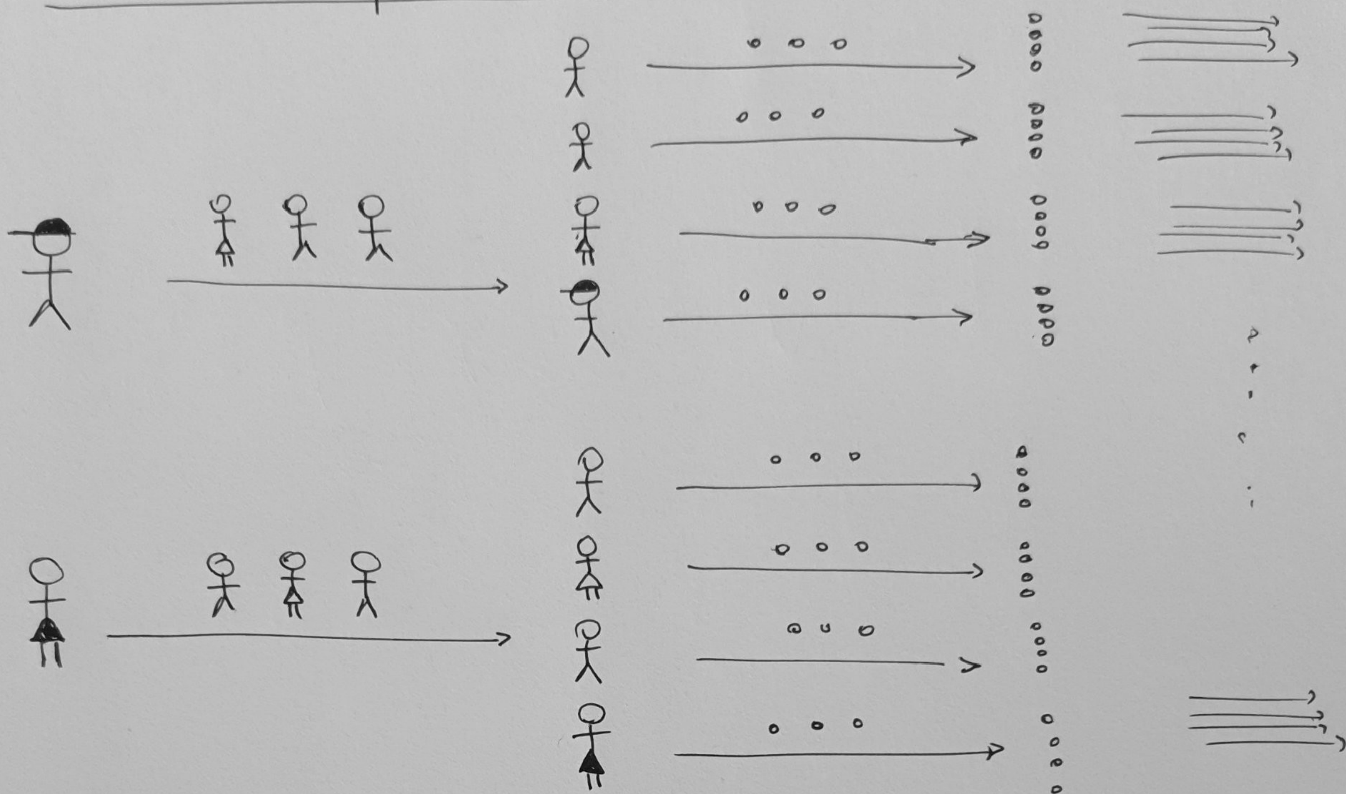
MODELLI EPIDEMIOLOGICI

Paolo Rossi, UniPD

0) Modello esponenziale.



giorno 0 — giorno 1 — giorno 2

$I(0)$

2

$$\boxed{I(1) = I(0)\lambda + I(0)}$$

$2 \times 3 + 2$

$I(2)$

$$I(2) = I(1)\lambda + I(1)$$

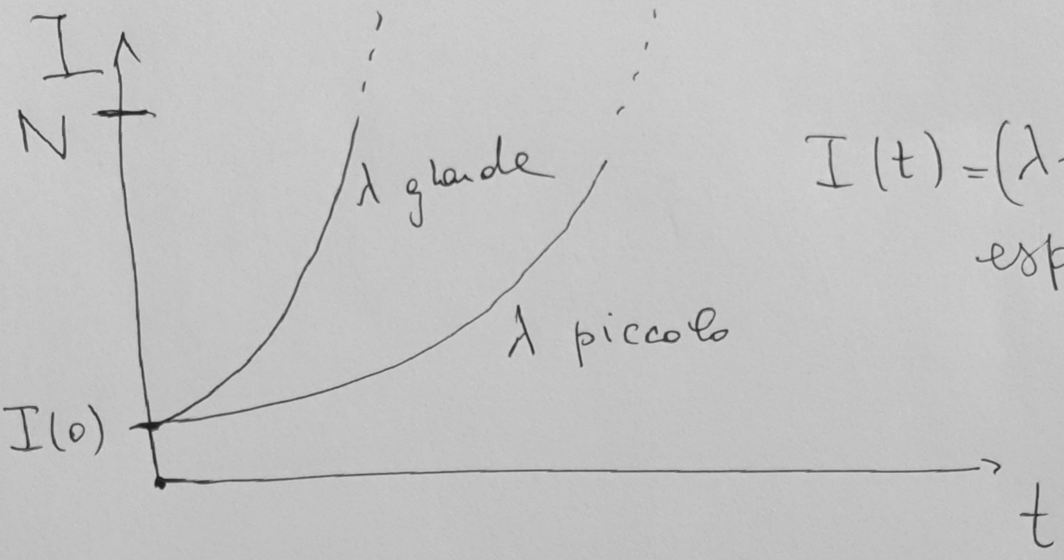
$$\boxed{I(t) = I(t-1)\lambda + I(t-1) = I(t-1)(\lambda+1)}$$

infetti al giorno t-esimo

$$\Longrightarrow \quad I(t) = (\lambda+1)^t \, I(0)$$

$$I(14) = (\underset{3}{\lambda}+1)^{14} \cdot 2 = ?$$

Paolo Rossi, UniPD



$$I(t) = (\lambda+1)^{t}\, I(0)$$

esponenziale

λ = numero di contagi al giorno per ogni infetto

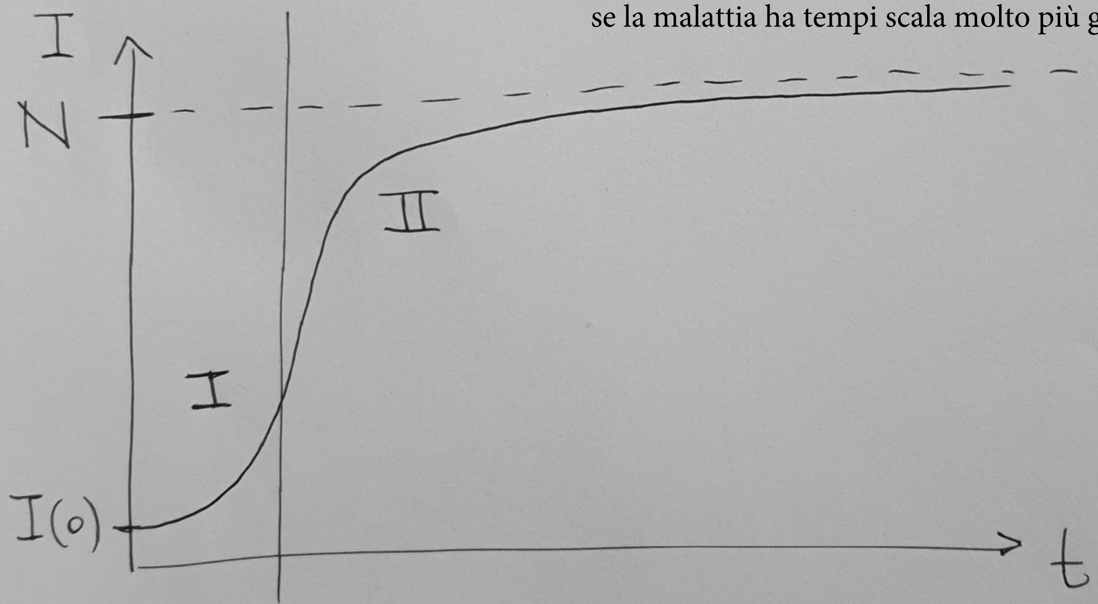
1) Modello logistico

$$N = S(t) + I(t)$$

popolazione totale — suscettibili — infetti

$$\underbrace{I(t+1) - I(t)}_{\text{chiamamolo } I'(t)} = \lambda I(t) \frac{S(t)}{N} = \lambda I(t) \left(1 - \frac{I(t)}{N} \right)$$

(in effetti, dividendo il tempo non in giorni, ma in intervalli di durata Δt, al posto di I(t+1)-I(t) avremmo [I(t+Δt)-I(t)]/Δt e passando al limite per Δt→0, otteniamo la derivata I'(t). Questa sostituzione della differenza finita con la derivata può essere fatta in tutte le altre formule. Il risultato finale non è esattamente lo stesso, ma la differenza è piccola se la malattia ha tempi scala molto più grandi di un giorno)



fase I: $I(t) \simeq 0$ esponenziale

fase II: $I(t) \simeq N$ plateau

Più realistico, ma non è contemplato che si possa guarire (verosimile in alcuni casi: AIDS).
e alla fine l'intera popolazione si ammala.

2) Modello SIS

$$\boxed{S} \; \underset{\gamma I}{\overset{\lambda I \frac{S}{N}}{\rightleftarrows}} \; \boxed{I}$$

$$N = S(t) + I(t)$$

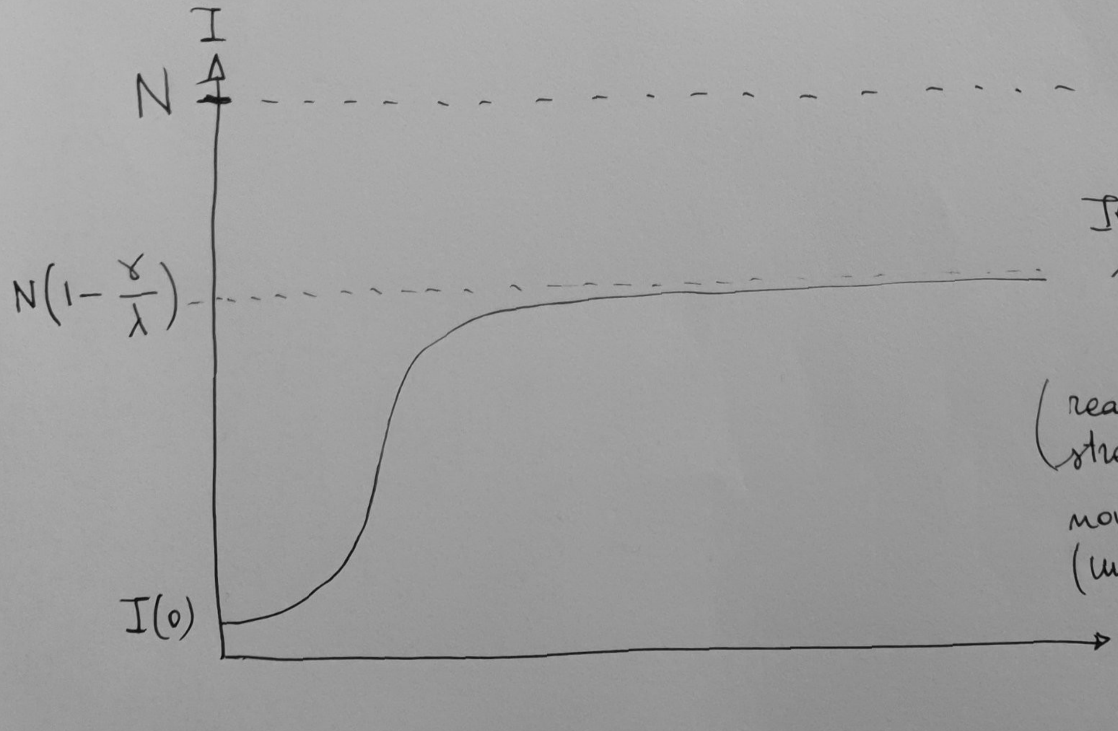
$$I(t+1) - I(t) = \lambda I(t) \frac{S(t)}{N} - \gamma I(t)$$

$$\gamma = \left(\begin{array}{c}\text{frazione di infetti che} \\ \text{guarisce ogni giorno}\end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c}\text{probabilità al giorno} \\ \text{di guarire}\end{array}\right) = \left(\frac{1}{\text{durata media della malattia}}\right)$$

$$I(t+1) - I(t) = \lambda I \left(\frac{S}{N} - \frac{\gamma}{\lambda}\right) = \lambda I \left(1 - \frac{\gamma}{\lambda} - \frac{I}{N}\right)$$

Ancora un modello logistico !



Il numero di infetti si assesta: ~~fase~~ endemica

(realistico per meningite streptococco, gonorrea, ...)

non c'è immunizzazione (una volta guariti si torna subito suscettibili)

3) Modello SIR

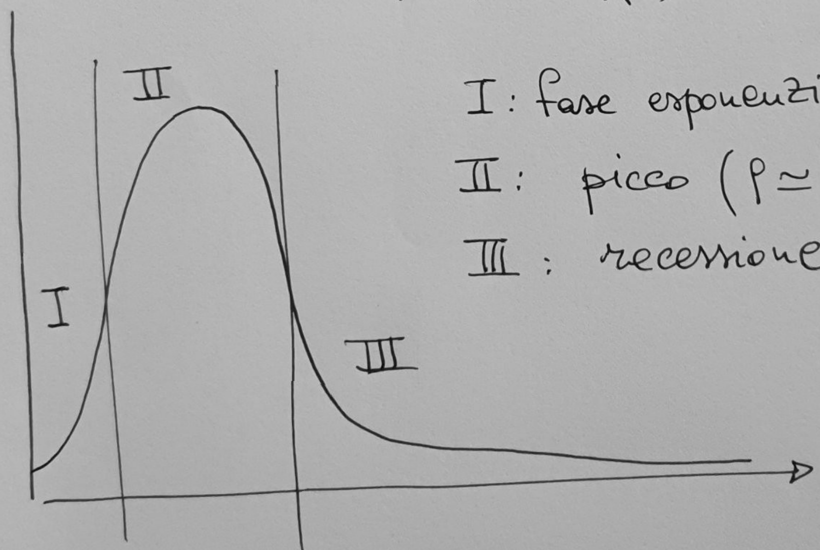
$$\boxed{S} \xrightarrow{\lambda I \frac{S}{N}} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma I} \boxed{R}$$

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

suscettibili — infetti — risolti (immuni o morti)

$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda I(t) \dfrac{S(t)}{N} \\ I'(t) = +\lambda I(t) \dfrac{S(t)}{N} - \gamma I(t) = \end{cases}$$

$$= \lambda I(t) \left(\frac{S(t)}{N} - \frac{\gamma}{\lambda} \right) > 0 \quad \text{se} \quad \underbrace{\frac{S}{N} \overbrace{\frac{\lambda}{\gamma}}^{\text{"}\rho_0}}_{\rho} > 1$$



I: fase esponenziale ($\rho > 1$)

II: picco ($\rho \simeq 1$)

III: recessione ($\rho < 1$)

(realistico per varicella, rosolia, morbillo, vaiolo)
morbillo $\rho_0 \simeq 15$, vaiolo $\rho_0 \simeq 5$

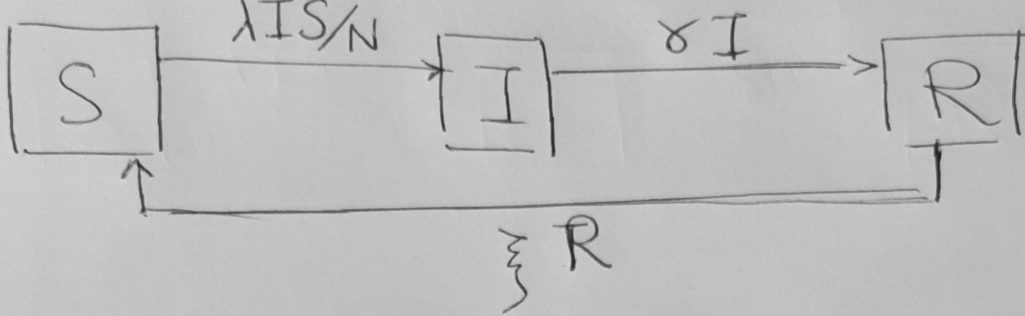
Come abbassare ρ ?

$$S = N - R - I \implies S \leq N - R \implies \rho \leq \frac{N-R}{N} \frac{\lambda}{\gamma} = \left(1 - \frac{R}{N}\right) \frac{\lambda}{\gamma}$$

- Aumentare γ = diminuire i tempi di guarigione = <u>nuovi farmaci</u>!
- Diminuire λ = diminuire i contagi giornalieri = <u>stare a casa</u>! (lavarsi le mani, usare mascherine)
- Aumentare R = aumentare gli immuni = = <u>vaccini</u>!

(Immunità di gregge:
$$\left(1 - \frac{R}{N}\right) \frac{\lambda}{\gamma} < 1 \iff \frac{R}{N} > 1 - \frac{\gamma}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\rho_0}$$
)

4) Modello SIRS



$$\xi = \left(\text{probabilità di perdere l'immunità al giorno} \right) =$$

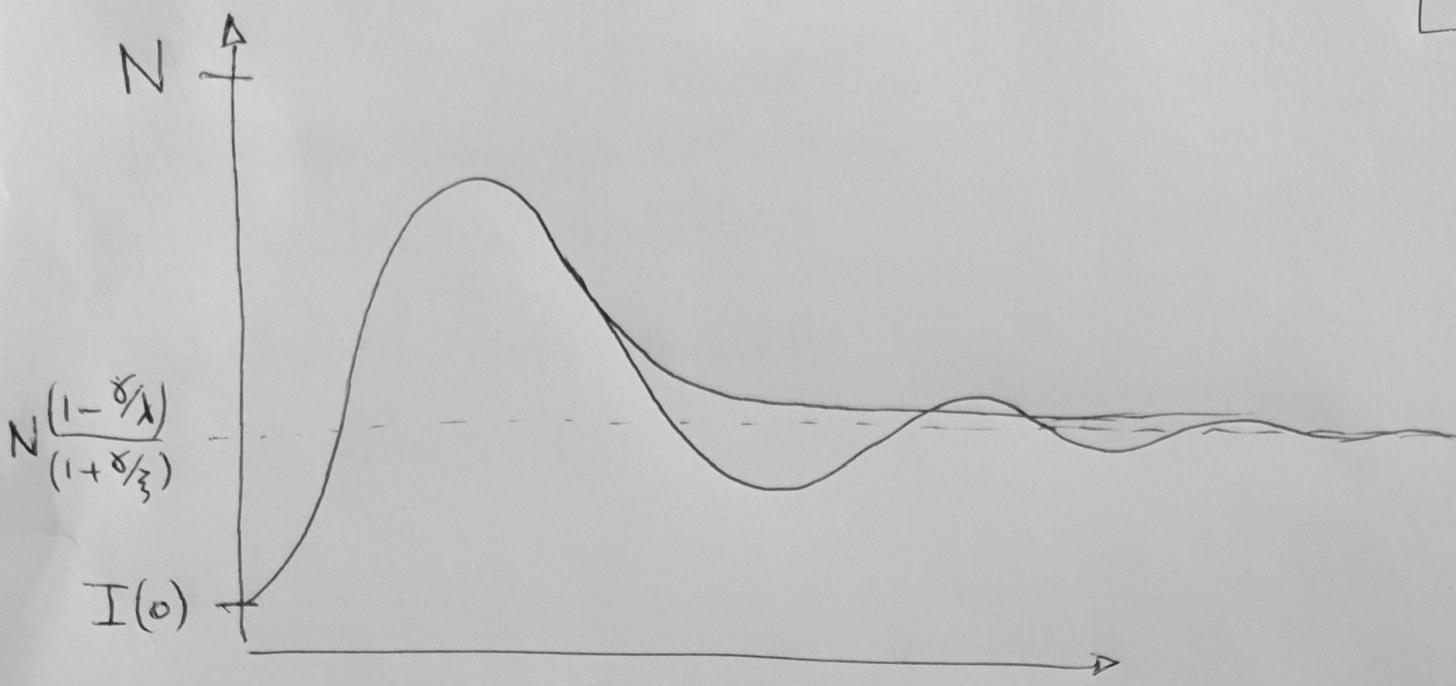
$$= \left(\frac{1}{\text{durata media dell'immunità}} \right)$$

$$= \left(\text{frazione di guariti che perde l'immunità ogni giorno} \right)$$

$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda I \dfrac{S}{N} + \xi R \\ I'(t) = +\lambda I \dfrac{S}{N} - \gamma I \end{cases}$$

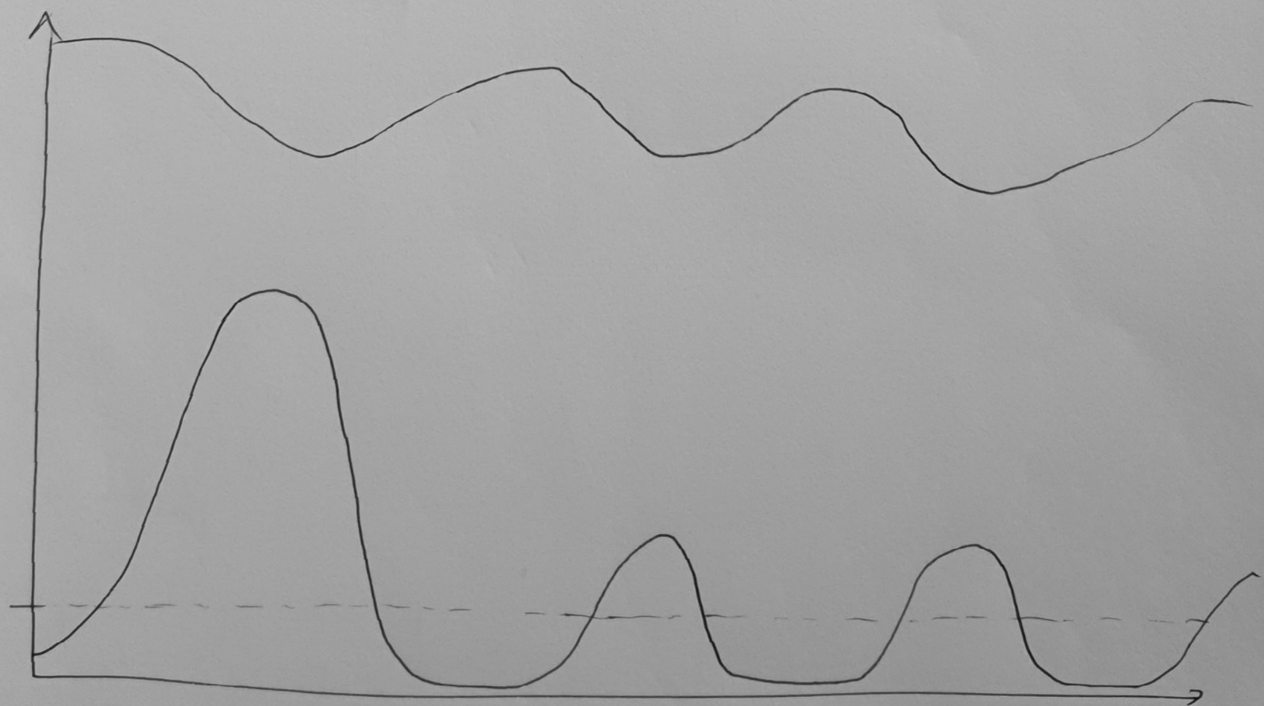
$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

$$R(t) = N - S(t) - I(t)$$



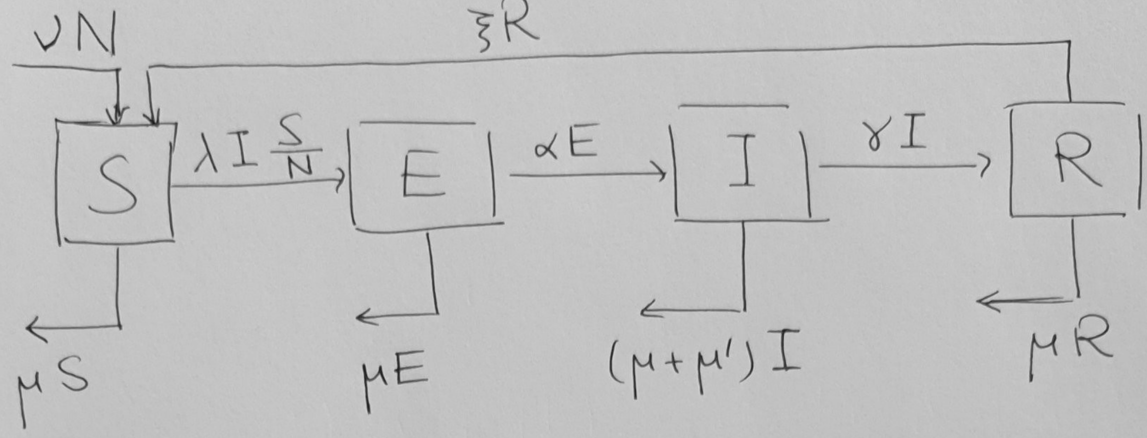
Effetto delle stagioni:

$$\lambda = \lambda(t) = \lambda_0\left(1 - A\sin^2\left(\frac{\pi}{365}t\right)\right)$$



Realistico per influenza stagionale

6) Introduzione di demografia e natalità



$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

ora la popolazione totale non è più costante!

ν = tasso di natalità

μ = tasso di mortalità

μ' = incremento di mortalità dovuto alla malattia

$$\text{CFR} = \frac{\mu'}{\mu' + \gamma}$$

(case fatality ratio)

frazione di casi che si risolvono in un decesso

$$\begin{cases} S(t+1) - S(t) = -\lambda I(t) \dfrac{S(t)}{N(t)} + \xi R(t) + \nu N(t) - \mu S(t) \\ E(t+1) - E(t) = +\lambda I(t) \dfrac{S(t)}{N(t)} - \alpha E(t) - \mu E(t) \\ I(t+1) - I(t) = \alpha E(t) - \gamma I(t) - (\mu + \mu') I(t) \\ R(t+1) - R(t) = \gamma I(t) - \xi R(t) - \mu R(t) \end{cases}$$

Decessi per la <u>sola</u> malattia $\div$ $D(t+1) - D(t) = \mu' I(t)$.

Appendice:

Come modellizzare gli effetti dell'isolamento (tecnicamente chiamato "distanziamento sociale") ?

$$\lambda(t) = \lambda_0 \underbrace{\left(1 - A \sin^2\left(\frac{\pi}{365} t\right)\right)}_{\text{effetto delle stagioni}} \underbrace{\left(1 - B\left(\theta(t-t_i) - \theta(t-t_f)\right)\right)}_{\text{distanziamento sociale.}}$$

($\theta(x)$ è la funzione gradino che vale 0 per $x<0$ e vale 1 per $x>0$)

$0 \leq A < 1$

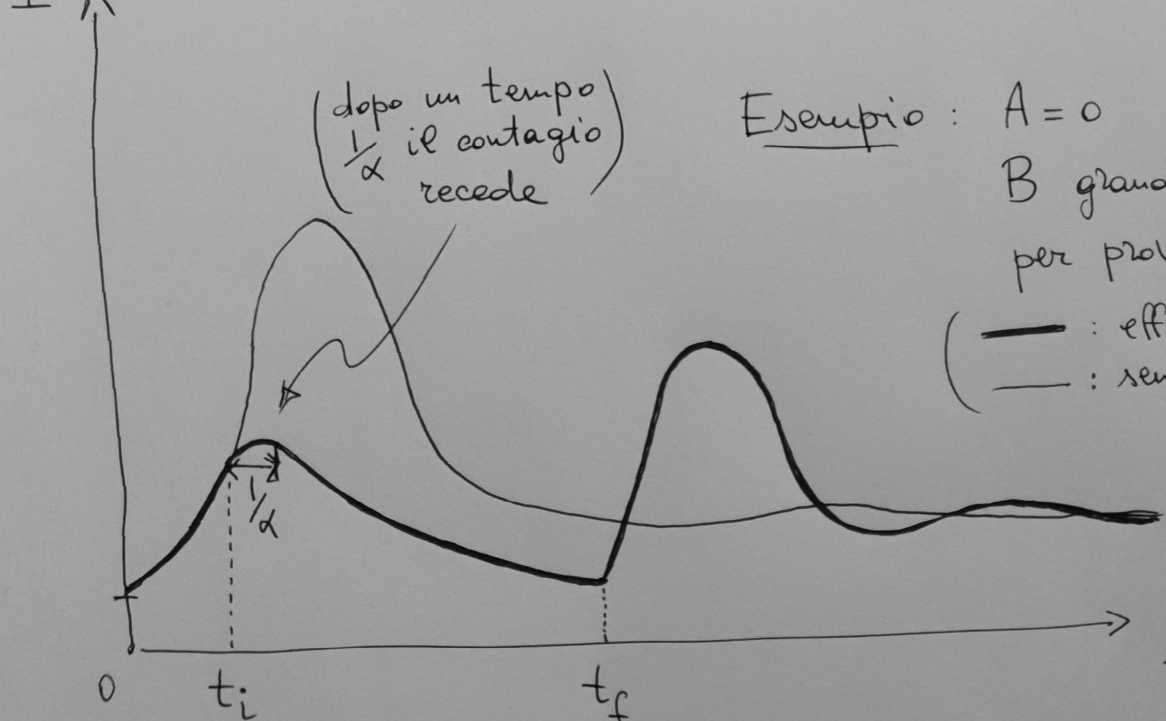
tasso di diminuzione estiva di λ

$0 \leq B < 1$

tasso di diminuzione di λ grazie all'isolamento

t_i = giorno in cui inizia l'isolamento

t_f = giorno in cui finisce l'isolamento

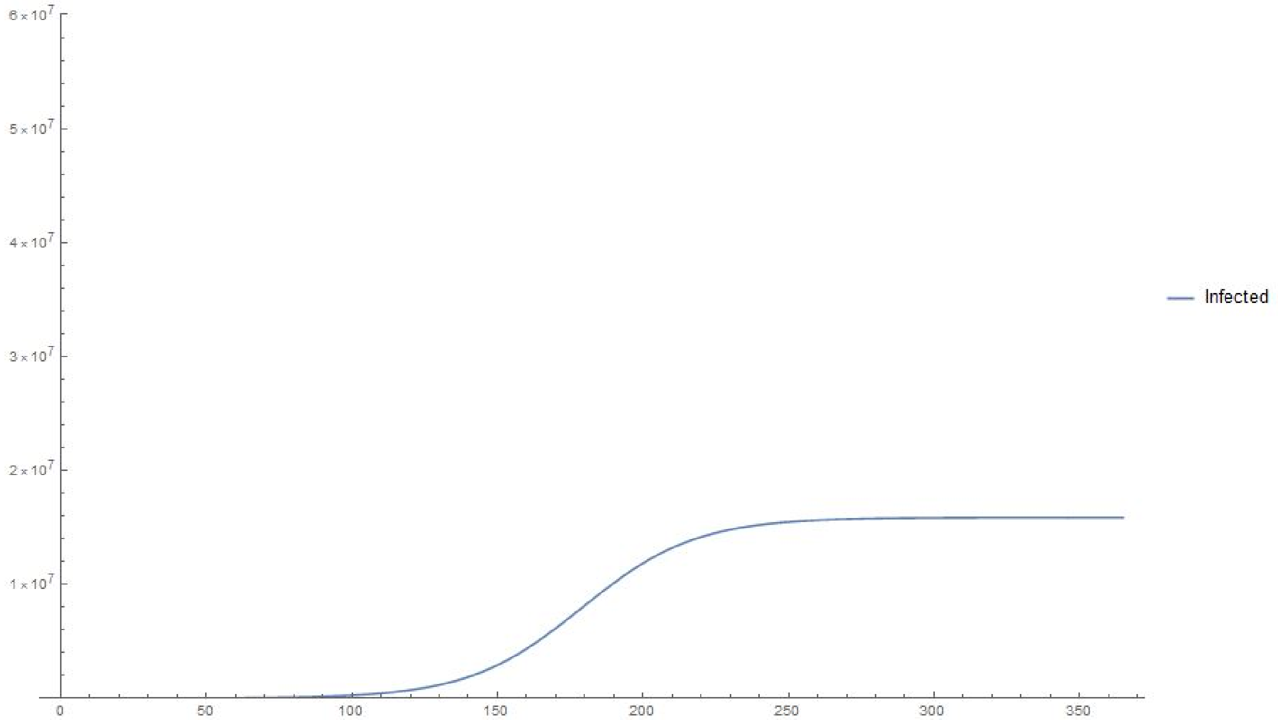


Esempio: $A = 0$

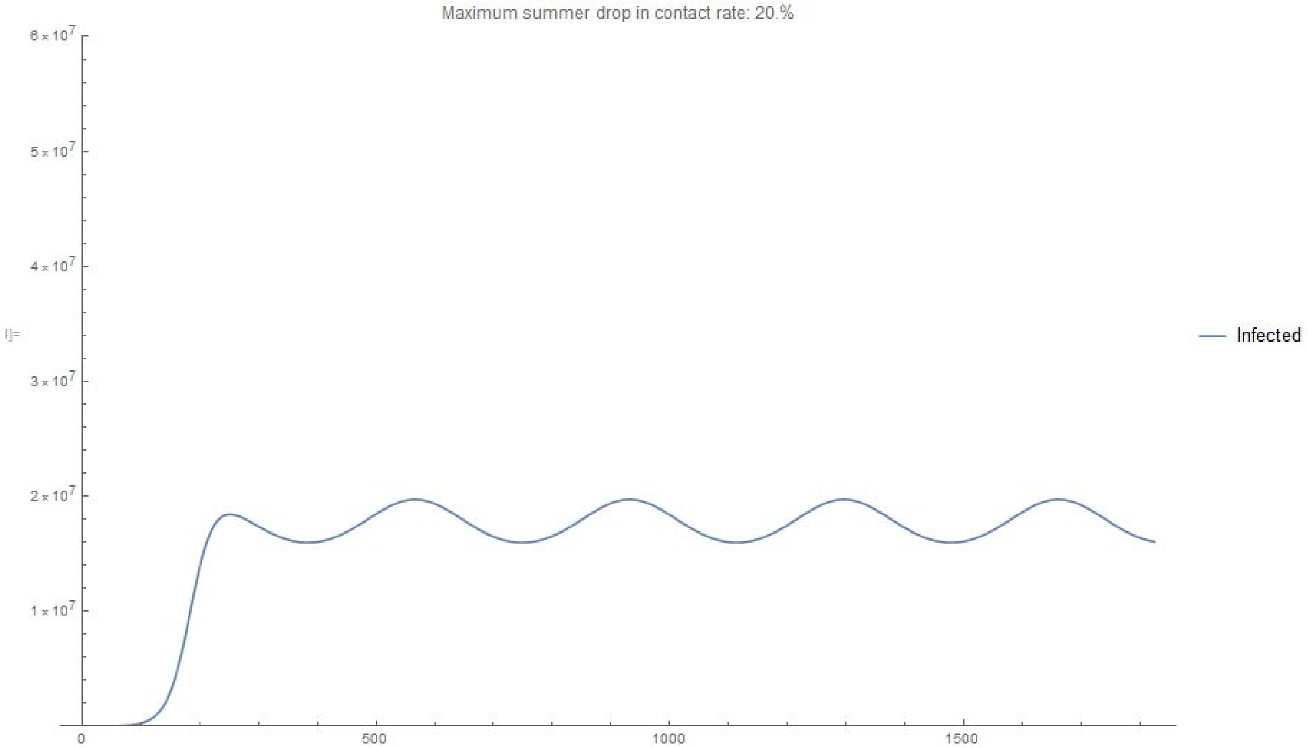
B grande abbastanza per provocare $\rho_0 < 1$.

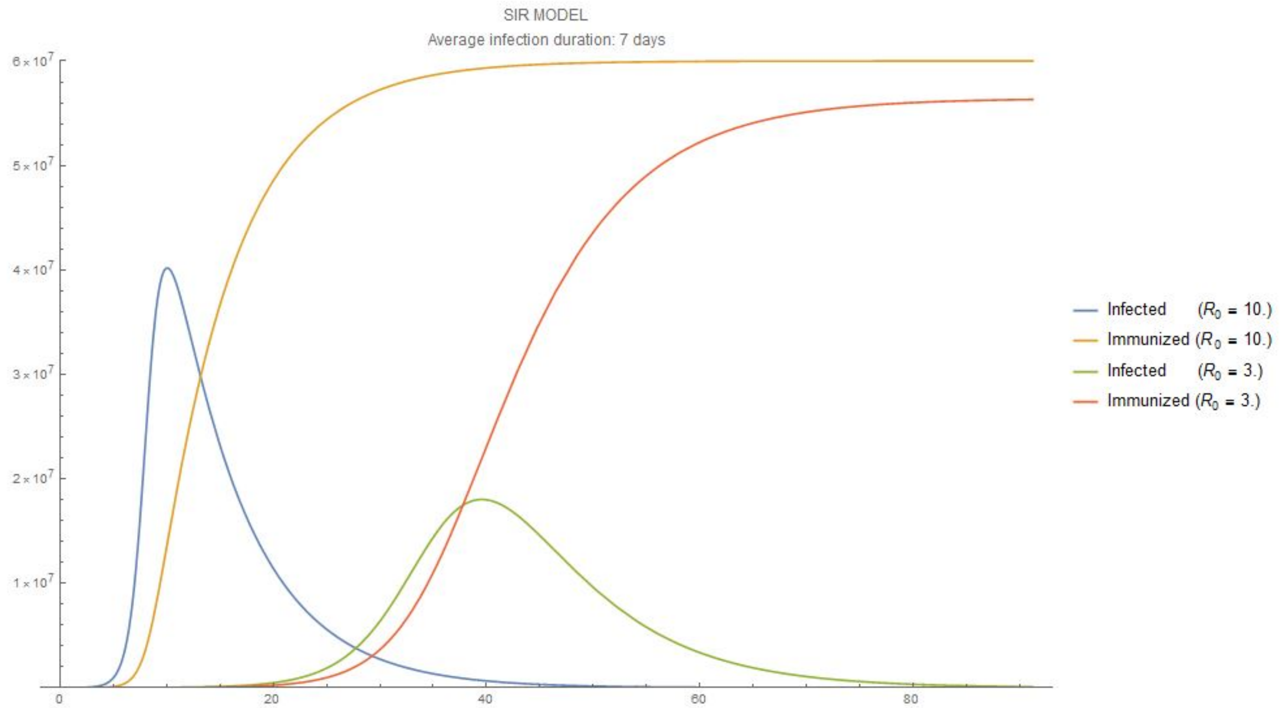
(▬ : effetto dell'isolamento
— : senza isolamento)

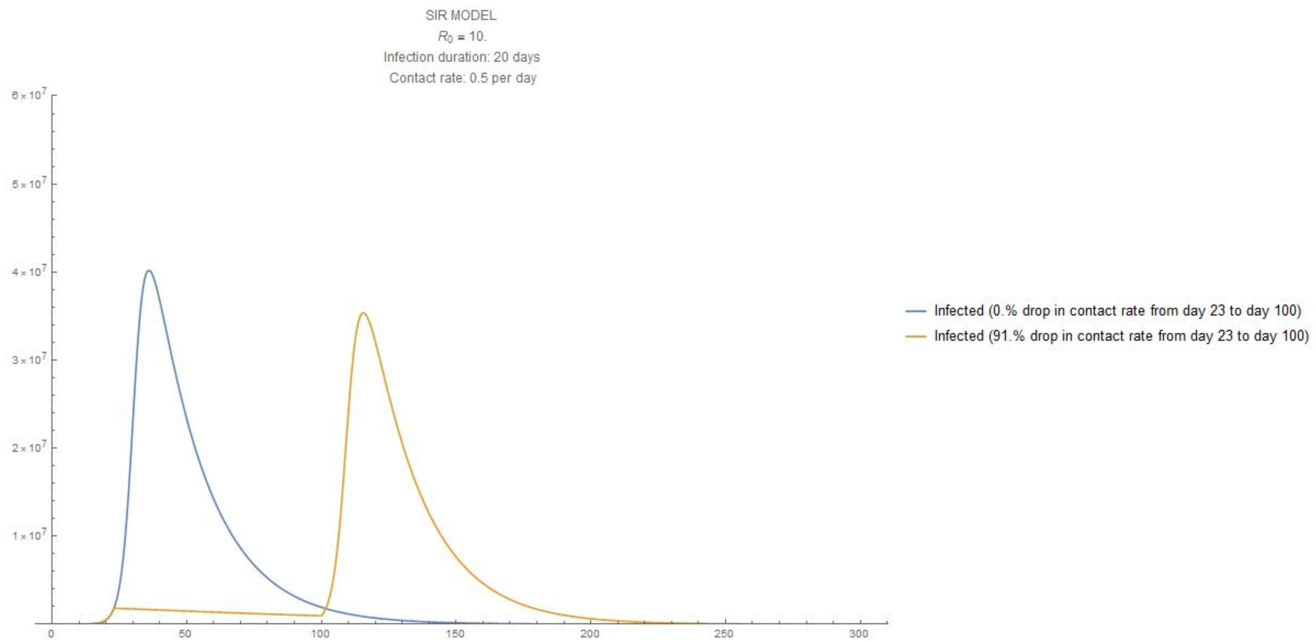
SIS MODEL
Basic reproduction number R_0 = 1.36
Infection duration: 7 days
Contact rate: 0.194286 per day

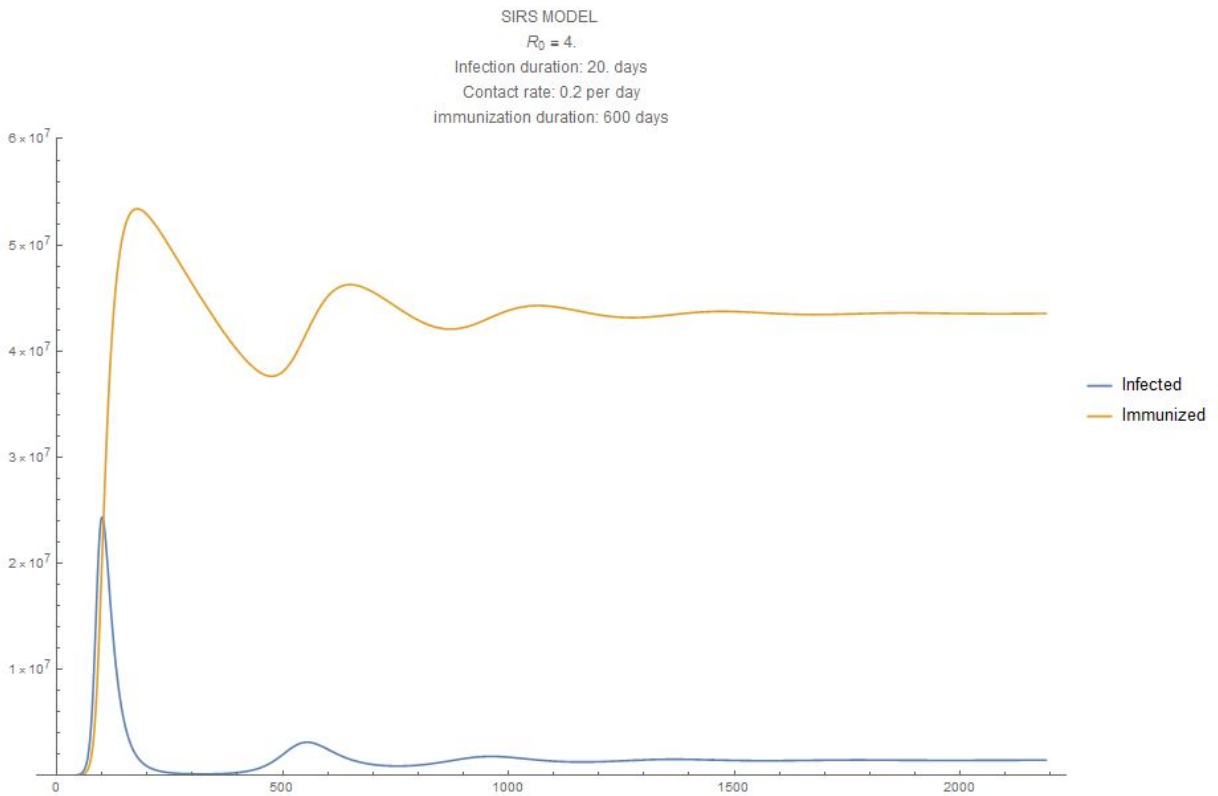


SIS MODEL
Contact rate: 0.194286 per day
Average infection duration: 7 days
Maximum summer drop in contact rate: 20.%




SIR MODEL
Average infection duration: 7 days
Infected (R_0 = 10.)
Immunized (R_0 = 10.)
Infected (R_0 = 3.)
Immunized (R_0 = 3.)


SIR MODEL
R_0 = 10.
Infection duration: 20 days
Contact rate: 0.5 per day
Infected (0.% drop in contact rate from day 23 to day 100)
Infected (91.% drop in contact rate from day 23 to day 100)


SIRS MODEL
R_0 = 4.
Infection duration: 20. days
Contact rate: 0.2 per day
immunization duration: 600 days
Infected
Immunized

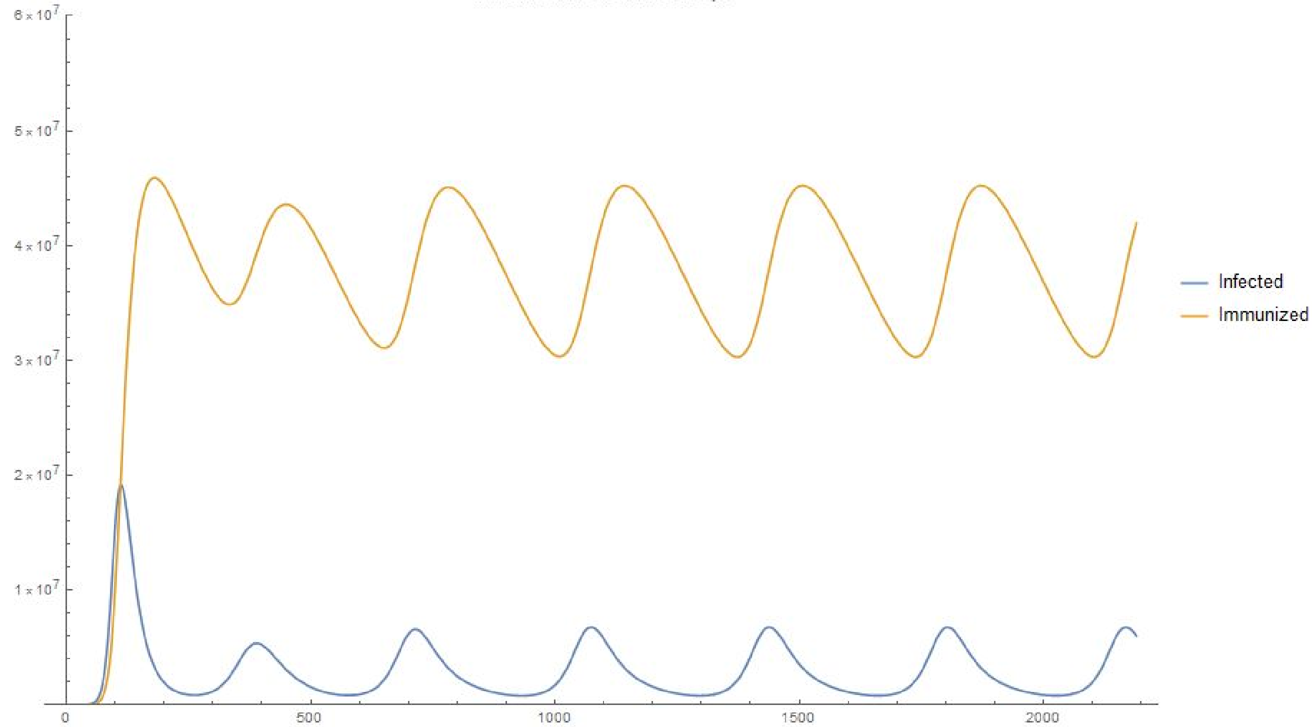
SIRS MODEL

$R_0 = 4.$

Infection duration: 20. days

Contact rate: 0.2 per day

immunization duration: 280 days



SEIRS MODEL

Contact rate: 0.190476 per day

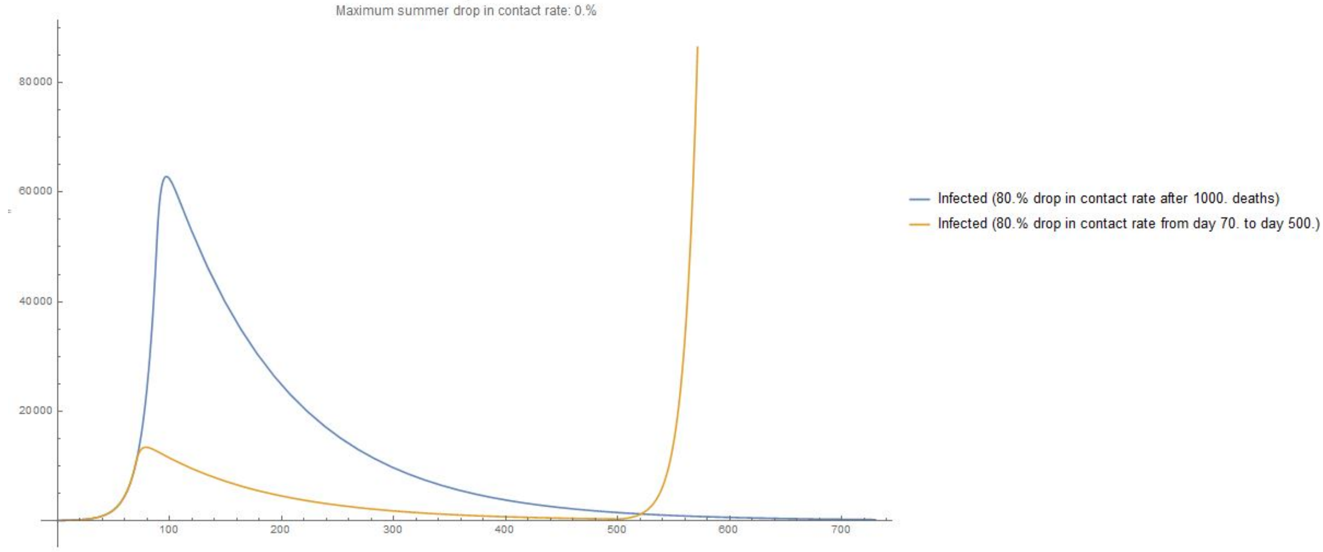
Average incubation period: 5 days

Average infectious period: 21 days

Average immunization period: 200 days

Case fatality ratio: 3.4%

Maximum summer drop in contact rate: 0.%



SEIRS MODEL

Contact rate: 0.190476 per day

Average incubation period: 5 days

Average infectious period: 21 days

Average immunization period: 200 days

Case fatality ratio: 3.4%

Maximum summer drop in contact rate: 0.%