h}\, d\xi = \alpha_0^{u_h} &+ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} (h^{u_h})^2 c_{ij}^{u_h}\ \nabla_i\phi_0^{u_h}\nabla_j\phi_0^{u_h}\, d\xi \\ &+ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} h^{u_h}\,\mathrm{tr}(c_{ij}^{u_h})(\phi_0^{u_h})^2\, d\xi.\end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, per ogni $h \in \mathbb{N}$

$$-2\Big(\frac{h^{u_h}}{K^{u_h}}\,\Lambda(h^{u_h}\phi_0^{u_h}), \phi_0^{u_h}\Big) \leq 2\,||\frac{h^{u_h}}{K^{u_h}}\,\Lambda(h^{u_h}\phi_0^{u_h})||_{L^2} \leq 4(N-2)\,||\Lambda(h^{u_h}\phi_0^{u_h})||_{L^2}.$$

Sia $v \in \mathcal{C}^\infty$ una funzione test. Poiché $h^{u_h} \to (N-2)$ uniformemente, e $\phi_0^{u_h} \rightharpoonup \psi_0$ L^2-debolmente, si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \Lambda(h^{u_h}\phi_0^{u_h})\ v\, d\xi = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} h^{u_h}\phi_0^{u_h}\ \Lambda(v)\, d\xi \longrightarrow \\ \longrightarrow (N-2)\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \psi_0\ \Lambda(v)\, d\xi = (N-2)\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \Lambda(\psi_0)\ v\, d\xi,\end{aligned}$$

ovvero $\Lambda(h^{u_h}\phi_0^{u_h})$ converge debolmente in L^2 a $(N-2)\,\Lambda(\psi_0)$. Quindi, per il Teorema di *Banach-Steinhaus*,

$$\sup_{h\in\mathbb{N}} ||\Lambda(h^{u_h}\phi_0^{u_h})||_{L^2} < +\infty.$$

Esistono dunque C, $D > 0$ indipendenti da $h \in \mathbb{N}$ tali che

$$\begin{aligned}C\int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\nabla\phi_0^{u_h}|^2\, d\xi &\leq \int_{\mathbb{S}^{N-1}} (h^{u_h})^2 c_{ij}^{u_h}\ \nabla_i\phi_0^{u_h}\nabla_j\phi_0^{u_h}\, d\xi \\ &= -\alpha_0^{u_h} - 2\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{h^{u_h}}{K^{u_h}}\,\Lambda(h^{u_h}\phi_0^{u_h})\ \phi_0^{u_h}\, d\xi - \int_{\mathbb{S}^{N-1}} h^{u_h}\,\mathrm{tr}(c_{ij}^{u_h})(\phi_0^{u_h})^2\, d\xi \\ &\leq C_1 + C_2 + C_3 \leq D,\end{aligned}$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per opportune costanti C_1, C_2, $C_3 > 0$. Ne segue la convergenza forte in L^2 di $\{\phi_0^{u_h}\}$, e quindi, passando al limite per $h \to +\infty$ in (3.11), si ottiene

$$L_1\psi_0 = \alpha_0^1\psi_0, \qquad ||\psi_0||_{L^2} = 1.$$

Per l'unicità dell'autofunzione relativa al primo autovalore per L_1, si deve avere $\psi_0 = \phi_0^1$. Questo è in contraddizione con l'ipotesi di assurdo.

2) Grazie al fatto che L_u è autoaggiunto, componendolo un numero sufficiente di volte riusciamo ad ottenere la stima di convergenza cercata.
Mostriamo che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2|a_k|^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

dove $a_k = (u, \phi_k)$, con $k \geq 1$. Sappiamo che $L_u\phi_k = -\alpha_k\phi_k$, con $\alpha_k \geq 1$. Dunque

$$\begin{aligned} a_k = (u, \phi_k) &= -\frac{1}{\alpha_k}(u, L_u\phi_k) = \frac{1}{\alpha_k^2}(u, L_u(L_u\phi_k)) \\ &= \cdots = (-1)^m \frac{1}{\alpha_k^m}(u, L_u \underbrace{\circ \cdots \circ}_{\text{m volte}} L_u\phi_k) \\ &= (-1)^m \frac{1}{\alpha_k^m}(L_u^m u, \phi_k), \end{aligned}$$

da cui

$$|a_k|^2 \leq \frac{1}{\alpha_k^{2m}}||L_u^m u||_2^2.$$

Poiché $\alpha_k = \mathcal{O}(k^{\frac{2}{N-1}})$, ovvero esiste $c > 0$ tale che $\alpha_k \geq c\, k^{\frac{2}{N-1}}$,

$$k^2|a_k|^2 \leq k^2\frac{1}{\alpha_k^{2m}}||L_u^m u||_2^2 \leq ||L_u^m u||_2^2 \frac{1}{c^m}\frac{1}{k^{(-2+\frac{4m}{N-1})}}.$$

Se $-2 + \frac{4m}{N-1} > 1$, cioè

$$m > \frac{3N-3}{4}, \tag{3.12}$$

allora $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{(-2+\frac{4m}{N-1})}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ora fissiamo m come in (3.12). D'altra parte $L_1 1$ è una costante. Pertanto esiste $C > 0$ tale che se $||u-1||_{\mathcal{C}^{2N}} < \delta$ per un opportuno δ allora $||L_u^m u||_2^2 \frac{1}{c^m} \leq C^m$, e $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2|a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{C}{k}\right)^m < \frac{\varepsilon}{2}$ per m abbastanza grande. In modo analogo si ottiene che $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2|b_k|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$, e si conclude.

$\square$

Capitolo 4

Prolungamento analitico

Dimostrazione del Teorema 2 nel caso generale

Siano Ω_0, $\Omega_1 \in \mathscr{D}$, $\Omega_t = (1-t)\Omega_0 + t\Omega_1$, con $0 \leq t \leq 1$, e U_0, U_1 e U_t i rispettivi potenziali capacitari. Siano $\lambda < 1$,

$$\Omega_t(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_t : U_t(x) > \lambda\} \cup \bar{\Omega}_t,$$

e $U_\lambda = \frac{U_t}{\lambda}$ il suo potenziale capacitario. Sussiste quindi l'identità $\operatorname{cap}\Omega_t(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\operatorname{cap}\Omega_t$.
Ricordiamo la proprietà di omogeneità per la *capacità*: $\operatorname{cap}(s\Omega) = s^{N-2}\operatorname{cap}\Omega$, per ogni $s > 0$ ed ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato con frontiera lipschitziana.

Per ipotesi la disuguaglianza (2) vale come uguaglianza, ovvero

$$\operatorname{cap}\Omega_t(\lambda)^{1/(N-2)} = (1-t)\operatorname{cap}\Omega_0(\lambda)^{1/(N-2)} + t\operatorname{cap}\Omega_1(\lambda)^{1/(N-2)}. \tag{4.1}$$

Questa, unita alla disuguaglianza (2), dà

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}\Big((1-t)\Omega_0(\lambda) + t\Omega_1(\lambda)\Big)^{1/(N-2)} &\geq (1-t)\operatorname{cap}\Omega_0(\lambda)^{1/(N-2)} + t\operatorname{cap}\Omega_1(\lambda)^{1/(N-2)} \\ &= \operatorname{cap}\Omega_t(\lambda)^{1/(N-2)}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nel corso della dimostrazione del Teorema 1 fornita da Borell (vedi [1], Teorema 2.1) si prova che, detto $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$ con $t \in [0,1]$, si ha

$$U_t(x_t) \geq \min\{U_0(x_0), U_1(x_1)\},$$

per ogni $x_0 \in \Omega_0$, per ogni $x_1 \in \Omega_1$. Ciò equivale all'inclusione insiemistica

$$\Omega_t(\lambda) \supseteq (1-t)\Omega_0(\lambda) + t\Omega_1(\lambda),$$

la quale, per la relazione (4.2) esistente tra le rispettive *capacità* e la proprietà (v) dell'Osservazione 1, implica che

$$\Omega_t(\lambda) = (1-t)\Omega_0(\lambda) + t\Omega_1(\lambda) \qquad \forall\, \lambda < 1.$$

La (4.2) diventa allora

$$\operatorname{cap}\Big((1-t)\Omega_0(\lambda)+t\Omega_1(\lambda)\Big)^{1/(N-2)} = (1-t)\operatorname{cap}\Omega_0(\lambda)^{1/(N-2)} + t\operatorname{cap}\Omega_1(\lambda)^{1/(N-2)}. \tag{4.3}$$

Ora mostreremo che al tendere di λ a 0 gli insiemi $\Omega_0(\lambda)$ e $\Omega_1(\lambda)$ diventano prossimi ad una sfera. Ci troveremo così nelle ipotesi della Proposizione 5.

Supponiamo che, a meno di dilatazioni, $\operatorname{cap}\Omega_0 = \operatorname{cap}\Omega_1$. Sia $c = a_N\operatorname{cap}\Omega_0 = a_N\operatorname{cap}\Omega_1$, dove $a_N = \Big(N(2-N)\omega_N\Big)^{-1}$ è la costante dimensionale che compare nella soluzione fondamentale del laplaciano per $N \geq 3$. Poniamo

$$\lambda = c\,s^{N-2}.$$

Sia $z \in \mathbb{S}^{N-1}$, e sia $\rho(z,s)$ la funzione definita implicitamente dall'equazione

$$U_0(s^{-1}\rho(z,s)\,z) = c\,s^{N-2}. \tag{4.4}$$

Ha validità generale il seguente lemma (vedi [1], Lemma 2.1).

Lemma 6. *Se U è il potenziale capacitario di un insieme aperto e convesso Ω di $\mathbb{R}^N$, allora $|\nabla U(x)| \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in (0,1)$ e supponiamo che $0 \in \Omega$. Poiché $\frac{1}{\lambda}\Omega \subset \Omega$ e U è armonica in $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$, per il principio del massimo si ha che $U(\lambda x) < U(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$. La derivata radiale di U è quindi

$$\langle \nabla U(x), x\rangle = \lim_{\lambda\to 1}\frac{U(x)-U(\lambda x)}{1-\lambda} \leq 0,$$

e inoltre è una funzione armonica in $\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}$. Ancora per il principio del massimo, non si può mai verificare il caso $\langle \nabla U(x), x\rangle = 0$, poiché allora U, continua fino a $\partial\Omega$, sarebbe costantemente uguale a 1, contraddicendo così la condizione $\lim_{|x|\to+\infty} U(x) = 0$. $\square$

Per il teorema della funzione implicita, ρ è dunque ben definita. Siano

$$\Theta = \Big\{\frac{x}{|x|^2} : x \in \mathbb{R}^N \setminus (\Omega_t \cup \{0\})\Big\},$$

e ϕ tale che $\Delta\phi = 0$ in Θ e $\phi = |x|^{2-N}$ in $\partial\Theta$. La funzione $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Theta)\cap\mathcal{C}(\bar{\Theta})$ è unica e soddisfa le relazioni

$$U_0(x) = |x|^{2-N}\phi\Big(\frac{x}{|x|^2}\Big), \quad \phi(0) = c. \tag{4.5}$$

Da (4.4) e (4.5)(i), possiamo scrivere

$$\rho^{2-N}\phi(s\,\rho^{-1}z) = c. \tag{4.6}$$

Le funzioni armoniche sono analitiche reali, quindi, per la versione analitica del Teorema della funzione implicita (si veda [10]), anche ρ è una funzione analitica di (z,s) in un intorno di

$s = 0$. Inoltre $\rho(z, 0) = 1$ per ogni z, e $\rho(z, s) \longrightarrow 1$ nella topologia $\mathcal{C}^\infty$ quando $s \to 0$. Quindi, con un'opportuna dilatazione, l'insieme $\Omega_0(\lambda)$ approssima una palla unitaria nella norma $\mathcal{C}^{2N}(\mathbb{S}^{N-1})$. Infatti

$$s\Omega_0(\lambda) = \{rz : \, z \in \mathbb{R}^N, \, |z| = 1, \, 0 < r < \rho(z, s)\},$$

e si fa tendere s a 0. Analoghe considerazioni per $s\Omega_1(\lambda)$ con $s, \lambda \to 0$. Dunque, per (4.3),

$$\operatorname{cap}\Big((1-t)\, s\Omega_0(\lambda) + t\, s\Omega_1(\lambda)\Big)^{1/(N-2)} = (1-t) \operatorname{cap} s\Omega_0(\lambda)^{1/(N-2)} + t \operatorname{cap} s\Omega_1(\lambda)^{1/(N-2)}.$$

Fissati s e λ opportunamente piccoli, entrambi $s\Omega_0(\lambda)$ e $s\Omega_1(\lambda)$ approssimano la palla unitaria nella norma $\mathcal{C}^{2N}(\mathbb{S}^{N-1})$. Per la Proposizione 5, essi sono allora l'uno il traslato e il dilatato dell'altro. D'altra parte si è supposto che $\operatorname{cap}\Omega_0 = \operatorname{cap}\Omega_1$, ovvero che $\operatorname{cap}\Omega_0(\lambda) = \operatorname{cap}\Omega_1(\lambda)$. Quindi $s\Omega_0(\lambda)$ e $s\Omega_1(\lambda)$ differiscono solo per una traslazione. Esiste dunque un vettore $b \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$U_1(x - b) = U_0(x), \tag{4.7}$$

per tutti gli x tali che $U_0(x) \leq \lambda$. Siccome U_0 e U_1 sono funzioni analitiche reali dove $U_0 < 1$ e $U_1 < 1$ rispettivamente, mediante un prolungamento analitico (4.7) vale per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Questo conclude la dimostrazione del Teorema 2.

Bibliografia

[1] Borell C., *Capacitary inequalities of the Brunn-Minkowski type*, Math. Ann. 263 (1983), no. 2, 179–184.

[2] Caffarelli L. A., Jerison D., Lieb E. H., *On the case of equality in the Brunn-Minkowski inequality for capacity*, Adv. Math. 117 (1996), no. 2, 193–207.

[3] Colesanti A., Salani P., *The Brunn-Minkowski inequality for p-capacity of convex bodies*, Math. Ann. 327 (2003), no. 3, 459–479.

[4] Colesanti A., Cuoghi P., *The Brunn-Minkowski inequality for the n-dimensional logarithmic capacity of convex bodies*, Potential Anal. 22 (2005), no. 3, 289–304.

[5] Dahlberg B. E. J., *Estimates for harmonic measure*, Arch. Rational Mech. Anal. 65 (1977), no. 3, 275–283.

[6] Davies E.B., *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1995.

[7] Federer H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York 1969.

[8] Jerison D., *A Minkowski problem for electrostatic capacity*, Acta Math. 176 (1996), no. 1, 1–47.

[9] Schneider R., *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1993.

[10] Krantz S.G., Parks H.R., *The Implicit Function Theorem. History, Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston · Basel · Berlin 2002.